Билет 10. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Теоремы единственности и устойчивости для смешанной задачи для уравнения теплопроводности. Общее решение уравнения Лапласа в полярных координатах.

1 Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Теоремы единственности и устойчивости для смешанной задачи для уравнения теплопроводности.

1.1 Принцип максимума для уравнения теплопроводности.

Рассмотрим множество $Q_T = \{(x,t) : (0;l) \times (0;T]\}$. Обозначим $\Gamma = \overline{Q_T} \backslash Q_T$.

Теорема. *(принцип максимума)* Пусть $u(x,t) \in C[\overline{Q_T}], u_t, u_{xx} \in C[Q_t]$ и $u_t = a^2 u_{xx}$. Тогда

$$\underset{\overline{Q_T}}{max}\, u(x,t) = \underset{\Gamma}{max}\, u(x,t)$$

$$\underset{\overline{Q_T}}{min}\, u(x,t) = \underset{\Gamma}{min}\, u(x,t)$$

Доказательство. $\triangleleft$ Сначала докажем утверждение для max. Предположим противное: пусть $\underset{\Gamma}{max}\, u(x,t) = M$ и $\exists$ точка $(x_0, t_0) \in Q_T$ такая, что $u(x_0,t_0) = M + \varepsilon,\ \varepsilon > 0$.

Тогда введем $v(x,t)$:

$$v(x,t) = u(x,t) - \frac{\varepsilon}{2T}(t - t_0) \tag{1}$$

Очевидно, что $v(x_0,t_0) = u(x_0,t_0) = M + \varepsilon$. Так как $|\frac{\varepsilon}{2T}(t-t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ при $t \in [0,T]$, то:

$$\underset{\Gamma}{max}\, v(x,t) = \underset{\Gamma}{max}\{u(x,t) - \frac{\varepsilon}{2T}(t-t_0)\} \leqslant M + \frac{\varepsilon}{2}$$

Отсюда следует, что $\exists$ точка $(x_1,t_1) \in Q_T$, в которой $v(x,t)$ достигает максимума. Тогда по необходимому условию максимума дважды дифференцируемой функции получаем:

$$\begin{cases} v_t(x_1,t_1) \geqslant 0 \\ v_{xx}(x_1,t_1) \leqslant 0 \end{cases} \tag{2}$$

Продифференцируем (1) отдельно один раз по t и отдельно два раза по x. Получим:

$$v_t(x,t) = u_t(x,t) - \frac{\varepsilon}{2T} \tag{3}$$

$$v_{xx}(x,t) = u_{xx}(x,t)$$

Из полученных равенств и системы (2) следует, что:

$$u_t(x_1,t_1) = v_T(x_1,t_1) + \frac{\varepsilon}{2T} > 0 \geqslant a^2 v_{xx}(x_1,t_1) = a^2 u_{xx}(x_1,t_1)$$

(В (3) перенесли $\frac{\varepsilon}{2T} > 0$. Из (2) следует, что $v_t(x_1,t_1) \geq v_{xx}(x_1,t_1)$. Во все выражения подставили (x_1,t_1). Домножили на $a^2 > 0$ производные по x, что не влияет на знак выражения.)

Получим $u_t(x_1,t_1) > a^2 u_{xx}(x_1,t_1)$, что противоречит уравнению теплопроводности. Первое утверждение доказано.

Второе утверждение доказывается аналогично заменой $\omega(x,t) = -u(x,t)$ и рассмотрением первого утверждения для $\omega(x,t)$

Теорема доказана. $\triangleright$

1.2 Теорема единственности решения смешанной задачи для уравнения теплопроводности.

Смешанная задача для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t),\ 0 \leqslant x \leqslant l, 0 < t \leqslant T \\ u(0,t) = \mu_1(t) \\ u(l,t) = \mu_2(t) \\ u(x,0) = \phi(x) \end{cases} \tag{4}$$

$\forall T > 0$. В общем случае $T = +\infty$

Теорема. *(единственности)* Пусть $u_1(x,t), u_2(x,t)$ являются решениями одной и той же задачи (4) и $u_i(x,t) \in C[\overline{Q_T}]$ и $(u_i)'_t(x,t), (u_i)''_{xx}(x,t) \in C[Q_T]$, $\forall T > 0, i = 1,2$. Тогда $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$.

Доказательство. $\triangleleft$ Введем функцию $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ такую, что $v(x,t) \in C[\overline{Q_T}], v_t, v_{xx} \in C[Q_t]$. Она является решением краевой задачи:

$$\begin{cases} v_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t),\ 0 \leqslant x \leqslant l, 0 < t \leqslant T \\ v(0,t) = 0 \\ v(l,t) = 0 \\ v(x,0) = 0 \end{cases}$$

Для $v(x,t)$ выполнены все условия принципа максимума. Тогда:

$$\begin{cases} \underset{\overline{Q_T}}{max}\ v(x,t) = \underset{\Gamma}{max}\ v(x,t) = 0 \\ \underset{\overline{Q_T}}{min}\ v(x,t) = \underset{\Gamma}{min}\ v(x,t) = 0 \end{cases} \Rightarrow v(x,t) \equiv 0 \Rightarrow u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$$

Теорема доказана. $\triangleright$

1.3 Теорема устойчивости решения смешанной задачи для уравнения теплопроводности

Лемма. Если $u_1(x,t), u_2(x,t)$ такие, что $u_i(x,t) \in C[\overline{Q_T}]$ и $(u_i)'_t(x,t), (u_i)''_{xx}(x,t) \in C[Q_T],\ \forall T > 0, i = 1,2$ и являются решениями разных задач (4), причем все граничные условия задачи для $u_1(x,t)$ больше или равны граничным условиям задачи для $u_2(x,t)$, то $u_1(x,t) \geqslant u_2(x,t)$ в $\overline{Q_T}$.

Доказательство. $\triangleleft$ Введем функцию $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ такую, что $v(x,t) \in C[\overline{Q_T}], v_t, v_{xx} \in C[Q_t]$. Она является решением краевой задачи:

$$\begin{cases} v_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t),\ 0 \leqslant x \leqslant l, 0 < t \leqslant T \\ v(0,t) \geqslant 0 \\ v(l,t) \geqslant 0 \\ v(x,0) \geqslant 0 \end{cases}$$

Для $v(x,t)$ выполнены все условия принципа максимума. Тогда:

$$\underset{\overline{Q_T}}{min}\ v(x,t) = \underset{\Gamma}{min}\ v(x,t) \geqslant 0 \Rightarrow u_1(x,t) \geqslant u_2(x,t),\ \forall (x,y) \in \overline{Q_T}$$

Лемма доказана. $\triangleright$

Теорема. *(устойчивости)* Если $u_1(x,t), u_2(x,t)$ такие, что $u_i(x,t) \in C[\overline{Q_T}]$ и $(u_i)'_t(x,t), (u_i)''_{xx}(x,t) \in C[Q_T],\ \forall T > 0, i = 1,2$ и являются решениями разных задач (4), причем все граничные условия двух задач различаются по модулю $< \varepsilon$ ($|u_1(0,t) - u_2(0,t)| \leqslant \varepsilon$ и так для каждого граничного условия), то

$$\underset{\overline{Q_T}}{max}\ |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leqslant \varepsilon$$

Доказательство. $\triangleleft$ Введем функцию $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ такую, что $v(x,t) \in C[\overline{Q_T}], v_t, v_{xx} \in C[Q_t]$. Тогда $v_t(x,t) = a^2 v_{xx}(x,t)$ и для нее выполняются все условия принципа максимума. Получим:

$$\underset{\overline{\Gamma}}{max}\ |v(x,t)| \leqslant \varepsilon$$

То есть $-\varepsilon \leqslant v(x,t) \leqslant \varepsilon$ на Γ (границе Q_T). Применив лемму к парам функций $(-\varepsilon, v(x,t))$ и $(v(x,t), \varepsilon)$, получим:

$$-\varepsilon \leqslant u_1(x,t) - u_2(x,t) \leqslant \varepsilon\ \forall (x,y) \in \overline{Q_T}$$

Теорема доказана. $\triangleright$

Полученное утверждение означает, что из близости исходных данных следует близость полученных решений.

2 Общее решение уравнения Лапласа в полярных координатах.

Уравнение Лапласа: $\Delta u = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$ *(оператор Лапласа для полярных координат)* Функция $u(r,\phi)$ ищется в виде: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} R_n(r)\Phi_n(\phi)$ Подставим $R(r)$ и $\Phi(\phi)$ в оператор Лапсласа для полярных координат:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dR}{dr})\Phi + \frac{1}{r^2}R\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = 0 \mid : \Phi\ \Rightarrow\ \frac{r(rR')'}{R} + \frac{\Phi''}{\Phi} = 0$$

Решаем два уравнения для $R_n(r)$ и $\Phi_n(\phi)$. Не забыть про $n = 0$. В итоге получим общее решение для $u(r,\phi)$:

$$u(r,\phi) = a_0 + b_0\, ln\, r + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\, cos\, n\phi + b_n\, sin\, n\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n}(c_n\, cos\, n\phi + d_n\, sin\, n\phi)$$