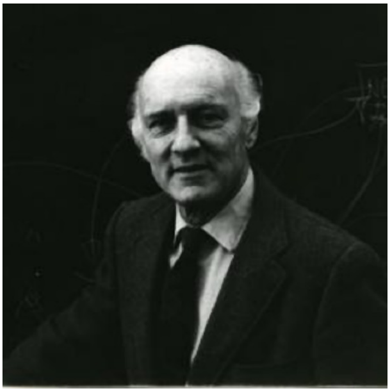


# Глава 5. А и Б сидели на трубе.

О сколько нам открытий чудных
Готовят просвещенья дух
И опыт, сын ошибок трудных,
И гений, парадоксов друг,
И случай, бог изобретатель.

(наше всё по заказу Гостелерадио)

Когда вещает с «ящика» Капица,
То мне до страсти хочется напиться,
Ведь сознавать ну так обидно:
Невероятное - на редкость очевидно.

(Вадим Золотарский, без заказа)

В ноябре 1960 два аспиранта Университета штата Иллинойс приготовили своему профессору ко дню рождения необычный подарок – научную статью[38], где утверждалось, что наша цивилизация кончится в один определённый день: 13 ноября 2026 года. Дата выбрана не случайно: 115 юбилей именинника, да к тому же «пятница, тринадцатое». Вкратце изложим математику в статье, используя обозначения, принятые в этой книге. В уравнении Мальтуса {3.3} положим:

$$A(t)=a=Const \qquad B(t)=b\,P^{1/k}(t)$$

Получаем так называемое уравнение фон-Фёрстера:

$$\frac{\partial P}{\partial t}=b\,P^{1+1/k}(t)-aP(t)$$

$$P(0)=P_0 \qquad \{5.1\}$$

Почему смертность константа? Естественно, все мы *внезапно смертны*™, а бессмертия, увы, пока не придумали. Почему рождаемость пропорциональна популяции в какой-то степени? Чем больше популяция, тем легче человеку найти себе подходящего партнёра для секса и для бизнеса, то есть всё больше детей и всё быстрее развитие технологии. Производство пищи и других материальных ценностей возрастает быстрее, чем популяция, то есть всем всегда всего вдосталь.

Уже позже немецкий астрофизик Себастиан фон-Хёрнер подвел обоснование из теории графов. Допустим, есть P абонентов телефонной сети. Количество возможных подключений возрастает: два абонента – единственная возможность соединения, три абонента – три соединения, пять абонентов – 10 соединений, и вообще:

38 Von Foerster, Mora, and Amiot, «**Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026**», Science, 132 #3436 стр. 1291-1295, 1960 г. См. также: Sebastien Von Hoerner «Population Explosion and Interstellar Expansion» Journal of the British Interplanetary Society (28): 691–712.

$$Количество\,возможностей = P\frac{(P-1)}{2} = \frac{P^2}{2} - \frac{P}{2}$$

В самом простейшем случае, примем в уравнении {5.1} k=1, и тогда получается $P^2$, как выше. Членом aP(t) можно пренебречь, так как при k около единицы он мал по сравнению с $P^{1+1/k}$:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = bP^{1+1/k}(t) \qquad P(0) = P_0 \tag{5.2}$$

Вы ещё не разучились решать ОДУ методом разделения переменных, как описано в третьей главе?

$$P(t) = \frac{K}{(t_0 - t)^k} \qquad K = b^{-k} \tag{5.3}$$

Константы K и $t_0$ находим подбором. Аспиранты вроде бы собрали данные по оценкам человеческой популяции из 24 источников, отрисовав их, по моде того времени, на билогарифмическом бланке. Обнаружилось наилучшее приближение:

$$P(t) = \frac{(1.79 \pm 0.14) \cdot 10^{11}}{(2026.87 - t)^{0.990 \pm 0.009}} \tag{5.4}$$

Тут же рассчитали время Творения. Адам $P(t_{Творения})=1$ был создан в апреле 232'550'998'901 года до Рождества Христова и счастливо жил в Раю примерно 100 млрд лет, пока Господь не создал ему Еву. Далее пошло-поехало.

Проверили решение на устойчивость! Оказалось, что располагай Шарлемань[39] нашим уравнением, на своих статистических данных он бы вычислил приход Конца Света с точностью ±300 лет (если бы у него была статистика, ага). Елизавета I могла бы скомандовать своим статистикам, и установила бы дату с точностью ±110 лет, а Наполеон предсказал бы с точностью ±30. Со статистическими данными 1959 года точность предсказания куда лучше: ±10 лет.

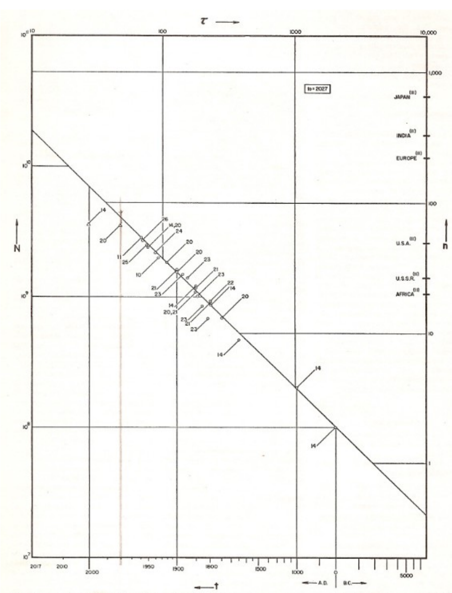



Fig 1. World population $N$ (left scale) and world population density $n$ in elements per square mile (right scale) observed (circles), calculated after Eq. 11 (solid line) and projected by different authors (triangles) as a function of historical time $t$ (bottom scale), and of dooms-time $\tau$ (top scale). The numbers associated with each point are references.

39 Он же Карл Великий

Статья заканчивается пассажем (выделение моё):

In view of this uncomfortable picture it is clear that, while the pessimists, one way or another, are "Malthusians by profession," the optimists must be "Malthusians at heart," hoping that at some time, somehow, something will happen that will stop this ever-faster race to self-destruction.

*Нельзя не согласиться с точкой зрения оптимистов, утверждающих, что Человек Разумный всегда найдёт новые технологии для дальнейшего роста[...] Мы с удовлетворением заключаем, что «принцип бесконечного развития технологии», будучи проверен на 100 поколениях наших предков,* **ещё три поколения продержится**. *Не стоит напрягать теорию, и рассчитывать пессимистические экстраполяции [развития человечества]. Пессимисты глубоко заблуждаются. Наши праправнуки не вымрут от недостатка пищи и ресурсов.* **Они задушат друг друга в крепких объятиях.**

*Глядя на такую перспективу, ясно: если считать пессимистов «мальтузианцами по профессии», оптимисты являются «мальтузианцами в сердце». Они несутся по всё-возрастающей кривой к самоуничтожению, но глубоко внутри уверены, что чудо спасёт.*

Особенно смешно выглядит определение даты Судного Дня с точностью до сотой: 2026.87±5.50! Ничего не замечаете? Предыдущая «пятница 13 ноября» – в 2020 году, следующая – только в 2037. Вот зачем надо пять с половиной лет. А упоминание газетной утки 1956 года про «Отвратительного Угольного Человека»? А отрицание смерти «ввиду её незначительности»? А «статистическое усреднение по числам из статей нескольких авторов»?

Жанр этого текста: «физики шутят». Точнее не физики, а инженеры. Пранк изготовлен на факультете электроники и вычислительной техники УИ. Вся «математика» в статье – не более чем тонкий академический прикол, хорошо замаскированный под научность. Каждому в достаточной степени владеющему английским и теорией ОДУ ясно, что авторы «продёрнули» одновременно и хомячков М.К.Хабберта, вычислявших дату мирового Пика Нефти с точностью до дня и часа (один билогарифмический бланк чего стоит), и нео-кейнсианцев типа Р.Солоу, и вообще всех корпоративных «учёных», подгоняющих математику под желаемый ответ.

Через пятнадцать лет, когда иллинойсская реприза хорошо забылось, шутку воспроизвёл в Англии фон-Хёрнер[40]. Его прикол был рассчитан не на профессоров и аспирантов, а на более широкую аудиторию, оттого и математика попроще:

$$\frac{\partial P}{\partial t}=bP^2(t) \qquad P(0)=P_0$$

$$P(t)=\frac{K}{t_0-t}=\frac{2\cdot 10^{11}}{2026.87-t} \qquad \{5.5\}$$

Для достоверности пришлось пожертвовать Творением Адама в

40 Незадолго до смерти в 2012, С.П.Капица опубликовал ряд публицистических статей в Интернет, где по ошибке назвал решение фон-Хёрнера уравнением Мак-Кендрика. Пол Мак-Кендрик тоже демограф, и уравнение есть (матрица Лесли в дифференциальном виде), но к шуткам аспирантов УИ никакого отношения не имеет. В статье 1996 года 68-летний Капица называет фон-Хёрнера правильно. См. http://pikabu.ru/story/sergey_kapitsa_istoriya_desyati_milliardov_3995327

232'550'998'901 году до Р.Х. и Шарлеманем, зато в статье фигурировал Сумрачный Немецкий Гений. Добавьте к фамилиям фон-Фёрстер и фон-Хёрнер ещё и «фон-Браун»! В качестве «выхода» из «создавшейся ситуации» отец-основатель SETI предлагал (a) *куплять фанеру*™ («строить межзвёздные корабли и лететь отседа…», ага) и (b) *входить в сношения*™ с межзвёздными цивилизациями, кои нас спасут!

Конечно, к математическим шуткам надо относиться именно как к шуткам. Однако проверим. В качестве входных данных я взял, во-первых, оценки населения планеты разных авторов с 3000 года до Р.Х. по 1900 год, а во-вторых – статистику UNESCO с 1890 по 2015. Последнюю мы уже использовали в главе 3. Масштаб то вертикали логарифмический.

Красные границы допуска на графике – не математическая статистика, а просто разброс значений у разных авторов. Например, для года рождения Христа существует не менее 10 разных оценок популяции, с диапазоном значений между 170 и 330 млн, то есть разброс около 30% от «условно среднего» 250 млн, или в переводе на более русский – по воде вилами писано.

К сожалению, не все, кто ценит инконелевую английскую иронию, разбираются в ОДУ, и не все, кто умеет в ОДУ понимают юмор. Прежде чем рисовать, приведём полное решение уравнения фон-Фёрстера для **k=1**, если не «*пренебречь смертью, как подобает немецким учёным*»™:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = b\,P^2(t) - aP(t) \qquad P(0) = P_0$$

$$\ln\left[\left|1 - \frac{a}{bP}\right|\right] = a\left(t_0 - t\right)$$

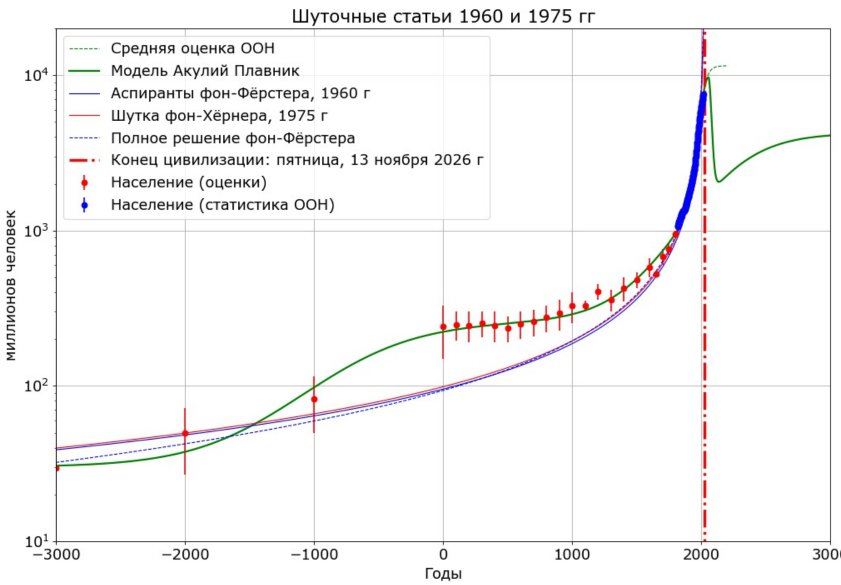
$$P(t) = \frac{a}{b\left(e^{a(t_0-t)} - 1\right)} = \frac{a}{b}\, e^{-a\frac{t_0-t}{2}}\, Csch\left[a\frac{t_0-t}{2}\right] \qquad \{5.6\}$$

– то есть просто гиперболический косеканс, нормированный экспонентой.

Пример в программе **\Chapter 05\Test_Kapitsa_1.py**

Наблюдаем, что исторические данные с 3000 года до Н.Э. на модель шутников-аспирантов укладывается чуть лучше, чем никак. Две точки попадают на график лишь случайно: -2000 и +1650 годы. Естественно. Хитроумные студозиусы и не стремились ничего аппроксимировать. Вся затея состояла в том, чтобы «уложить» решение на специфическую дату: пятница, 13 ноября 2026 г, 115 юбилей уважаемого профессора.

Чисто для сравнения, на график наложена сумма решений, подобная острову Св.Мэтью, что мы разбирали в 4 главе. Я совсем не утверждаю, что у человечества наступит обвал популяции ровно в 12:43:17 московского времени 1 мая 2056 года.  Просто, если уж хочется аппроксимировать данные античных времён, можно сделать это куда более элегантно!




В 1996 году, внезапно, доктор физ-мат наук, вице-президент РАЕН, профессор и телеведущий Сергей Петрович Капица взялся выводить из полузабытого уравнения-шутки фон-Фёрстера «Феноменологическую теорию роста населения Земли»[41].

Уравнение {5.5} записалось в виде:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{P^2(t)}{K} + \frac{1}{\tau} \qquad P(\infty) = P_{max}$$

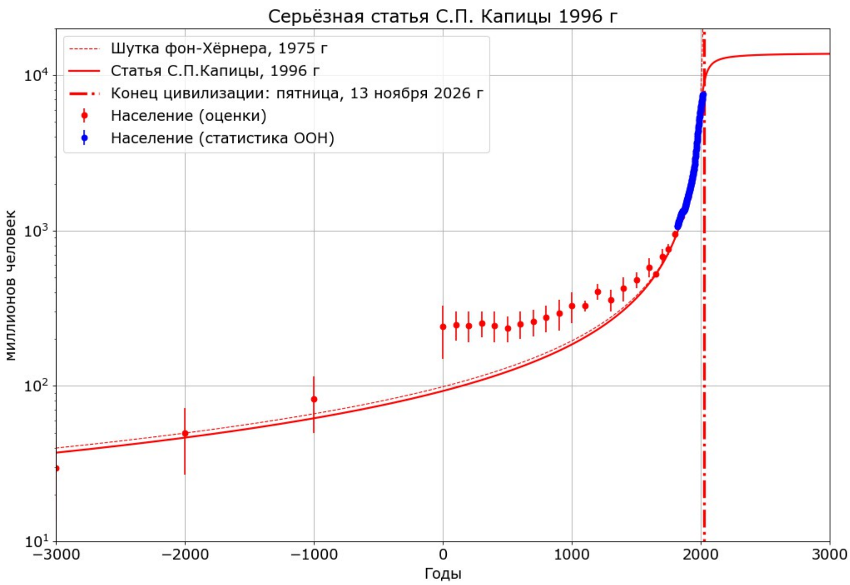
$$P(t) = \frac{K}{\tau} \cot^{-1}\left(\frac{t_0 - t}{\tau}\right) \qquad \{5.7\}$$

Замена гиперболического косеканса на арккотангенс, в-общем, штука известная, ещё дед Сергея Петровича, генерал флота и академик А.Н.Крылов, такими заменами подарил нам Теорию Остойчивости.  Пример в программе **\Chapter 05\Test_Kapitsa_2.py**

```
#
# Описывает популяцию по методу С.П.Капицы
# "Успехи физических наук" 139(1) 57-71, РАН, 1996
#
class Population_Kapitsa:
    def __init__( self, T0=2007, K=186e3, tau=42):
```

41 "Успехи физических наук" 139(1) 57-71, РАН, 1996

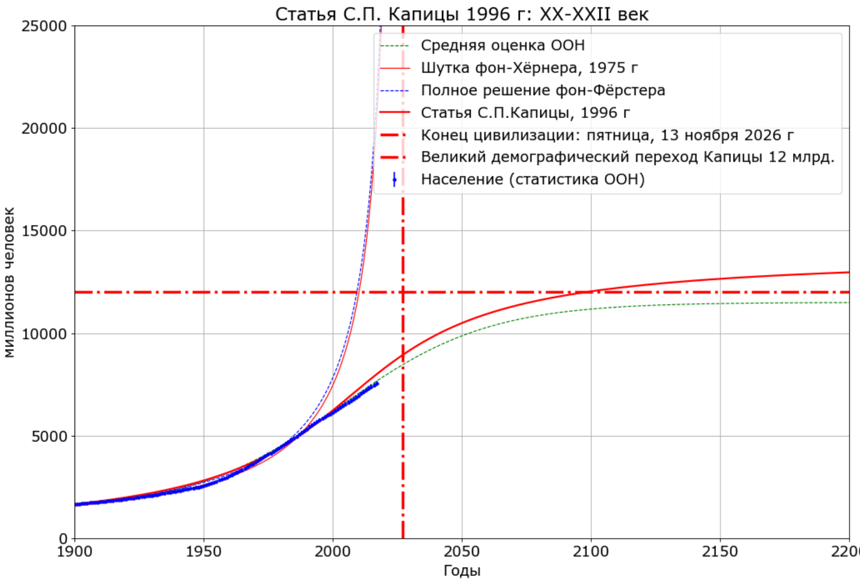
```
        self.T0 = T0
        self.K = K
        self.tau = tau
        return
    def Solve( self, t):
        self.Solution_Time = t
        self.Solution_P = self.K / self.tau
        self.Solution_P *= np.pi/2 - np.arctan((self.T0 - t)/self.tau)
        return
```




Чтобы не загромождать график, я оставил только шутку фон-Хёрнера, оценки народонаселения и данные ООН. Легко видеть, что для времён давних, то есть до 1890 года, умствования шутников из УИ и «гениальное решение» С.П.Капицы работают одинаково: никак. При этом, никакими ухищрениями «провал тёмных веков» с 300 по 800 годы не описать. Производная в уравнении {5.7} строго положительна, а значит функция **P(t)** может только расти.

Однако кого волнуют времена до XX века? Там и проверить-то нечем, оценки населения разнятся на десятки процентов. Посмотрим в будущее. Конечно, никакого выхода в бесконечность и взаимного удушения в объятиях, как в статьях-шутках, у Капицы нет, чего и хотелось. Уберём с графика ненужный более логарифмический масштаб и поглядим на наше время. **\Chapter 05\Test_Kapitsa_3.py**

Прикольные решения {5.4}, {5.5}, {5.6} описывают реальную популяцию Земли примерно с 1900 по 1950 годы. Далее они проваливаются ниже, а с 1970 – наоборот: взлетают в бесконечность. Ничего удивительного. По формуле {5.5} легко прикинуть, что для такой производной к 1990 году каждая женщина на Земле должна произвести 10 успешных родов, а с 2012 – рожать как рекордная свиноматка, по десятку детишек ежегодно!




В 1996 году С.П.Капица подбирал данные по статистическим данным до 1995 года, и константы легли так:

$$K = 186\,\textit{млрд} \qquad t_0 = 2007 \qquad \tau = 42$$

Как видим, несмотря на недостаток данных, С.П.Капица успешно предсказал GFC, начавшийся в декабре 2007. Что же до величины **τ**, так это вообще мировая константа![42] Для 2015 года предсказание С.П.Капицы – 7'790 млн человек, а ООН отчиталась только о 7'383. Разницу в 407 млн (6%) от нас наверняка скрывают, но поглядев в «карты Гугл», я легко обнаружил пропажу.

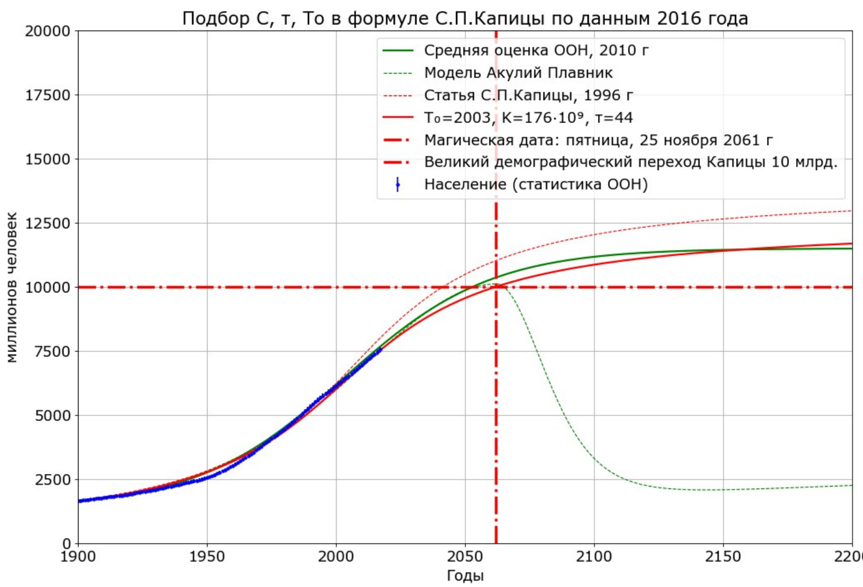
42 Полное описание: Adams D, **THGTTG, Phases 1 & 2**, BBC, MCMLXXVIII-XXX.

Теперь вы поняли, откуда в Америке 2010 года взялась дополнительная нефть?

«Великий демографический переход» случится ровно в 2100 году, когда население Земли достигнет ровно 12 млрд человек.

Конечно, шутка! В нашей суровой реальности «*внутре у неё неонка*»™. Никакого сакрального смысла константы в формуле Капицы не имеют, а просто двигают график арккотангенса. Константа **τ** изменяет наклон, точно так же, как σ меняет наклон сигмоиды в формуле {3.6}. Время $\boldsymbol{t_o}$ двигает график по горизонтали. ***K*** – подбирает желаемый масштаб по вертикали.

Подберём значения констант для реальных данных 2016 года **\Chapter 05\Test_Kapitsa_4.py**




Оказывается, до «великого демографического перехода» Капицы у нас ещё есть несколько лет. Переход 12 млрд настанет ровно в 6:32 утра по Московскому времени, в пятницу, первого сентября 2311 года. Так-то. Впрочем, в своих более поздних статьях С.П.Капица стал настаивать, что 12 млрд в статье 1996 года – опечатка. Следовало читать: 10 млрд. Ну ладно, тогда переход будет после обеда, в пятницу 25 ноября 2061. Если не поняли шутки, перечитайте главу с начала.

Существует ещё много специальных функций, ограниченных сверху и снизу, а посередине довольно похожих на сигмоиду Ферхюльста. Например, табличная функция **Erf**. Попробуйте на досуге – у вас выйдет ничуть не хуже, чем у уважаемого Сергея Петровича. Потом можете сбоку прикрутить гвоздями и приклепать болтами философию: ведь первая производная **(Erf)'** есть функция нормального распределения, она же гауссиана! Ну и что?

А как же насчёт количества возможных взаимодействий? Да, количество взаимодействий растёт как $P^2$. Если население на какой-то площади удваивается, вчетверо легче двигать науку или искать подругу жизни. Однако так же вчетверо легче найти себе заклятого врага, попасть в аварию или подцепить какую-нибудь заразу. В среднем, эффект сначала положительный, а потом нулевой, а то и отрицательный. Впрочем, о законе убывающей доходности мы поговорим отдельно.

В этом месте самое время повторить последний вывод третьей главы: *Сама по себе, статистика о численности населения Земли не может быть использована для предсказания поведения кривой народонаселения. Всякая честно построенная модель должна включать независимые методы вычисления граничных условий справа.* Чем мы теперь и займёмся.

Модели, где энергия тратится не одновременно с её получением, а кривые роста и спада не симметричны, математики рассматривали давно. Для разминки – классическая задача про зайцев и лис, предложенная в середине 1920-х годов американским математиком и физ-химиком А.Дж.Лоткой и независимо от него – итальянским физиком В.Вольтеррой. Десятилетием позже этой же системой уравнений занимался в Советском Союзе А.Н.Колмогоров. Пусть $P_h$ – количество зайцев в лесу, а $P_f$ – количество лис. Естественно описать коэффициент рождаемости лис пропорционально наличию в лесу зайцев, а коэффициент смертности зайцев – пропорционально наличию лис.

$$\frac{\partial P_h}{\partial t}=\left[b_h-\alpha_h P_f(t)\right]P_h(t) \qquad P_h(0)=P_{h0}$$

$$\frac{\partial P_f}{\partial t}=\left[\beta_f P_h(t)-a_f\right]P_f(t) \qquad P_f(0)=P_{f0}$$

Здесь:

$\boldsymbol{\alpha_h}$ – нормированный коэффициент смертности зайцев, то есть вероятность неудачной (для зайца) встречи с лисой;

$\boldsymbol{\beta_f}$ – нормированный коэффициент рождаемости лис, то есть вероятность удачной (для лисы) встречи с зайцем.

Заметим, что оба уравнения есть не что иное, как слегка модифицированное уравнение Мальтуса-Ферхюльста {3.1}.

У системы есть тривиальное решение при $P_h=P_f=0$; если в лесу нет ни зайцев, ни лис. Есть одно нестабильное решение при $P_f=0$, $P_h>0$. Если в лесу совсем нет лис, популяция зайцев уходит в бесконечность по экспоненте. Есть и стабильное решение $P_{h1}>0$, $P_{f1}>0$, когда популяция животных не изменяется. Если численность не меняется, производные равны нулю. Отсюда:

$$b_h P_{h1} - \alpha_x P_{f1} P_{h1} = 0 \qquad \alpha_h = \frac{b_h}{P_{f1}}$$

$$\beta_f P_{h1} P_{f1} - a_f P_{f1} = 0 \qquad \beta_f = \frac{a_f}{P_{h1}}$$

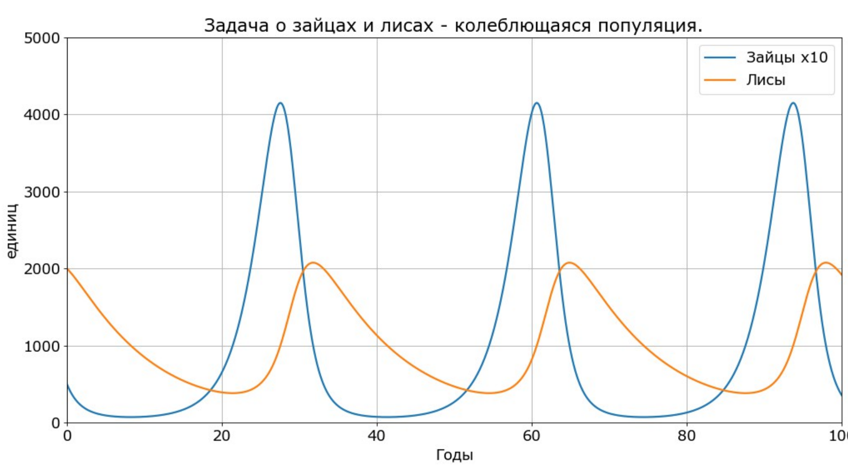
Тогда уравнения запишутся так:

$$\frac{\partial P_h}{\partial t} = \left[1 - \frac{P_f(t)}{P_{f1}}\right] b_h P_h(t) \qquad P_h(0) = P_{h0}$$

$$\frac{\partial P_f}{\partial t} = \left[\frac{P_h(t)}{P_{h1}} - 1\right] a_f P_f(t) \qquad P_f(0) = P_{f0} \qquad \{5.8\}$$

При малых отклонениях численности от ($P_{h1}$,$P_{f1}$), популяция будет бесконечно колебаться по синусоиде, и для таких отклонений существует аналитическое решение, аналогичное уравнению Галилея для «длинного» маятника. Нам это решение не очень интересно, поэтому приводить его здесь не будем. Желающие могут заглянуть в любую книгу по уравнениям математической физики.

По следам Колмогорова, рассмотрим большие отклонения, когда колебания уже не синусоида; код нам ещё понадобится. Считать будем программой **Chapter 05\Test_05_Rabbits_and_Foxes.py**




Пусть средняя продолжительность жизни лисы – 10 лет (все числа условные), тогда $a_f$ = 0.1; пусть популяция зайцев при отсутствии хищников, удваивается примерно каждые два года, то есть $b_h$ = 0.5. Чтобы числа были реальны, примем, что в лесу могли бы равновесно сосуществовать 1000 лис и 10000 зайцев, а в начальный момент времени имеется 5000 зайцев и 2000 лис[43].

В такой постановке система будет колебаться вечно – вся энергия возобновляемая, травы в лесу столько, сколько зайцы съесть не могут. На кривой численности зайцев – относительно медленный подъём и относительно быстрый спад. На кривой лис – наоборот: относительно быстрый рост и медленный спад. Количество зайцев в лесу то сваливается почти в ноль, то взлетает до сорока с хвостиком тысяч. График численности лис отстаёт от заячьего примерно на треть периода.

От чашек Петри, островов с оленями и бескрайних лесов с зайцами и лисами перейдём к первобытным племенам.

Пусть у нас есть небольшой остров (вроде Пасхи, он же Рапа-Нуи, он же Чунга-Чанга)[44]. В нулевом году на остров высаживаются смелые переселенцы в количестве 500 человек. Богатая и разнообразная природа острова может

43 Как и в случае с популяцией карпов из третьей и четвёртой главы, положим, что численности «статистические», то есть очень большие; разрешено иметь «дробных» лис и зайцев. Если вас не устраивает «дробный заяц», считайте, что лес велик, а популяции измеряются не в тысячах, а в миллиардах особей.

44 Через месяц после публикации этой главы в блоге добрые люди подсказали посмотреть статью экономистов Джеймса Брандлера и Скотта Тэйлора из университета Калгари. Речь там шла о расцвете и коллапсе полинезийской цивилизации на острове Пасхи! Оказывается, кроме Рапа-Нуи археологи обнаружили ещё 12 (сейчас необитаемых) островов с аналогичной культурой – и полностью уничтоженными лесами. До сих пор неизвестно, привело ли разрушение экосистем к вымиранию населения, или какая-то часть сумела мигрировать на соседние острова. В работе Брандлера и Тэйлора используется система из двух дифференциальных уравнений, аналогичная, но проще, чем {5.9} ниже. Для читающих по-английски: James A Brandler and M. Scott Taylor, *The Simple Economics of Easter Island: A Ricardo-Malthus Model of Renewable Resource Use*, The American Economic Review, vol 88 issue 1, Mar 1998, 119-138.

прокормить в десять раз больше – 5'000. Максимальную скорость удвоения популяции примем как в Америке XVIII века – 25 лет, то есть $b_p$=0.0277. Кроме трёх переменных P, Q, O, нам понадобится ещё одна: F – плодородная территория. Запишем систему уравнений:[2]

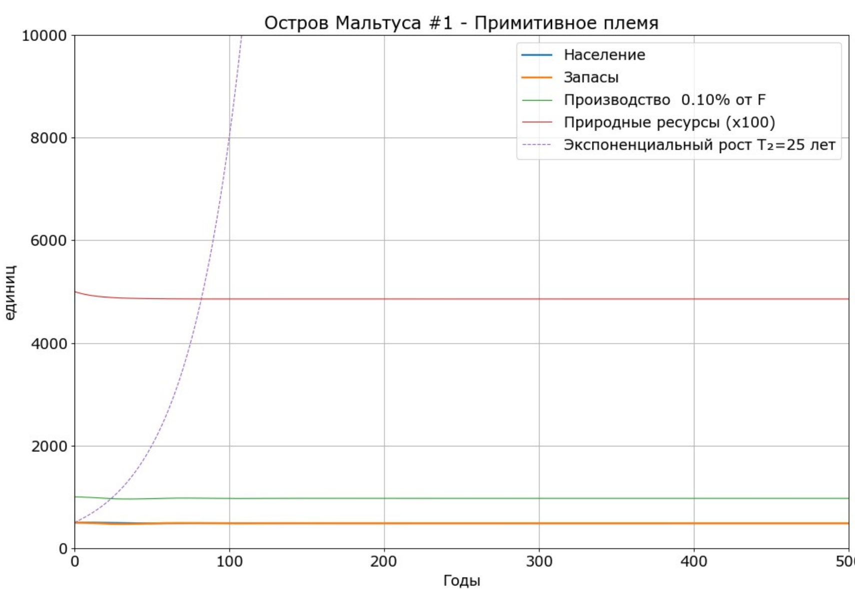
$$\frac{\partial F}{\partial t}=b_f\left[1-\frac{F(t)}{F_0}\right]F(t)-O(t) \qquad F(0)=F_0$$

$$\frac{\partial O}{\partial t}=b_o\left[1-\frac{O(t)}{jF(t)}\right]O(t) \qquad O(0)=O_0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t}=O(t)-P(t)-dQ(t) \qquad Q(0)=Q_0$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}=b_p\left[1-\frac{P(t)}{Q(t)}\right]P(t) \qquad P(0)=P_0 \qquad \{5.9\}$$

Здесь:
**$F_o$** – максимальная продуктивность природы острова (сельхозугодий);
**j** – эффективность ведения сельского хозяйства;
**$b_f$** – быстрота восстановления продуктивности;
**$b_o$** – быстрота восстановления урожайности.




Так как остров экваториальный и влажный, примем максимальную скорость удвоения плодородия за 10 лет. Так как племя примитивное, максимальная скорость удвоения урожайности – 5 лет, а годовое потребление составляет не более 0.1% от природы острова. Пусть потери для начала – 100%, то есть никаких запасов переселенцы не делают вообще: увидел банан – съел, пошёл дальше.

Пример в программе **\Chapter 04\Test_Island_1.py**

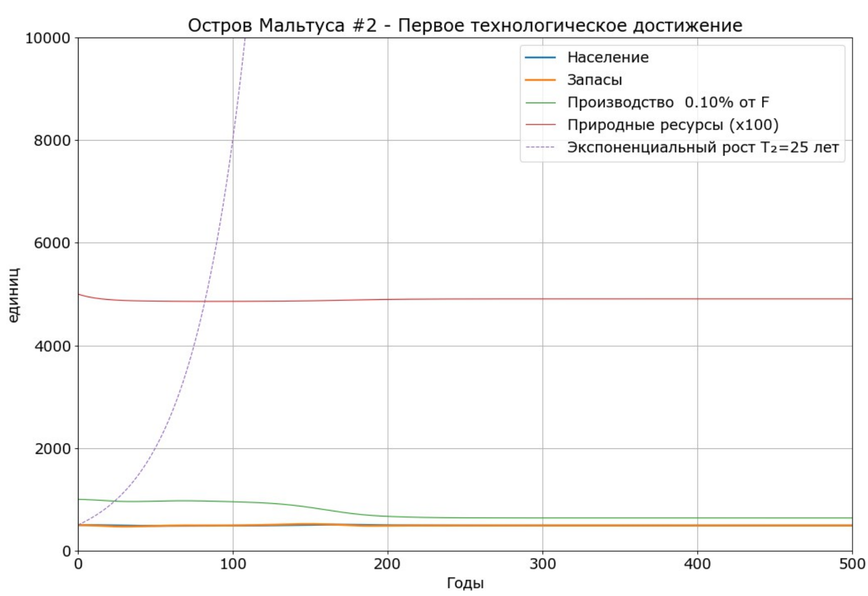
```
#
# Описывает популяцию в открытой системе
# Согласно системе уравнений Мальтуса
# P0 - начальная популяция
# Q0 - начальные запасы
# O0 - начальное производство
# F0 - начальные природные ресурсы
# T2_P - время удвоения популяции
# T2_O - время удвоения призводства
# T2_F - время восстановления ресурсов
# d_Q - процент потери запасов
# j_O - технологический коэффициент урожайности
# Популяция стремится к кажущемуся оптимуму Q
#
class Island_Population_1:
    def __init__( self, P0, Q0, O0, F0, T2_P, T2_O, T2_F, d_Q, j_O):
        self.P_Initial = P0
        self.P = P0
        self.Q_Initial = Q0
        self.Q = Q0
        self.O_Initial = O0
        self.O = O0
        self.F_Initial = F0
        self.F = F0
        self.B_P = np.log(2)/T2_P
        self.B_O = np.log(2)/T2_O
        self.B_F = np.log(2)/T2_F
        self.D = d_Q
        self.J = j_O
        return
    def dP_dt( self, t):
        tmp = max ( self.Q, 0.01)
        tmp = self.B_P * (1 - self.P / tmp)
        tmp *= self.P
        return tmp
    def dQ_dt( self, t):
        tmp = -self.D * self.Q # естественная убыль запасов
        tmp -= self.P          # убыль запасов на потребление
        tmp += self.O          # текущий урожай
        return tmp
    def dO_dt( self, t):
        tmp = max ( self.F * self.J, 0.01)
        tmp = self.B_O * (1 - self.P / tmp)
        tmp *= self.O
        return tmp
    def dF_dt( self, t):
        tmp = self.B_F * (1-self.F/self.F_Initial) * self.F
        tmp -= self.O       # убыль ресурса на пополнение запасов
        return tmp
    def _func( self, y, t):
        self.P = max( [y[0], 0])
        self.Q = max( [y[1], 0])
        self.O = max( [y[2], 0])
        self.F = max( [y[3], 0])
        f0 = self.dP_dt( t)
        f1 = self.dQ_dt( t)
        f2 = self.dO_dt( t)
        f3 = self.dF_dt( t)
        return [f0, f1, f2, f3]
    def Solve( self, t0):
        y0 = [self.P, self.Q, self.O, self.F]
        soln = odeint(self._func, y0, t0, h0=0.01, hmax = 0.025)
        self.Solution_Time = t0
        self.Solution_P = soln[:, 0].clip(0)
        self.Solution_Q = soln[:, 1].clip(0)
        self.Solution_O = soln[:, 2].clip(0)
```

```
        self.Solution_F = soln[:, 3].clip(0)
        self.P = self.P_Initial
        self.Q = self.Q_Initial
        self.O = self.O_Initial
        self.F = self.F_Initial
        return
```

Как и следовало ожидать, никакого удвоения населения за 25 лет (пунктирная линия) на графике не наблюдается. Это оттого, что переселенцы – племя примитивное: каждая женщина рожает пятнадцать раз, но тринадцати отпрыскам не хватает бананов. С нулевого года и до конца шкалы вроде бы никаких мальтузианских катастроф. Это представление неверно. На самом деле, маленькая катастрофа происходит регулярно, каждый год убивая самых слабых – младенцев и стариков.

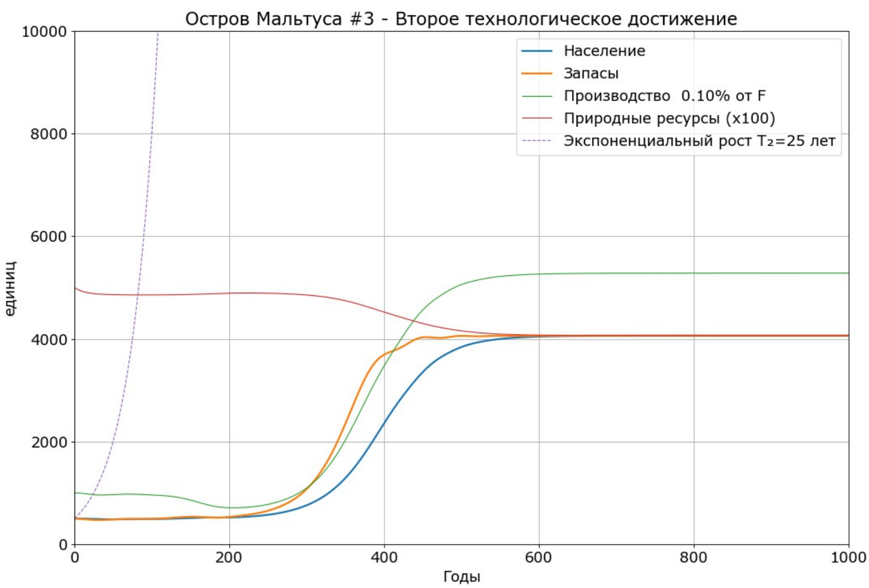
Что произойдёт, если в 100 году переселенцы начнут осваивать новые технологии земледелия? Скажем, открыли как хранить урожай, и снизили потери за 100 лет со ста процентов до тридцати? Игравшие в «*Civilization*» Сида Мейера наверняка вспомнят «технологию гончарного дела». В игре это открытие позволяет увеличивать население «городов».

Пример **\Chapter 04\Test_Island_2.py** идентичен предыдущему, но **d** меняется с 1.0 до 0.3 с 100 по 200 годы. Как ни странно, на равновесном населении острова такая «технологическая революция» отражается мало: всего пять человек прибавилось. Зато, определённо надо меньше собирать бананов: не 970 условных единиц, а всего 734. Оказывается, бережливый человек экономит не столько природные ресурсы, сколько свой труд. Технология сбора и хранения урожая освобождает рабочие руки и мозги, а уж они прикладываются к изобретению новых технологий.



```
        self.D = Sigmoid( 150, 0.05, 1, d_Q)
    def dQ_dt( self, t):
        tmp = -self.D.Compute(t) * self.Q # естественная убыль запасов
        tmp -= self.P           # убыль запасов на потребление
        tmp += self.O           # текущий урожай
        return tmp
```

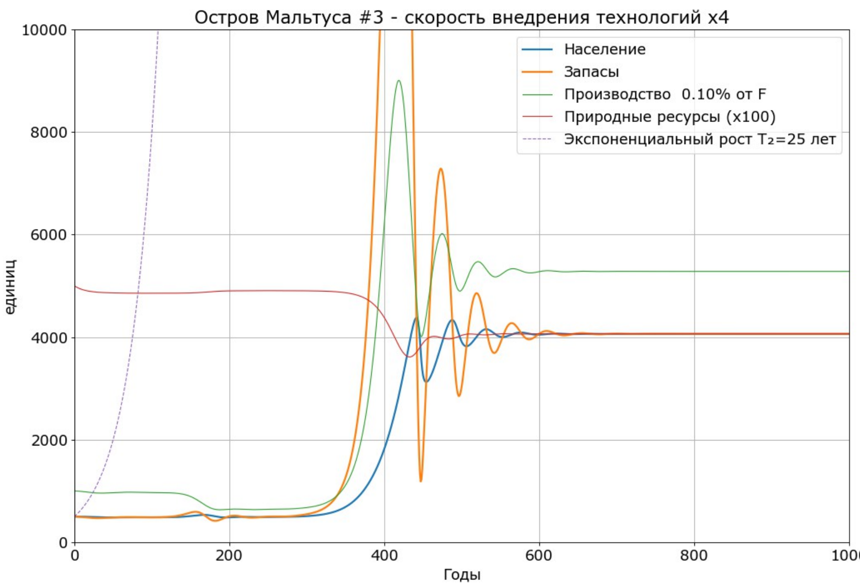
Итак, освобождённый гений-островитянин придумал вторую технологическую революцию: увеличим производство продовольствия, то есть урожайность, в десять раз, с **j=0.001** до **j=0.01**. Увеличение будет происходить постепенно, с 300 по 500 годы. **\Chapter 04\Test_Island_3.py**

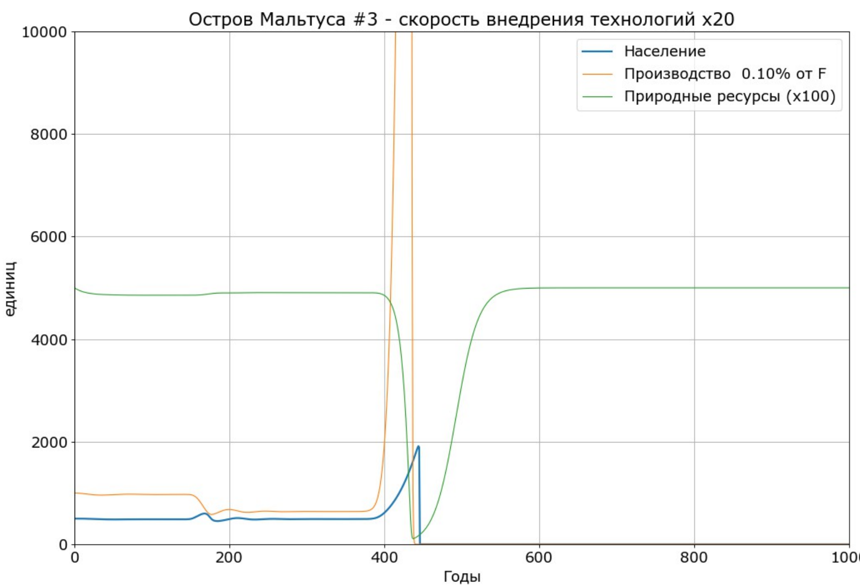



Население острова плавно выходит на «полочку», чуть выше 4'000 человек. Тут читатель может заметить, что мы плавно изменяли урожайность по сигмоиде, оттого и население росло по сигмоиде. Всё правильно. Поглядим, что будет с населением острова, если технологические революции произойдут в четыре раза быстрее: не за двести лет, а за 50. **\Chapter 04\Test_Island_4.py**

Наконец, что будет, если новую технологию земледелия привезли на остров умные католики-миссионеры, и изменение не за 50 лет, а за 10? **\Chapter 04\Test_Island_5.py** Ничего хорошего. Производство улетает в небеса, «бесполезное» красное дерево 50 лет меняют на «крутые» бусы или телевизоры, и для аборигенов всё кончается так же грустно, как у бактерий в чашке Петри.

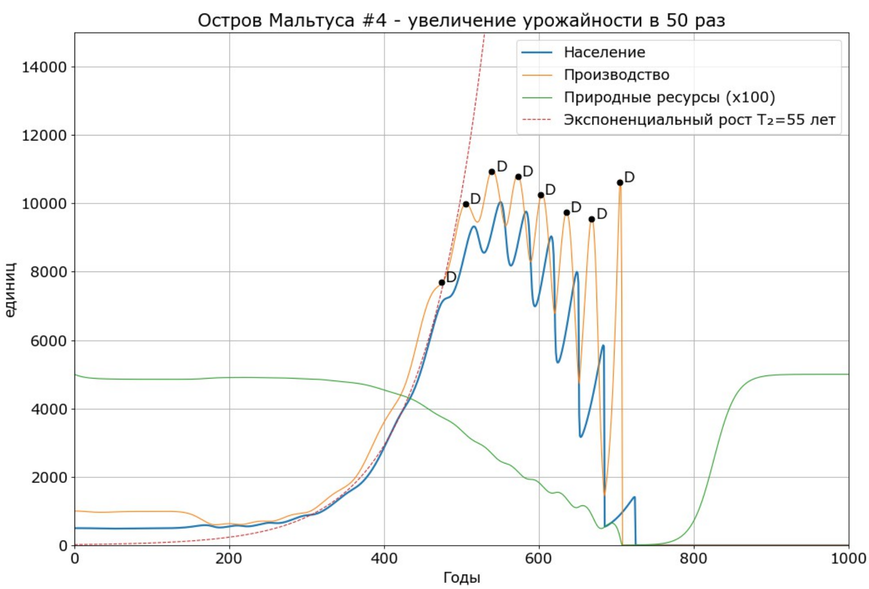
Вообще, далеко не всё, что привозят цивилизованные белые люди, следует пускать в дело. На реальных атолловых островах в Тихом океане у аборигенов было принято, пардоньте, испражняться в океан. Не в атолл, что посередине, а в океан, который снаружи, ага!




Приехали миссионеры и увидели, что это некультурно, не правда ли? Научили аборигенов строить туалеты класса сортир-с-дыркой™. Долбить известняк ломом – занятие не из лёгких, но чего не сделаешь ради цивилизации, тем более и новый пастор сам взял лом и личным примером показывает, как надо. Результат: на острове внезапно питьевая вода во всех колодцах пахнет дерьмом! Если не кипятить, получится холера, а кипятить нечем, так как деревьев на островке: раз, два, десять. Уже потом приехали умные геологи и объяснили: трещиноватый известняк в зоне выветривания накапливает дождевую воду в трещинах и кавернах с характерными размерами от нескольких миллиметров до нескольких сантиметров. Накапливает и отдаёт отлично, фильтрует – плохо. Привыкшие к суглинкам и песчаникам миссионеры как-то не подумали, что долбят яму туалета практически прямиком в колодец. Теперь на эти острова питьевую воду привозят специальным танкером. Что это делает с и так небогатым бюджетом каждого острова, и что будет, если в один прекрасный день танкер просто не придёт, догадайтесь сами.

А мы пока предположим, что изменения происходят медленно, но урожайность увеличивается не в 10 раз, а в 50. А.В.Чаянов в 1920 написал утопию[45], где в грядущем коммунизме семейный надел 3-4 десятины, а с каждой десятины собирают 500 пудов. В наших единицах: 380 соток и 82 центнера с гектара. Притом тракторов в утопии Чаянова не было, почти всё на лошадках. **\Chapter 04\Test_Island_6.py**




Из абсолютно спокойных входных данных получилась колебательная затухающая система. С 200 по 500 годы популяция увеличивается в 20 раз, далее происходит срыв. Амплитуда колебаний нарастает, вплоть до вымирания популяции, однако пики производства D видны на кривой и ранее.

Что это за пики? Ясно, кризисы перепроизводства! Производство продовольствия нарастает быстрее, чем население, накапливается слишком много лишней еды, цена падает... Короче, вы поняли картину.

45 http://royallib.com/book/chayanov_aleksandr/puteshestvie_moego_brata_alekseya_v_stranu_krestyanskoy_utopii.html

Великий критик мальтузианства К.Маркс писал [16]:

***Every history of religion, even, that fails to take account of this material basis, is uncritical. It is, in reality, much easier to discover by analysis the earthly core of the misty creations of religion, than, conversely, it is, to develop from the actual relations of life the corresponding celestialised forms of those relations. The latter method is the only materialistic, and therefore the only scientific one. The weak points in the abstract materialism of natural science, a materialism that excludes history and its process, are at once evident from the abstract and ideological conceptions of its spokesmen, whenever they venture beyond the bounds of their own speciality.***

***Даже изучая историю религии, тот, кто не берёт в расчёт материалистической основы, не может религию критиковать. Гораздо легче обнаружить с помощью анализа земные последствия туманных творений религии, чем, наоборот, выводить из реальных жизненных отношений высшие формы небесных законов. Последний метод является единственно-материалистическим, и оттого единственно-научным. Слабость абстрактного материализма естественных наук, материализма, который исключает историю и процесс, немедленно можно наблюдать в абстрактных идеологических концепциях естествоиспытателей, всякий раз, когда они рискуют выходить за пределы своей специальности. [ссылка 4 в главе 15 первого тома «Капитала» «Машины и современная промышленность» страница 261.]***[46]

На самом деле это Маркс писал про Чарльза Дарвина, которого почитал настолько, что даже хотел посвятить автору «*Происхождения видов*» первый том «*Капитала*». Дарвин от такой чести благоразумно отказался – врагов эволюционной теории и так хватало.

Ясно, что на момент выхода немецкого издания «*Капитала*» 1867 года Маркс не удосужился ознакомиться с основными положениями теории своего естественнонаучного кумира, напечатавшего книгу 9 годами ранее. Ибо критиковать Мальтуса и возносить Дарвина – всё равно что славить Эйнштейна и Планка, одновременно проклиная Ньютона.

Чарльз Дарвин не просто упоминал Мальтуса в «*Происхождении видов*» [17]. Вся эволюционная теория построена на мальтузианских катастрофах. Раздел 3 главы 3 (стр 79 в моём экземпляре книги) так прямо и называется: «*Увеличение численности в геометрической прогрессии*», а первые три абзаца там – краткое изложение теории Мальтуса, со ссылкой на имя автора. Про «бутылочные горлышки» было упомянуто выше.

Об «альтернативных» теориях бесконечного экономического роста будет отдельная глава, а пока просто скажем, что популяционная теория Мальтуса подтверждает основные положения «*Капитала*», как бы ни ругался автор последнего. А то, что Маркс прочитал Мальтуса, да не понял математики, бородатому мыслителю простительно. Восьмым вранглером не был, в дифференциальные уравнения не умел, в университете, по причине неправильной национальности, – доучиться не дали[47].

Мы же воспользуемся уравнениями и компьютерами, чтобы сделать нашу

---

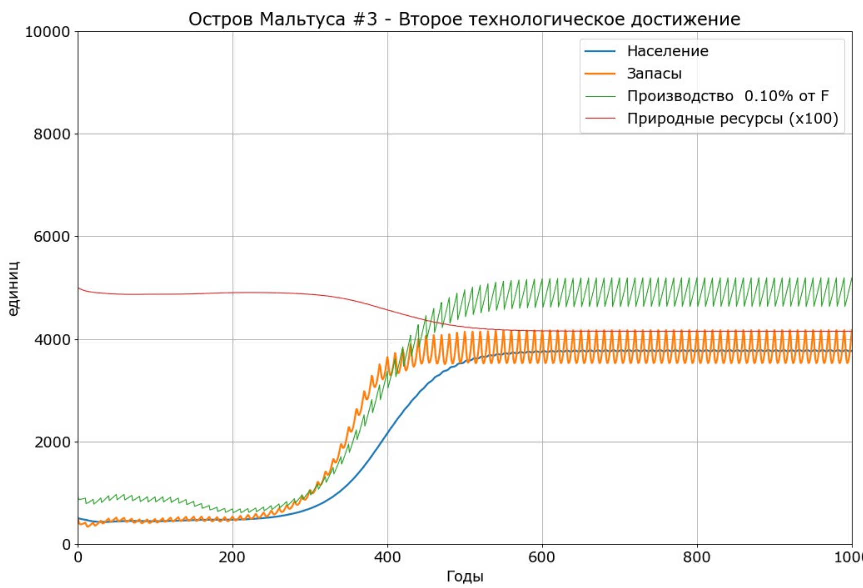
46 В русской версии «Капитала» такой ссылки вроде бы нет. Советское издательство «Прогресс» выпускало две версии Маркса: одну для проверенных совков, другую – для внешнего употребления.

47 Маркс великолепно осознавал свои пробелы в образовании и пытался их заполнить. Под самый конец жизни Маркс даже выдал классово-верный пересказ дифференциального исчисления! Надо сказать, сам классик писал в стол и печатать «математические эссе» не хотел, понимая свою некомпетентность в этом вопросе. После смерти Маркса Энгельс достал статьи из стола и долго проталкивал в печать, но напечатали лишь в 1932 году небольшими тиражами в СССР. Естественно, в русском переводе. По-немецки оригинал был опубликован 30 лет спустя, вызвав лёгкую улыбку у всех, кто профессионально занимается матаном. http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0315086077900581

модель ещё более реалистичной. Известно, что погода на острове непостоянна, и, допустим, раз в десять лет случается неурожай. Один серьёзный неурожай – для карпов – мы моделировали выше, но тот действительно был катастрофическим – пять или десять лет вообще ни зёрнышка. В следующей модели неурожаи будут относительно небольшие (Чунга-Чанга же!) – каждый десятый год, при этом производство продовольствия 50% от нормального.

Сначала модифицируем плавное решение **\Chapter 04\Test_Island_3.py**, превратив его в **\Chapter 04\Test_Island_7.py**

```
    def is_Drought( self, t):
        tt = int(t)
        if (tt%10) == 0: return True
        return False
```

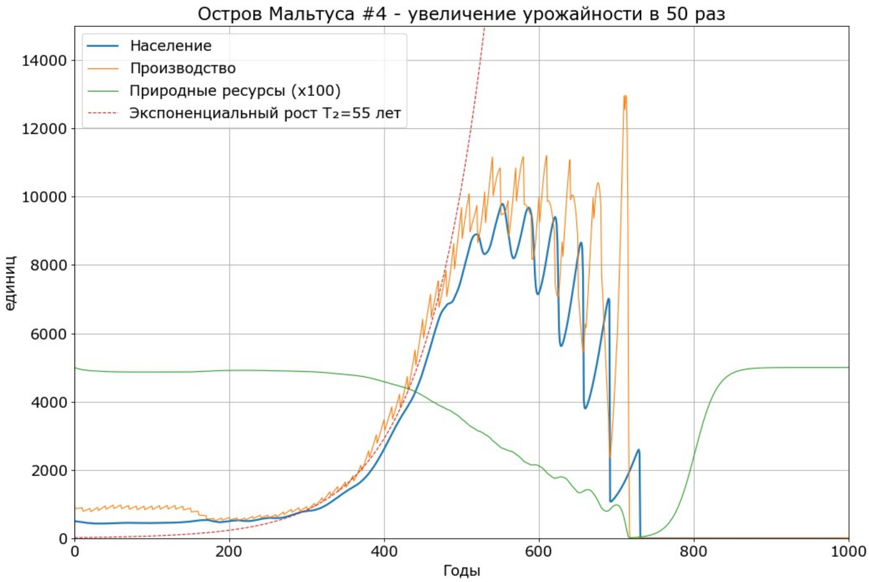



Как видим, решение остаётся достаточно устойчивым даже при внешних возмущениях. Теперь повторим то же самое для острова с 50-кратным увеличением урожайности. **\Chapter 04\Test_Island_8.py**

Нечто подобное происходит и на настоящем Рапа-Нуи. В 1722 году белые открыватели обнаружили на острове около 2'500 аборигенов, уже забывших, как строить огромные океанские плоты и перешедших от высокой культуры к каннибализму и кровавым кланово-племенным разборкам. Всего столетием раньше на острове жило более пятнадцати тысяч. Современное население острова – 6'150 человек.[48] Собственно, от полного вымирания аборигенов спас туризм. Прокрутите текст назад к картинке (и обратите внимание на бетонный

48 Площадь острова Пасхи – 163.6 км$^2$. Остров тропический (27.7º Ю.Ш.), климат ровный, тёплый и влажный: 18-24ºЦ, 1150 мм осадков в год. На пике цивилизации плотность населения превышала 90 человек на км$^2$, то есть 110 соток на человека. Запомним это значение.

пирс на заднем плане справа!) Именно так и выглядят современные жители чилийского острова Пасхи, когда выступают перед американскими туристами. Теперь поглядите на график и прикиньте, куда двинет синяя кривая, когда поток туристов вдруг иссякнет.




Итоги главы.

- Мы разобрали некоторые «альтернативные» способы задания функций **A(t)** и **B(t)**. Продемонстрировано на примере, в какие дебри заводит «феноменологический подход» без учёта материального баланса.

- Продемонстрирована классическая модель Лотки-Вольтерры с накоплением энергии в постановке Колмогорова. В этой модели использованы две функции (условные «зайцы» и условные «лисы»), и происходит перекачка энергии: сначала из окружающей среды в «зайцев», а затем из «зайцев» в «лис». Колебательное решение асимметрично для обеих функций.

- Создана и испытана простая числовая модель, где при выходе за пределы природопользования происходит срыв в катастрофическую осцилляцию. Добавлено четвёртое решение системы Мальтуса. На той же модели исследована зависимость от технологий землепользования и скорости их ввода.

- Продемонстрирована устойчивость решений к циклическим возмущениям входных параметров, например, засухам.

- Показано, что для моделирования «кризиса затоваривания» АКА «кризиса перепроизводства» необязательно вводить понятия стоимости. Достаточно моделировать население и материальный баланс производства/потребления.

- Независимо от Д.Адамса и других авторов, подтверждена мировая константа 42. А если серьёзно, я на 100% не уверен, однако сильно подозреваю, под конец жизни доктор-профессор Сергей Петрович Капица просто изящно обстебал доверчивых хомячков. Протащить «*Автостопом по Галактике*» на страницы «*Успехов физических наук*» – это уметь надо.