

Билет 10. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Теоремы единственности и устойчивости для смешанной задачи для уравнения теплопроводности. Общее решение уравнения Лапласа в полярных координатах.

1 Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Теоремы единственности и устойчивости для смешанной задачи для уравнения теплопроводности.

1.1 Принцип максимума для уравнения теплопроводности.

Рассмотрим множество $Q_T = \{(x, t) : (0; l) \times (0; T]\}$. Обозначим $\Gamma = \overline{Q_T} \setminus Q_T$.

Теорема. (*принцип максимума*) Пусть $u(x, t) \in C[\overline{Q_T}]$, $u_t, u_{xx} \in C[Q_T]$ и $u_t = a^2 u_{xx}$. Тогда

$$\max_{\overline{Q_T}} u(x, t) = \max_{\Gamma} u(x, t)$$

$$\min_{\overline{Q_T}} u(x, t) = \min_{\Gamma} u(x, t)$$

Доказательство. \triangleleft Сначала докажем утверждение для \max . Предположим противное: пусть $\max_{\Gamma} u(x, t) = M$ и \exists точка $(x_0, t_0) \in Q_T$ такая, что $u(x_0, t_0) = M + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Тогда введем $v(x, t)$:

$$v(x, t) = u(x, t) - \frac{\varepsilon}{2T}(t - t_0) \quad (1)$$

Очевидно, что $v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M + \varepsilon$. Так как $|\frac{\varepsilon}{2T}(t - t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ при $t \in [0, T]$, то:

$$\max_{\Gamma} v(x, t) = \max_{\Gamma} \{u(x, t) - \frac{\varepsilon}{2T}(t - t_0)\} \leq M + \frac{\varepsilon}{2}$$

Отсюда следует, что \exists точка $(x_1, t_1) \in Q_T$, в которой $v(x, t)$ достигает максимума. Тогда по необходимому условию максимума дважды дифференцируемой функции получаем:

$$\begin{cases} v_t(x_1, t_1) \geq 0 \\ v_{xx}(x_1, t_1) \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Продифференцируем (1) отдельно один раз по t и отдельно два раза по x . Получим:

$$v_t(x, t) = u_t(x, t) - \frac{\varepsilon}{2T} \quad (3)$$

$$v_{xx}(x, t) = u_{xx}(x, t)$$

Из полученных равенств и системы (2) следует, что:

$$u_t(x_1, t_1) = v_t(x_1, t_1) + \frac{\varepsilon}{2T} > 0 \geq a^2 v_{xx}(x_1, t_1) = a^2 u_{xx}(x_1, t_1)$$

(В (3) перенесли $\frac{\varepsilon}{2T} > 0$. Из (2) следует, что $v_t(x_1, t_1) \geq v_{xx}(x_1, t_1)$. Во все выражения подставили (x_1, t_1) . Домножили на $a^2 > 0$ производные по x , что не влияет на знак выражения.)

Получим $u_t(x_1, t_1) > a^2 u_{xx}(x_1, t_1)$, что противоречит уравнению теплопроводности. Первое утверждение доказано.

Второе утверждение доказывается аналогично заменой $\omega(x, t) = -u(x, t)$ и рассмотрением первого утверждения для $\omega(x, t)$

Теорема доказана. \triangleright

1.2 Теорема единственности решения смешанной задачи для уравнения теплопроводности.

Смешанная задача для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t), & 0 \leq x \leq l, 0 < t \leq T \\ u(0, t) = \mu_1(t) \\ u(l, t) = \mu_2(t) \\ u(x, 0) = \phi(x) \end{cases} \quad (4)$$

$\forall T > 0$. В общем случае $T = +\infty$

Теорема. (единственности) Пусть $u_1(x, t), u_2(x, t)$ являются решениями одной и той же задачи (4) и $u_i(x, t) \in C[\overline{Q_T}]$ и $(u_i)'_t(x, t), (u_i)''_{xx}(x, t) \in C[Q_T], \forall T > 0, i = 1, 2$. Тогда $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$.

Доказательство. \triangleleft Введем функцию $v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ такую, что $v(x, t) \in C[\overline{Q_T}], v_t, v_{xx} \in C[Q_t]$. Она является решением краевой задачи:

$$\begin{cases} v_t(x, t) = a^2 v_{xx}(x, t), & 0 \leq x \leq l, 0 < t \leq T \\ v(0, t) = 0 \\ v(l, t) = 0 \\ v(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Для $v(x, t)$ выполнены все условия принципа максимума. Тогда:

$$\begin{cases} \max_{\overline{Q_T}} v(x, t) = \max_{\Gamma} v(x, t) = 0 \\ \min_{\overline{Q_T}} v(x, t) = \min_{\Gamma} v(x, t) = 0 \end{cases} \Rightarrow v(x, t) \equiv 0 \Rightarrow u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$$

Теорема доказана. \triangleright

1.3 Теорема устойчивости решения смешанной задачи для уравнения теплопроводности

Лемма. Если $u_1(x, t), u_2(x, t)$ такие, что $u_i(x, t) \in C[\overline{Q_T}]$ и $(u_i)'_t(x, t), (u_i)''_{xx}(x, t) \in C[Q_T], \forall T > 0, i = 1, 2$ и являются решениями разных задач (4), причем все

граничные условия задачи для $u_1(x, t)$ больше или равны граничным условиям задачи для $u_2(x, t)$, то $u_1(x, t) \geq u_2(x, t)$ в $\overline{Q_T}$.

Доказательство. \triangleleft Введем функцию $v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ такую, что $v(x, t) \in C[\overline{Q_T}]$, $v_t, v_{xx} \in C[Q_t]$. Она является решением краевой задачи:

$$\begin{cases} v_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t), & 0 \leq x \leq l, 0 < t \leq T \\ v(0, t) \geq 0 \\ v(l, t) \geq 0 \\ v(x, 0) \geq 0 \end{cases}$$

Для $v(x, t)$ выполнены все условия принципа максимума. Тогда:

$$\min_{\overline{Q_T}} v(x, t) = \min_{\Gamma} v(x, t) \geq 0 \Rightarrow u_1(x, t) \geq u_2(x, t), \quad \forall (x, y) \in \overline{Q_T}$$

Лемма доказана. \triangleright

Теорема. (*устойчивости*) Если $u_1(x, t), u_2(x, t)$ такие, что $u_i(x, t) \in C[\overline{Q_T}]$ и $(u_i)'_t(x, t), (u_i)''_{xx}(x, t) \in C[Q_T]$, $\forall T > 0, i = 1, 2$ и являются решениями разных задач (4), причем все граничные условия двух задач различаются по модулю $< \varepsilon$ ($|u_1(0, t) - u_2(0, t)| \leq \varepsilon$ и так для каждого граничного условия), то

$$\max_{\overline{Q_T}} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \varepsilon$$

Доказательство. \triangleleft Введем функцию $v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ такую, что $v(x, t) \in C[\overline{Q_T}]$, $v_t, v_{xx} \in C[Q_t]$. Тогда $v_t(x, t) = a^2 v_{xx}(x, t)$ и для нее выполняются все условия принципа максимума. Получим:

$$\max_{\Gamma} |v(x, t)| \leq \varepsilon$$

То есть $-\varepsilon \geq v(x, t) \leq \varepsilon$ на Γ (границе Q_T). Применив лемму к парам функций $(-\varepsilon, v(x, t))$ и $(v(x, t), \varepsilon)$, получим:

$$-\varepsilon \geq u_1(x, t) - u_2(x, t) \leq \varepsilon \quad \forall (x, y) \in \overline{Q_T}$$

Теорема доказана. \triangleright

Полученное утверждение означает, что из близости исходных данных следует близость полученных решений.

2 Общее решение уравнения Лапласа в полярных координатах.

Уравнение Лапласа: $\Delta u = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$ (*оператор Лапласа для полярных координат*) Функция $u(r, \phi)$ ищется в виде: $\sum_{n=0}^{\infty} R_n(r) \Phi_n(\phi)$ Подставим

$R(r)$ и $\Phi(\phi)$ в оператор Лапласа для полярных координат:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) \Phi + \frac{1}{r^2} R \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0 \mid : \Phi \Rightarrow \frac{r(rR')'}{R} + \frac{\Phi''}{\Phi} = 0$$

Решаем два уравнения для $R_n(r)$ и $\Phi_n(\phi)$. Не забыть про $n = 0$. В итоге получим общее решение для $u(r, \phi)$:

$$u(r, \phi) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} (c_n \cos n\phi + d_n \sin n\phi)$$