Лабораторная работа №5 Математическое описание модели на примере робота Segway

1 Методические рекомендации

До начала работы студент должен выполнить предыдущие работы этого цикла. Необходимо знание основ теоретической механики и математических основ теории систем.

2 Теоретические сведения

Мы будем использовать следующие обобщенные координаты:
θ: среднее арифметическое значение углов поворота левого и правого колеса,
ψ: угол наклона робота оносительно вертикали,
ϕ: угол поворота робота относительно начального положения.

$$(\theta,\ \phi) = \left(\frac{1}{2}(\theta_r + \theta_l),\ \frac{R}{W}(\theta_r - \theta_l)\right) \tag{1}$$

$$(x_m,\ y_m,\ z_m) = (\int \dot{x}_m dt,\ \int \dot{y}_m dt,\ R),\ (\dot{x}_m dt,\ \dot{y}_m dt) = (R\dot{\theta}\cos\phi,\ R\dot{\theta}\sin\phi) \tag{2}$$

$$(x_l,\ y_l,\ z_l) = \left(x_m - \frac{W}{2}\sin\phi,\ y_m + \frac{W}{2}\cos\phi,\ z_m\right) \tag{3}$$

$$(x_r,\ y_r,\ z_r) = \left(x_m + \frac{W}{2}\sin\phi,\ y_m - \frac{W}{2}\cos\phi,\ z_m\right) \tag{4}$$

$$(x_b,\ y_b,\ z_b) = (x_m + L\sin\psi\cos\phi,\ y_m + L\sin\psi\sin\phi,\ z_m + L\cos\psi) \tag{5}$$

$$(x_b,\ y_b,\ z_b) = \left(\int R\dot{\theta}\cos\phi dt + L\sin\psi\cos\phi,\ \int R\dot{\theta}\sin\phi dt + L\sin\psi\sin\phi,\ R + L\cos\psi\right) \tag{6}$$

Теперь выпишем уравнения поступательной кинетической энергии T_k, вращательной кинетической энергии T_p и потенциальной энергии U:

$$T_k = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}_b^2 + \dot{y}_b^2 + \dot{z}_b^2\right) \tag{7}$$

$$T_p = \frac{1}{2}J_\psi\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}J_\phi\dot{\phi}^2 \tag{8}$$

$$U = Mgz_b \tag{9}$$

Если подставить значения соответствующих координат, то мы получим следущее выражение для кинетической энергии: $\frac{1}{2}M\left(\left(\left(\int R\dot{\theta}\cos\phi dt + L\sin\psi\cos\phi\right)'\right)^2 + \left(\left(\int R\dot{\theta}\sin\phi dt + L\sin\psi\sin\phi\right)'\right)^2 + ((R + L\cos\psi)')^2\right)$.

При раскрытии скобок мы получим: $\frac{1}{2}M\left(2RL\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\psi + R^2\dot{\theta}^2 + L^2\dot{\psi}^2 + L^2\dot{\phi}^2\sin^2\psi\right)$
Лагранжиан L будет выглядеть следующим образом:

$$L = T_k + T_p - U \tag{10}$$

$$L = \frac{1}{2}M\left(2RL\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\psi + R^2\dot{\theta}^2 + L^2\dot{\psi}^2 + L^2\dot{\phi}^2\sin^2\psi\right) + \frac{1}{2}J_\psi\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}J_\phi\dot{\phi}^2 - Mg(R + L\cos\psi) \tag{11}$$

А уравнение Лагранжа запишем следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} & = F_\theta \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} - \frac{\partial L}{\partial\psi} & = F_\psi \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial\phi} & = F_\phi \end{cases} \tag{12}$$

Выполнив указанные дейсвия мы получим:

$$\begin{cases} F_\theta & = & MR^2\ddot{\theta} + MRL\ddot{\psi}\cos\psi - MRL\dot{\psi}^2\sin\psi \\ F_\psi & = & MRL\ddot{\theta}\cos\psi + (ML^2 + J_\psi)\ddot{\psi} - MgL\sin\psi - ML^2\dot{\phi}^2\sin\psi\cos\psi \\ F_\phi & = & (ML^2\sin^2\psi + J_\phi)\ddot{\phi} + 2ML^2\dot{\psi}\dot{\phi}\sin\psi\cos\psi \end{cases} \tag{13}$$

Далее составим уравнения для двигателей нашего Segway:

$$(F_\theta,\ F_\psi,\ F_\phi) = \left(F_l + F_r,\ F_\psi,\ \frac{W}{2R}(F_r - F_l)\right) \tag{14}$$

$$\begin{cases} F_l & = & k_m I_l \\ F_r & = & k_m I_r \\ F_\psi & = & -k_m I_l - k_m I_r \end{cases} \tag{15}$$

$$L\dot{I}_{l,r} = U_{l,r} + k_\omega(\dot{\psi} - \dot{\theta}_{l,r}) - R_я I_{l,r} \tag{16}$$

Так как индуктивность обмотки крайне мала, положим $L = 0$:

$$I_{l,r} = \frac{U_{l,r} + k_\omega(\dot{\psi} - \dot{\theta}_{l,r})}{R_я} \tag{17}$$

Стоит отметить, что $\phi = \dfrac{W}{R}(\theta_r - \theta_l)$, тогда:

$$\begin{cases} F_\theta &= \dfrac{k_m}{R_я}(U_l + U_r) + 2\dfrac{k_m k_\omega}{R_я}(\dot\psi - \dot\theta) \\ F_\psi &= -\dfrac{k_m}{R_я}(U_l + U_r) - 2\dfrac{k_m k_\omega}{R_я}(\dot\psi - \dot\theta) \\ F_\phi &= \dfrac{W}{2R}\dfrac{k_m}{R_я}(U_r - U_l) - \dfrac{W^2}{2R^2}\dfrac{k_m k_\omega}{R_я}\dot\phi \end{cases} \tag{18}$$

Запишем окончательную систему уравнений, описывающих динамическую модель робота:

$$\begin{cases} \dfrac{k_m}{R_я}(U_l + U_r) &= MR^2\ddot\theta + MRL\ddot\psi\cos\psi - MRL\dot\psi^2\sin\psi + 2\dfrac{k_m k_\omega}{R_я}(\dot\psi - \dot\theta) \\ -\dfrac{k_m}{R_я}(U_l + U_r) &= MRL\ddot\theta\cos\psi + (ML^2 + J_\psi)\ddot\psi - MgL\sin\psi - ML^2\dot\phi^2\sin\psi\cos\psi - 2\dfrac{k_m k_\omega}{R_я}(\dot\psi - \dot\theta) \\ \dfrac{W}{2R}\dfrac{k_m}{R_я}(U_r - U_l) &= (ML^2\sin^2\psi + J_\phi)\ddot\phi + 2ML^2\dot\psi\dot\phi\sin\psi\cos\psi - \dfrac{W^2}{2R^2}\dfrac{k_m k_\omega}{R_я}\dot\phi \end{cases} \tag{19}$$

Линеарезуем нашу модель. Для этого воспользуемся первым замечательным пределом $\sin\psi = \psi$, а $\cos\psi = 1$ при малых углах отклонения, до 15 градусов.

$$\begin{cases} \dfrac{k_m}{R_я}(U_l + U_r) &= MR^2\ddot\theta + MRL\ddot\psi - MRL\dot\psi^2\psi + 2\dfrac{k_m k_\omega}{R_я}(\dot\psi - \dot\theta) \\ -\dfrac{k_m}{R_я}(U_l + U_r) &= MRL\ddot\theta + (ML^2 + J_\psi)\ddot\psi - MgL\psi - ML^2\dot\phi^2\psi - 2\dfrac{k_m k_\omega}{R_я}(\dot\psi - \dot\theta) \\ \dfrac{W}{2R}\dfrac{k_m}{R_я}(U_r - U_l) &= (ML^2\psi^2 + J_\phi)\ddot\phi + 2ML^2\dot\psi\dot\phi\psi - \dfrac{W^2}{2R^2}\dfrac{k_m k_\omega}{R_я}\dot\phi \end{cases} \tag{20}$$

Теперь нам необходимо избавиться от оставшихся нелинейностей, квадротов переменных и их произведений между собой. Мы пренебрегаем этими значениями только при условии, что угол отклонения от начального положения будет крайне мал.

$$\begin{cases} \dfrac{k_m}{R_я}(U_l + U_r) &= MR^2\ddot\theta + MRL\ddot\psi + 2\dfrac{k_m k_\omega}{R_я}(\dot\psi - \dot\theta) \\ -\dfrac{k_m}{R_я}(U_l + U_r) &= MRL\ddot\theta + (ML^2 + J_\psi)\ddot\psi - 2\dfrac{k_m k_\omega}{R_я}(\dot\psi - \dot\theta) - MgL\psi \\ \dfrac{W}{2R}\dfrac{k_m}{R_я}(U_r - U_l) &= J_\phi\ddot\phi - \dfrac{W^2}{2R^2}\dfrac{k_m k_\omega}{R_я}\dot\phi \end{cases} \tag{21}$$

Теперь мы получили систему уравнений, в которой с одной стороны мы имеем управляющее воздействие, а с другой линейные дифференциальные уравнения состояния объекта. В третьем уравнении содержится только одна переменная ϕ и ее производные. Поэтому мы будем рассматривать это уравнение отдельно от остальных. Введем вектора состояния $x^T = [\theta, \psi]$ и управления $u^T = [U_l, U_r]$, запишем первые два уравнения в матричной форме:

$$E\ddot x + F\dot x + Gx = Hu \tag{22}$$

$$E = \begin{bmatrix} MR^2 & MRL \\ MRL & ML^2 + J_\psi \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 2\frac{k_m k_\omega}{R_я} & -2\frac{k_m k_\omega}{R_я} \\ -2\frac{k_m k_\omega}{R_я} & 2\frac{k_m k_\omega}{R_я} \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & MgL \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} \frac{k_m}{R_я} & \frac{k_m}{R_я} \\ -\frac{k_m}{R_я} & -\frac{k_m}{R_я} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Дальше запишем наше уравнение в следующей форме:

$$\ddot{x} = E^{-1}F\dot{x} + E^{-1}Gx + E^{-1}Hu \quad (24)$$

Для того чтобы перейти к форме вход–состояние–выход, добавим к имеющемуся уравнению еще одно, $\dot{\psi} = \dot{\psi}$. Учитывая, что $E^{-1}G = \frac{1}{J_\psi}\begin{bmatrix} 0 & M^2RL^2g \\ 0 & M^2R^2Lg \end{bmatrix}$, заменим вектор состояния на $x^T = [\psi, \dot{\theta}, \dot{\psi}]$:

$$\dot{x} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ E^{-1}G[1,2] & & \\ E^{-1}G[2,2] & & E^{-1}F \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ & E^{-1}H \end{vmatrix} u \quad (25)$$