

# 1 Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Теоремы единственности и устойчивости для смешанной задачи для уравнения теплопроводности.

## 1.1 Принцип максимума для уравнения теплопроводности.

Рассмотрим множество  $Q_T = \{(x, t) : (0; l) \times (0; T]\}$ . Обозначим  $\Gamma = \overline{Q_T} \setminus Q_T$ .

**Теорема.** (*принцип максимума*) Пусть  $u(x, t) \in C[\overline{Q_T}]$ ,  $u_t, u_{xx} \in C[Q_T]$  и  $u_t = a^2 u_{xx}$ . Тогда

$$\max_{\overline{Q_T}} u(x, t) = \max_{\Gamma} u(x, t)$$

$$\min_{\overline{Q_T}} u(x, t) = \min_{\Gamma} u(x, t)$$

*Доказательство.*  $\triangleleft$  Сначала докажем утверждение для  $\max$ . Предположим противное: пусть  $\max_{\Gamma} u(x, t) = M$  и  $\exists$  точка  $(x_0, t_0) \in Q_T$  такая, что  $u(x_0, t_0) = M + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ .

Тогда введем  $v(x, t)$ :

$$v(x, t) = u(x, t) - \frac{\varepsilon}{2T}(t - t_0) \quad (1)$$

Очевидно, что  $v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M + \varepsilon$ . Так как  $|\frac{\varepsilon}{2T}(t - t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  при  $t \in [0, T]$ , то:

$$\max_{\Gamma} v(x, t) = \max_{\Gamma} \{u(x, t) - \frac{\varepsilon}{2T}(t - t_0)\} \leq M + \frac{\varepsilon}{2}$$

Отсюда следует, что  $\exists$  точка  $(x_1, t_1) \in Q_T$ , в которой  $v(x, t)$  достигает максимума. Тогда по необходимому условию максимума дважды дифференцируемой функции получаем:

$$\begin{cases} v_t(x_1, t_1) \geq 0 \\ v_{xx}(x_1, t_1) \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Продифференцируем (1) отдельно один раз по  $t$  и отдельно два раза по  $x$ . Получим:

$$v_t(x, t) = u_t(x, t) - \frac{\varepsilon}{2T} \quad (3)$$

$$v_{xx}(x, t) = u_{xx}(x, t)$$

Из полученных равенств и системы (2) следует, что:

$$u_t(x_1, t_1) = v_t(x_1, t_1) + \frac{\varepsilon}{2T} > 0 \geq a^2 v_{xx}(x_1, t_1) = a^2 u_{xx}(x_1, t_1)$$

(В (3) перенесли  $\frac{\varepsilon}{2T} > 0$ . Из (2) следует, что  $v_t(x_1, t_1) \geq v_{xx}(x_1, t_1)$ . Во все выражения подставили  $(x_1, t_1)$ . Домножили на  $a^2 > 0$  производные по  $x$ , что не влияет на знак выражения.)

Получим  $u_t(x_1, t_1) > a^2 u_{xx}(x_1, t_1)$ , что противоречит уравнению теплопроводности. Первое утверждение доказано.

Второе утверждение доказывается аналогично заменой  $\omega(x, t) = -u(x, t)$  и рассмотрением первого утверждения для  $\omega(x, t)$

Теорема доказана.  $\triangleright$

## 1.2 Теорема единственности решения смешанной задачи для уравнения теплопроводности.

Смешанная задача для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t), & 0 \leq x \leq l, 0 < t \leq T \\ u(0, t) = \mu_1(t) \\ u(l, t) = \mu_2(t) \\ u(x, 0) = \phi(x) \end{cases} \quad (4)$$

$\forall T > 0$ . В общем случае  $T = +\infty$

**Теорема.** (*единственности*) Пусть  $u_1(x, t), u_2(x, t)$  являются решениями одной и той же задачи (4) и  $u_i(x, t) \in C[\overline{Q_T}]$  и  $(u_i)'_t(x, t), (u_i)''_{xx}(x, t) \in C[Q_T]$ ,  $\forall T > 0, i = 1, 2$ . Тогда  $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$ .

*Доказательство.*  $\triangleleft$  Введем функцию  $v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$  такую, что  $v(x, t) \in C[\overline{Q_T}]$ ,  $v_t, v_{xx} \in C[Q_T]$ . Она является решением краевой задачи:

$$\begin{cases} v_t(x, t) = a^2 v_{xx}(x, t), & 0 \leq x \leq l, 0 < t \leq T \\ v(0, t) = 0 \\ v(l, t) = 0 \\ v(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Для  $v(x, t)$  выполнены все условия принципа максимума. Тогда:

$$\begin{cases} \max_{\overline{Q_T}} v(x, t) = \max_{\Gamma} v(x, t) = 0 \\ \min_{\overline{Q_T}} v(x, t) = \min_{\Gamma} v(x, t) = 0 \end{cases} \Rightarrow v(x, t) \equiv 0 \Rightarrow u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$$

Теорема доказана. ▸

### 1.3 Теорема устойчивости решения смешанной задачи для уравнения теплопроводности

**Лемма.** Если  $u_1(x, t), u_2(x, t)$  такие, что  $u_i(x, t) \in C[\overline{Q_T}]$  и  $(u_i)'_t(x, t), (u_i)''_{xx}(x, t) \in C[Q_T], \forall T > 0, i = 1, 2$  и являются решениями разных задач (4), причем все граничные условия задачи для  $u_1(x, t)$  больше или равны граничным условиям задачи для  $u_2(x, t)$ , то  $u_1(x, t) \geq u_2(x, t)$  в  $\overline{Q_T}$ .

*Доказательство.* ◁ Введем функцию  $v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$  такую, что  $v(x, t) \in C[\overline{Q_T}], v_t, v_{xx} \in C[Q_t]$ . Она является решением краевой задачи:

$$\begin{cases} v_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t), 0 \leq x \leq l, 0 < t \leq T \\ v(0, t) \geq 0 \\ v(l, t) \geq 0 \\ v(x, 0) \geq 0 \end{cases}$$

Для  $v(x, t)$  выполнены все условия принципа максимума. Тогда:

$$\min_{\overline{Q_T}} v(x, t) = \min_{\Gamma} v(x, t) \geq 0 \Rightarrow u_1(x, t) \geq u_2(x, t), \forall (x, y) \in \overline{Q_T}$$

Лемма доказана. ▸

**Теорема.** (*устойчивости*) Если  $u_1(x, t), u_2(x, t)$  такие, что  $u_i(x, t) \in C[\overline{Q_T}]$  и  $(u_i)'_t(x, t), (u_i)''_{xx}(x, t) \in C[Q_T], \forall T > 0, i = 1, 2$  и являются решениями разных задач (4), причем все граничные условия двух задач различаются по модулю  $< \varepsilon$  ( $|u_1(0, t) - u_2(0, t)| \leq \varepsilon$  и так для каждого граничного условия), то

$$\max_{\overline{Q_T}} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \varepsilon$$

*Доказательство.* ◁ Введем функцию  $v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$  такую, что  $v(x, t) \in C[\overline{Q_T}], v_t, v_{xx} \in C[Q_t]$ . Тогда  $v_t(x, t) = a^2 v_{xx}(x, t)$  и для нее выполняются все условия принципа максимума. Получим:

$$\max_{\overline{\Gamma}} |v(x, t)| \leq \varepsilon$$

То есть  $-\varepsilon \leq v(x, t) \leq \varepsilon$  на  $\Gamma$  (границе  $Q_T$ ). Применив лемму к парам функций  $(-\varepsilon, v(x, t))$  и  $(v(x, t), \varepsilon)$ , получим:

$$-\varepsilon \leq u_1(x, t) - u_2(x, t) \leq \varepsilon \forall (x, y) \in \overline{Q_T}$$

Теорема доказана. ▸

Полученное утверждение означает, что из близости исходных данных следует близость полученных решений.

## 2 Общее решение уравнения Лапласа в полярных координатах.

Уравнение Лапласа:  $\Delta u = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$  (*оператор Лапласа для полярных координат*) Функция  $u(r, \phi)$  ищется в виде:  $\sum_{n=0}^{\infty} R_n(r) \Phi_n(\phi)$  Подставим  $R(r)$  и  $\Phi(\phi)$  в оператор Лапласа для полярных координат:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \frac{dR}{dr}) \Phi + \frac{1}{r^2} R \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0 \mid : \Phi \Rightarrow \frac{r(rR')'}{R} + \frac{\Phi''}{\Phi} = 0$$

Решаем два уравнения для  $R_n(r)$  и  $\Phi_n(\phi)$ . Не забыть про  $n = 0$ . В итоге получим общее решение для  $u(r, \phi)$ :

$$u(r, \phi) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} (c_n \cos n\phi + d_n \sin n\phi)$$