

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA

WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI, AUTOMATYKI, INFORMATYKI I INŻYNIERII BIOMEDYCZNEJ



TEORIA STEROWANIA II: ĆWICZENIA LABORATORYJNE

Sprawozdanie: Ćwiczenie 1.

Portrety fazowe systemów liniowych

Karolina Piotrowska

Kraków, 12 marca 2024

1 Cel ćwiczenia

Ćwiczenie miało na celu zbadanie własności liniowych układów dynamicznych drugiego rzędu - w szczególności badania własności dynamicznych na płaszczyźnie fazowej oraz ich zależności od wartości i wektorów własnych.

2 Wstęp teoretyczny

Rozważane układy liniowe opisane były równaniem stanu:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

gdzie A - macierz rzeczywista 2×2 .

Stabilność i własności dynamiczne takiego układu zależą bezpośrednio od wartości własnych macierzy A . Aby zbadać stabilność układu, określamy wartości własne macierzy, będące pierwiastkami jej wielomianu charakterystycznego:

$$\lambda(A) = \{s \in \mathbb{C} : \det(sI - A) = 0\} \quad (2)$$

Układ jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\operatorname{Re} \lambda(A) < 0 \quad (3)$$

Układ jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\operatorname{Re} \lambda(A) \leq 0 \quad (4)$$

oraz z każdą wartością własną urojoną o krotności m jest związanych m liniowo niezależnych wektorów własnych.

3 Przebieg ćwiczenia

3.1 Analiza dla macierzy o dwóch rzeczywistych, różnych wartościach własnych tego samego znaku

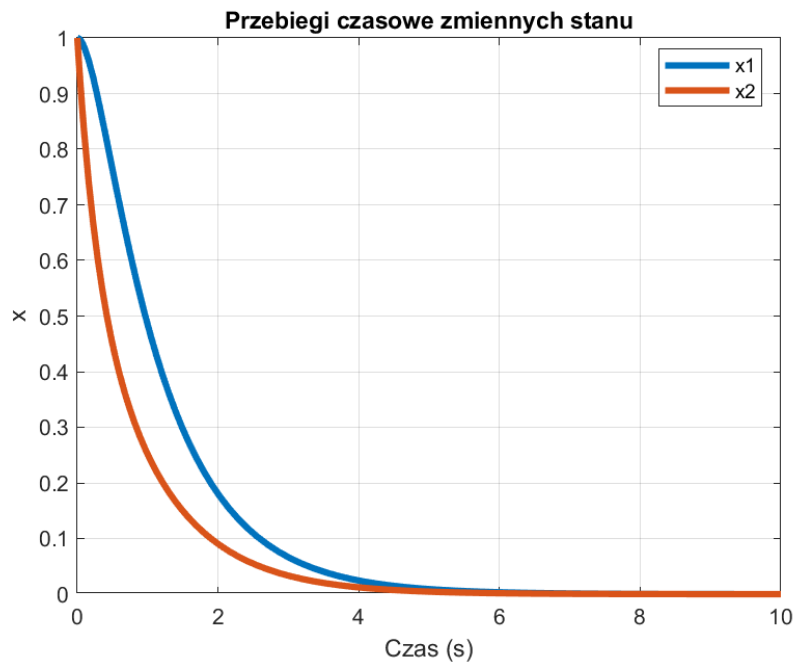
Rozważamy macierz $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$
o wartościach własnych

$$\lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = -1 \quad (5)$$

i wektorach własnych

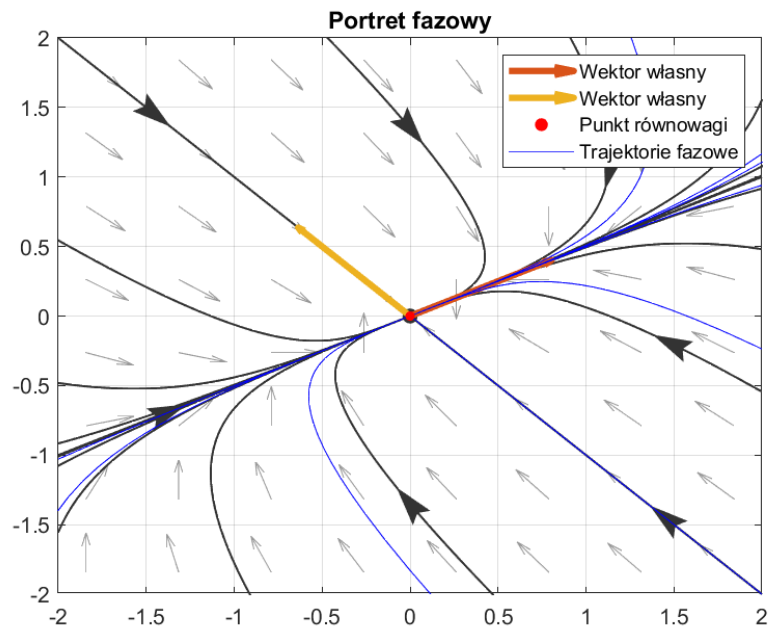
$$v(\lambda_1 = -4) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v(\lambda_2 = -1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Odpowiedź układu na warunek początkowy $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ przedstawiono na Rys.1



Rysunek 1: Odpowiedź na warunek początkowy

W kolejnym kroku przeprowadzono symulację dla szeregu warunków początkowych rozłożonych równomiernie na obwodzie koła.



Rysunek 2: Portrety fazowe dla szeregu warunków początkowych

Układ jest stabilny asymptotycznie.

3.2 Macierz w postaci kanonicznej

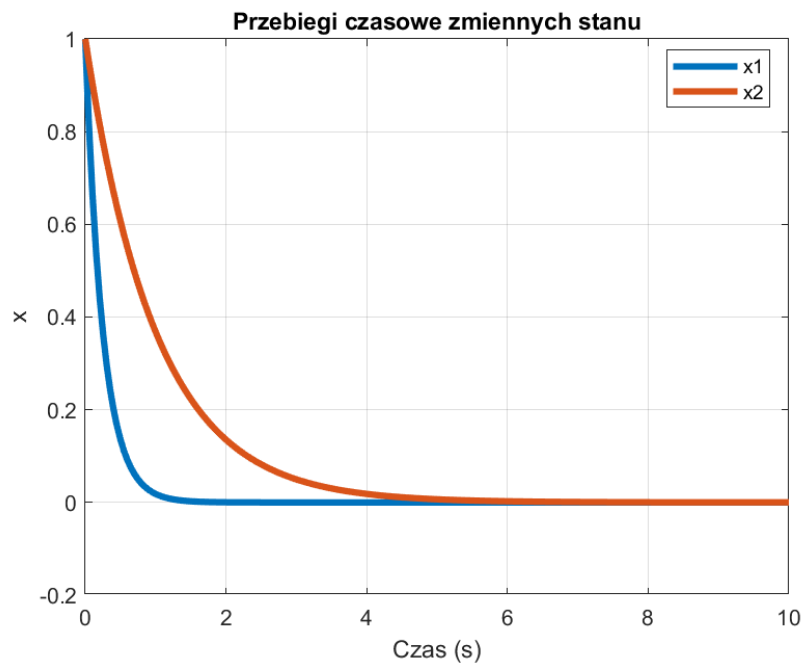
Macierz A przekształcono do postaci Jordana:

$$J = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

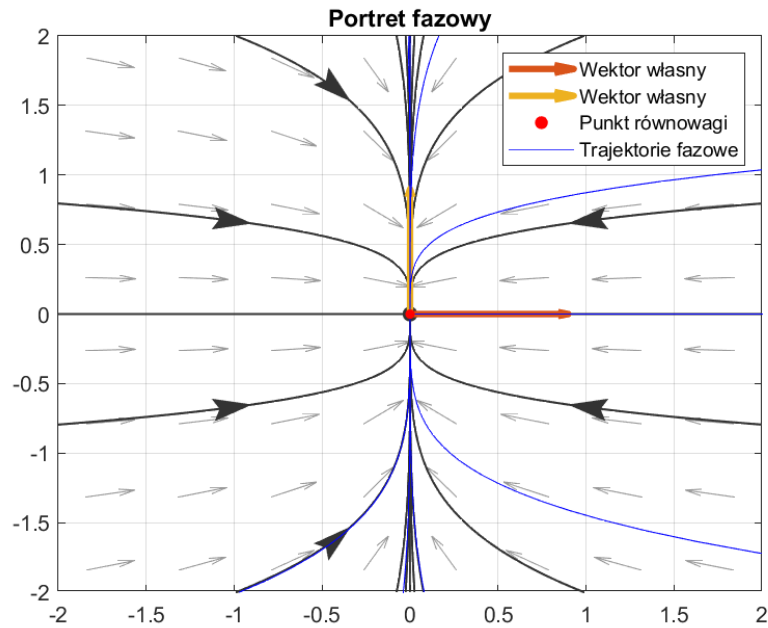
Macierz ta ma te same wartości własne, co macierz A, a jej wektory własne wyglądają następująco:

$$v(\lambda_1 = -4) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v(\lambda_2 = -1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Następnie przeprowadzono analogiczne eksperymenty, jak w sekcji poprzedniej. Ich wyniki widać na Rys.3-4.



Rysunek 3: Odpowiedź na warunki początkowe



Rysunek 4: Portrety fazowe dla szeregu warunków początkowych

Jak widać na powyższych wykresach, sprowadzenie macierzy do postaci kanonicznej spowodowało rotację portretów fazowych, co wynika ze zmiany wektorów własnych. Układ nadal jest stabilny asymptotycznie.

3.3 Zmiana wartości własnych na przeciwne dla macierzy A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

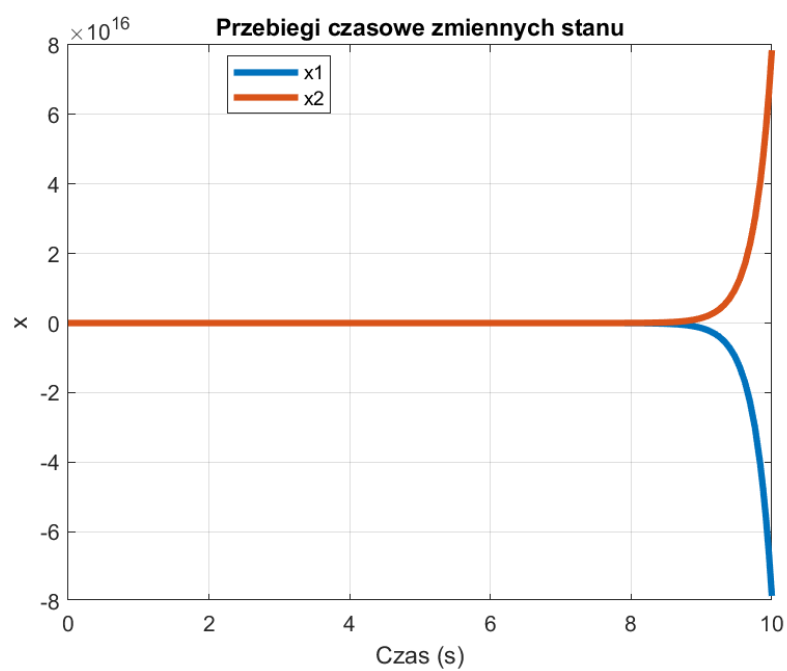
Macierz ta ma dwie wartości własne rzeczywiste różne ale jednakowego znaku:

$$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1 \quad (10)$$

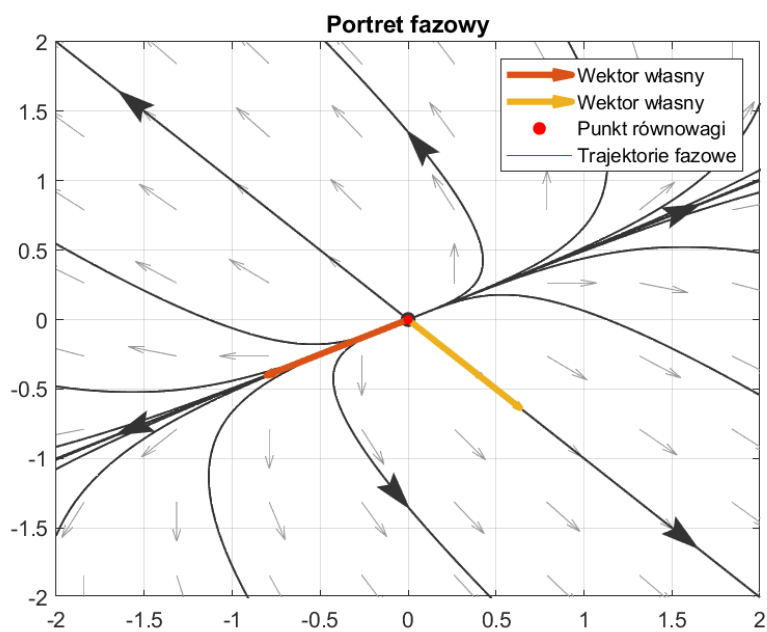
Wektory własne odpowiadające wartością własnym:

$$v(\lambda_1 = 4) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v(\lambda_2 = 1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Następnie przeprowadzono analogiczne eksperymenty, jak w sekcji poprzedniej. Ich wyniki widać na Rys.5-6.



Rysunek 5: Odpowiedź na warunek początkowy



Rysunek 6: Portrety fazowe

Układ jest niestabilny.

4 Analiza pozostałych przypadków

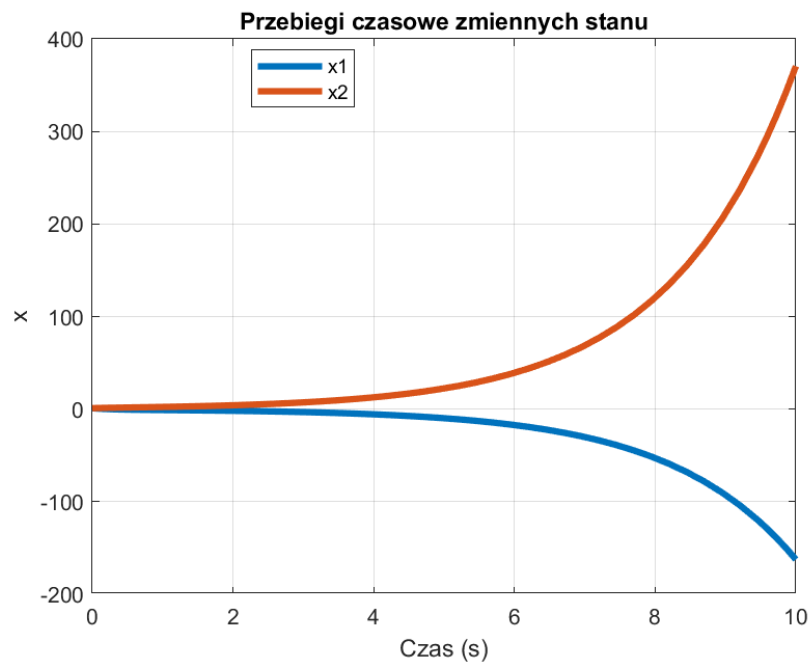
4.1 Dwie wartości własne rzeczywiste różnych znaków

Rozważamy macierz $A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ o wartościach własnych

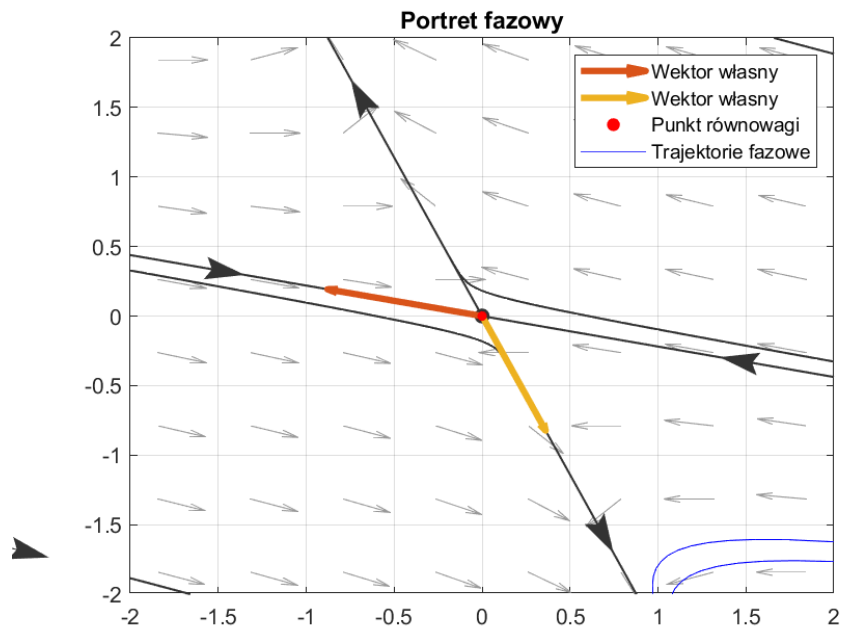
$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1 \quad (12)$$

i wektorach własnych

$$v(\lambda_1 = -2) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, v(\lambda_2 = 1) = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$



Rysunek 7: Odpowiedź na warunek początkowy $x_0 = [1, 1]$



Rysunek 8: Portrety fazowe

Układ jest niestabilny.

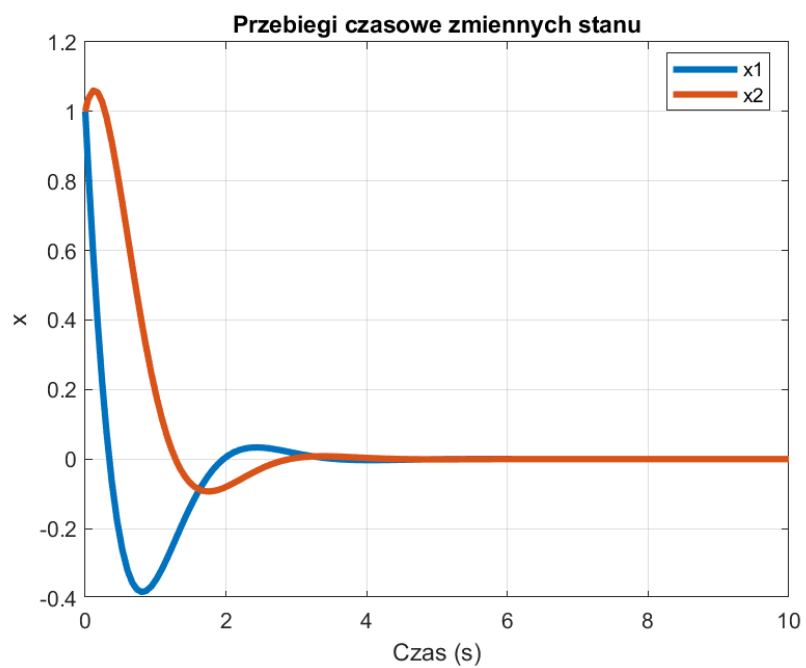
4.2 Dwie wartości własne zespolone sprzężone o niezerowych realis

Rozważamy macierz $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ o wartościach własnych

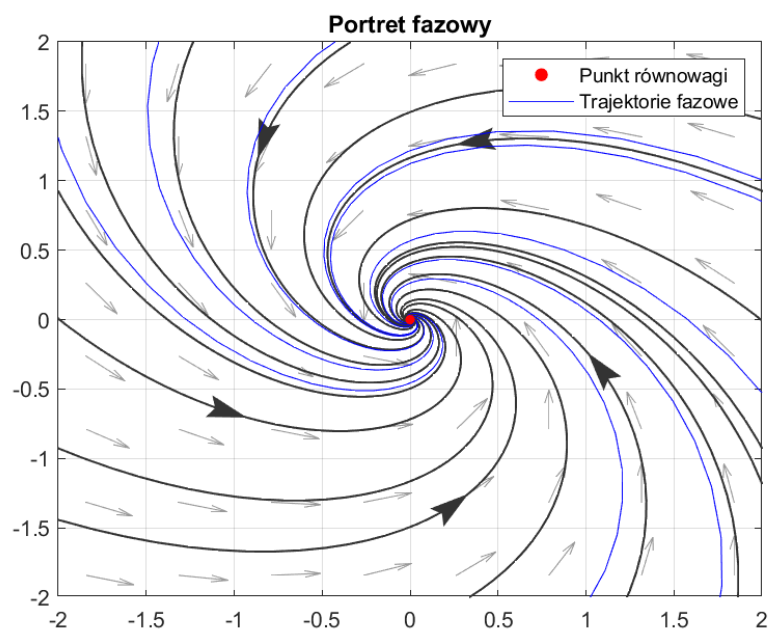
$$\lambda_1 = -2 - 2i, \lambda_2 = -2 + 2i \quad (14)$$

i wektorach własnych

$$v(\lambda_1 = -2 - 2i) = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}, v(\lambda_2 = -2 + 2i) = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$



Rysunek 9: Odpowiedź na warunek początkowy $x_0 = [1, 1]$



Rysunek 10: Portrety fazowe

Układ jest stabilny asymptotycznie.

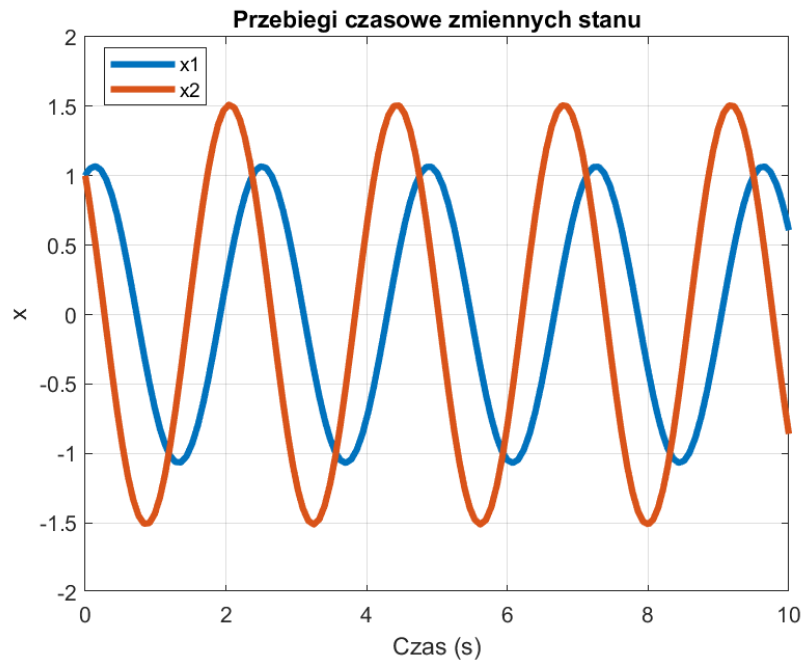
4.3 Dwie wartości własne urojone sprzężone

Rozważamy macierz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ o wartościach własnych

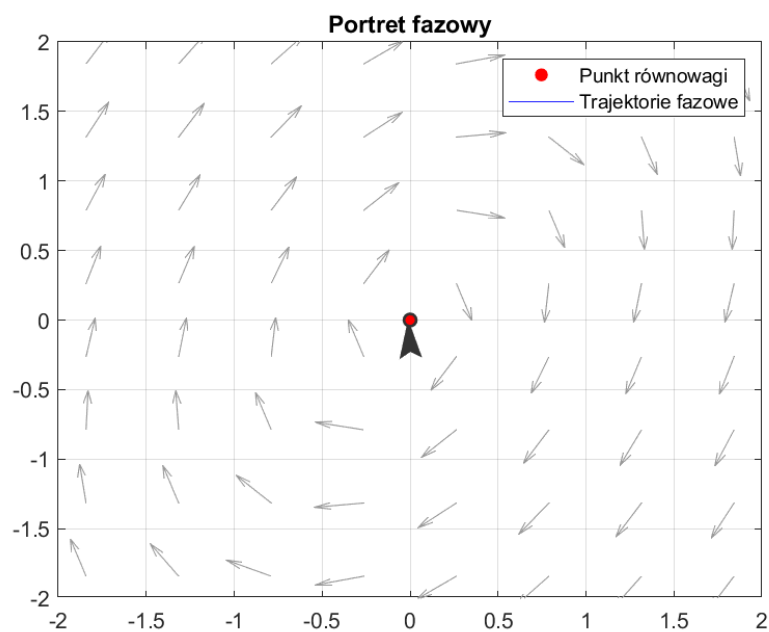
$$\lambda_1 = 3i, \lambda_2 = -3i \quad (16)$$

i wektorach własnych

$$v(\lambda_1 = 3i) = \begin{bmatrix} \frac{1-3i}{5} \\ 1 \end{bmatrix}, v(\lambda_2 = -3i) = \begin{bmatrix} \frac{1+3i}{5} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$



Rysunek 11: Odpowiedź na warunek początkowy $x_0 = [1, 1]$



Rysunek 12: Portrety fazowe

Układ jest na granicy stabilności.

4.4 Dwie wartości własne rzeczywiste równe, niezerowe i tylko jeden wektor własny liniowo niezależny

Rozważamy macierz $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ o wartościach własnych

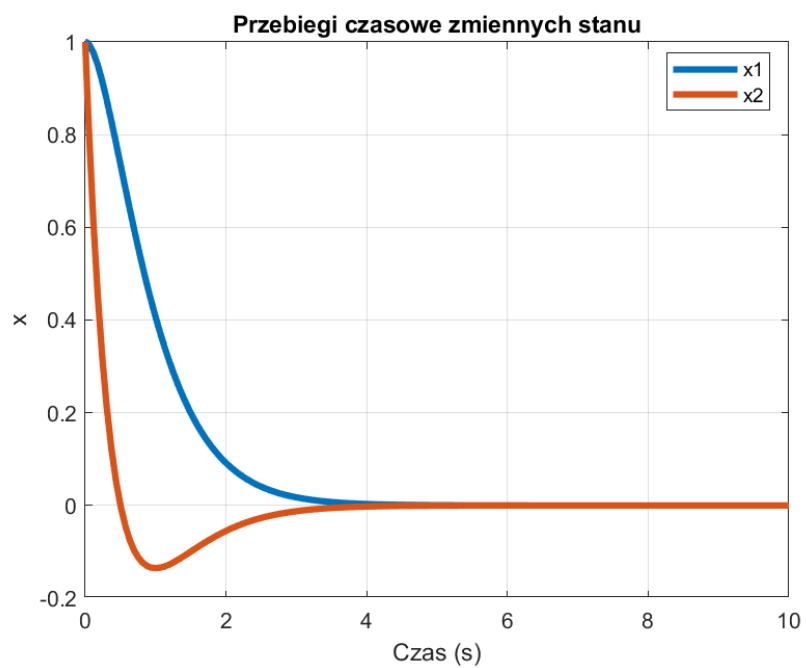
$$\lambda_1 = -2 = \lambda_2 \quad (18)$$

wektorze własnym

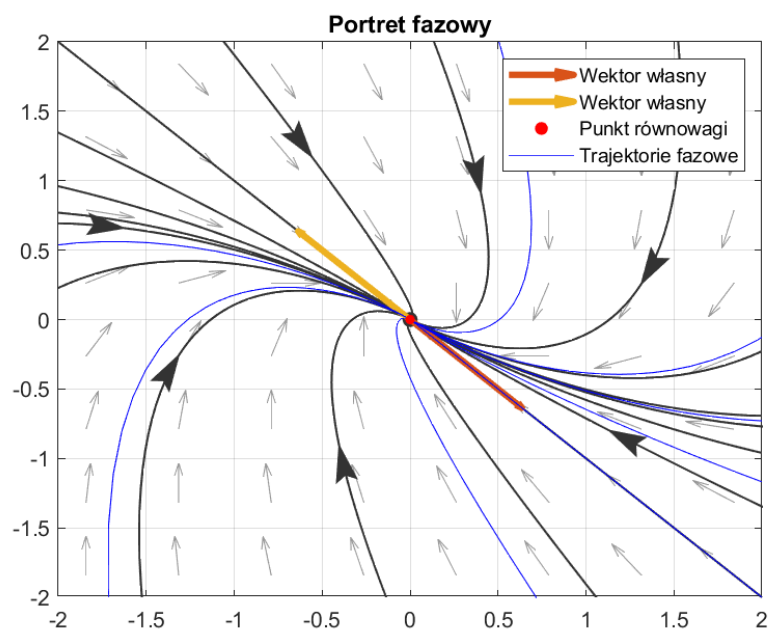
$$v(\lambda = -2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

i wektorze głównym

$$v(\lambda = -2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$



Rysunek 13: Odpowiedź na warunek początkowy $x_0 = [1, 1]$



Rysunek 14: Portrety fazowe

Układ jest stabilny asymptotycznie.

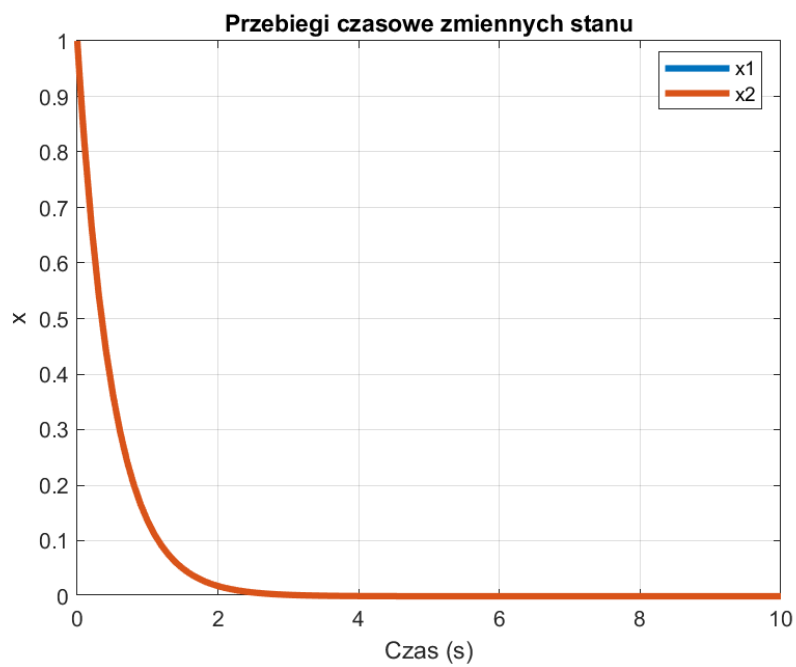
4.5 Dwie wartości własne rzeczywiste równe, niezerowe i związane z nimi dwa wektory własne liniowo niezależne

Rozważamy macierz $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ o wartościach własnych

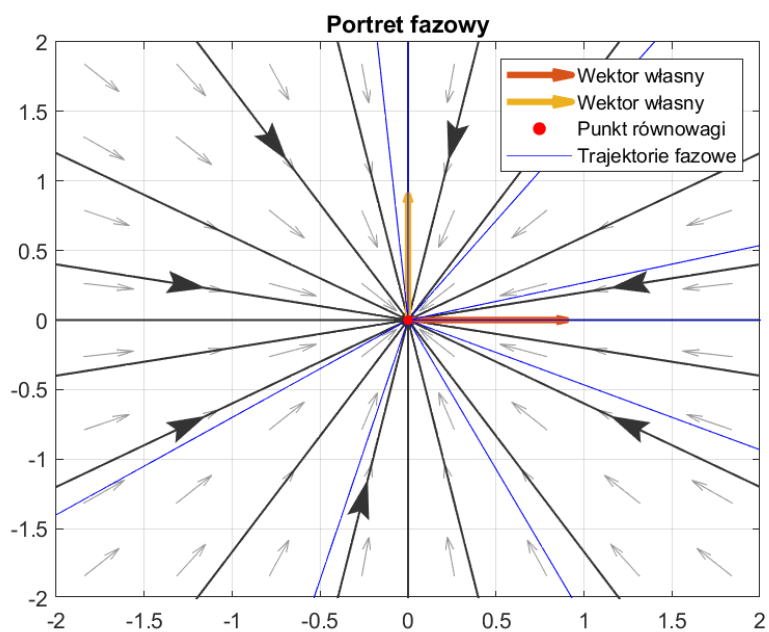
$$\lambda_1 = -2 = \lambda_2 = \lambda \quad (21)$$

i wektorach własnych

$$v(\lambda = -2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v(\lambda = -2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$



Rysunek 15: Odpowiedź na warunek początkowy $x_0 = [1, 1]$



Rysunek 16: Portrety fazowe

Układ jest stabilny asymptotycznie.

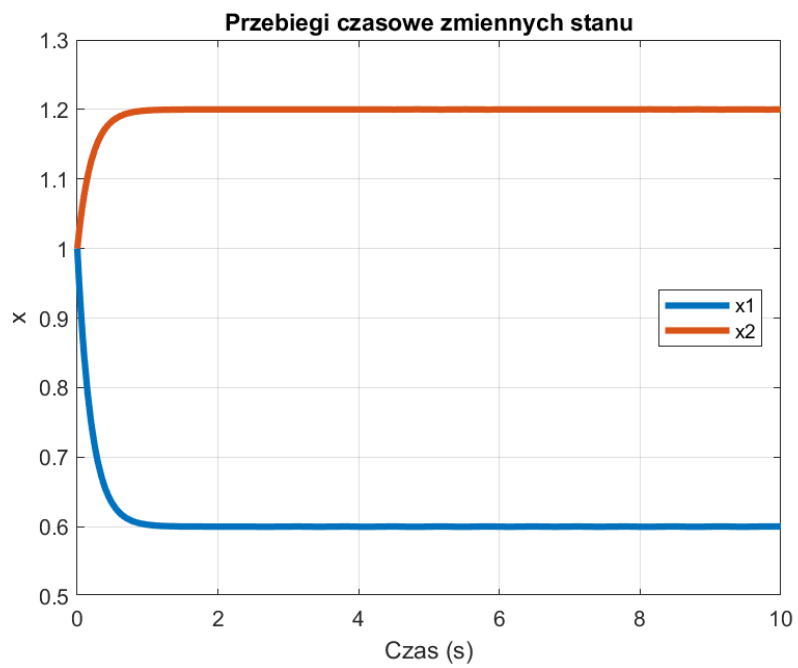
4.6 Dwie wartości własne różne rzeczywiste, jedna równa zero

Rozważamy macierz $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ o wartościach własnych

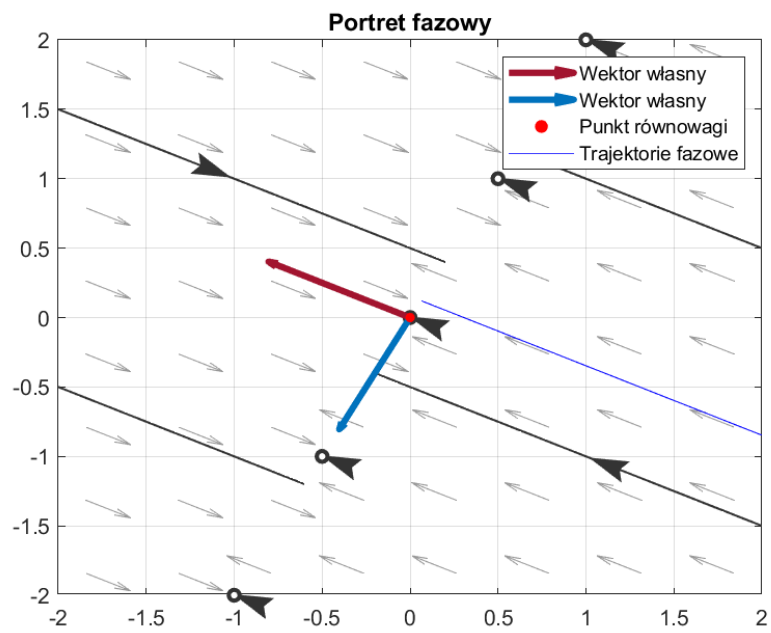
$$\lambda_1 = -5, \lambda_2 = 0 \quad (23)$$

i wektorach własnych

$$v(\lambda_1 = -5) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, v(\lambda_2 = 0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$



Rysunek 17: Odpowiedź na warunek początkowy $x_0 = [1, 1]$



Rysunek 18: Portrety fazowe

Układ jest stabilny.

4.7 Dwie wartości własne zerowe, jeden liniowo niezależny wektor własny

Rozważamy macierz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ o wartościach własnych

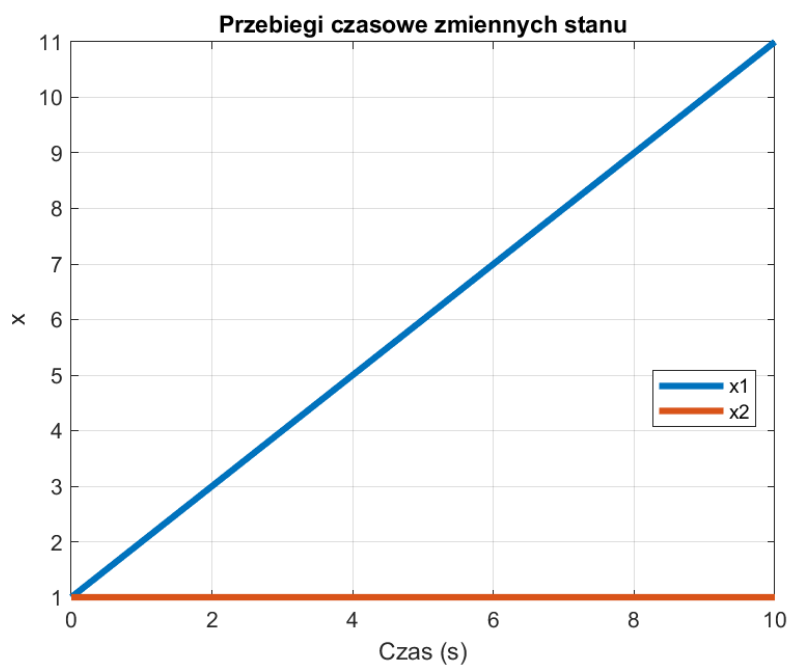
$$\lambda_1 = 0 = \lambda_2 = 0 = \lambda \quad (25)$$

wektorze własnym

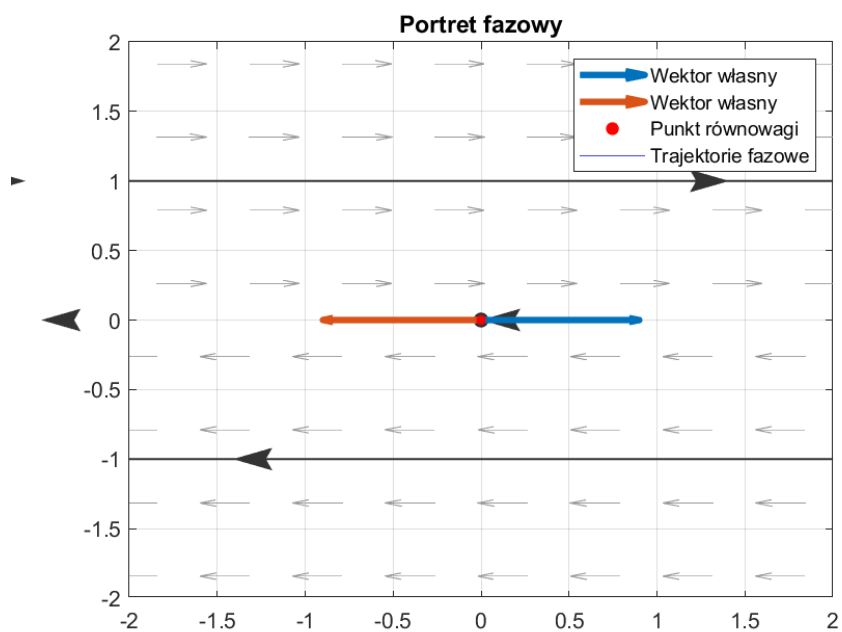
$$v(\lambda = 0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

i wektorze głównym

$$v(\lambda = 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (27)$$



Rysunek 19: Odpowiedź na warunek początkowy $x_0 = [1, 1]$



Rysunek 20: Portrety fazowe

Układ jest niestabilny.

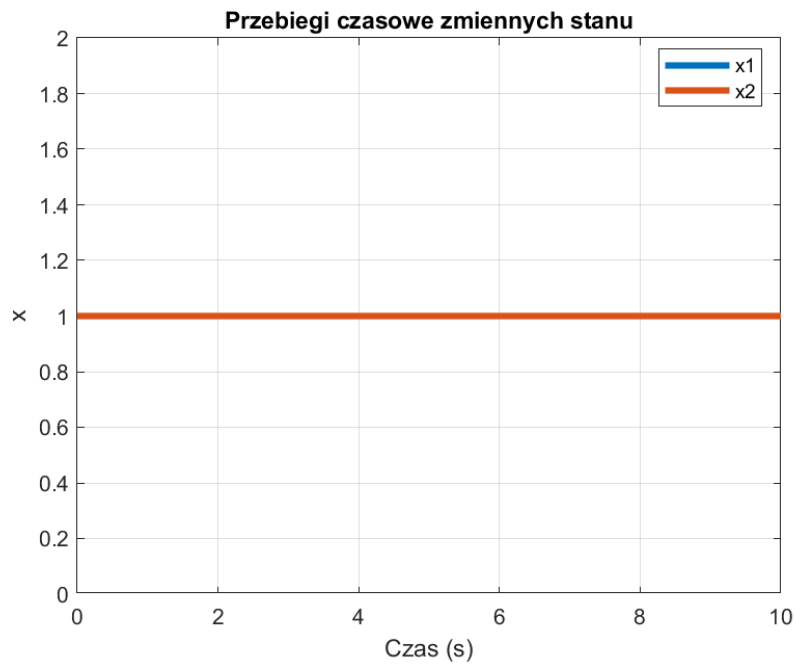
4.8 Macierz zerowa

Rozważamy macierz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ o wartościach własnych

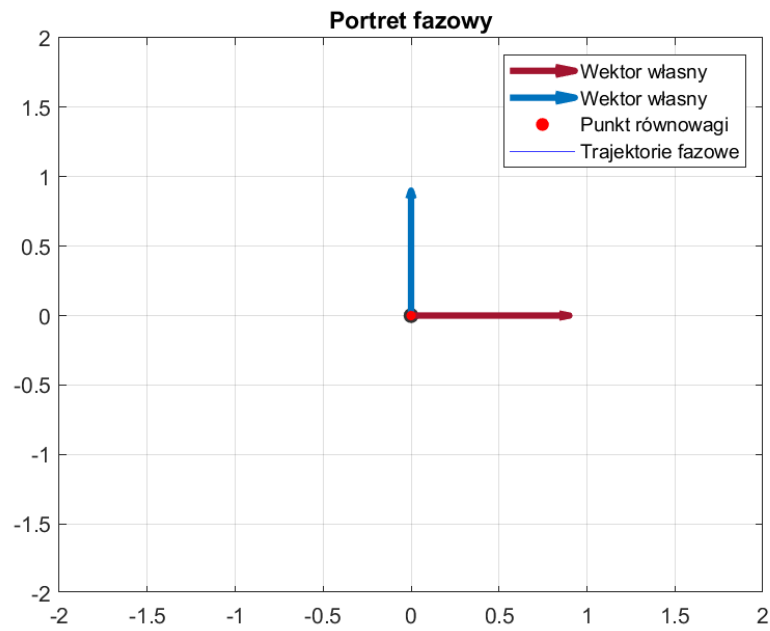
$$\lambda_1 = 0 = \lambda_2 = \lambda \quad (28)$$

i wektorach własnych

$$v(\lambda = 0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v(\lambda = 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$



Rysunek 21: Odpowiedź na warunek początkowy $x_0 = [1, 1]$



Rysunek 22: Portrety fazowe

Układ jest stabilny.

5 Opis wniosków i obserwacji

Na podstawie portretów fazowych można wnioskować o stabilności układu - układ stabilny powraca do punktu równowagi niezależnie od warunków początkowych.