



## Глава 4.

### По следам уравнения.

...и вдруг понял, что спать мне совершенно не хочется - хочется есть. Ай-яй-яй, подумал я. Надо было срочно принимать меры, и я их принял. Вот, скажем, система двух интегральных уравнений типа уравнений звездной статистики; обе неизвестные функции находятся под интегралом. Решать, естественно, можно только численно, скажем, на БЭСМ... Я вспомнил нашу БЭСМ. Панель управления цвета заварного крема. Женя кладет на эту панель газетный сверток и неторопливо его разворачивает. «У тебя что?» - «У меня с сыром и колбасой». С польской полукопченой, кружочками...

А. и Б. Стругацкие «Понедельник начинается в субботу»

Начнём опять-таки с модели. Немножко изменим биологию нашего пруда. Пусть каждый год я забрасываю в пруд достаточно еды для прокорма  $O$  взрослых карпов. Если в пруду  $P$  рыбок, они скушают за год примерно  $P$  еды (достаточно для  $P$  карпов), а остаток – накопится в виде переменной  $Q$ . Но копиться вечно еда не может, и ежегодно часть  $d$  сгнивает. Как будет развиваться мой пруд? Записываем систему из двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial t} &= O - P(t) - dQ(t) & Q(0) &= Q_0 \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= b \left[ 1 - \frac{P(t)}{O} \right] P(t) & P(0) &= P_0\end{aligned}\quad \{4.1\}$$

Здесь:

**$Q(t)$**  – количество еды в пруду от времени

**$O$**  – оптимальная популяция, пока константа

**$P(t)$**  – численность популяции от времени

**$b$**  – постоянная воспроизводства

**$d$**  – постоянная амортизации (depreciation)

Из-за наличия  $dQ(t)$  аналитически решить нельзя, оттого придётся решать численно. Естественно, в книге у Мальтуса нет программного кода, а есть глава 3, где всё, что будет ниже, проанализировано словами. Вместо рыбок Мальтус использовал в примерах примитивные племена: индейцев в Америке и самоедов в Скандинавии.

Результат представлен в программке `\Chapter 04\Test_Malthus_1.py`

Калибровки с реальными данными нас пока не интересуют (именно поэтому я выбрал для примера карпов, а не индейцев или ирландских фермеров, а все значения – условные). Входные данные такие. В начале в пруду 100 карпов и достаточно еды для 100 особей. При нормальном питании, популяция

увеличивается на 10% ежегодно, а хочу я ровно 1000 рыбок<sup>26</sup>. Для начала предположим, что потерь нет, то есть  $d=0$ . Код и результат выглядят так:

```
from Population import *

#
# Описывает популяцию в открытой системе
# Согласно уравнению Мальтуса-Ферхюльста, но с потерями d
# Популяция стремится к оптимальной O
#
class Pond_Population_1:
    def __init__(self, P0, Q0, O0, b_rate, d_rate):
        self.P_Initial = P0
        self.P = P0
        self.Q_Initial = Q0
        self.Q = Q0
        self.O_Initial = O0
        self.O = O0
        self.B = b_rate
        self.D = d_rate
        return
    def dP_dt(self, t):
        tmp = max(self.O, 0.01) # чтобы не было деления на ноль
        tmp = self.B * (1 - self.P / tmp)
        tmp *= self.P
        return tmp
    def dQ_dt(self, t):
        tmp = self.O
        # 10 лет неурожая
        if 1800 <= t and t < 1810: tmp *= 0.2
        tmp -= self.D * self.Q + self.P
        return tmp
    def dO_dt(self, t):
        tmp = 0
        return tmp
    def _func(self, y, t):
        # половинка карпа жить не может, но это статистически-большая
        популяция
        self.P = max(y[0], 0)
        self.Q = max(y[1], 0)
        self.O = max(y[2], 0)
        f0 = self.dP_dt(t)
        f1 = self.dQ_dt(t)
        f2 = self.dO_dt(t)
        return [f0, f1, f2]
    def Solve(self, t0):
        y0 = [self.P, self.Q, self.O]
        # Не забудем поставить правильную дискретизацию!
        soln = odeint(self._func, y0, t0, h0=0.01, hmax=0.025)
        self.Solution_Time = t0
        self.Solution_P = soln[:, 0].clip(0)
        self.Solution_Q = soln[:, 1].clip(0)
        self.Solution_O = soln[:, 2].clip(0)
        self.P = self.P_Initial
        self.Q = self.Q_Initial
        self.O = self.O_Initial
        return

#
# Solve numerically
#
T = np.linspace(1600, 2000, 401)
P1 = Pond_Population_1(100, 100, 1000, 0.1, 0.0)
P1.Solve(T)

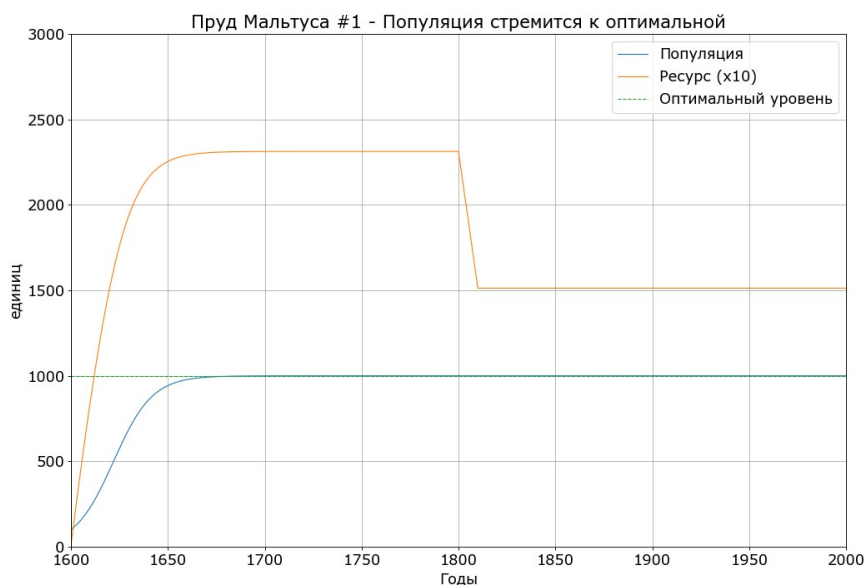
for i in range(len(T)):
```

26 Для любителей потолковать все о квантовой механике. У меня в программе карпы «не целые». Приближение {4.1} работает, естественно, лишь для статистически-значимых популяций. Примерно так же работает в инжиниринге уравнение Больцмана. Чтобы рассчитать паровоз или трубопровод, поведение каждой молекулы знать не надо. Однако не применяйте подход Мальтуса для аквариума с пятью золотыми рыбками.

```

print( "{:4g} {:6.1f} {:6.1f} {:6.1f}".format( T[i], P1.Solution_P[i],
P1.Solution_Q[i], P1.Solution_O[i]))
fig = plt.figure( figsize=(15,10))
plt.plot( P1.Solution_Time, P1.Solution_P, "-", lw=1, label="Популяция")
plt.plot( P1.Solution_Time, P1.Solution_Q/10, "-", lw=1, label="Ресурс
(x10)")
plt.plot( P1.Solution_Time, P1.Solution_O, "--", lw=1, label="Оптимальный
уровень")
plt.xlabel("Годы")
plt.xlim( 1600, 2000)
plt.ylabel("единиц")
plt.ylim( 0, 3000)
plt.title( "Пруд Мальтуса #1 - Популяция стремится к оптимальной")
plt.grid(True)
plt.legend(loc=0)
plt.savefig( ".\\Graphs\\figure_04_01.png")
fig.show()

```



Как и ожидалось, популяция карпов растёт по сигмоиде и к 1675 году выходит на «полочку» 1000. В пруду накопилось достаточно пищи на 23 года. Если я на десять лет уеду и не буду подбрасывать корм – почти ничего не изменится, что и показано в программе с 1800 по 1810 годы. Популяция карпов на сокращение запасов продовольствия никак не реагирует, но количество запасов в пруду сокращается.

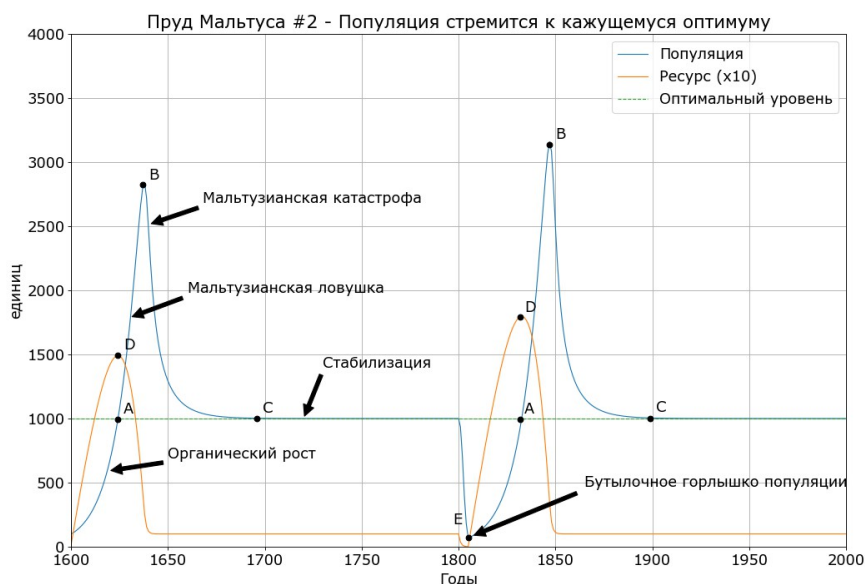
Конечно, карпы глупые, оттого никто из них уровень  $O$  не вычисляет. Рыбы поступают проще: когда еда и изобилии, все едят от пуза. Когда еды маловато – начинают драться, отталкивая друг-друга от кормушки. Сильные и здоровые в среднем выживают. Слабые, старые или больные в среднемдохнут. Но могут и сильного невзначай прихлопнуть. Главное, смертность определяется не каким-то умным вычислением  $P(t)/O$ , а тупым отношением  $P(t)/Q$ . Сколько пищи карпам надо супротив сколько в пруду имеется.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = O(t) - \min(Q(t), P(t)) - dQ(t) \quad Q(0) = Q_0$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \max(-1, b \left[ 1 - \frac{P(t)}{Q(t)} \right]) P(t) \quad P(0) = P_0 \quad \{4.2\}$$

Проверяем программкой \Chapter 04\Test\_Malthus\_2.py

```
def dq_dt( self, t):
    tmp = self.O
    # 5 лет неурожая
    if 1800 <= t and t < 1805: tmp = 0
    tmp -= self.D * self.Q + min( self.P, self.Q)
    return tmp
```



Разница принципиальная. В первом случае, возможно, какой-то особо одарённый карп в 1800 году заметит, что еда перестала поступать в кормушки, и начнёт писать книжку, вроде «*Пределов роста*». Пусть даже и напишет. Запасов так много, что остальным рыбкам на паникёра наплевать. В общем, они правы. Через десять лет я вернусь и продолжу кормить моих рыбок как прежде. Никакой катастрофы.

А во втором случае – запасов еды в системе нет почти никаких (кроме двух всплесков D, о которых ниже), и оттого не десятилетний, а всего пятилетний перерыв в кормёжке приводит к резкому снижению популяции. Неурожай 1800-1804 для карпов – настоящая катастрофа. Тут уж никакому сверхразумному карпу книжки про пределы роста писать не надо, эффект очевиден. Вы говорите «мальтузианская катастрофа»? Совсем нет. Неурожай задаётся внешними условиями. Мальтус сказал бы: Провидением.

Однако две мальтузианские катастрофы на графике присутствуют. Опишем отрезки:

- Левее точки А, **«органический рост популяции»**. Еды я закидываю для 1000 особей? Вполне правомерно, карпы стремятся достичь этого уровня. Если они на этом и останутся – будут жить по сто лет, как в парковых прудах Японии<sup>27</sup>.
- В точке А популяция проскакивает равновесное состояние и входит в отрезок АВ – **«мальтузианскую ловушку»**. Теперь популяция обречена, и чем выше взлёт, тем резче и безудержней будет падение.
- В точке В наступает **«мальтузианская катастрофа»**. Опять-таки не точка, а отрезок: ВС. Еды на всех не хватает, и популяция обваливается.
- Правее точки С наступает **«стабилизация»**.
- Точку Е уже после Мальтуса назвали **«бутылочным горлышком популяции»**. Останавливаться подробнее не буду – читайте прямоком у Дарвина. Скажу только, что математика Мальтуса – одна из основ Эволюционной теории. А ежели кто не осознал эволюции (верить-не-верить тут нечему, это подтверждённая научная теория) – посоветуем взять из кормушки банан<sup>28</sup> – и обратно на пальму. В качестве самостоятельного эксперимента попробуйте поменять длительность неурожая.
- Заметим, что после прохождения «бутылочного горлышка» популяция начинает всё заново: органический рост до точки А, попадание в ловушку АВ, катастрофа ВС – и стабилизация.

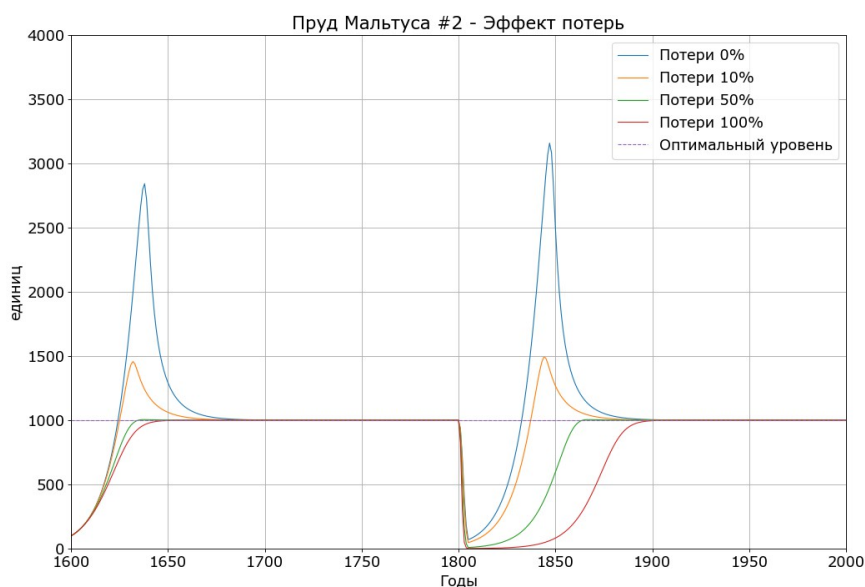
Сам Мальтус терминами «ловушка» и «катастрофа» не оперировал, их ввели в оборот биологи в начале XX века. И уж тем более не Мальтус назвал эти отрезки «мальтузианскими». Есть смертный грех: Vanagloria. В нём священник Мальтус замечен точно не был.

Однако еда вечно храниться не может, и надо ввести какой-то процент потерь. Проведём расчёты для 10, 50 и 100%. Программка \Chapter 04\Test\_Malthus\_3.py

```
T = np.linspace(1600, 2000, 401)
P1 = Pond_Population_2( 100, 100, 1000, 0.1, 0)
P1.Solve( T)
P2 = Pond_Population_2( 100, 100, 1000*(1+0.1), 0.1, 0.1)
P2.Solve( T)
P3 = Pond_Population_2( 100, 100, 1000*(1+0.5), 0.1, 0.5)
P3.Solve( T)
P4 = Pond_Population_2( 100, 100, 1000*(1+1), 0.1, 1.0)
P4.Solve( T)
```

<sup>27</sup> Утверждают, что ещё живы особи, окольные в 1870-х годах.

<sup>28</sup> Ладно, ладно, так и быть: бери два банана.

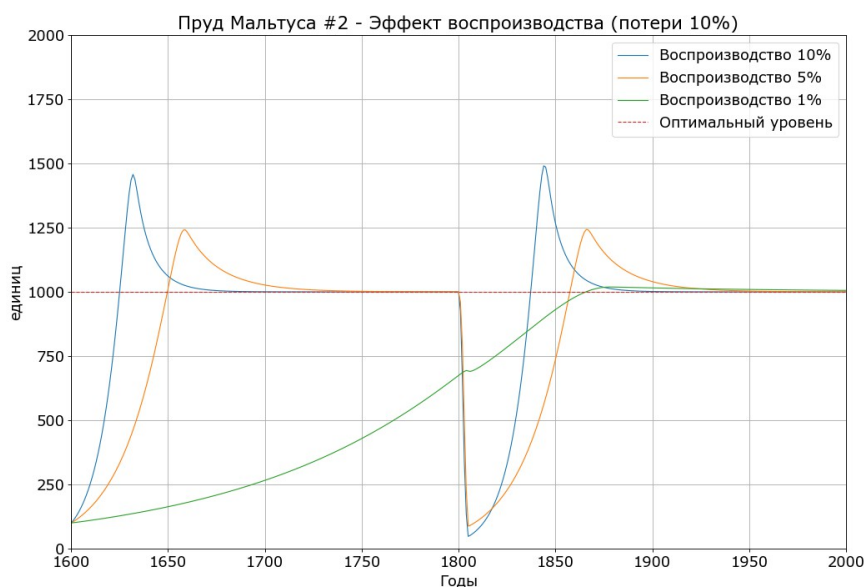


Как видим, при стопроцентных потерях популяция выходит на аналитическое решение Ферхюльста – сигмоиду, что мы разбирали в главе 3. В «плавном» решении Ферхюльста никакой мальтузианской катастрофы нет. Чем меньше потери, чем ярче проявляется эффект выхода за пределы. Например, при 10% потерь популяция проскакивает к 1500 особям, а при нулевых – к 2700.

Далее рассмотрим, что будет, если изменить показатель **b**. В программе `\Chapter 04\Test_Malthus_4.py` карпы считаются три раза: для скорости прироста 1% в год, 5% в год и 10% в год. Коэффициент потерь во всех трёх случаях одинаков – 10%.

```
T = np.linspace(1600, 2000, 401)
P1 = Pond_Population_2( 100, 100, 1000*(1+0.1), 0.10, 0.1)
P1.Solve( T)
P2 = Pond_Population_2( 100, 100, 1000*(1+0.1), 0.05, 0.1)
P2.Solve( T)
P3 = Pond_Population_2( 100, 100, 1000*(1+0.1), 0.01, 0.1)
P3.Solve( T)
P4 = np.ones( len(T)) * 1000
```

Рыбки с малой скоростью воспроизводства неурожай 1800-1804 годов почти не замечают – лишь маленький всплеск на графике. В период органического роста, когда в системе есть запасы продовольствия, даже суровый неурожай не страшен. Представьте посёлок посреди лесистого острова. Не уродилась картошка и пшеница? Есть дичь в лесу, а также грибы-ягоды. Но вот период органического роста кончился: посёлок превратился в большой город, лес срубили, весь остров распахали, лосей-грибов-ягод больше нет. Ясное дело, неурожай мгновенно превращается в трагедию. Заметим, при прочих равных условиях, чем быстрее рост популяции, тем дальше выход за пределы, и тем круче мальтузианская катастрофа.



Однако почему популяция должна стабилизироваться плавно? Вся история Англии пестрит большими и маленькими гражданскими войнами – вспомним того же Кромвеля. У Мальтуса перед глазами была и Великая Французская Революция. Короче, если популяция может проскакивать оптимум снизу вверх, почему бы во время голода и смуты не проскочить и сверху вниз?

Система уравнений выглядит так:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = O(t) - P(t) - dQ(t) \quad Q(0) = Q_0$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = b \left[ 1 - \frac{P(t)}{Q(t)} \right] P(t) \quad P(0) = P_0 \quad \{4.3\}$$

Мальтус был, по-видимому, первый экономист<sup>29</sup>, кто применил статистические методы для калибровки своей модели. Он взялся оценить значение (В-А) для человеческой популяции.

Как и подобает математику, Мальтус сначала приводит «оценку сверху». Пусть детской смертности нет совершенно, каждая женщина выходит замуж, каждый брак заканчивается 15 здоровыми детьми (15 родов с пятнадцатилетнего возраста с промежутком 1 год), а все люди умирают 100 лет от роду. Это в наше компьютерное время просто: загнал матрицу Лесли<sup>30</sup> в калькулятор «Шарп», прокрутил раз двадцать – сошлось, готово. А

<sup>29</sup> В физике калибровать придумал Р.Хук (Hooke) на столетие раньше, но ни Адам Смит (1723-1790), ни Давид Рикардо (1772-1823), калибровок в экономике не применяли.

<sup>30</sup> К матрице Лесли ещё вернёмся, пока верьте на слово.

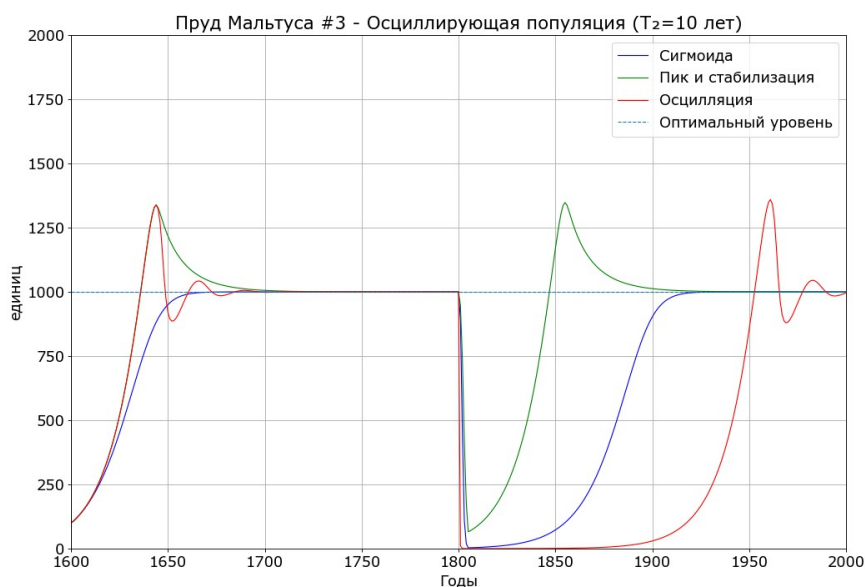
преподобный Мальтус делал это руками, и ещё до «Аналитической Машины» Бэббиджа. Сохранились записи. Мальтус рассчитал максимальную биологическую скорость удвоения человеческой популяции  $T_2=10$  лет.

### Пример в программе \Chapter 04\Test\_Malthus\_5.py

```
#
# Описывает популяцию в открытой системе
# Согласно уравнению Мальтуса-Ферхюльста, но с потерями d
# Популяция стремится к кающемуся оптимуму Q
# Время удвоения T2 используется вместо b
# Убрано ограничение на потребление
#
class Pond_Population_3:
    def __init__( self, P0, Q0, O0, T2, d_rate):
        self.P_Initial = P0
        self.P = P0
        self.Q_Initial = Q0
        self.Q = Q0
        self.O_Initial = O0
        self.O = O0
        self.B = np.log(2)/T2
        self.D = d_rate
        return
    def dP_dt( self, t):
        tmp = max( self.Q, 0.01) # чтобы не было деления на ноль
        tmp = self.B * (1 - self.P / tmp)
        tmp *= self.P
        return tmp
    def dQ_dt( self, t):
        tmp = self.O
        # 5 лет неурожая
        if 1800 <= t and t < 1805: tmp = 0
        tmp -= self.D * self.Q + self.P
        return tmp
    def dO_dt( self, t):
        tmp = 0
        return tmp
    def _func( self, y, t):
        self.P = max( [y[0], 0])
        self.Q = max( [y[1], 0])
        self.O = max( [y[2], 0])
        f0 = self.dP_dt( t)
        f1 = self.dQ_dt( t)
        f2 = self.dO_dt( t)
        return [f0, f1, f2]
    def Solve( self, t0):
        y0 = [self.P, self.Q, self.O]
        # Не забудем поставить правильную дискретизацию!
        soln = odeint(self._func, y0, t0, h0=0.01, hmax = 0.025)
        self.Solution_Time = t0
        self.Solution_P = soln[:, 0].clip(0)
        self.Solution_Q = soln[:, 1].clip(0)
        self.Solution_O = soln[:, 2].clip(0)
        self.P = self.P_Initial
        self.Q = self.Q_Initial
        self.O = self.O_Initial
        return

#
# Solve numerically
#
T = np.linspace(1600, 2000, 401)
P1 = Pond_Population_2( 100, 100, 1000*(1+0.8), 10, 0.8)
P1.Solve( T)
P2 = Pond_Population_2( 100, 100, 1000*(1+0.1), 10, 0.1)
P2.Solve( T)
P3 = Pond_Population_3( 100, 100, 1000*(1+0.1), 10, 0.1)
P3.Solve( T)
P4 = np.ones( len(T)) * 1000
```





При большом уровне потерь получается плавное решение – сигмоида Ферхюльста. Если народ голодает мирно, по уравнениям {4.2} – получается зелёная кривая. А если воюет по уравнениям {4.3} – кривая красная. Вместо одной мальтузианской катастрофы – несколько.

Ясное дело, не каждая женщина выходит замуж, не каждая рождает 15 раз, не каждые роды – удачны. Мальтус принялся оценивать реальную максимальную скорость на основании статистических данных. В 1700 году, большой кусок Северной Америки – 13 штатов – был колонией Англии. Почему нам так интересны штаты? Потому, что в отличие от колоний Испании в Латинской Америке, британские колонии относительно хорошо управлялись, и в Англию регулярно поступала довольно надёжная статистика о численности населения. В конце концов, тогда белые люди в Америке были не ещё не граждане, а подданные, им полагалось платить налоги. А позже, когда Америка стала независимой, новая страна о статистике помнила, и вела записи аккуратно.

Приведём данные и мы. В 1700 году, бледнолицее и чернокожее<sup>31</sup> население английских колоний в Америке составляло 250.9 тыс человек. В 1750 – 1'170.8 тысяч. В 1800 – 5'308.5 тысяч.

Рассчитаем время удвоения населения и скорость прироста населения США по формулам:

<sup>31</sup> Население индейцев сокращалось, но статистики не вели. Мы до сих пор не знаем, сколько же их там было до Колумба. Энгельс утверждал, что Мальтус ошибся, а бешеный рост 13 С-АШ – из-за иммиграции. На самом деле, ошибся Энгельс. С 1700 по 1800 годы общее число переселенцев из Европы в 13 С-АШ не превышало 100 тыс, плюс около 300 тыс чернокожих рабов. Остальные пять миллионов «северян» народились уже на месте.

$$r = \left( \frac{P(t_2)}{P(t_1)} \right)^{\frac{1}{(t_2 - t_1)}} \quad T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(r)} \quad \{4.4\}$$

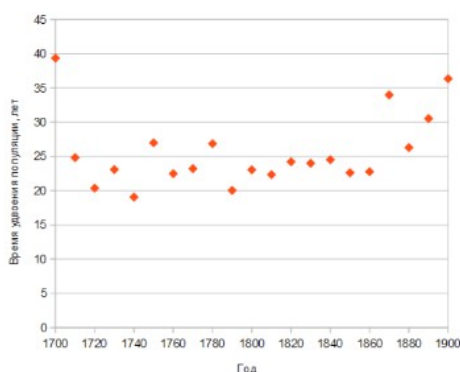
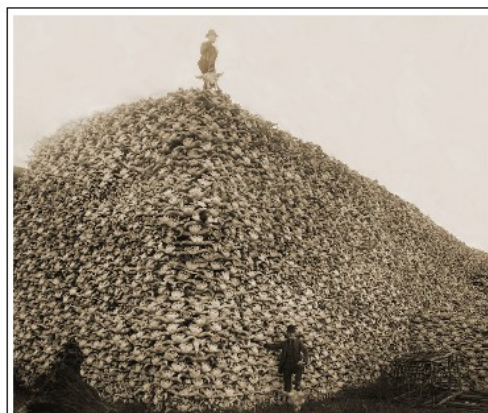
Здесь:

$T_2$  – время удвоения популяции, лет

$r$  – фактор роста населения

$t_1, t_2$  – годы переписи

$P(t_1), P(t_2)$  – население в годы переписи



Люди и бизоны. Время удвоения колониального населения 13 С-АШ

Как видим, когда в 1798 году Мальтус писал про время удвоения бело-чёрного населения Америки  $T_2 = 25$  лет, он намеренно ошибался в сторону более медленного роста. Во втором и последующем изданиях автор упоминает «почти рекорд» декады 1780-1790, когда время удвоения было ровно 20 лет. В такое короткое время удвоения Мальтус поверить не смог и отмёл эту точку как статистическую ошибку. По современным данным число 20.0 считается верным, а в декаду 1730-1740 рекорд был даже побит: 19.1 года!

Отчего на самом деле получился такой безумный рост в Северной Америке? Конечно, из-за огромных, «бесконечных» природных ресурсов! Перед несколькими тысячами первых колонистов лежала бескрайняя страна: 800 млн га территории, из которых пригодно под пашню более 300! Самородки меди – по три или четыре тонны. Метеоритное железо. Бизоны. 60'000'000 (шестьдесят миллионов) ходячих «холодильников» – в каждом по полтонны диетического мяса. К 1889 году в США стало 62 млн бледнолицых и чернокожих братьев и всего 541 (sic! – точность до единицы) бизон. На картинке – черепа бизонов из 1870-х. Удобрение.

Кто-то заявляет вам, Уважаемый Читатель, мол Роберт Мальтус высосал свои умозаключения о росте популяции из пальца? Знайте: перед вами распинается либо оболваненный пропагандой дурак, либо лукавый перец. Ибо Мальтус про Америку знал и приводил ссылки в своей книге, на многих страницах. А

Россию, Швецию и ещё несколько европейских стран Роберт Мальтус посетил лично. Каково по России ездить в 1799-1800? Перечитайте у Гоголя в поэме «Мёртвые души», притом Гоголь писал про 1840 год. Мальтус доехал не только до Петербурга, но и по уездам: собирал статистические данные об урожайности, рождаемости и смертности.<sup>32</sup>

Отсюда, в отсутствие всех ограничений, человеческая популяция может удваиваться примерно за 25 лет или чуть быстрее.

Неужто Мальтус, зная про Америку и Россию, не озаботился поглядеть данные о населении Англии? Нет, конечно! Приходские книги учёта рождений и смертей существовали в Англии примерно с XVI века, а уж в XVIII веке – загляденье! Ко всему прочему, Мальтус был священником, то есть коллегой именно тех, кто учётом населения и занимался.

Когда лукавые перцы свистят вам в ухо, что Мальтус-де считал время удвоения населения планеты Земля 25 лет, и обещал-таки всем к 1850 голодомор и вселенскую катастрофу с людоедством, трупоедством и зомбями на улицах, – не верьте! Ничего подобного Роберт Мальтус нигде не писал. Планета Земля в целом интересовала преподобного Мальтуса мало. Его заботила единственная нация – англичане и волновал единственный кусочек территории – Великобритания (в тексте он по традиции называет свою Родину «Острова»).



В Англии XVII-XVIII веков никаких удвоений за двадцать пять лет не наблюдалось.

---

<sup>32</sup> Один камарад написал мне в блог, что Мальтус занимался пропагандой. Мальтус как раз науку двигал, построив первую математическую теорию популяции и ресурсов. Пропагандой занимались те, кто из математического трактата Мальтуса надёргал цитат без контекста, да ещё криво перевёл. Тут вам и Спенсер, и Ницше, и Горький, и Геббельс, и Сулов. Каждый уникален в своём репертуаре и доказывал своё что-то. На одних и тех же цитатах.

Год	1600	1630	1670	1700	1750	1801
Население, млн	4.81	5.60	5.77	6.05	6.52	16.35

По формуле {4.4} легко проверить, что с 1600 по 1750  $T_2=342$  года, и даже с 1750 по 1801, несмотря на «сельскохозяйственную революцию», турнепс и прочие достижения, время удвоения – 38 лет. Почему население Англии не удваивалось как в Америке? Совершенно справедливо, Мальтус понял, что ограничение – по пахотной земле. К 1600 свободной земли в Англии больше не было, даже пустоши (помните торфяные болота в «Собаке Баскервиль»?) были в чьей-то собственности.

Заслуга Мальтуса перед человечеством как раз в том, что он понял! Снизу на кривую народонаселения (популяции) давит экспонента, тупо связанная с инстинктом продолжения рода, то есть вторым постулатом. Однако сверху кривую нагибают **контролирующие факторы популяции** (positive checks в терминологии математика того времени), то есть первый постулат.

Я написал: «контролирующие факторы популяции». Это мерзкий перевод, калька с английского. Хотя, всё-таки лучше, чем в официальном переводе прямиком из Отдела Пропаганды ЦК КПСС 1980 года выпуска: «положительные факторы». А дальше – перечисление «положительных»: голод, война, проституция... (а гравитация у Ньютона — негативное явление, так-то).

Правильный перевод: «**естественные ограничители популяции**». Их Мальтус перечислил в книге:

1. Голод. Недостаток пищи для поддержания физиологических функций. Мрут все, от мала до велика.
2. Недоедание. Прожить-то хватает, но подорваны здоровье и иммунитет. Последствия ясны.
3. Перинатальная смертность. Пищи хватает, чтобы выжить, но недостаточно, чтобы выносить плод и родить здорового младенца.
4. Вызванная детская смертность. Пищи хватает взрослым, а детей отправляют по миру.
5. Сознательное прерывание беременности. В 1798 году услуги бабки-повтухи заканчивались смертью пациентки примерно в 3 случаях из каждых 5 аборт.
6. Сознательное воздержание от зачатия.
7. Пороки: пьянство, наркомания, проституция, от всего вышеперечисленного.
8. Преступность и бандитизм, вызванные недоеданием и пороками.
9. Болезни, проистекающие от скученности и недоедания.
10. Народные волнения, проистекающие от недоедания и болезней. «Геволуционная ситуация».
11. Войны, косвенно проистекающие от народных волнений.

12. Миграция населения, в том числе – насильственная (фермеры в Канаду, карманники в Австралию!) – из-за всего, перечисленного выше. Самое прикольное, многие «закоренелые преступники», пережив голод и цингу на кораблях Его Величества, по прибытии в Австралию становились честными фермерами. «Земельный вопгос погешали», как сказал бы Владимир Ильич.

Про микробиологическую природу болезней во времена Мальтуса ещё не знали точно, но уже догадывались. Ясно было, что распространение чумы, холеры, и прочих эпидемий как-то связано со скученностью населения. Даже дедушка Ньютон убежал от лондонской чумы к себе в поместье, чтобы там поиграть с призмами. Современный нам микробиолог сказал бы, что от скученности появляется вектор распространения инфекции.

Из-за ограничителей популяции (контролирующих факторов), и по рождаемости, и по смертности в Англии первой половины XIX века (в веке XVIII просто никто такое не считал) наблюдалась жуткая свистопляска. То каждая женщина вдруг хотела родить, то массово шли к повивальным бабкам за примитивным абортom. То белокурые и ярко-рыжие деточки-ангелочки играют у кромки поля, рядом с вяжущими снопы счастливыми отцами, то вдруг папочка упился в стельку, а отпрысков послал, куда подальше: в Лондон, просить Христа ради. То война. А революция? Так вот она: на той стороне Канала, который Ла-Манш.

Положений в книге Мальтуса было не два, а много, и все с доказательствами:

1. Без ограничений пищей и ресурсами, человеческая популяция имеет тенденцию размножаться по экспоненте. По статистическим данным из 13 Северо-Американских Штатов, можно грубо принять время удвоения популяции за 25 лет. В Англии и Франции 1700-х годов экспоненты не замечено, так как свободной земли уже нет: всё в чьей-то собственности.
2. В странах, где свободной земли уже нет, население таким образом приближается к критической плотности. Функцию критической плотности можно поднять путём применения новых технологий (кто сказал, что Мальтус не знал про технологии?) или хищнического землепользования (смотрим его пример с коровками и навозом). В первом случае можно какое-то время удваивать урожайность с гектара, но потом удвоения не получится, а будет, в лучшем случае, арифметический рост. А в случае сверх-интенсивного пользования, ещё хуже: эффект какое-то время будет положительный, а потом урожайность упадёт. В Англии применение новых технологий позволило почти удвоить производство жратвы за 50 лет (с 1725 по 1775 гг). 50 лет, как ни крути, — это вдвое больше, чем 25. Вы разве не согласны?
3. Когда плотность населения доходит до критической, народ в среднем продолжает размножаться. Почему? Смотрим второй постулат.

4. Население проскакивает оптимум, и наступает период, названный позже мальтузианской катастрофой: что бы Вы ни делали, какие бы кредиты ни раздавали, сколько бы ноликов к резаным фантикам ни добавляли, еды на всех не хватает.
5. После наступления мальтузианской катастрофы на народ слетаются напасти (в том, старинном, английском используется слово «misery»): голод, эпидемии, холод, война, революция, разруха. Народ расстраивается и предаётся пороку («vice»): детям выдают суму для сбора милостыни и желают счастливого пути, жена идёт к повитухе, чтоб вытравить младенца (чаще со смертельным исходом для матери), мужик идёт к проститутке (у неё, потенциально, тот же исход, что и у жены), мужик с горя упивается в хлам. Как результат, население начинает сокращаться: не только младенцы, но и алкоголики тоже.
6. Население снижается до оптимального уровня, но не останавливается, а проскакивает ниже.
7. Дети, из тех что с сумой по миру, чуть взрослеют и нанимаются в батраки – кто выжил, конечно. Дешёвая рабсила идёт в производство. Мужички, кто не спился, трезвеют и принимаются за работу. Бабы, кто не умер, снова начинают рожать. Мальтузианская катастрофа заканчивается.
8. Далее смотрим пункт второй, по кругу. Это называется «мальтузианский цикл» или «цикл нищеты».



Для вас, жители XXI века, воспитанных на «научной» фантастике про зомби и пришельцев марсиан. Мальтузианская катастрофа — не апокалипсис на весь мир, причём последний. Мальтузианская катастрофа – циклическое событие, которое было с человечеством с того дня, как у законных хозяев Адама и Евы



некто Б. отжал ОАО «Эдем». В истории человечества мальтузианские катастрофы происходили десятки тысяч раз. К счастью, пока вразнойбой. Европа 1620 года ничего не знала про катастрофу на острове Пасхи – не открыли ещё. Большинство американцев, озабоченно читая новости Великой Депрессии, пропускали «трехстрочки» про голод в СССР 1932-33 годов, как, впрочем, и население СССР 1972 или 1986 года не особо волновали голодоморы в Сомали.

Мальтус смотрит на численность индейцев-охотников в Америке и оленеводов в Лапландии: там циклы! Он смотрит в книги регистрации рождений и смертей в Англии: циклы! Во Франции, Швеции – циклы. И в России циклы были. У нас мальтузианские катастрофы называли проще: «голодные годы».

Тут самое время отодвинуть на время Англию XIX века и поглядеть, как пруд номер три работает в биологии. Мальтус первый указал, что в разгонах и обвалах популяции играет роль именно биология, а не случайность или гнев богов. В современном мире есть тысячи лабораторий, где подобные же разгоны и обвалы популяции наблюдают по сотне раз за день. Речь идёт не об академической науке, а о практической медицине. В каждом приличном городе есть санитарно-эпидемиологическая станция, а при ней – бак-лаборатория.



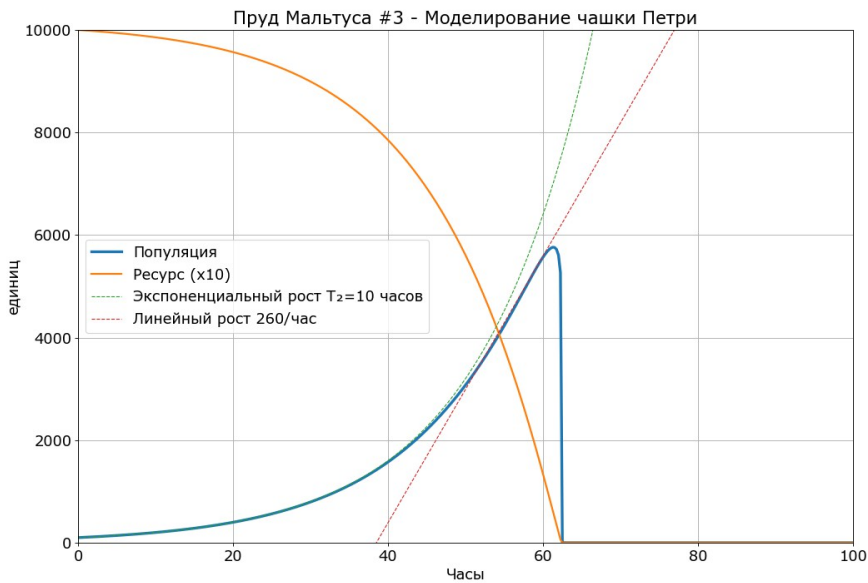
Пример в программе \Chapter 04\Test\_Malthus\_6.py

```
T = np.linspace(0, 100, 401)
P1 = Pond_Population_3( 100, 100000, 0, 10, 0)
P1.Solve( T)
b = np.log(2) / 10
Exponent = 100 * np.exp( b*T)
Linear = (T-38.5)*260
```

Пусть в чашке изначально 100 тыс бактерий, а еды каждой бактерии достаточно на 1'000 часов. Насытившись, бактерия делится каждые 10 часов.

Что происходит? С нуля до примерно 40 часов бактерии размножаются по

экспоненте, и колония достигает 1'600 тыс особей. Далее начинают играть факторы ограничения популяции, кривая проваливается несколько ниже экспоненты и к 55 часам переходит к строго-линейному росту. В 60 часов вся поверхность заселена счастливыми бактериями, а всего в колонии их 5'600 тысяч. Через 63 часа после начала эксперимента колония кончается, так как весь агар съеден.



Во время Второй мировой на островке Св.Мэтью в Беринговом море американские морские пограничники расчистили взлётно-посадочную полосу и построили метеостанцию. Через Аляску перегоняли в Советский Союз истребители, новые с завода – всяко бывает. Помимо ящиков с консервами, завезли 29 живых северных оленей на случай если совершившим вынужденную пилотам захочется свежего мяса. В 1949 цирк с метеостанцией уехал, а олени остались. К 1963 году по острову гуляло более 6'000 оленей<sup>33</sup>. В 1965 осталось 42. Впрочем, такой скоростной обвал мог произойти из-за необычайно суровой зимы 1963-1964 годов (смотрим «неурожай» на примерах выше) либо из-за эпидемии какого-нибудь оленьего гриппа. Однако суровую зиму и холодное лето 1953 олени пережили великолепно и без заметного снижения численности.

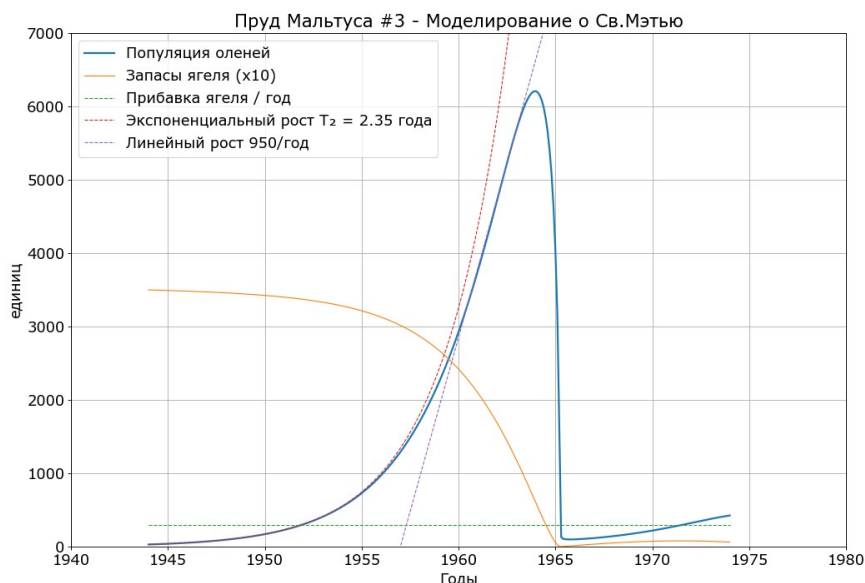
Пример в программе \Chapter 04\Test\_Malthus\_7.py

```
T = np.linspace(1944, 1974, 301)
P1 = Pond_Population_3( 29, 35000, 300, 2.35, 0.01)
P1.Solve( T)
b = np.log(2) / 2.35
Exponent = 29 * np.exp( b*(T-1944))
Linear = (T-1957)*950
```

33 Площадь сурового северного острова – 357 км². В 1963, то есть в год обвала, на каждого оленя приходилось по 35700 / 6000 = 6 га, или 600 соток. В сто раз больше средней российской дачи. Запомним это число.



Пусть на острове изначально 29 оленей, а запасов ягеля достаточно для 35 оленей на 1'000 лет. Более того, каждое лето прибавляется ягеля для прокорма 300 оленей. Если олени сытые, а хищников нет, популяция удваивается каждые 2.35 года (так примерно и есть в природе).



Что видим? С 1944 до примерно 1956, олени размножаются по экспоненте, колония достигает 970 особей. Далее начинают играть факторы ограничения популяции, кривая проваливается несколько ниже экспоненты и к 1960 году переходит к строго-линейному росту. В 1964 – пик популяции 6'200 особей. На следующий год – обвал. В отличие от бактерий в чашке Петри, популяция оленей не вымирает в ноль. В моём примере остаётся 108 оленей; в реальной жизни осталось вроде бы 42, но популяция уже слишком мала для статистических методов. Как видим, животные продолжают размножаться, проскакивая в 1972 году предел в 300 особей. Далее наверняка последовало бы несколько небольших мальтузианских катастроф, однако добрые люди оленей с острова вывезли.

Представленные выше графики получили в XXI веке красивое имя: «обрыв Сенеки». Название вроде бы придумал в 2011 Уго Барди для своей статьи на «*Oil Drum*»<sup>34</sup>, хотя математики пользовались кривой добрые две сотни лет, называя её просто «акулий плавник». Для читающих по-английски рекомендую книгу Уго Барди [15].

Система {4.3}, а также её бесчисленные модификации, приводятся в книгах по Теории Катастроф под разными именами: «модифицированное уравнение Ферхюльста», «система Мальтуса-Ферхюльста» или «система Мальтуса». Технически имя Мальтуса следует ставить вначале. Пьер Франсуа Ферхюльст

34 См перепечатку: <http://cassandraleacy.blogspot.com.au/2011/08/seneca-effect-origins-of-collapse.html>

опубликовал своё аналитическое решение в 1845 году, то есть через 11 лет после смерти Мальтуса, а в момент публикации первого издания «*Теории популяции*» талантливого бельгийского математика ещё и на свете не было. Та же система {4.3} применяется при анализе коррекции возмущений. Когда вы летите на коммерческом самолёте, 95% времени рулит не лётчик, а автопилот. За то, что летательный аппарат привозит вас куда надо, скажите спасибо уравнениям Мальтуса.

Где ошибся Мальтус?

Сразу отбросим недобросовестные переводы-фальсификации с поеданием мозгов недоношенных младенцев в стиле Геббельса-Эренбурга или «*Сионских мудрецов*» (выделение перлов – моё):

*«Мы должны, — писал Мальтус, — быть последовательными и способствовать действиям природы, вызывающим смертность; и если нас пугают слишком частые повторения голода в его ужасных формах, то мы должны усердно поощрять другие разрушительные силы природы, которые сами вызываем к жизни. Вместо того, чтобы проповедовать среди бедняков необходимость соблюдения чистоты, мы должны поощрять как раз обратные привычки. **Надо делать в городах более узкие улицы, перенаселять дома и способствовать повторению эпидемии чумы.** Необходимо строить деревни близ непроточных водоемов и особенно способствовать заселению болотистых и вредных для здоровья мест. Но прежде всего нам **следует осудить применение особых лекарств для лечения смертельных болезней**, а также осудить тех добрых, но заблуждающихся людей, которые, изобретая способы искоренения определенных зол, думают, что оказывают услугу человечеству». [Где, в какой книге, какого издания, на какой странице нашли это? И фамилию «переводчика» отчего стесняетесь напечатать?]<sup>35</sup>*

Роберт Мальтус ненавидел не бедных, а бедность, не нищих, а нищету. Вот его реальная цитата. Несколько тяжеловато и напыщенно. XVIII век, однако:

*Evil exists in the world not to create despair but activity. We are not patiently to submit to it, but to exert ourselves to avoid it. It is not only the interest but the duty of every individual to use his utmost efforts to remove evil from himself and from as large a circle as he can influence, and the more he exercises himself in this duty, the more wisely he directs his efforts, and the more successful these efforts are, the more he will probably improve and exalt his own mind and the more completely does he appear to fulfil the will of his Creator.*

Зло существует в мире, чтоб создавать не отчаяние, но активность. Мы не станем терпеливо подчиняться злу, но трудиться, чтоб зла избежать. Не только желание, но и обязанность каждого человека, – делать всё возможное, чтобы удалить зло от себя и от всего, на что он в силах повлиять. Чем больше человек посвящает себя борьбе со злом, тем более мудро он направляет свои усилия, и тем успешней эти усилия, тем выше вероятность, что улучшит и возвысит ум свой, тем более исполнит он волю своего Создателя. [1-е издание, стр 126, перевод мой]

Вот такой человеконенавистник-мизантроп, мля.

Абортариев и тотального воздержания Мальтус не предлагал, в строительстве концлагерей и крематориев замечен не был.

Мальтуса совершенно несправедливо обвиняют, будто он хотел маленькую популяцию. Мол, меньше народу – больше кислороду. В корне неверно! Мальтус предлагал регулировать рождаемость так, чтобы численность населения никогда не превышала возможностей природопользования. На максимуме, но не выше! А маленькая популяция при нерегулируемой рождаемости не приводит ни к чему хорошему. Циклы делаются длиннее, зато

35 Скачано с <http://www.medical-enc.ru/m/12/maltuzianstvo.shtml>

круче, и в мальтузианских катастрофах вымирает больше голодных детишек. И ещё: свято место пусто не бывает. Если население вашей страны существенно ниже оптимального, на ваши земли позарятся жадные соседи.

Для регулирования рождаемости Мальтус предлагал ряд простых методов, например, расстреливать беременных картечью из пушек... Да нет же! Школы предлагал открывать. Обязательное всеобщее начальное образование, в том числе и для девочек. А что «начальное» – так извините. В Англии 1798 года были и университеты, но население читать умело процентов на десять-двенадцать от силы, причём главным образом мужчины. Мальтус прекрасно разобрался, что для предотвращения популяционного взрыва нужно сначала ввести всеобщее начальное, и только потом задумываться над всеобщим средним и очень высшим, а не наоборот.

Поздние браки следует всячески поощрять, а ранние по возможности откладывать. Да, когда женятся в двадцать пять лет, а не в пятнадцать, думают головой, а не... гормонами.

Натальное воздержание предлагал. С ударением на «натальное». Не знаете, что такое? Стыдно, батенька. Это когда муж и жена хотят ребёнка, жена рассчитывает «правильный день» в календарике. А если дети уже есть, сколько хочется, по тому же календарiku можно рассчитать и другие дни – когда опасность «залёта» нулевая. В наши дни это называется «планированием семьи», но использование контрацептивов Мальтус осуждал. Опять-таки вспомним, что презервативы образца 1798 года делали из кишок животных или пропитанной химикатами льняной ткани; после их следовало стирать и сушить для повторного использования, а защита от беременности или сифилиса была разве что психологической<sup>36</sup>.

Предлагал закрыть и запретить бордели, потому как грех и сифилис, а проституток – в деревню на перевоспитание. Секс до брака или вне брака? Низзя! Не утерпел и изнасиловал? Прямоком на виселицу, не пряник же тебе за такое геройство. А вы ждали от англиканского священника другой рекомендации?

Мальтус категорически отрицал прерывание беременности. Это сейчас можно спорить о праве женщины на аборт. На уровне медицины начала XIX века, аборт был не столько аморален, сколь ужасен, и недаром. На гравюрах Георгианской Англии вы найдёте и пивные, и опиумные курильни, и публичные дома, и прокажённых, но я долго искал и не нашёл ни одной гравюры, достоверно изображающую бабку-повитуху за работой.

Войны, бордели, периодический голод и эпидемии, а также смуту и революции Мальтус не приветствовал. Он просто объективно писал, что это всё есть и предлагал толковые методы, как этого ужаса избежать.

<sup>36</sup> В Европе презерватив изобретён Габриэле Фаллопио в 1564 как защита от сифилиса. Для предотвращения беременности стали применять то же самое примерно с 1655 года. Мальтус про «итальянский мешочек» наверняка знал, но нигде в своих книгах не упоминает.

Импорт чёрного перца, какао и ананасов Мальтус в принципе не отвергал, но считал, что дешёвое американское зерно больно ударит по английским фермерам, которым и так жилось несладко. Научный оппонент Мальтуса – Давид Рикардо – полагал, что импорт зерна – это хорошо. Чем больше фермеров разорятся и уйдут с земли на шерстяные мануфактуры, тем больше будет сукна, чтобы торговать с аграрной Америкой. В нашем 2018 году мы бы назвали Рикардо «глобалистом», а Мальтуса – «антиглобалистом» и сторонником «органической экономики» и «импортозамещения».

Ага. Клоуны, называющие мальтузианцев глобалистами, а глобалистов – мальтузианцами, на деле доказывают: клоун-пропагандист думать не обучен. Может только как попка повторять, что ему по телевизору сказали лукавые перцы.

Ещё Мальтус предлагал, не платить беднякам «детские шиллинги». Была такая практика в Англии во времена Георга III – стране нужно пушечное мясо! Мальтус был священник и видел собственными глазами, как папаши забирают эти гроши, чтоб упиться в стельку, а голодным детям – разве что леденец на палочке.

Говорят, что Мальтус не оценил новых технологий земледелия. Уважаемая английская «Википедия» даже обвиняет Мальтуса в незнании генетики (sic!) Как раз сельскохозяйственный потенциал Англии Мальтус оценил верно (а заявлений про планету Земля он никогда не делал, смотрите выше). Детство Роберт провёл в деревне, как растёт пшеница и откуда вылазят жеребята, телята, поросята, – разобрался. Про технологии природопользования Мальтус знал побольше, чем средний горожанин XXI века. Предсказания Мальтуса для Британии сбылись на 100%. Несмотря на все достижения агрохимии и механизации с генетикой, в которых тёмный, необразованный Мальтус ничего не понимал, – ну не придумали генетику в его-то время, до рождения Менделя ещё четверть века, – современная Великобритания производит продовольствия на 38 млн человек. Остальные 26 млн питаются с импорта, в основном из США, Канады и Бразилии. Что будет, если импорт временно прекратится, как случилось по воле капитанов немецких субмарин в 1940? Эрзац-омлет из отрубей – ещё не самое плохое блюдо.

И вообще, никакой полит-пропагандой Т.Р.Мальтус никогда не занимался, а преподавал в «Академии Восточно-Индийской Компании» и двигал науку. Книга о «*Принципах народонаселения*» выдержала ещё при жизни шесть изданий. В 1820 написал «*Принципы политэкономии*»<sup>37</sup>. Один из основателей «*Экономического Клуба*» (1821). Почётный член Британской Академии Наук (1827). Основатель и почётный член «*Статистического Комитета*» Англии (1834). Умер в возрасте 68, на своей профессорской кафедре, от сердечного приступа. А кто-то вам лапшу вешает, что наш доктор философии и магистр математики удалился в поместье, всеми забытый и покинутый, и оттуда вёл злобную пропаганду. Ага.

---

37 Из которой потом К.Маркс выдёргивал таблицы, «позабыв» указать источник.

Что сегодня можно применить из рекомендаций Мальтуса, выданных почти 250 лет назад? С поправками на развитие медицины и прочих наук о природе – почти всё. Если вы полагаете, что вашей дочери не к лицу пяти лет отроду помирать с голоду, что в четырнадцать лет она должна ходить в школу, а не с пузом, а в семнадцать – поступать в университет, а не в бордель, вы – мальтузианец.

Честную математическую критику популяционной теории Мальтуса можно разделить на три области:

1. Рождаемость  $B(t)$  и смертность  $A(t)$  – вообще-то независимые и нелинейные функции. Сводить их к линейному уравнению  $b(1-P(t)/X)$  – значительное упрощение. Человек не вступает в половую зрелость немедленно после рождения. Скажем, резкое увеличение рождаемости в году  $z$  приведёт к увеличению количества новых рождений только лет через 15-20. Высокая детская смертность в неурожайный год  $y$  в модели Мальтуса приводит к увеличению рождаемости в годы после недорода, но никак не описывает «демографическую яму» начиная с года  $y+15$ .
2. В модели Мальтуса рассчитывается только уровень потребления продуктов питания, а материальное потребление индивидуума вообще не учитывается никак. На деле, с развитием цивилизации у ~~каждого~~ ~~Выбегаллы~~ человека появляется всё больше материальных потребностей. Нельзя сводить человеческую цивилизацию к простой еде, как у диких животных!
3. Неясно, откуда взялась константа  $O$ , и отчего производительность земли нельзя увеличивать до бесконечности, пусть даже линейно. Чисто интуитивно, Мальтус сформулировал закон убывающей доходности, но математически обосновать не смог. В 1826, когда в Лондоне печатали шестое издание «Теории народонаселения», в семье ирландского учителя Джеймса Томсона подрастал двухлетний мальчик по имени Уильям, он пока играл в кубики и погремушки – и о Термодинамике ещё не задумывался.

Все три возражения – совершенно правильные. Впрочем, и сам Мальтус, и позже Ферхюльст неоднократно писали: их математическая модель – упрощение, чтобы хоть что-то аналитически решить, а первый (механический) компьютер Бэббиджа строили уже после смерти Мальтуса, да так полностью и не достроили.

Подведём итоги главы.

- Нами воспроизведена численная модель системы уравнений Мальтуса-Ферхюльста для ненулевых потерь.

- Определены термины: **органический рост**, **мальтузианская ловушка**, **мальтузианская катастрофа**, **бутылочное горлышко популяции**.
- На основании модели показано, что существует три вида решений для популяции: (А) плавная стабилизация из органического роста, соответствующая аналитическому решению Ферхюльста из 3-й главы, (Б) решение вида «мальтузианская ловушка» с плавной стабилизацией и (В) решение вида «мальтузианская ловушка» с осцилляцией. Какое решение произойдёт, зависит от уровня потерь **d**, максимального коэффициента воспроизводства **b** и ограничений, наложенных на минимум первой производной **P'(t)**.
- Показано, что каждый биологический вид проходит в своём развитии многие тысячи мальтузианских катастроф. Бутылочные горлышки популяции могут быть следствием как мальтузианских катастроф, так и внешних факторов.
- Приведена оценка максимальной величины **b**, как вычислено в «*Теории популяции*».
- Приведено два классических примера использования системы уравнений Мальтуса-Ферхюльста для описания динамики популяций: чашка Петри и остров Св.Мэтью.
- Приведено три недостатка классической модели Мальтуса. Как их обходят в современном динамическом моделировании, в том числе в модели *World3* из «*Пределов роста*», будет показано в следующих главах.