Szymon Idec

Potencjał elektryczny

17 stycznia 2022

1. Sformułowanie silne

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_r}$$
$$\phi'(0) + \phi(0) = 5$$
$$\phi(3) = 2$$
$$\rho = 1$$
$$\epsilon_r(x) = \begin{cases} 10 & \text{dla } x \in [0,1] \\ 5 & \text{dla } x \in (1,2] \\ 1 & \text{dla } x \in (2,3] \end{cases}$$

Gdzie poszukiwana funkcja to $\phi(x)$.

$$[0,3] \ni x \to \phi(x) \in \mathbb{R}$$

2. Warunki brzegowe

Na prawym brzegu mamy niezerowy warunek Dirichleta. Szukamy więc rozwiązań postaci $\phi = w + \widetilde{u}$. Przyjmujemy $\widetilde{u} = 2e_n$

Na lewym brzegu mamy warunek Robina. Otrzymujemy z niego $\phi'(0) = 5 - \phi(0)$.

3. Sformułowanie słabe

$$\begin{aligned}
\phi'' &= -\frac{\rho}{\epsilon_r} \\
\phi'' v &= -\frac{\rho}{\epsilon_r} v \\
\underbrace{\int_0^3 \phi'' v \mathrm{d}x}_{\text{całk. przez części}} &= -\int_0^3 \frac{\rho}{\epsilon_r} v \mathrm{d}x \\
\phi' v' \Big|_0^3 - \int_0^3 \phi' v' \mathrm{d}x &= -\frac{1}{10}\int_0^1 v \mathrm{d}x - \frac{1}{5}\int_1^2 v \mathrm{d}x - \int_2^3 v \mathrm{d}x \\
\phi'(3)\underbrace{v(3)}_{0} - \phi'(0)v(0) - \int_0^3 \phi' v' \mathrm{d}x &= -\frac{1}{10}\int_0^1 v \mathrm{d}x - \frac{1}{5}\int_1^2 v \mathrm{d}x - \int_2^3 v \mathrm{d}x \\
-(5 - \phi(0))v(0) - \int_0^3 \phi' v' \mathrm{d}x &= -\frac{1}{10}\int_0^1 v \mathrm{d}x - \frac{1}{5}\int_1^2 v \mathrm{d}x - \int_2^3 v \mathrm{d}x \\
\underbrace{\phi(0)v(0) - \int_0^3 \phi' v' \mathrm{d}x}_{B(\phi, v)} &= \underbrace{-\frac{1}{10}\int_0^1 v \mathrm{d}x - \frac{1}{5}\int_1^2 v \mathrm{d}x - \int_2^3 v \mathrm{d}x + 5v(0)}_{L(v)}
\end{aligned}$$

$$B(\phi, v) = B(w + \widetilde{u}, v) = B(w, v) + B(\widetilde{u}, v)$$
$$B(w, v) = L(v) - B(\widetilde{u}, v)$$

4. Funkcje bazowe

$$e_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{dla } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{dla } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases}$$

5. Równanie w postaci macierzowej

$$A \cdot U = B$$

$$\begin{bmatrix} B(e_0, e_0) & B(e_1, e_0) & \cdots & B(e_{n-1}, e_0) \\ B(e_0, e_1) & B(e_1, e_1) & \cdots & B(e_{n-1}, e_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(e_0, e_{n-1}) & B(e_1, e_{n-1}) & \cdots & B(e_{n-1}, e_{n-1}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(e_0) - B(\widetilde{u}, e_0) \\ L(e_1) - B(\widetilde{u}, e_1) \\ \vdots \\ L(e_{n-1}) - B(\widetilde{u}, e_{n-1})) \end{bmatrix}$$

6. Uproszczenie wartości

$$B(e_1, e_1) = B(e_2, e_2) = \ldots = B(e_{n-1}, e_{n-1})$$

$$B(e_1, e_0) = B(e_2, e_1) = \ldots = B(e_{n-1}, e_{n-2})$$
$$B(e_{i+1}, e_i) = B(e_i, e_{i+1})$$
$$i = 0, \ldots, n-2$$

Każda całka $B(e_a, e_b)$ gdzie $|a-b| > 1$ będzie równa 0, ponieważ przedziały funkcji bazowych się nie nakładają.

W macierzy B odejmujemy tylko w ostatnim wierszu $B(\tilde{u}, e_i)$, ponieważ w innych wierszach funkcje bazowe się nie nakładają ($\tilde{u} = 2e_n$).