



Sposoby określania funkcji

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Prezentacja multimedialna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Sposoby określania funkcji

Źródło: Daniel Clay, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

W życiu codziennym spotykamy się z różnego rodzaju jednoznaczными przyporządkowaniami. Opisywane są one w różny sposób. Zwykle nie nazywamy ich jednak funkcjami. Teraz poznamy matematyczne sposoby opisu funkcji. Poszukamy odpowiedzi na pytanie: czy funkcję można opisać tylko za pomocą wzoru?

Twoje cele

- Poznasz sposoby opisywania funkcji.
- Opiszysz funkcję różnymi sposobami.
- Wybierzesz sposób opisu funkcji w zależności od sytuacji.

Przeczytaj

Funkcja

Przypomnijmy definicję funkcji.

Definicja: Funkcja

Funkcją f ze zbioru X w zbiór Y (zbiory X i Y są niepuste) nazywamy takie odwzorowanie, w którym każdemu elementowi ze zbioru X został przyporządkowany tylko jeden element ze zbioru Y .

Funkcję tę oznaczamy $f : X \rightarrow Y$.

Zbiór X nazywamy dziedziną funkcji f i oznaczamy D_f .

Zbiór Y nazywamy przeciwdziedziną funkcji f .

Zbiorem wartości funkcji f nazywamy zbiór tych elementów ze zbioru Y , które zostały przypisane elementom ze zbioru X i oznaczamy symbolem ZW_f .

Do opisu funkcji najczęściej wykorzystujemy:

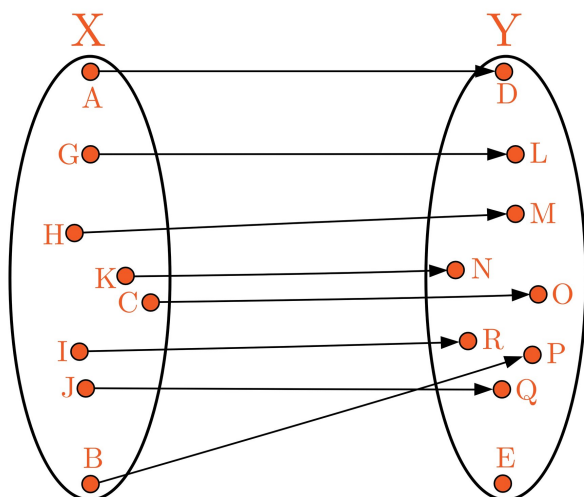
- graf,
- opis słowny,
- tabelkę,
- zbiór par uporządkowanych,
- wykres,
- wzór.

Prześledźmy powyższe sposoby, analizując przykłady.

Graf

Z grafu można odczytać, że dziedziną funkcji jest zbiór $X = \{A, B, G, H, I, J, K, C\}$, zaś przeciwdziedziną zbiór $Y = \{D, E, L, M, N, O, Q, P, R\}$.

Strzałki pokazują sposób przyporządkowania elementom dziedziny elementów przeciwdziedziny. Zapis $A \rightarrow D$ czytamy: dla argumentu A wartość funkcji jest równa D , czyli $f(A) = D$.



Opis słowny

Funkcję f opisujemy pełnym zdaniem, podajemy jej dziedzinę i dokładny opis przyporządkowania. Np.: „Funkcja f każdemu uczniowi klasy Ia przyporządkowuje jego numer w dzienniku.”

Znając opis funkcji można podać wartości funkcji przyporządkowane poszczególnym argumentom.

Tabela

Tabela zbudowana jest z dwóch wierszy. W górnym wierszu znajdują się argumenty funkcji, czyli elementy dziedziny funkcji. W dolnym wierszu umieszczone są wartości, jakie funkcja przyjmuje dla danych argumentów.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-3	-5	2	7	8	0	10

Z tabelki możemy na przykład odczytać, że dla argumentu 1 funkcja f przyjmuje wartość 7, natomiast wartość 0 odpowiada argumentowi 3.

Zbiór par uporządkowanych

Funkcję można opisać za pomocą zbioru par uporządkowanych postaci $(x, f(x))$, gdzie pierwszy element pary oznacza argument, zaś drugi to wartość funkcji dla danego elementu.

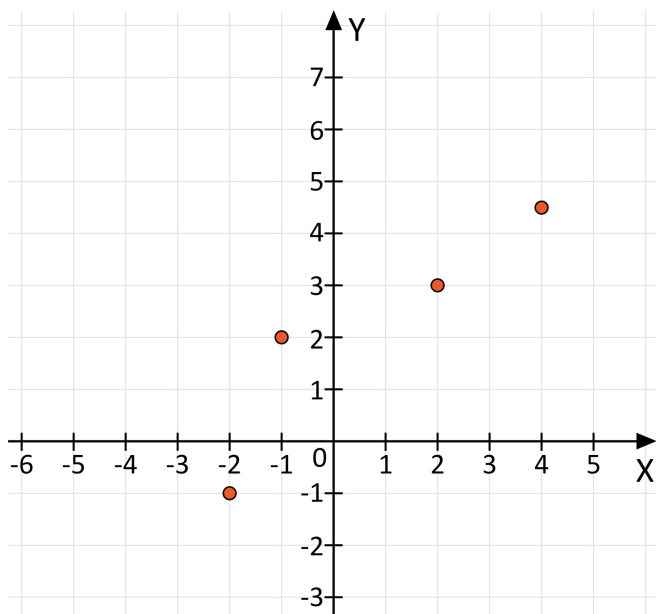
Np.: $\{(3, 8), (4, 9), (7, 24), (8, 32)\}$.

Zapis $(4, 9)$ oznacza, że $f(4) = 9$.

Wykres

Definicja: Wykres funkcji

Wykres funkcji f jest to zbiór wszystkich punktów płaszczyzny o współrzędnych $(x, f(x))$, w prostokątnym układzie współrzędnych, gdzie x należy do dziedziny tej funkcji, natomiast $f(x)$ jest wartością funkcji f dla argumentu x .



Rysunek przedstawia **wykres funkcji** f . Wykres składa się z czterech punktów. Współrzędne tych punktów to: $(-2, -1)$, $(-1, 2)$, $(2, 3)$, $(4, 4,5)$.

Z wykresu możemy odczytać na przykład, że $f(-1) = 2$ oraz że $f(x) = 4,5$ tylko wtedy, gdy $x = 4$. Wykres funkcji składa się tylko z tylu punktów, ile elementów znajduje się w dziedzinie funkcji.

Wzór funkcji

Są trzy główne sposoby zapisywania wzoru funkcji. Na przykład:

- $f : x \rightarrow 0,5x^2$, jeżeli $x \in \mathbb{R}_+$,
- $f(x) = 0,5x^2$, jeżeli $x \in \mathbb{R}_+$,
- $y = 0,5x^2$, jeżeli $x \in \mathbb{R}_+$.

Znając wzór funkcji możemy stwierdzić, czy dany punkt należy do **wykresu funkcji**. Możemy również obliczyć wartość funkcji dla danego argumentu.

Np.: $f(4) = 0,5 \cdot 4^2 = 8$, $f(6) = 0,5 \cdot 6^2 = 18$.

Przykład 1

Dane są dwa zbiory $X = \{2, 5, 7, 20, 32\}$ oraz $Y = \{-2, -4, -6, 0, 6\}$. Rozważmy funkcję, które odwzorowuje zbiór X w zbiór Y i opiszmy ją różnymi sposobami.

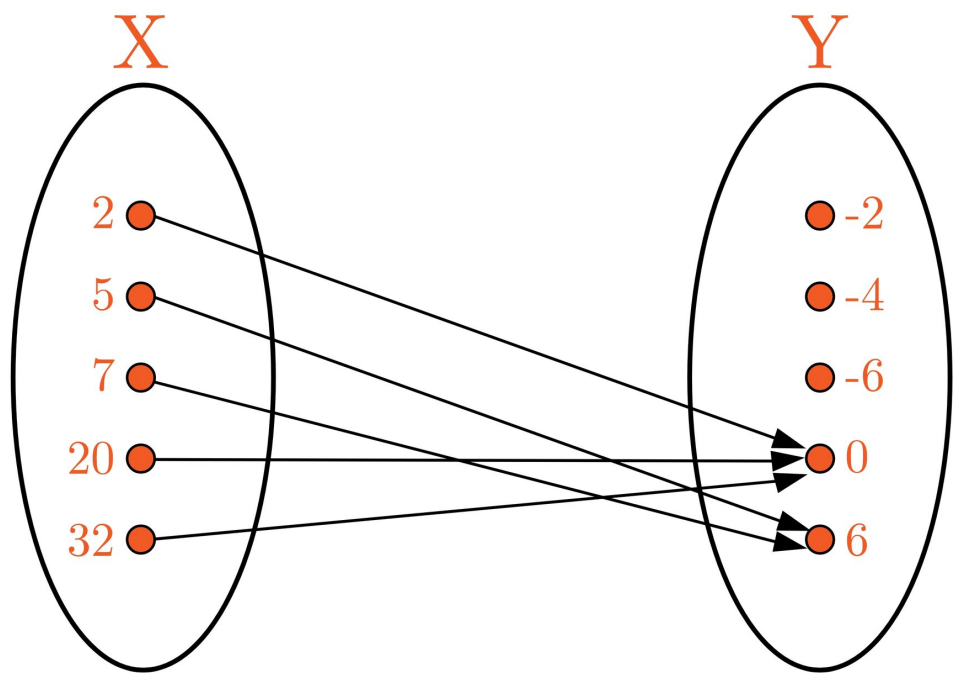
Rozwiązanie:

Opis słowny – każdej liczbie parzystej ze zbioru X przyporządkowujemy liczbę 0, a każdej liczbie nieparzystej liczbę 6.

Dziedzina funkcji – $D_f = \{2, 5, 7, 20, 32\}$

Zbiór wartości – $ZW_f = \{0, 6\}$

Graf



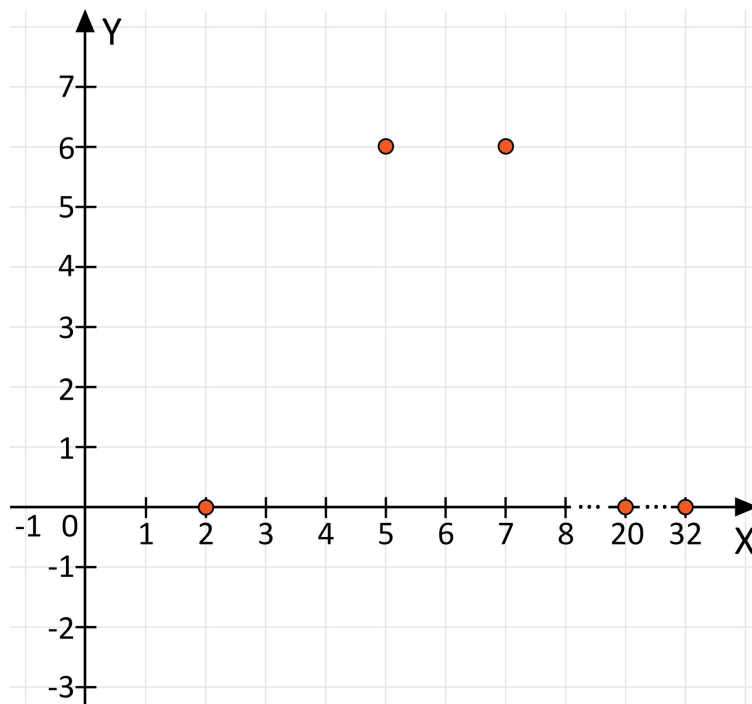
Tabela

x	2	5	7	20	32
$f(x)$	0	6	6	0	0

Zbiór par uporządkowanych

$\{(2, 0), (5, 6), (7, 6), (20, 0), (32, 0)\}$.

Wykres



Wzór

Funkcja f zapisana jest za pomocą wzoru:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x = 2 \text{ lub } x = 20 \text{ lub } x = 32 \\ 6, & \text{jeżeli } x = 5 \text{ lub } x = 7 \end{cases}$$

Przykład 2

Funkcja f każdej liczbie dodatniej x przyporządkowuje objętość sześcianu o krawędzi długości x . Opiszemy tę funkcję różnymi sposobami.

Rozwiązanie:

Wzór funkcji

$$f(x) = x^3$$

Dziedzina funkcji – $D_f = \mathbb{R}_+$

Zbiór wartości – $ZW_f = \mathbb{R}_+$

Tabela

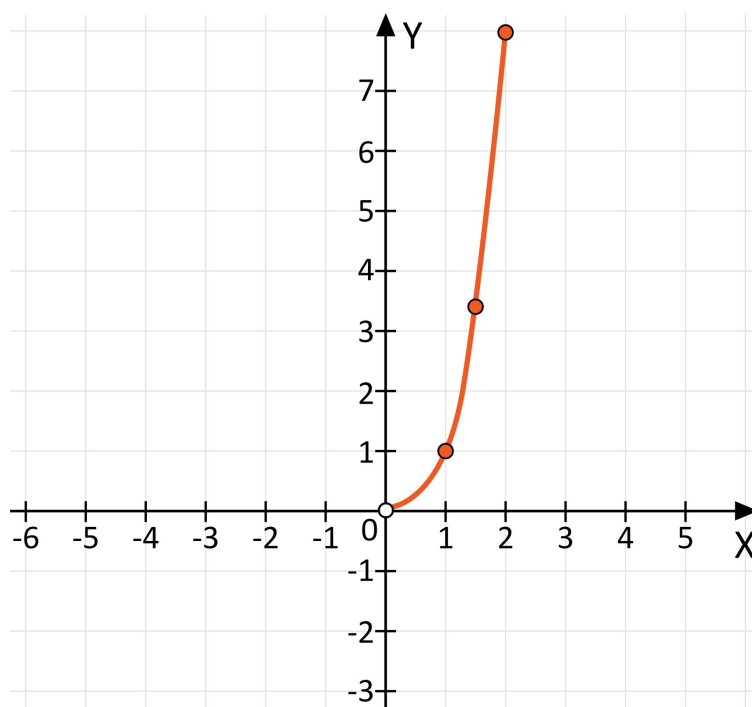
Dziedzina funkcji jest zbiorem nieskończonym. Sporządzamy tabelkę częściową dla pięciu liczb rzeczywistych dodatnich.

x	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	1	3,375	8	15,625	27

Zbiór par uporządkowanych (częściowy)

$\{(1; 1), (1, 5; 3, 375), (2; 8), (2, 5; 15, 625), (3; 27)\}$

Wykres (częściowy)



Słownik

wykres funkcji

wykres funkcji f jest to zbiór wszystkich punktów płaszczyzny o współrzędnych $(x, f(x))$, w prostokątnym układzie współrzędnych, gdzie x należy do dziedziny tej funkcji, natomiast $f(x)$ jest wartością funkcji f dla argumentu x

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Przeanalizuj uważnie materiał przedstawiony w prezentacji multimedialnej, wykonaj wskazane ćwiczenia oraz odpowiedz na poniższe pytania.

Czy każdy graf przedstawia funkcję?

Czy każdy zbiór punktów w układzie współrzędnych jest wykresem funkcji?

Dana jest funkcja p , która każdej liczbie rzeczywistej dodatniej x przyporządkowuje pole trójkąta równobocznego o boku długości x . Podaj dziedzinę tej funkcji i zbiór wartości. Przedstaw ją za pomocą wzoru, grafu częściowego, częściowego zbioru par uporządkowanych, tabelki częściowej oraz wykresu.



Przykład 1

Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1A5zzRLJ>




Polecenie 2

Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru: $f(x) = 2|x| - 5$, gdy $x < 0$. Podaj opis słowny funkcji, wykonaj tabelkę częściową, graf częściowy, częściowy zbiór par uporządkowanych i wykres.

Polecenie 3

Funkcja f opisana jest za pomocą zbioru par uporządkowanych $\{(0; 0), (1; 1), (4; 2), (9; 3), (16; 4), (25; 5)\}$. Podaj wzór tej funkcji, opis słowny, wykres.

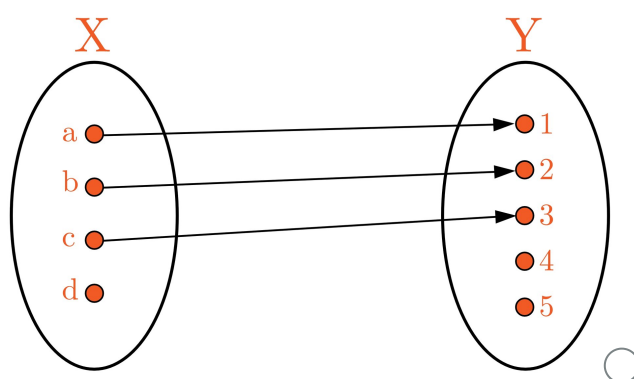
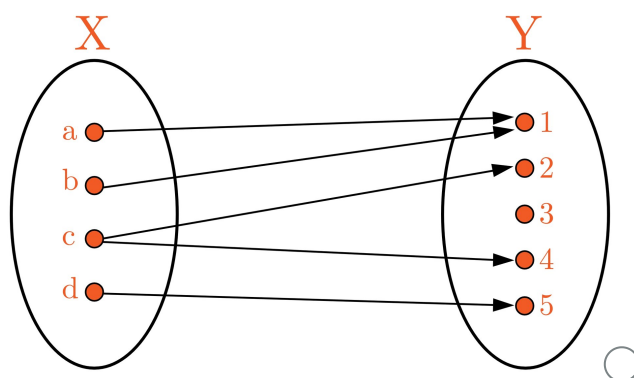
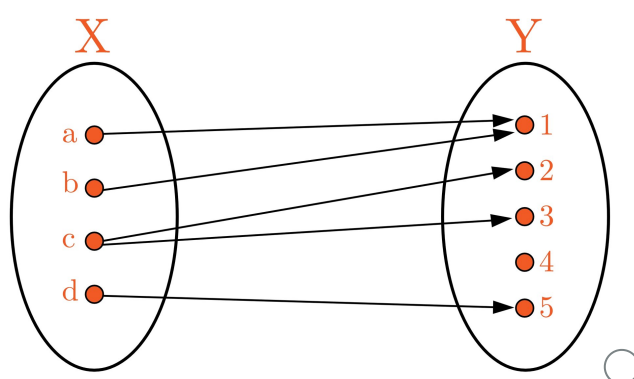
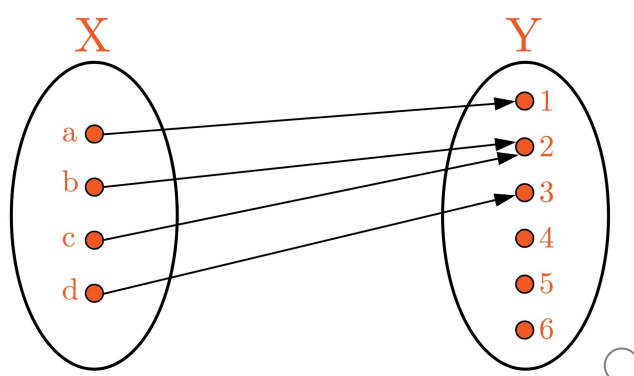
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



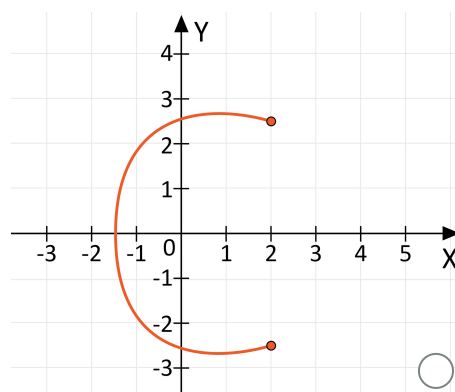
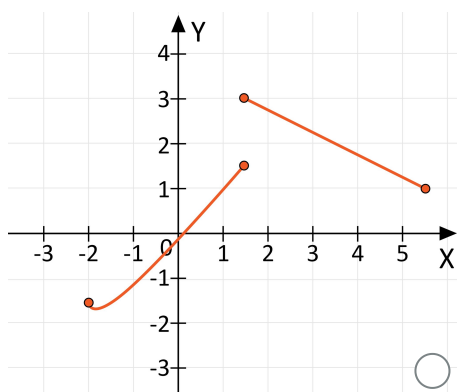
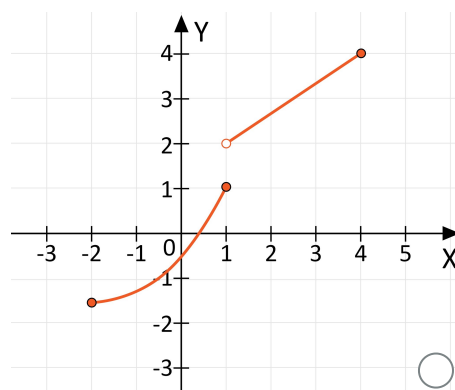
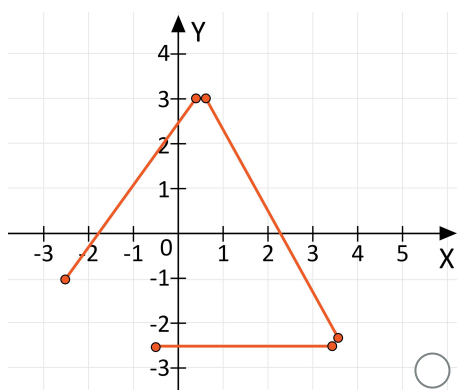
Który graf przedstawia funkcję?



Ćwiczenie 2



Wskaż rysunek przedstawiający wykres funkcji.



Ćwiczenie 3



Uzupełnij zdania tak, aby otrzymać słowny opis funkcji. Przeciągnij poprawne wyrazy w odpowiednie miejsca.

Funkcja f każdej w bibliotece przyporządkowuje jej .

Funkcja p każdemu x przyporządkowuje jego .

Funkcja v każdemu przyporządkowuje jego .

Funkcja d każdemu przyporządkowuje długość jego .

pole

przeciwprostokątnej

numer w katalogu

objętość

sześcianowi o krawędzi długości

stożkowi o średnicy podstawy d

książce

trójkątowi prostokątnemu równoramiennemu o przyprostokątnej x

Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Dane są dwa zbiory: $X = \{-5, -3, -1, 0, 2, 4\}$, $Y = \{-5, -4, -2, 0, 1, 3, 5, 6\}$. Funkcja $f : X \rightarrow Y$ każdej liczbie x ze zbioru X przyporządkowuje liczbę do niej przeciwną. Oceń prawdziwość sformułowań.

Sformułowanie	Prawda	Fałsz
$f(-3) = -3$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Jest to $f(-5) = 5$.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Do wykresu funkcji f należy nieskończenie wiele punktów.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Funkcja f przyjmuje tylko wartości nieujemne.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Ćwiczenie 6



Funkcja f każdej liczbie x ze zbioru $\{21, 26, 37, 58, 85\}$ przyporządkowuje resztę z dzielenia liczby x przez 11. Połącz w pary odpowiadające sobie stwierdzenia.

$$f(21) =$$

$$10$$

$$f(85) =$$

$$8$$

$$f(37) =$$

$$4$$

$$f(58) =$$

$$3$$

Ćwiczenie 7



Dane są dwa zbiory: $X = \{-3, -1, 4, 7, 10\}$ i $Y = \{0, 6\}$. Funkcja $f : X \rightarrow Y$ opisana jest za pomocą zbioru par uporządkowanych $\{(-3, 0), (-1, 0), (4, 6), (7, 0), (10, 6)\}$. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ $f(-1) = 0$

☐ $f(7) = 6$

☐ Funkcja f może przyjmować pięć różnych wartości.☐ Dziedzina funkcji f składa się z pięciu elementów.

Ćwiczenie 8



Dane są dwa zbiory: $X = \{-3, -1, 4, 7, 10\}$ i $Y = \{0, 6\}$. Funkcję $f : X \rightarrow Y$ przedstawiono za pomocą tabelki. Wskaż tabelkę przedstawiającą funkcję f .

A.

x	-3	-1	4	7	4
$f(x)$	0	0	6	0	0

B.

x	-3	-1	4	7	10
$f(x)$	0	0	6	0	0

C.

x	-3	-1	4	7	-3
$f(x)$	0	0	6	0	6

D.

x	-3	-1	4	7	-1
$f(x)$	6	6	6	0	0

☐ A

☐ C

☐ B

☐ D

Ćwiczenie 9



Zaznacz prawidłowe zdania.

☐ Każdemu argumentowi funkcji można przyporządkować dokładnie jeden element należący do przeciwdziedziny tej funkcji.

☐ Każdemu argumentowi funkcji można przyporządkować co najmniej dwa różne elementy należące do przeciwdziedziny tej funkcji.

☐ Funkcja może przyjmować taką samą wartość dla więcej niż jednego argumentu.

Dla nauczyciela

Autor: Anna Jeżewska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Sposoby określania funkcji

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) określa funkcje jako jednoznaczne przyporządkowanie za pomocą opisu słownego, tabeli, wykresu, wzoru (także różnymi wzorami na różnych przedziałach).

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- podaje przykłady określania funkcji różnymi sposobami,
- opisuje daną funkcję różnymi sposobami,
- rozróżnia te przyporządkowania, które są funkcjami,
- wybiera sposób opisu funkcji w zależności od rodzaju funkcji.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- metaplan
- dyskusja bez słów

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przed lekcją grupa chętnych uczniów przygotowuje krótką prezentację przypominającą pojęcie funkcji, określania jej dziedziny i zbioru wartości.
2. Nauczyciel podaje temat i cele lekcji oraz ustala z uczniami kryteria sukcesu.
3. Uczniowie oglądają prezentację przygotowaną przez swoich kolegów. Jest ona wprowadzeniem do lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie, pracując w dwóch grupach, analizują przykłady przedstawione w sekcji „Przeczytaj”.

Grupa pierwsza – przykład 1.

Grupa druga – przykład 2.

2. Po upływie wyznaczonego czasu jeden przedstawiciel z każdej grupy przedstawia sposób rozwiązania zadania.
3. Uczniowie metodą dyskusji bez słów zapisują na tablicy sposoby opisu funkcji. Szukają odpowiedzi na pytania:
Czy każdy graf przedstawia funkcję?
Czy każdy zbiór punktów w układzie współrzędnych jest wykresem funkcji?
Weryfikują pomysły i formułują wnioski.
4. Uczniowie dyskutują o sposobach przedstawiania funkcji.
5. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela i wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jeden z uczniów podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, ocenia pracę uczniów.

Praca domowa:

1. Uczniowie rozwiązują w domu ćwiczenia, których nie rozwiązywali w czasie zajęć.

2. Zadanie dla chętnych:

Funkcja f jest określona za pomocą opisu słownego: „Każdej liczbie całkowitej z przedziału $\langle -20, 8 \rangle$ przyporządkowujemy różnicę wartości bezwzględnej tej liczby i liczby 5”.

a) Napisz wzór funkcji f .

b) Podaj zbiór wartości funkcji f .

c) Naszkicuj wykres tej funkcji.

Materiały pomocnicze:

[Definicja funkcji. Sposoby przedstawiania funkcji](#)

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może wykorzystać prezentację multimedialną do pracy w parach lub w grupach.