



Глава 3. Экспоненты и эксперименты.

Господин мэр лично берёт под свою опеку трех половозрелых павианов и призывает население последовать его примеру. Ты возьмешь себе павианиху, Андрей? Сельма будет против, но таково требование Эксперимента! Как известно, Эксперимент есть Эксперимент. Надеюсь, вы не сомневаетесь, Сельма, что Эксперимент есть именно эксперимент – не экскремент, не экспонент, не перманент, а именно Эксперимент?..

А. и Б. Стругацкие «Град обречённый»

Для разминки решим простейшее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = [b - a] P(t)$$

$$P(0) = P_0 \quad \{3.1\}$$

Здесь:

P(t) – численность популяции от времени, млн человек

a – постоянная смертности (attrition)

b – постоянная воспроизводства (birth)

Здесь и далее, мы будем пользоваться одинаковыми буквами. В каком бы месте этой книги Вы не встретили «**P**», буква всегда обозначает население в миллионах человек, а не давление или вероятность. Полный список всех использованных букв находится [в конце книги](#).

Чего тут решать? Проходили в средней школе. Разделив переменные и интегрируя справа и слева, получаем:

$$\ln P(t) = (b - a)t + Const$$

Подставив граничное условие:

$$Const = \ln P(0) = \ln P_0$$

И вожделенное решение:

$$P(t) = P_0 e^{(b-a)t} \quad \{3.2\}$$

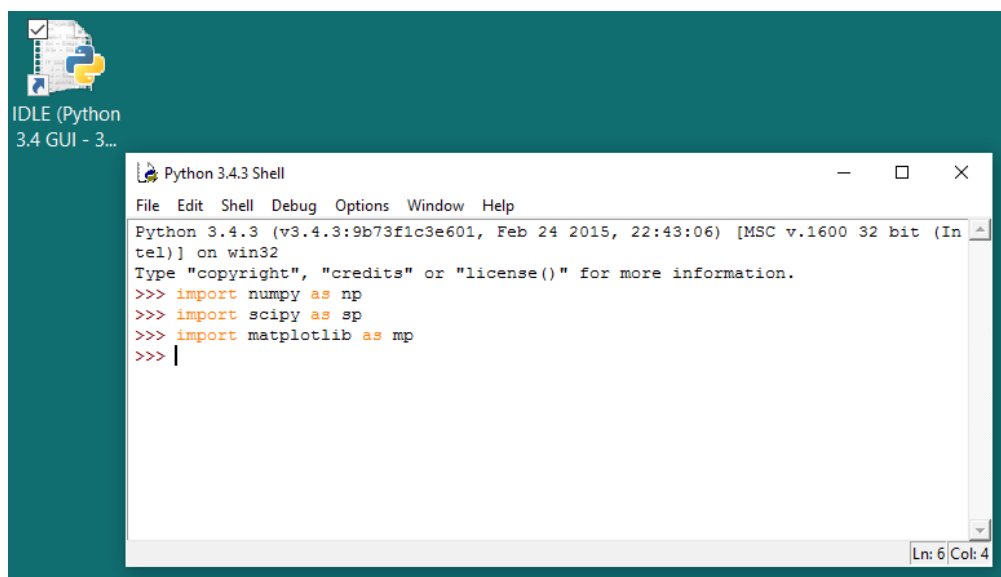
Если **b > a**, то население неудержимо растёт, если **b < a** – так же неудержимо падает. Отрисует график полученной функции. Кто сказал: «Excel»? Нет,

рисовать будем непосредственно программой, а заодно настроим себе компьютер для дальнейших экспериментов. Дело в том, что уравнение {3.1} – самое простое, что нам может встретиться. Далее появятся системы уравнений, которые можно решать только численно.

В Цифровом Приложении есть программа `\Chapter 03\Test_Exponent_1.py` Для всех примеров Приложения потребуются три программных продукта (все бесплатные):

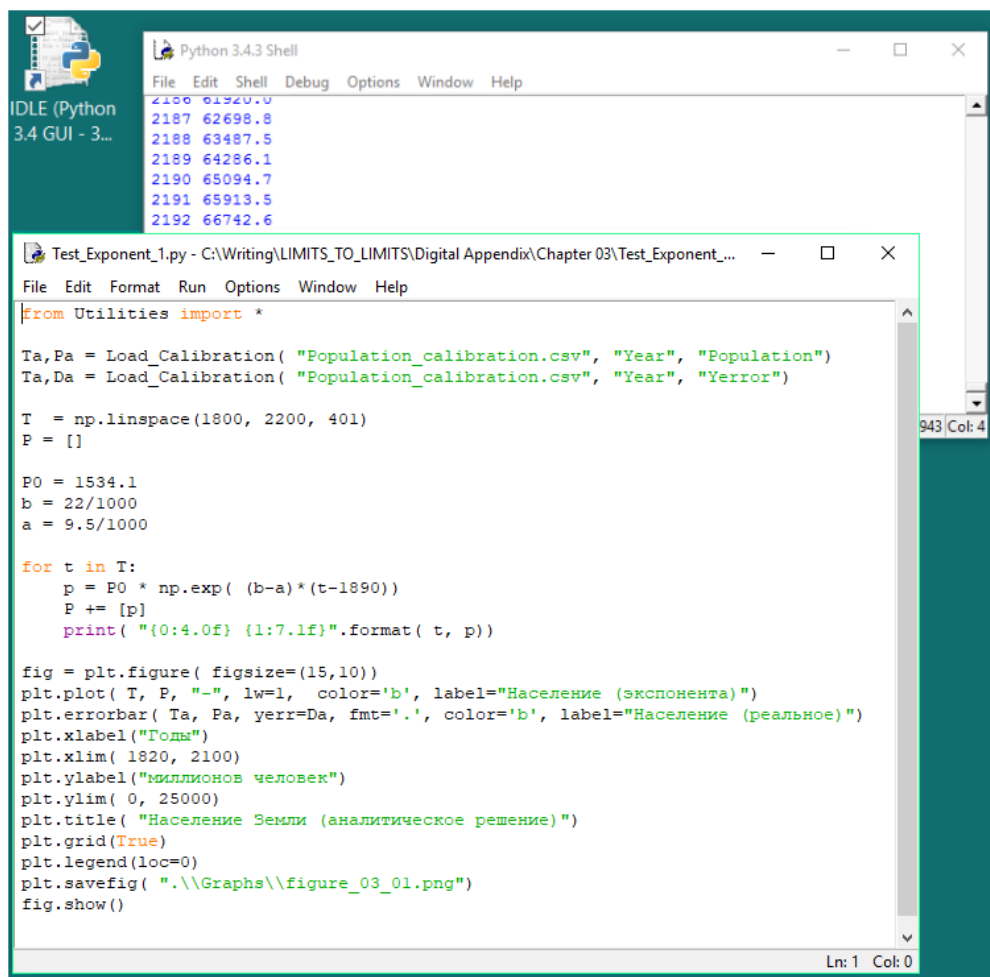
- **Python 3.4** можно скачать с <https://www.python.org/>. Почему 3.4? Работает на Windows XP. Если у вас более поздняя версия операционной системы, проверьте совместимость двух пакетов, указанных ниже. Вообще, весь код этой книги к операционным системам не привязан. Автор тестировал все программы под Windows 10 и Debian Linux, а также на малюсеньком компьютере Raspberry Pi 2 под управлением Raspbian.
- Библиотеку математических функций **Numpy/Scipy** качаем по правильной ссылке с <http://www.numpy.org/>. Для пользователей Windows наиболее привлекательны инсталляторы, изготовленные Кристофом Гохлки: <http://www.lfd.uci.edu/~gohlke/pythonlibs/>
- Наконец, для рисования графиков потребуется **Matplotlib**, добываемый с <http://matplotlib.org/>. Инсталляция немного заумная, но дело того стоит.

Если всё установилось правильно, у вас на компьютере есть ссылка на среду разработки **IDLE** с весёлым жовто-блакитним питончиком, а дважды по ней щёлкнув, наблюдаем примерно такую картину:



Немедленно можно проверить, правильно ли встали библиотеки: печатаем словечко **import** и имя библиотеки, как показано выше. Если нет никакого сообщения об ошибке – с библиотекой всё в порядке.

Далее открываем меню **File** и загружаем текст программы из **Test_Exponent_1.py**. Экран выглядит приблизительно так:



The screenshot shows a Python 3.4.3 Shell window and a script editor window. The shell window displays the following output:

```
2186 61920.0
2187 62698.8
2188 63487.5
2189 64286.1
2190 65094.7
2191 65913.5
2192 66742.6
```

The script editor window shows the following code:

```
from Utilities import *

Ta,Pa = Load_Calibration( "Population_calibration.csv", "Year", "Population")
Ta,Da = Load_Calibration( "Population_calibration.csv", "Year", "Yerror")

T = np.linspace(1800, 2200, 401)
P = []

P0 = 1534.1
b = 22/1000
a = 9.5/1000

for t in T:
    p = P0 * np.exp( (b-a)*(t-1890))
    P += [p]
    print( "{0:4.0f} {1:7.1f}".format( t, p))

fig = plt.figure( figsize=(15,10))
plt.plot( T, P, "-", lw=1, color='b', label="Население (экспонента)")
plt.errorbar( Ta, Pa, yerr=Da, fmt='.', color='b', label="Население (реальное)")
plt.xlabel("Годы")
plt.xlim( 1820, 2100)
plt.ylabel("миллионов человек")
plt.ylim( 0, 25000)
plt.title( "Население Земли (аналитическое решение)")
plt.grid(True)
plt.legend(loc=0)
plt.savefig( ".\\Graphs\\figure_03_01.png")
fig.show()
```

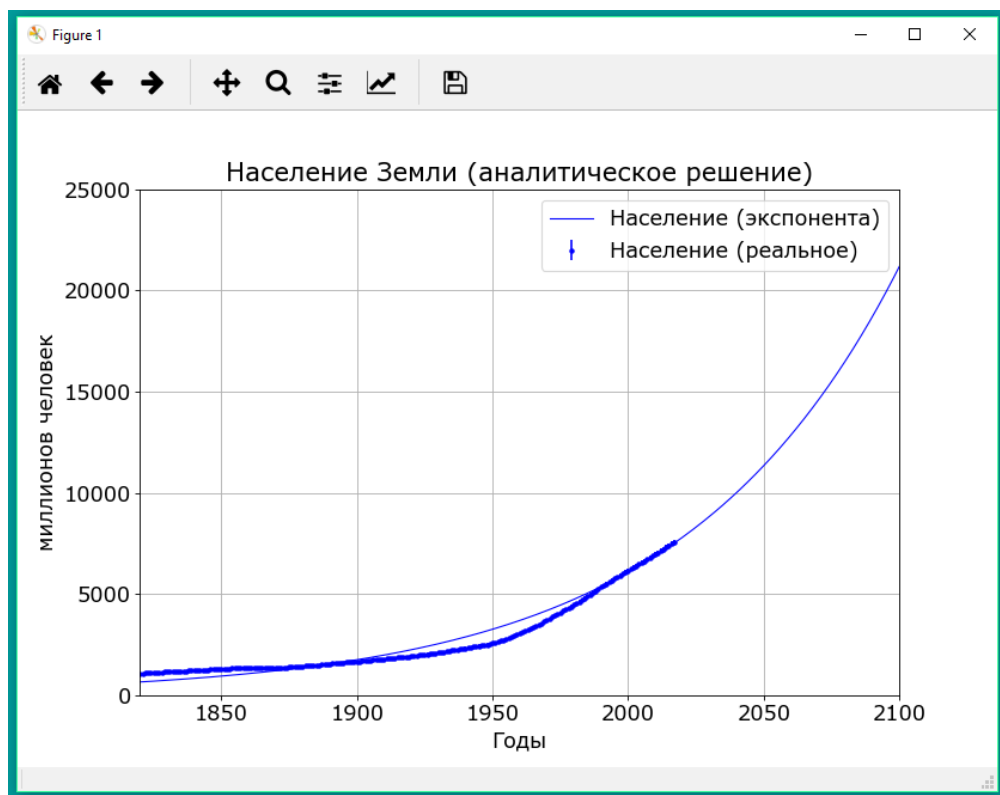
Это первая и последняя фотография полного листинга программы в этой книге. Далее программирование будем объяснять по ходу дела, но читать код всё одно удобнее в редакторе **IDLE**, а не на книжной странице.

Наши параметры? Население Земли в 1890 году по данным ООН 1'534 млн человек. Средняя рождаемость в XX веке – 22 ребёнка на 1'000 населения, средняя смертность – 9.5.

Что программа делает? Сначала, загружаются данные ООН о населении Земли из файла **Population_calibration.csv** . Далее создаём себе вектор значений **T** с

цифрами от 1800 по 2200 включительно, всего 401 число. Для каждого значения t из массива T вычисляем население по формуле {3.2} и заносим в массив P .

Последние 13 строчек программы выполняют рисование, сохраняют полученный график в файл и выводят на экран. Запускаем программу клавишей <F5>. На экране появляется вот такое окошко:



Сразу заметим, что график – «живой», а не картинка. Разберитесь с кнопками в верхней части окошка. Они позволяют рассматривать всё в деталях и сохранять увиденное.

У данных UNESCO о численности населения имеется погрешность: примерно один-два процента, или ± 100 млн человек²¹. Почему так, большой роли для нашего изложения не играет, а детали можно посмотреть в статье Нико Кейлмана [13].

Уравнение {3.2} – аналитическое решение. Теперь модифицируем программу,

21 В 01:55 по Гринвичу, 31 октября 2011 года ООН торжественно объявила индийскую девочку Наргиз из деревни Мали в штате Уттар-Прадеш 7'000'000'000 жителем планеты Земля. Ничего кроме светлого PR за этим не стоит. С тем же успехом на место семи-миллиардного жителя Земли может претендовать около 135 миллионов(!) младенцев. В ту же минуту, в одной только Индии родился, помимо Наргиз, ещё 51 ребёнок. Впрочем, даже ООН заявила, что акция – символическая.

добавив решение численное. Интегрирование станем выполнять методом Рунге-Кутты, используя библиотеку **Scipy**. В Цифровом Приложении имеется программа `\Chapter 03\Test_Exponent_2.py`, а её самый главный кусочек выглядит так:

```
#
# Describes population as a differential equation
# P0 – начальная популяция [млн]
# a – смертность [безразмерная]
# b – рождаемость [безразмерная]
#
class Population:
    #
    # инициализация
    #
    def __init__( self, P0, a, b):
        self.Initial = P0
        self.Total = P0
        self.A = a
        self.B = b
        self.Calibration_Year, self.Calibration_Total =
            Load_Calibration( "Population_calibration.csv", "Year",
                              "Population")
        return
    #
    # производная
    #
    def dP_dt( self, t):
        tmp = self.Total
        tmp *= self.B - self.A
        return tmp
    #
    # функция для вызова из odeint
    #
    def _func( self, y, t):
        self.Total = y[0]
        f0 = self.dP_dt( t)
        return [f0]
    #
    # находит решение на заданном векторе времён
    #
    def Solve( self, t0):
        y0 = [self.Total]
        soln = odeint(self._func, y0, t0)
        self.Solution_Year = t0
        self.Solution_Total = soln[:, 0]
        self.Total = self.Initial
        return

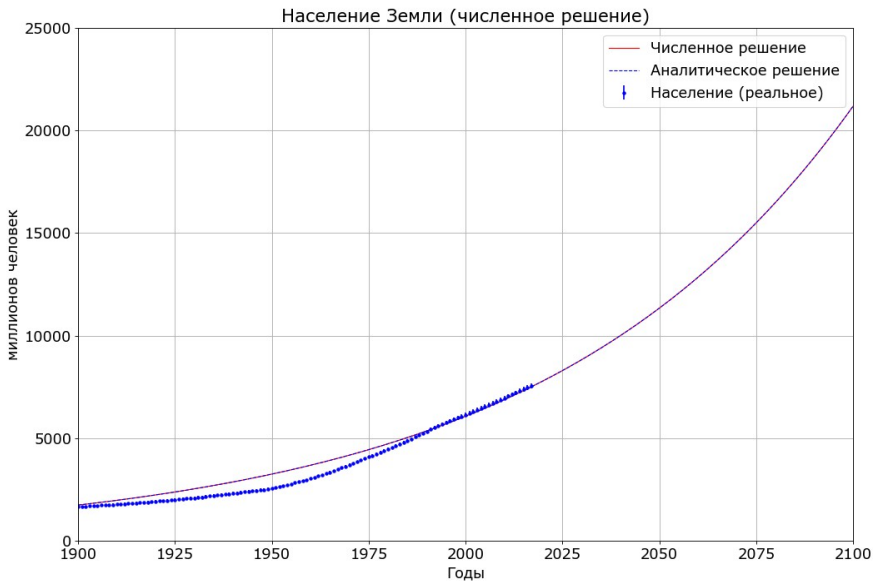
T = np.linspace(1890, 2200, 311)

#
# Solve numerically
#
P1 = Population( 1530.88, 9.5/1000, 22/1000)
P1.Solve( T)
```

В общем, никакой белой и чёрной магии тут нет. Все необходимые данные мы вынесли в отдельный класс **Population**, задаётся то же начальное значение 1534 млн человек для 1890 года, и такие же коэффициенты рождаемости и смертности. Производная из системы {3.1} считается в явном виде, а дальше сформированные значения передаются стандартной функции интегрирования из пакета **Scipy**.

Посмотрим на результат в выполнения программы. Для сравнения, на том же

графике присутствует и аналитическое решение.



Численное и аналитическое решения совпадают с точностью 8 знаков, то есть в миллион раз точнее, чем регистрация рождений и смертей в Индии. Если не видно на графиках, программа выводит в консоль все числа – убедитесь сами.

С 1972 года существовали критики «Пределов роста», да и сейчас таковые имеются, критикующие так:

«Не знаю насчёт текущей версии, но первая модель включала взрывные экспоненциальные ошибки. ЕСЛИ ваша модель такая же как и Форрестера, с экспонентами везде, запустите на 40 лет, и ошибки разорвут вам экран, так что «катастрофа» будет всегда, вне зависимости, от того, какие данные вы туда вставите. Я это говорил Форрестеру на первой конференции в октябре 1971 года, но это не остановило шарлатанские попытки пропагандировать его чепуху.»

(пользователь «karlmagnus» 31 мая 2007 года)

Что можно ответить на такое? Действительно, в пятидесятые годы прошлого века численные методы имели некоторые проблемы, в том числе и с точностью вычислений. С пятидесятого по семьдесят первый много воды утекло, например, кое-кто успешно слетал на Луну. Ладно, в Луну можно не верить, «все же знают», что астронавтов снимали на ТВ в ангаре посреди Невады. Однако DYNAMO использовали для проектирования «Боинга-747» и других знаменитых самолётиков, многие из которых летают и по сей день. Теми же методами считают мосты, небоскрёбы, подвески автомобилей и даже блок питания вашего компа. Не могу поверить, что «karlmagnus» пишет свои блоги на механическом арифмометре.

Короче, если ваш оппонент критикует современные методы решения

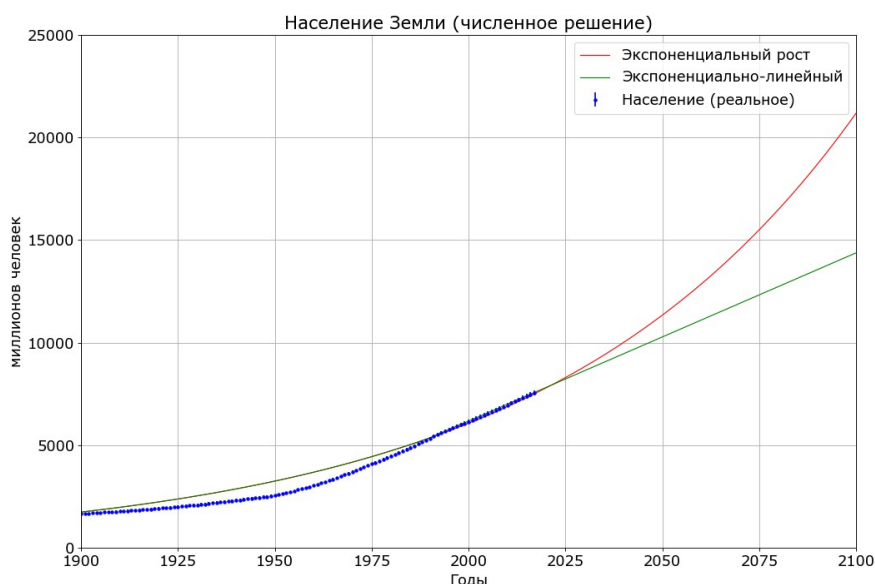
дифференциальных уравнений, но не может указать конкретную ошибку в уравнениях или в коде – перед вами типичный перец.

Заметим, что экспонента довольно плохо описывает поведение реального населения планеты Земля. В периоды с 1900 по 1950 годы и с 1990 года по сегодняшний день, наилучшее приближение – линейное, только прирост разный. Современный прирост – по 82 млн человек в год – держится уже четверть века.

Модифицируем программу: \Chapter 03\Test_Exponent_3.py

```
def dP_dt( self, t):  
    if t>1990: return 82.0  
    tmp = self.Total  
    tmp *= self.B - self.A  
    return tmp
```

Полученные значения выглядят так:



Разница знатная. Если население Земли растёт по экспоненте, к 2050 году нас будет 11.3 млрд человек. Если продолжит расти линейно – на миллиард с хвостиком меньше: «всего» 10.3 миллиарда. В 2100 году – 21.2 и 14.4 млрд, соответственно.

Поспешим успокоить читателей. По экспоненте растёт только население бактерий в чашках Петри, да и то лишь в самом начале. Реальная функция несколько сложнее, хотя экспонента там тоже присутствует.

Впервые о свойствах уравнения {3.1} задумался в самом конце XVIII века

английский доктор философии, математик, экономист и священник Т.Р.Мальтус [14]. За прошедшее с момента публикации время, чего только Роберту Мальтусу не приписали: от ненависти к бедным до крематориев в лагерях смерти Третьего Рейха. Извратили даже имя: хотя Мальтус при рождении был записан в церковной книге как «Томас Роберт Мальтус», однако имя Томас он не любил и был известен всем как Роберт. На самом деле, к работам добродушного священника о теории популяции все эти зверские «последователи Мальтуса» – от Спенсера до Ницше и Гитлера – отношения не имеют. Что же писал наш математик?

Начнем, пожалуй, с постулатов Мальтуса. Чтоб избежать разночтений, здесь и далее будем принципиально цитировать первую книгу, 1798 г. Викиложцы и прочие перцы часто пишут, что Мальтус «принял на веру» два постулата:

1. Производство продуктов питания возрастает как арифметическая прогрессия.
2. Население возрастает как геометрическая прогрессия.

Когда графики пересекутся, всем крышка! График даже откуда-то просочился в русскую Википедию²².

На самом деле, викиложцы лукавят, а в книге Мальтуса чёрным по белому:

*«I think I may fairly make **two postulata**.*

First, That food is necessary to the existence of man.

Secondly, That the passion between the sexes is necessary and will remain nearly in its present state.»

*«Я думаю, что можно принять на веру следующие **два постулата**:*

Первое. Человеку надо есть, чтобы жить.

Второе. Тяга к представителям противоположного пола – это биологическая необходимость, и в будущем мало изменится.»



Это — постулаты Мальтуса, и ему они действительно очевидны. Как вам? Когда Мальтус защищал свой докторат то философии, он не только учил Логику, но и сдавал по ней экзамены на «отлично». Для него «postulata» — это в самом деле штуки самоочевидные каждому читателю и никаких доказательств не требующие. Мальтус, с магистерской степенью по математике, знал предмет очень так неплохо! В 1788 году, он закончил Кембриджский Колледж Иисуса «восьмым вранглером». Представьте себе, что на математической олимпиаде последних курсов МГУ, МИФИ, МФТИ и Бауманки Вы заняли почётное восьмое место! Где-то так. Перед вранглерами

²² https://ru.wikipedia.org/wiki/Мальтузианская_ловушка



приподнимали академические четырёхугольные шляпы! От зависти к таланту и уважения к затраченным усилиям.

А как же про арифметическую и геометрическую прогрессию? А вот, там же в первой главе:

«Assuming then my postulata as granted, I say, that the power of population is indefinitely greater than the power in the earth to produce subsistence for man.»

Вот дословный перевод для современника Мальтуса из XVIII столетия:

«Если вы согласились с постулатами, я попытаюсь доказать, что сила роста человеческой популяции бесконечно превышает силу земли для производства человеческого пропитания.»

Для любителей лингвистики поясним, что в английском математическом тексте той поры, «I say» — это как раз «попробуем доказать». А в нашем с вами просвещённом XXI веке, математик или инженер написали бы так:

«Если вы согласились с постулатами, я попытаюсь доказать, что функция плотности человеческой популяции возрастает значительно быстрее, чем функция критической плотности популяции.»

Попробуем, по следам Мальтуса, доказать и мы. Уравнение {3.1} превращается:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = [B(t) - A(t)]P(t)$$

$$P(0) = P_0 \tag{3.3}$$

Здесь:

$P(t)$ – численность популяции от времени, млн человек

$A(t)$ – функция смертности (attrition)

B(t) – функция воспроизводства (birth)

Время у нас в годах, численность населения – в миллионах. Функции А и В измерять будем безразмерными единицами. И во времена Мальтуса, и кое-где даже сейчас, используется устаревшее «рождений на 100 тыс. населения» и, соответственно, «смертей на 100 тыс. населения», что очень неудобно, так как надо таскать за собой коэффициенты. Для нас же, $A=0.001$ – это тысяча смертей на миллион, или же 100 смертей на 100 тыс.

Для постоянных А и В уравнение мы уже решили. Экспонента – вообще интересная функция. Снизу она ограничена нулём. То есть, при отрицательном коэффициенте воспроизводства ($b-a$), рано или поздно количество людей уменьшится до 10^{-6} миллиона, меньше одной особи, и популяцию придётся обнулить: «все вымерли». А вот сверху – ограничений нет никаких.

Уважаемые перцы! Когда у вас в следующий раз зачесется написать, что Мальтус принял экспоненциальный рост ничем не ограниченного населения как постулат и как-то хитро встроил в решение экспоненту, перекреститесь и накарябайте что-то более умное. Во-первых, это не «постулат», а доказанная математическая теорема, с конкретно описанными условиями. С дифференциальным уравнением в придачу. Во-вторых, там так и написано: «ничем не ограниченного» (про ограничения – несколько ниже). И пока вас не выбрали-таки старшим, ну или хотя бы восьмым вранглером, может стоит читать, как у Мальтуса...

Если бы Мальтус написал про экспоненты и на этом остановился, о Мальтусе мы сегодня и не вспоминали. Про экспоненты и логарифмы знал Джон Непер ещё в XVI веке!

Но Мальтус со товарищи двинулся дальше. Он предложил решить такое уравнение:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left[b - b \frac{P(t)}{O(t)} \right] P(t) = b \left[1 - \frac{P(t)}{O(t)} \right] P(t)$$
$$P(0) = P_0 \quad \{3.4\}$$

Здесь рождаемость b постоянна (смотрим второй постулат: секса хочется всегда), а смертность пропорциональна населению, и обратно пропорциональна функции $O(t)$. Последняя имеет размерность в миллионы человек, и называется оптимальной численностью популяции. Легко видеть, что если популяция P в точности равна O , то производная – ноль, а значит, население не уменьшается и не увеличивается.

Если $O(t)$ – константа, то {3.4} называется уравнением Ферхюльста. Бельгийский математик Пьер Франсуа Ферхюльст (Verhulst) решал его в XIX

веке для рыбок.



Представьте, что у вас есть пруд, а в пруду живут зеркальные карпы. Каждый день вы забрасываете в пруд корма, достаточного для O взрослых особей. Если корма слишком много, излишки просто сгнивают. А если корма недостаточно, то умирают и сгнивают «лишние» карпы, кому не досталось еды. Какова будет популяция в вашем пруду от времени?

Система {3.4.} решается аналитически:

$$\frac{O}{P(O-P)} dP = \left[\frac{1}{P} + \frac{1}{O-P} \right] dP = b dt$$

$$\int \left[\frac{1}{P} + \frac{1}{O-P} \right] dP = b t + Const$$

$$\ln \left[\frac{P}{O-P} \right] = b t + Const$$

$$\frac{P}{O-P} = k e^{bt}$$

При $t=0$, $P=P_0$, легко находится константа k :

$$\frac{P}{O-P} = \frac{P_0}{O-P_0} e^{bt}$$

$$P O e^{-bt} - P P_0 e^{-bt} + P P_0 = P_0 O$$

$$P(t) = \frac{P_0 O}{(O-P_0) e^{-bt} + P_0} = \frac{O}{1 + O \alpha e^{-bt}} \quad \alpha = \frac{1}{P_0} - \frac{1}{O} \quad \{3.5\}$$

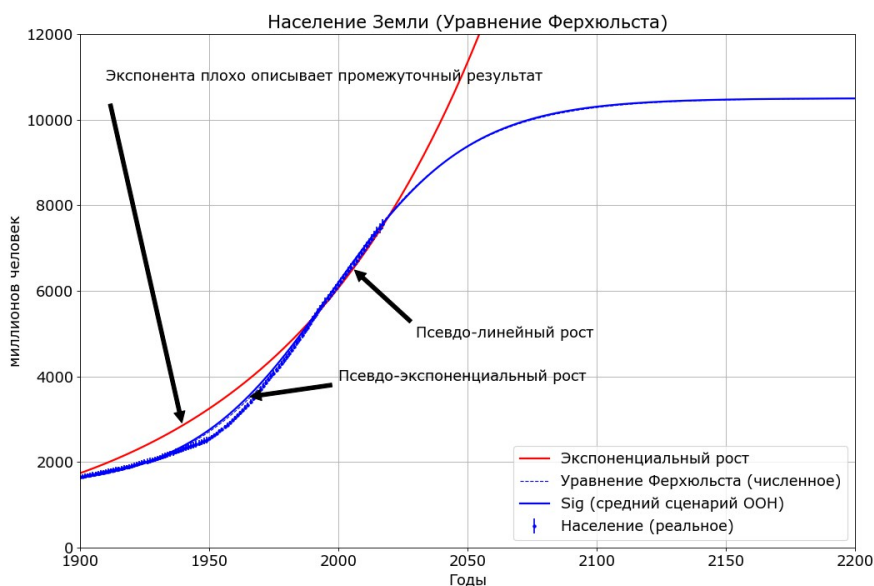
В общем виде решение Ферхюльста называется **сигмной** или логистической функцией и записывается так:

$$Sig(t, t_0, \sigma, Left, Right) \equiv Left + \frac{Right - Left}{1 + e^{-\sigma(t - t_0)}} \quad \{3.6\}$$

Здесь:

Left – значение при $x = -\infty$ (минус бесконечности),
 Right – значение при $x = +\infty$ (плюс бесконечности),
 σ – показатель наклона функции в точке перегиба,
 t_0 – точка перегиба.

Проведём численное решение используя программу: `\Chapter 03\Test_Velhurst_4.py`.



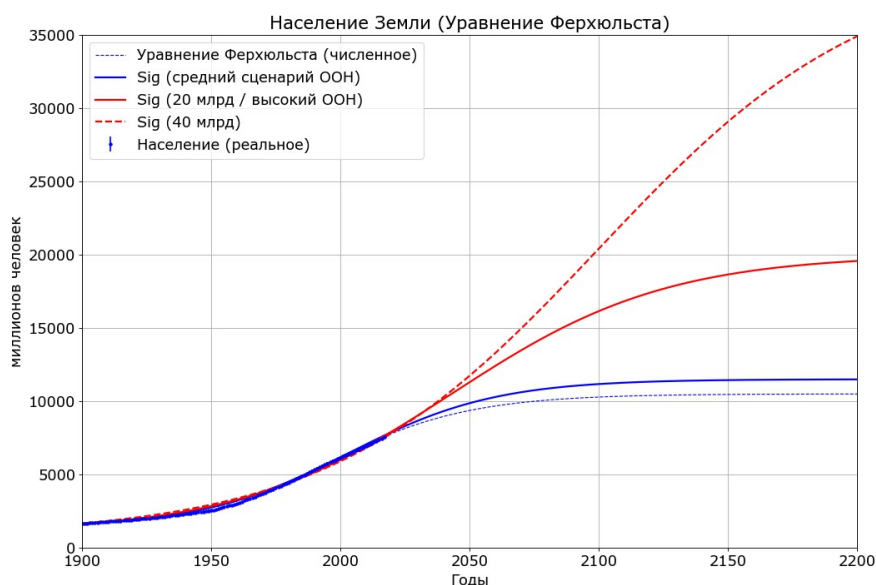
Отметим важное отличие логистической кривой от экспоненты. Бесконечного роста у функции Ферхюльста нет, а есть плавный выход на «полочку». Начиная с популяции 1534 млн человек в 1890 году, к 2200 году набирается 10.5 млрд, – и население стабилизируется.

Более того, у сигмоиды есть три участка. В начале функция растёт вроде бы как экспонента, затем рост становится линейным, затем – рост замедляется, и функция выходит на асимптоту. Благодаря такому поведению, население планеты Земля с 1890 по 2016 описывается сигмоидой гораздо лучше, чем экспонентой. Я призываю читателей самим поиграть с программой и убедиться, что никаким подбором коэффициентов рождаемости и смертности экспоненту к реальным стат-данным подогнать не удастся. У вас либо слишком много народу между 1910 и 1970 годами, либо популяция «выстреливает» после 1980.

У сигмоиды есть и проблема. Поскольку посередине участок линейный,

невозможно предсказать, как поведёт себя кривая справа. Значение константы O в решении {3.5} или константы $Right$ в решении {3.6} приходится подбирать из граничных условий, но ведь условий в будущем мы не знаем.

Начиная с программы `\Chapter 03\Test_Velhurst_5.py`, мы навсегда распрощаемся с функцией экспоненты в чистом виде. Как и в программе *World3*, никакие входные данные или зависимости по экспоненте расти не будут. На конечной планете ничто не растёт до бесконечности. Итак, запускаем программу:



На диаграмме представлено четыре решения:

1. Численное решение, как выше.
2. Первое аналитическое (синяя жирная линия) — известное под псевдонимом «среднее предсказание ООН», с выходом на «полочку» около 11.5 млрд после 2100 года.
3. Второе аналитическое решение (красная линия) — оно же «максимальное предсказание» ООН.
4. Третье аналитическое решение (красная пунктирная линия) — уходит на асимптоту 40 млрд человек, но уже много после 2200 года.

Откуда у меня взялись 40 миллиардов? Из второй главы. Вспомним, что весь поток полезной энергии без разрушения биосферы — 2250 ТВт, а в 2017 году 7.5 млрд землян потребляют не менее 400 ТВт. Отсюда $7.5 \cdot 2250 / 400 = 42$ млрд.

Поглядим на это число поближе. Вот цитата из времён, когда «Пределов

роста» ещё не было, а критиковали Мальтуса и его последователей:

*«That the earth could maintain a **thousand billions of people** as easily as a thousand millions is a necessary deduction from the manifest truths that, at least so far as our agency is concerned, Matter is eternal and Force must forever continue to act.»*

*«То, что Земля может поддерживать жизнь **одного триллиона человек** так же легко, как одного миллиарда, легко вывести из того, что с точки зрения человека, Материя — вечна, и Сила Божия — тоже будет действовать вечно.»*

Хенри Джордж, «Прогресс и бедность», 1879 год

Площадь земного шара — $5.101 \cdot 10^8$ км². Распределив триллион человек, получим плотность населения 2'000 человек на км². Многовато, но прецеденты уже есть: в Бангладеш, на каждом квадрате — более 1'100 человек.

Однако Бангладеш находится на суше, хотя его периодически затапливает. Поделим 1 триллион на площадь суши — $1.489 \cdot 10^8$ км². Приходится говорить о плотности населения 6'700 человек на км². Примерно как в современных мегаполисах, вроде Токио.

Заметим однако, что наш мегаполис простирается к вершинам Гималаев и до Южного полюса в Антарктиде. Оценки обитаемой суши разнятся у разных авторов. Действительно, при условии подвоза продовольствия и наличия неограниченного источника энергии, и Антарктида «обитаема» вполне. Для нашей простейшей прикидки достаточно считать обитаемой 50% площади суши, то есть плотность населения удваивается: 13'400 человек на квадратном километре. Это уже экстрим, но в китайском Макао — 55'000.

Пусть население не отращивает жабры, а выращивает еду на суше. Площади потенциальных сельхозугодий в земной статистике отражены хорошо: $4.884 \cdot 10^7$ км². На каждого из триллиона — по 49 м², или пяточок земли размером 7×7 метров.

То есть, запихать один триллион человек на планету кое-как можно, поверим Хенри Джорджу на слово. Насчёт же «поддерживать жизнь» — позвольте усомниться.

Не будем планировать на триллион, а зададимся целью прокормить 40 млрд человек, используя исключительно возобновляемые источники энергии. В пику Хенри Джорджу заметим, что вариант 40 млрд кое-как, с большой натяжкой, — реализуем, а вот триллион — сродни космооперным тераваттам ИЕА, с которыми мы разбирались выше. Наш Хенри оказался не Джорджем, а перцем!

Во второй главе мы подсчитали, что на душу в год надо 480 кг зерновых, Распахать, естественно, придётся все потенциальные сельхозугодья. С квадратного километра надо собирать $40 \cdot 10^9 \cdot 480 / 4.884 \cdot 10^7 = 400 \cdot 10^3$ кг, то есть по 4 тонны с гектара. На душу населения приходится по 12 соток в среднем.

Тяжеловато, но прецеденты есть. В восьмидесятые годы Джон Джевонс

организовал контору «Экологическая инициатива»²³ и пытался доказать, что человека можно кормить с 2.6 соток²⁴. «Оценка Джевонса» была последовательно повышена до 4 соток, затем – до десяти. Сам Джевонс, правда, с десяти соток не живёт, а зарабатывает на жизнь продажей книг и DVD и проведением семинаров по интенсивному выращиванию «органических» сельхозпродуктов. В первых, экстремистских, вариантах ведения органического хозяйства, предполагалась утилизация умерших в компост, примерно как в Юго-Восточной Азии позапрошлого века. Типичный вьетнамский биореактор показан ниже.



Однако 40 миллиардов поселить не получится. Вы заметили, у девушки на картинке выше – резиновые сапоги, одежда с фабрики, сельскохозяйственные орудия в виде металлических леек и пластмассового ведёрка? А в ведёрке – какие-то удобрения. Без хотя бы элементарной технологии, о 4 тоннах с гектара можно только мечтать. Тот же Джон Джевонс покажет вам и лопаты, и культиватор, и шланги-лейки-ведёрки, и скажет, что без шляпы – тепловой удар. Голыми руками голый человек 12 соток обработать не способен от слова никак.

Проведём вторую оценку, опять-таки по вычислениям из второй главы. Поток энергии высокой концентрации в 2017 году – не менее 18.5 ТВт. Максимальный поток возобновляемой энергии при условии ветряков через каждый километр и плотины на каждом ручье – 47 ± 5 ТВт. Отсюда, максимальное население планеты: $47 * 7.5 / 18.5 = 19 \pm 2$ миллиарда.

²³ <http://www.johnjeavons.info/index.html>

²⁴ Напомним, что во второй главе мы независимо подсчитали абсолютный предел: 2.2 сотки.

Я не знаю, как считает ООН, но моё, рассчитанное по энергетике, попадание вполне соответствует их «максимальной» оценке. Есть и несколько других оценок. Например, движение веганов постоянно заявляет, что на веганской диете Земля прокормит 15 миллиардов. До этих оценок мы ещё дойдём.

Хорошо ли будет жить двадцати миллиардам на этой прекрасной планете? Надо признать, мир получается грустноватый.

Итак, мы расставили по всей планетке ветряки, перегородили все реки плотинами, вырубили и распахали джунгли и леса, прокопали каналы, оросили степи, осушили болота, превратив всю планету в 4'900 млн га пшеничных полей, рисовых чеков и пастбищ для скота. На семью из 4 человек приходится надел земли около 1 га, то есть стандартное футбольное поле с беговой дорожкой. Конечно, это в среднем. В тропиках – вдвое меньше, в Сибири или Канаде – втрое больше. Над головой – непрерывно «вушь-вушь-вушь».

Впрочем, играть в футбол или бегать стометровки вряд ли кто-то будет всерьёз – лишний расход энергии. Путешествия? Куда, зачем? По всей планете – точно такие же поля, разве что в Азии чаще сажают рис, а в Америке – кукурузу! Хозяйство, натурально, – коллективное. Называть можно по-разному: община, колхоз, коммуна, или кибуц, суть не меняется. В частных хозяйствах не добиться желаемой урожайности 30-40 центнеров с гектара. Небоскрёбы? Вряд ли. И на пятый этаж дрова и воду донести – это лишняя работа, а ещё и без лифта. К тому же, поля и огороды просто обязаны находиться в пределах пешеходной доступности. На транспорт ресурсов нет. Как, впрочем, и на любые другие излишества.

Кроме человека, многоклеточных биологических видов на Земле будет всего несколько сот, и большинство – насекомые (вши, блохи, клопы, тараканы), а также солитёр в кишечнике. Всё, абсолютно всё, придётся делать без помощи четвероногой мускульной силы. Один ослик кушает столько же, сколько один человек. Одна лошадка или буйвол – это 2-4 нормы от человеческой нормы сельхозугодий. Так что, если хочется жить как цивилизованные американские амиши и пахать на лошадях, 20 млрд человек на планету ну никак не втиснуть.

Образование? Не очень. Естественно, детский труд становится нормой. Школа для мальчиков – от пяти до семи лет, дальше обучаемся в поле или на ферме. Девочкам в школу можно, но не обязательно. Пропусти сегодня школу, Настенька. Папочке надо помочь с прополкой!

Медицина? Если в школе учатся в среднем по два года, кандидатов в доктора, будет, прямо скажем, немного. Впрочем, в коммунистическом Китае в 1968 придумали ответ: «босоногие доктора», с образованием пять классов и ускоренными курсами, могут кое-как обеспечить элементарное. Настоящая медицина – для верхнего пол-процента населения в столицах. О пересадках органов, как в романах Паоло Бачигалупи, следует забыть напрочь.



Интернет и телевидение? Возможно. В нашей деревне есть один на всех – телевизор. Зимой, когда делать на полях нечего, голосованием сотни зрителей выбираем программу. Вот последнего слона из зоопарка на другой стороне планеты показывают. Смотрите, пока слон ещё живой! Книги? Библия! Или Коран. А больше вам и не надо.

И ещё: социальный контроль популяции. Конечно, эпидемии, неурожай и локальные войны за ресурсы станут регулярно вычищать место для новых детишек. Но в тех деревнях, где голод или болезни почему-то задерживаются, ни одной женщине не разрешат рожать третьего. Кто это станет делать: совет старейшин или полиция – неважно. Естественно, по достижении детьми детородного возраста, родители отправляются... Отправляются... Переверните на две страницы назад. Видите ту красивую башенку? В биореактор!

Короче, жить как-то можно, но мне в такое будущее не хочется. А вам?

Но самая большая проблема: как в условиях такого общества удержать неграмотную Настеньку от третьих, пятых, восьмых родов? И как её шестнадцатилетний муж, – малограмотный, с тремя классами начальной школы – добудет себе современные пестициды, гербициды, генетически-модифицированное зерно и прочую механизацию с генетикой, чтобы выбатывать по 40 центнеров с каждого га?

Оценив население сверху, теперь дадим оценку снизу. Кто сказал: всем Армагеддец? Не дождётесь. Конечно, человечество достигло огромных успехов в технологии уничтожения себе подобных, но моделированием ядерной войны заниматься как-то неинтересно.

Во второй главе мы посчитали, что технически-реализуемый поток энергии высокой плотности из возобновляемых источников – 4.6 ТВт. Отсюда легко посчитать $4.6 \cdot 7.5 / 18.5 = 1.9$ миллиарда.

Ясно, что уравнение Ферхюльста надо решать дважды: сначала для восходящей ветки, а затем – для нисходящей. Полученная функция называется весело: «*функция Ванны*»:

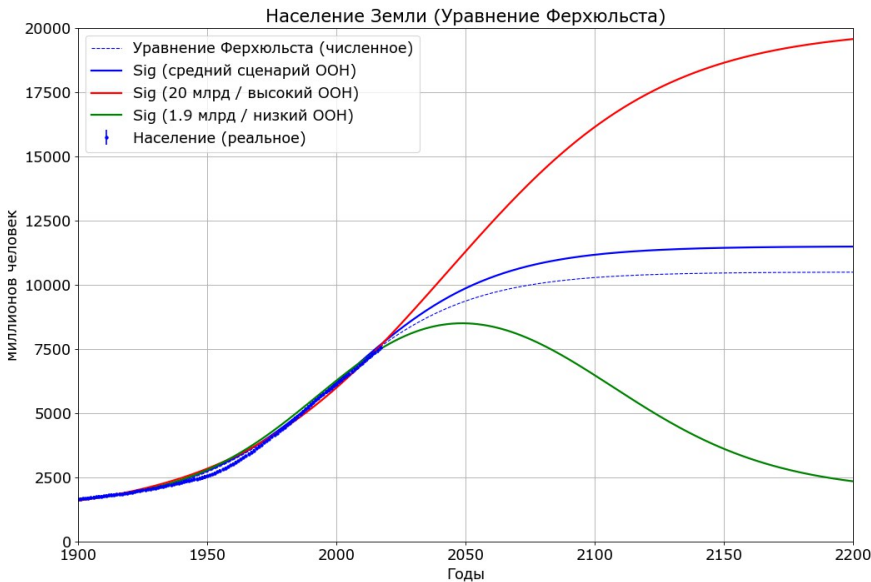
$$Bath(t) \equiv Sig(t, t_0, \sigma_0, Left, Middle) + Sig(t, t_1, \sigma_1, 0, (Right - Middle)) \tag{3.7}$$

Здесь:

- Left – значение при $x = -\infty$ (минус бесконечности),
- Middle – значение между x_0 и x_1 (может не достигаться),
- Right – значение при $x = +\infty$ (плюс бесконечности),
- t_0 – левая точка перегиба,
- σ_0 – показатель наклона функции в левой точке перегиба,
- t_1 – правая точка перегиба,
- σ_1 – показатель наклона функции в правой точке перегиба.

Просто сумма двух сигмоидов. Хорошо описывает технические детали, например вероятность телевизора сгореть в какой-то день после выпуска с китайского завода.

В программе `\Chapter 03\Test_Velhurst_6.py`, применим эту функцию для расчёта минимальной стабильной популяции при условии использования только возобновляемых источников энергии.



Константа σ_1 из краевых условий никак не вытекает, поэтому подберём её так,

чтобы следовать «минимальному сценарию» ООН. Константа x_1 ограничена слева реальными данными о населении и ограничена справа величиной σ_1 . В «минимальной оценке» ООН пик населения наступает в 2050 году, на уровне 8.6 млрд. Ещё раз напомним: я не знаю, как вычисляют свои предсказания демографы ООН. Делаю предположение, что фундаментальную работу Ферхюльста читали и используют похожую математику.

Хорошо ли будет жить нашим правнукам на «минимальной» кривой? Сейчас сторонники убегания от зомби-апокалипсиса к дикой природе начнут кидать в меня органические удобрения с совковой лопаты.



Итак, джунгли и леса остались как было, а под поля и огороды занято (как сейчас) около $1.4 \cdot 10^7$ км². На семью из 4 человек приходится надел земли в среднем 3 га (в тропиках – вдвое меньше, в южной Сибири – втрое больше). Заполярье оставлено для белых медведей и Песцов. Вместо «вушь-вушь-вушь» огромных ветряков – приятный уху стук водяной мельницы на ручье. Средняя урожайность – 6-12 центнеров с гектара, то есть как оно было до гербицидов, пестицидов, сделанного из природного газа аммиака и генетически-модифицированных семян.

Хозяйство, натурально, – коллективное. Отдельные куркули хотят и будут жить на хуторах и подвергаться общественному ostracismу, остальные всё равно в общинах. Небоскрёбы? Да. Для нескольких процентов населения, живущих в сильно съёжившихся городах.

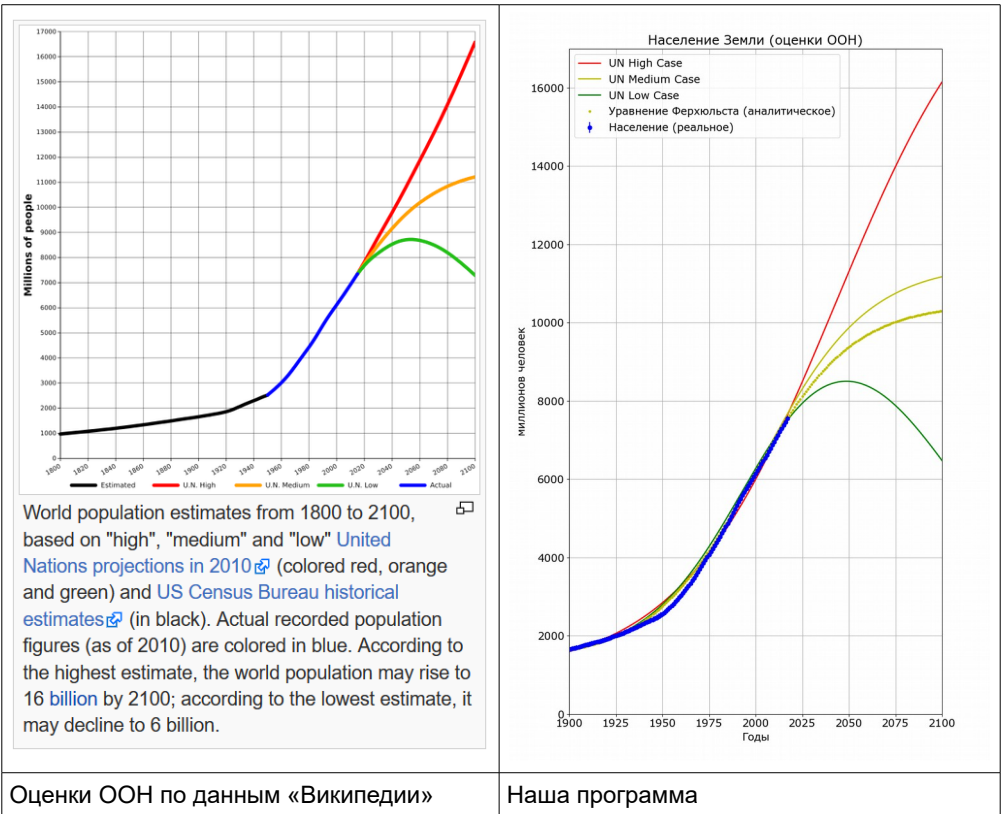
Есть и хорошие новости. Кроме человека, на планете останутся и почти все современные биологические виды, в том числе гужевые домашние животные (привет амишам). Так что 3 га всё-таки будут пахать лошадки, а не людишки с мотыгами.

Состояние дел с образованием, медициной, культурой? Не сильно отличается от сценария на 20 миллиардов. Детский труд всё тот же, разве что вместо «босоногого доктора» – земский врач, и телевизор не на сто зрителей, а на двадцать, да ещё «*Книга о вкусной и здоровой пище*» стоит на полочке рядом с Библией.

Интересно, что останется социальный контроль популяции. Как иначе удержать неграмотную Настеньку от двенадцати родов?

Вы говорите: автор перегибает палку? Это не я перегибаю, а ООН. Лично я считаю, что ни сценарий «стабильных 20 миллиардов», ни сценарий «стабильных 2 миллиардов» реализоваться никак не могут, а коридор возможных решений значительно уже. Впрочем, я не одинок в своих оценках, но об этом будет далее.

Теперь для удобства пользования вынесем наш класс **Population** в отдельный файл и прошьём две сигмоиды и одну «ванну» оценок ООН – они нам понадобятся в последующих главах.²⁵ Результат представлен в программке \Chapter 03\Test_Population_7.py



²⁵ В комментариях к блогу проскочило, что автор зря считает функции до 2200 года. Это было сделано не зря, а чтобы показать читателю «кухню» позади оценок ООН. Если обрубить на 2100 году, – совершенно непонятно, как получились кривые ООН-овских предсказаний.

Самое время подвести итоги.

- Нами воспроизведены демографические оценки Организации Объединённых Наций.
- Авторы *«Пределов роста»* потратили 52 страницы, чтобы рассказать читателям, что банковские счета и финансовые рынки растут по экспонентам, а население так не умеет. Используя вместо коробочек обыкновенные дифференциальные уравнения от математиков XIX века, то же самое можно доказать несколько быстрее. В качестве бонуса читатель получил бесплатный работающий код для самостоятельных экспериментов.
- Абсолютный максимум населения Земли при условии потребления энергии только из возобновляемых ресурсов – где-то в пределах 40 млрд человек, плюс-минус пятьдесят процентов. Возможно, методами генной инженерии можно создать простейшие организмы с более эффективным захватом солнечной энергии (хлорелла) или производства протеинов (дрожжи). В любом случае, для производства продовольствия эти организмы обязаны вытеснить большую часть естественных видов, а человеческое существование сведётся к потреблению еды.
- При сохранении цивилизации, население планеты Земля, при условии потребления энергии только из возобновляемых ресурсов, – ограничено сверху числом около 20 миллиардов, однако современными технологиями такая плотность населения достигнута быть не может. При любых технологиях, население в 20 млрд приводит к разрушению биосферы Земли и практически полному уничтожению многоклеточных видов, кроме «культурных» растений и животных, а также паразитов. Жёсткий предел порядка 20 млрд неизбежен в связи с ограничением по потоку энергии высокой концентрации, а контролирующим фактором является продовольствие.
- При условии использования только технически-осуществимых источников возобновляемой энергии (на уровне технологии 2018 года), равновесное население может быть оценено числом 2 миллиарда. Такое население заведомо не приводит к деградации природных ресурсов, однако среднее качество жизни будет, вероятно, несколько ниже, чем сейчас. Социальные условия, вероятно, не позволят населению стабилизироваться на таком уровне.
- Сама по себе, статистика о численности населения Земли не может быть использована для предсказания поведения кривой народонаселения. Всякая честно построенная модель должна включать независимые методы вычисления граничных условий справа.