1.4. Mehāniskās svārstības

1.4.1. Svārstības un to veidi

Par svārstībām vai oscilācijām sauc tādu procesu, kurā fizikālo raksturlielumu vērtības laikā mainās (gan palielinās, gan samazinās) ap kādu vidējo vērtību. Ja tādas izmaiņas notiek pēc vienādiem laika intervāliem, tad svārstības sauc par *periodiskām* (ja laika intervāli nav vienādi, tad svārstības ir *aperiodiskas*). Fizikālā lieluma vērtības atšķirību no vidējās vērtības sauc par *novirzi*. Uzskatāms svārstību piemērs ir pulksteņa svārsta kustība.

Svārstības var novērot gan dabā, gan tehnikā. Piemēram, svārstās atmosfēras spiediens, gaisa temperatūra, koka zari vējā, atsperē vai stieplē pakārts ķermenis, mūzikas instrumenta stīga, telefona membrāna; sirdspuksti, elpošana, maiņstrāva, elektronu kustība atomā, ūdens līmenis un straumes ātrums upē, – tās visas arī ir svārstības. Ļoti svarīgi ir svārstību procesi radiotehnikā.

Svārstības var iedalīt pēc dažādām pazīmēm.

1) atkarībā no svārstošā objekta dabas, piemēram, mehāniskās un elektromagnētiskās svārstības.

2) pēc ķermeņa kustības rakstura: ķermenis var svārstīties, atrodoties gan translācijas, gan arī rotācijas kustībā. Tādēļ apskata *translācijas un rotācijas svārstības*.

3) pēc ārējās iedarbības rakstura: svārstības var būt *brīvas vai uzspiestas.* Ja nav mainīgu ārēju spēku iedarbības, tad svārstības ir *brīvas*. Tādā gadījumā oscilējošās sistēmas enerģija ir lielāka par sistēmas līdzsvara stāvokļa enerģiju, kā, piemēram, iekustinātai vai no līdzsvara stāvokļa izvirzītai diegā pakārtai lodītei. Konservatīvai sistēmai brīvās svārstības ir *nerimstošas*, bet disipatīvas sistēmas svārstības ir *rimstošas*. Nerimstošas brīvas svārstības sauc arī par *pašsvārstībām*. Ja uz oscilējošo sistēmu darbojas periodisks ārējs spēks, tas tās ir *uzspiestas svārstības*.

Dažos gadījumos (piemēram, ja svārstības ir rimstošas) periodiski var atkārtoties tikai noteikti svārstību stāvokļi (līdzsvara stāvokļi), kā arī novirzes maksimumi un minimumi, kuru skaitliskās vērtības laikā mainās.

Lai gan svārstību procesi kā pēc fizikālās dabas, tā pēc sarežģītības pakāpes ir ļoti dažādi, visas svārstības notiek saskaņā ar dažām vispārīgām likumībām, un tās var reducēt uz visvienkāršāko periodisko svārstību t. s. *harmonisko* svārstību kopumu.

1.4.2. Harmoniskas svārstības. Svārstību raksturlielumi

Praksē ļoti liela nozīme ir harmoniskām svārstībām, jo daudzas svārstības dabā un tehnikā ir harmoniskas vai tuvas tām. Bez tam, ikvienu periodisku svārstību var uzskatīt par harmonisku svārstību superpozīciju un sadalīt to harmoniskās svārstībās.

Apskatīsim vairākus svārstību kustību raksturojošus lielumus.

1.4.2.1. Harmonisku svārstību kinemātiskais vienādojums

Svārstības sauc par harmoniskām, ja novirze x atkarībā no laika t mainās saskaņā ar vienādojumu:

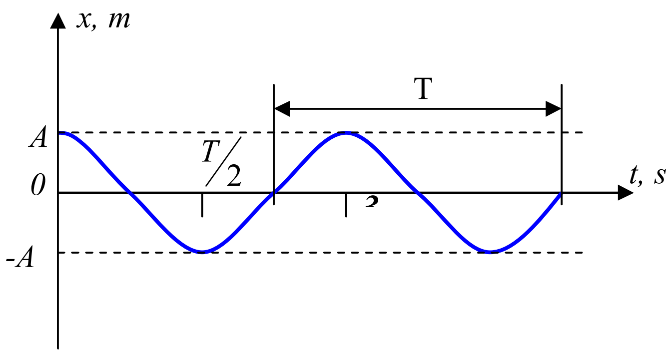
$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)\,. \tag{1.134}$$

Tas ir *harmonisku svārstību kinemātikas pamatvienādojums.*

A – svārstību amplitūda; $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ - svārstību fāze laika momentā t; φ_0 – svārstību sākumfāze laika momentā $t = 0$; ω_0 – svārstību leņķiskā (jeb cikliskā) frekvence. Svārstību vienādojumā kosinusa funkcijas vietā var ņemt sinusa funkciju, tikai sākuma fāzes φ_0 (sk. turpmāk) vietā tad jāņem sākuma fāze $\varphi_0^* = \varphi_0 + \dfrac{\pi}{2}$.

Amplitūda A ir ķermeņa maksimālā novirze no līdzsvara stāvokļa. Maksimālās novirzes stāvoklī ķermenis apstājas un pēc tam sāk no jauna kustēties pretējā virzienā.

Kā zināms, *cos* funkcijas vērtība var mainīties no -1 līdz $+1$, tādēļ novirze x formulā (1.134) var mainīties no $-A$ līdz $+A$ (1.19. att.).



1.19. att.

Svārstību frekvence ν ir svārstību skaits laika vienībā (vienā sekundē, vienā minūtē utt.). No šīs frekvences definīcijas var uzrakstīt:

$$\nu = \frac{N}{t}, \tag{1.135}$$

kur N ir svārstību skaits laikā t.

Ir redzams, ka frekvences mērvienība *SI* sistēmā ir *1* s^{-1} jeb *1 Hz* (hercs). Ja vienā sekundē ķermenis izdara vienu pilnu svārstību, tad frekvence ir *1 Hz*. Svārstību raksturošanai bieži lieto t. s. *leņķisko frekvenci* $\omega = 2\pi\nu$. Leņķiskā frekvence izsaka svārstību skaitu nevis vienā sekundē (*SI* sistēmā), bet *2π = 6,28* sekundēs.

Pašsvārstību leņķisko frekvenci ir pieņemts apzīmēt ω_0.

Svārstību periods *T* ir vienas pilnas svārstības laiks (1.19. att.). Svārstību periods ir apgriezts lielums frekvencei:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{1.136}$$

Svārstību perioda mērvienība *SI* sistēmā ir *1 s*.

Fāze. Ķermeņa svārstību momentāno stāvokli raksturo ne tikai novirze *x*, bet arī leņķis

$$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0 = 2\pi\nu t + \varphi_0. \tag{1.137}$$

Leņķi φ sauc par svārstību fāzes leņķi jeb fāzi un mēra radiānos. Vienas pilnas svārstības laikā fāze φ mainās par *2π* radiāniem. Svārstībām turpinoties, līdz ar laiku *t* aug arī fāze φ.

Par *sākuma fāzi* sauc fāzes leņķi svārstību sākuma brīdī *t = 0*. Kā redzam no izteiksmes (1.137), tas ir leņķis φ_0. Sākuma fāzei atbilst sākuma novirze $x_0 = A\cos\varphi_0$. Sākuma fāze ir atkarīga no tā, kādā stāvoklī ir oscilējošais objekts laika skaitīšanas sākuma brīdī, t. i., kādi ir svārstību sākumnosacījumi.

Fāzes nobīde. Ja vienlaikus aplūko divas svārstības, tad svarīga ir t. s. savstarpējā fāzu nobīde. Tā izsaka abu svārstību fāzu leņķu φ starpību $\Delta\varphi$.

1.4.2.2. Kustības ātrums harmoniskajās svārstībās

Kustības ātruma *v* noteikšanai izmanto harmonisko svārstību kinemātisko vienādojumu (1.134). Par cik $v = \frac{dx}{dt}$, tad

$$v = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}). \tag{1.138}$$

Redzams, ka *v* mainās harmoniski, un tā maiņas frekvence ir ω_0, bet *ātruma amplitūda*

$$v_{\max} = A\omega_0 \tag{1.139}$$

ir jo lielāka, jo lielāka ir svārstību amplitūda A un frekvence ω_0. Redzams, ka ātruma fāze apsteidz novirzes fāzi par $\pi/2$, t. i., maksimālās un citas atbilstošās vērtības ātrums sasniedz par $T/4$ ātrāk nekā novirze (1.20. att. *a* un *b*, kur grafiski attēloti x un v, pieņemot, ka $\varphi_0 = 0$).

1.4.2.3. Paātrinājums harmonisko svārstību kustībā

Paātrinājumu $a = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dv}{dt}$ var noteikt, ja atvasina sakarību (1.138) pēc laika t. Tad

$$a = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi). \tag{1.140}$$

redzams, ka arī kustības paātrinājums a laikā mainās harmoniski ar frekvenci ω_0. *Paātrinājuma amplitūda*

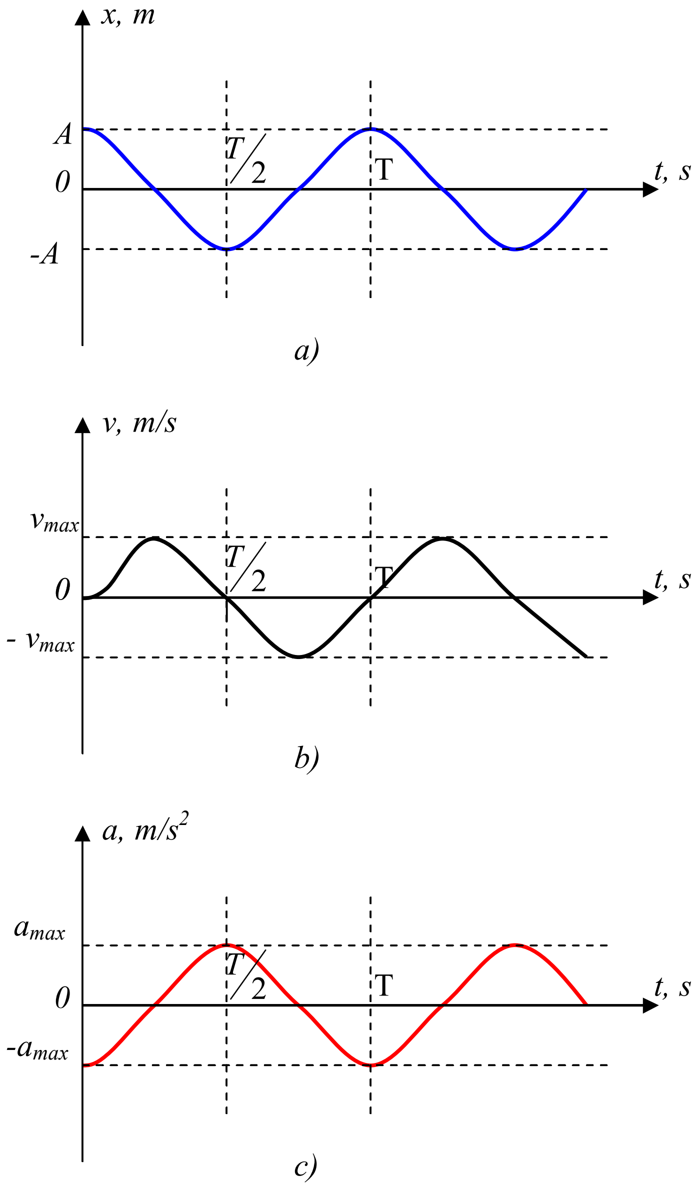
$$a_{\max} = A\omega_0^2 \tag{1.141}$$

ir saistīta ar ātruma amplitūdu: $v_{\max} = A\omega_0$ un svārstību frekvenci ω_0. Redzams, ka paātrinājuma fāze apsteidz ātruma fāzi par $\pi/2$ un novirzes fāzi par π, tātad, paātrinājumam un novirzei ir pretējas fāzes (1.20. att. *a* un *c*).

Izmantojot sakarības (1.134) un (1.140) izsaka paātrinājumu

$$a = -\omega_0^2 x. \tag{1.142}$$

Paātrinājums, tātad, ir tieši proporcionāls novirzei. Mīnusa zīme izteiksmē (1.142) norāda, ka pārvietojums vienmēr ir vērsts pretēji paātrinājumam. Piemēram, ja $x > 0$, tad $a < 0$, t. i., a ir vērsts x ass negatīvajā virzienā.



1.20. att.

1.4.3. Harmonisku svārstību saskaitīšana

Bieži ķermenis vienlaikus izdara divas vai vairākas svārstības, piemēram, ja svārstošais ķermenis ir saistīts divās atsperēs vai vispār uz to darbojas divi vai vairāki periodiski spēki. Šajā gadījumā, lai aprakstītu ķermeņa svārstības, ir jāizdara svārstību saskaitīšana.

Saskaitāmo svārstību virzienu savstarpējā orientācija vispārīgā gadījumā var būt patvaļīga. Matemātiski var izteikt divus speciālus harmonisku svārstību saskaitīšanas gadījumus: svārstības ir vienvirziena, un svārstības ir savstarpēji perpendikulāras.

1.4.3.1. Divu harmonisku vienvirziena svārstību saskaitīšana

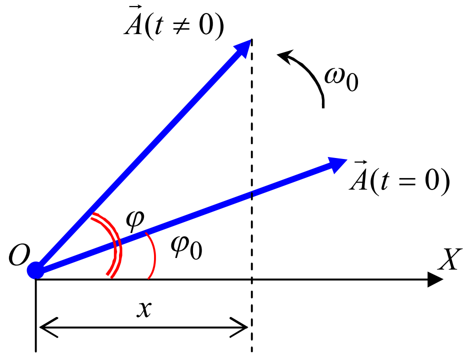
Ja saskaita divas harmoniskas vienā virzienā notiekošas svārstības, kuru kinemātiskie vienādojumi

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_{01} t + \varphi_{01}) \text{ un}$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_{02} t + \varphi_{02}), \tag{1.143}$$

tad jānosaka rezultējošās kustības kinemātiskais vienādojums, t. i.jānosaka *novirze x atkarībā no laika t*.

Jebkuru harmonisko svārstību $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ var attēlot, izmantojot rotējošu vektoru $\vec{A}$. Vektora $\vec{A}$ ir modulis vienāds ar harmonisko svārstību amplitūdu, to atliek punktā *O* (1.21. att.) tādā virzienā, lai sākuma momentā *t = 0* tas veidotu ar *X* asi leņķi φ_0, kas vienāds ar svārstību sākumfāzi.



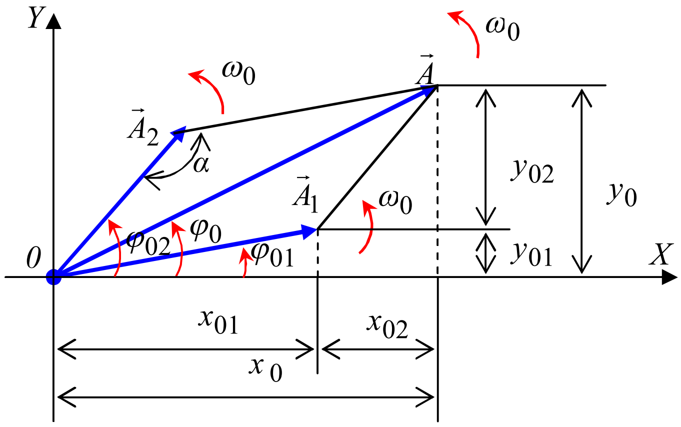
1.21. att.

Ja šāds vektors rotē pulksteņa rādītāja kustībai pretējā virzienā ar leņķisko ātrumu ω_0, kas vienāds ar svārstību leņķisko frekvenci, tad laika momentā *t* amplitūdas vektors $\vec{A}$ veido ar *X* asi leņķi $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$, kas vienāds ar harmonisko svārstību fāzi šajā momentā, bet vektora $\vec{A}$ projekcija uz *X* ass – $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ ir vienāda ar novirzi apskatāmajā svārstību procesā laika momentā *t*.

Attēlojot svārstības ar vektoriem, tās var saskaitīt pēc vektoru saskaitīšanas likumiem.

Šādas metodes noder arī vairāku harmonisku svārstību saskaitīšanai.

1.4.3.1.1. Divu harmonisku vienvirziena vienādas frekvences svārstību saskaitīšana



1.22. att.

Šajā gadījumā $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$, un harmonisko svārstību vienādojumi ir

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_{01} t + \varphi_{01}) \text{ un}$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_{02} t + \varphi_{02}). \quad (1.144)$$

Pieņemot, ka $\varphi_{02} > \varphi_{01}$, svārstības attēlo vektori $\vec{A}_1$ un $\vec{A}_2$ (1.22. att.), kuri rotē ar vienādu leņķisko ātrumu ω_0, tādā gadījumā leņķis starp vektoriem $\vec{A}_1$ un $\vec{A}_2$ laikā nemainās, un rezultējošais vektors $\vec{A}$ saglabā nemainīgu moduli un rotē ar leņķisko ātrumu ω_0.

Rezultējošais vektors attēlo harmoniskas svārstības, t. i., ja *saskaita divas harmoniskas vienvirziena, vienādas frekvences svārstības, tad iegūst harmoniskas svārstības, kuras norisinās tajā pašā virzienā ar to pašu frekvenci kā saskaitāmās svārstības:*

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (1.145)$$

Rezultējošo svārstību amplitūdu A un sākumfāzi φ_0 izsaka ar saskaitāmo svārstību amplitūdām A_1 un A_2 un sākumfāzem φ_{01} un φ_{02}. Kā redzam 1.22. attēlā,

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1 A_2 \cos\alpha. \quad (1.146)$$

Tā kā $\alpha = \pi - (\varphi_{02} - \varphi_{01})$, tad $\cos\alpha = -\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})$ un amplitūda

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})}. \quad (1.147)$$

Sākumfāzi φ_0 izsaka no sakarības

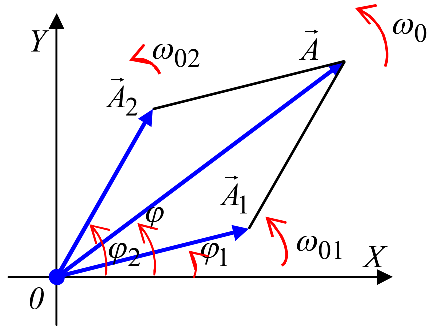
$$tg\varphi_0 = \frac{y_0}{x_0} = \frac{y_{01} + y_{02}}{x_{01} + x_{02}} = \frac{A_1 \sin\varphi_{01} + A_2 \sin\varphi_{02}}{A_1 \cos\varphi_{01} + A_2 \cos\varphi_{02}}. \quad (1.148)$$

1.4.3.1.2. Divu harmonisku vienvirziena dažādas frekvences svārstību saskaitīšana

Ja $\omega_{01} \neq \omega_{02}$, tad amplitūdas vektori $\vec{A}_1$ un $\vec{A}_2$ rotē ar dažādiem leņķiskajiem ātrumiem. Kādā momentā leņķis ar X asi abiem vektoriem ir vienāds. Ja šo momentu uzskata par jaunu laika atskaites sākumu ($t = 0$), tad iegūst $\varphi_{01} = \varphi_{02} = \varphi_0$, un svārstību kinemātiskie vienādojumi ir šādi:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_{01} t + \varphi_0) \quad \text{un} \quad x_2 = A_2 \cos(\omega_{02} t + \varphi_0). \tag{1.149}$$

I.Pieņm, ka $A_1 = A_2$. Tad rezultējošais vektors $\vec{A}$ (1.23. att.) ir romba, ko veido vektori $\vec{A}_1$ un $\vec{A}_2$, diagonāle. Tā dala uz pusēm leņķi starp vektoriem $\vec{A}_1$ un $\vec{A}_2$.



1.23. att.

Tādēļ

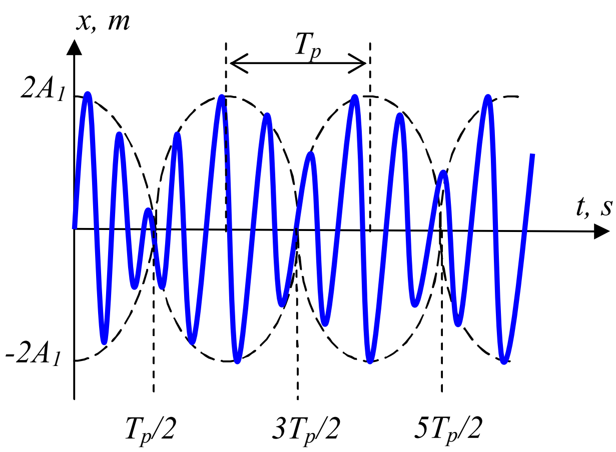
$$\varphi = \varphi_1 + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \frac{(\omega_{01} + \omega_{02}) \cdot t}{2} + \varphi_0,$$ t. i.,

vektors $\vec{A}$ rotē ar konstantu ātrumu $\omega_0 = \dfrac{\omega_{01} + \omega_{02}}{2}$, bet tā modulis $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = 2A_1 \cos\dfrac{(\omega_{02} - \omega_{01}) \cdot t}{2}$ laikā periodiski mainās ar frekvenci $\dfrac{\omega_{02} - \omega_{01}}{2}$. Tātad *rezultējošās svārstības vairs nav harmoniskas*. Rezultējošo svārstību vienādojums tad ir

$$x = 2A_1 \cos\frac{\omega_{02} - \omega_{01}}{2} t \cos\left(\frac{\omega_{01} + \omega_{02}}{2} t + \varphi_0\right). \tag{1.150}$$

Ja saskaitāmo svārstību frekvences ir maz atšķirīgas, tad $|\omega_{02} - \omega_{01}| << (\omega_{01} + \omega_{02})$, un var uzrakstīt, ka reizinātājs $2A_1 \cos\left(\dfrac{\omega_{02} - \omega_{01}}{2} t\right)$ atbilst lēni periodiski mainīgai amplitūdai, kuras vērtības ir robežās no $A_{\min} = 0$ līdz $A_{\max} = 2A_1$. Šī s svārstības ir *pulsācijas* jeb *sitieni* (1.24. att.). Tad pulsāciju frekvence ir $\omega_p = \omega_{02} - \omega_{01}$, bet periods

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}. \tag{1.151}$$

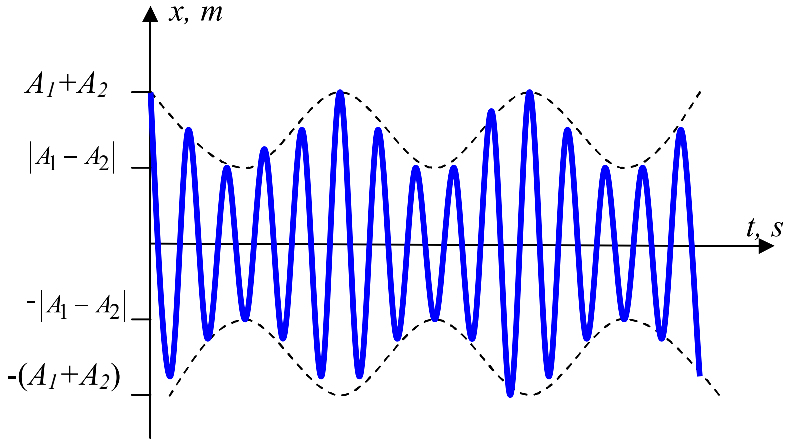


1.24. att.

II. Pieņem, ka $A_1 \neq A_2$.Tad, kad vektoru $\vec{A}_1$ un $\vec{A}_2$ virzieni ir vienādi, vektora $\vec{A}$ moduļa vērtība ir maksimālā $A_{\max} = A_1 + A_2$

(1.25. att.), bet tad, kad $\vec{A}_1$ un $\vec{A}_2$ virzieni ir pretēji, vektora $\vec{A}$ modulim ir minimālā vērtība $A_{\min} = |A_1 - A_2|$.

Šādas rezultējošās svārstības ir pulsācijas. To amplitūda periodiski pieaug līdz $(A_1 + A_2)$ un samazinās līdz $|A_1 - A_2|$, nesasniedzot nulli. Šādas svārstības ar periodiski mainīgu amplitūdu bieži sastopamas radiotehnikā. Šādas svārstības ir *pēc amplitūdas modulētas svārstības*.



1.25. att.

1.4.3.2. Divu harmonisku savstarpēji perpendikulāru svārstību saskaitīšana

1.4.3.2.1. Divu harmonisku savstarpēji perpendikulāru vienādas frekvences svārstību saskaitīšana

Ar šādu gadījumu sastopamies, ja uz materiālu punktu darbojas divi savstarpēji perpendikulāri elastības spēki. Tā tas ir, piemēram, cietas vielas atomu režģī, kur uz atomu darbojas kaimiņu atomu elastīgie pievilkšanās un atgrūšanās spēki. Šajā gadījumā summārās svārstības ir harmoniskas svārstības, un tām ir tāda pati frekvence kā saskaitāmajām svārstībām. Interesantākā parādība šajā gadījumā ir kopējo svārstību *trajektorija*, kura maina formu atkarībā no saskaitāmo svārstību fāzu starpības.

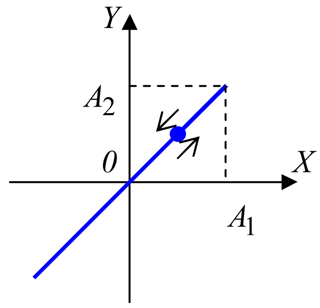
I. Abu svārstību sākuma fāzes ir vienādas, t. i., $\varphi_{02} = \varphi_{01} = \varphi_0$ un fāzu starpība $\varphi_{02} - \varphi_{01} = 0$, tad no abu svārstību kustības likumiem

$$\left.\begin{aligned} x &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_0), \\ y &= A_2 \cos(\omega t + \varphi_0), \end{aligned}\right\} \tag{1.152}$$

tos dalot, iegūstam, ka

$$\frac{x}{y} = \frac{A_1}{A_2}, \text{ resp., } y = \frac{A_2}{A_1} x, \tag{1.153}$$

t. i., ķermeņa svārstības norisinās pa *taisni*, kas iet caur līdzsvara punktu *0* (1.26. att.). Ja svārstību *fāzu starpība* ir π, tad taisne atrodas otrajā un ceturtajā kvadrantā.



1.26. att.

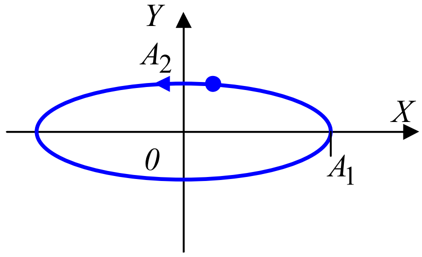
II. Abu svārstību fāzu starpība $\varphi_{02} - \varphi_{01} = \pi / 2$, tad

$$\left.\begin{aligned} x &= A_1 \cos \omega t , \\ y &= A_2 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) . \end{aligned}\right\} \qquad (1.154)$$

Tā kā $\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -\sin \omega t$, tad, izteiksmes (1.154) kāpinot kvadrātā un saskaitot, iegūstam:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1 , \qquad (1.155)$$

t. i., svārstību trajektorija ir *elipse* (1.27. att.). Ja $A_1 = A_2$, tad elipse kļūst par *riņķa līniju.*



1.27. att.

III. Fāzu starpība $\varphi_{02} - \varphi_{01} = -\pi / 2$, tad kustības trajektorija ir tāda pati, tikai elipsi un riņķa līniju punkts apiet pretējā virzienā.

IV. Fāzu starpība $\varphi_{02} - \varphi_{01}$ ir jebkura, tad svārstību trajektorijas – elipses vienādojums ir šāds:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = \sin^2 (\varphi_{02} - \varphi_{01}) . \qquad (1.156)$$

Šādu svārstību kustību sauc par *eliptiski polarizētām svārstībām.*

1.4.3.2.2. Divu harmonisku savstarpēji perpendikulāru dažādas frekvences svārstību saskaitīšana

Ja svārstību frekvences atšķiras, tad punkta svārstību kinemātiskie vienādojumi ir šādi:

$$x = A_1 \cos(\omega_{01} t + \varphi_{01}) \text{ un } y = A_2 \cos(\omega_{02} t + \varphi_{02}) . \qquad (1.157)$$

Ja attiecību $\frac{\omega_{01}}{\omega_{02}}$ var izteikt ar diviem veseliem skaitļiem n_1 un n_2, t. i., $\frac{\omega_{01}}{\omega_{02}} = \frac{n_1}{n_2}$, resp., $\frac{T_1}{T_2} = \frac{n_2}{n_1}$, tad periodiski ik pēc laika sprīža $T = T_1 n_1 = T_2 n_2$ punkts atgriežas izejas stāvoklī un atkārto kustību pa iepriekšējā ciklā noieto trajektoriju – pa kādu noslēgtu līniju, kuru sauc par *Lisažū figūru*.

Ja $\frac{\omega_{01}}{\omega_{02}}$ nav kādu veselu skaitļu n_1 un n_2 attiecība , tad punkta kustība nav periodiska, tā notiek pa nenoslēgtu trajektoriju.

1.4.4. Harmonisku svārstību dinamika

1.4.4.1. Kvazielastīgie spēki

1.4.2. paragrāfā noskaidrojām, ka svārstību kustībā paātrinājums ir *mainīgs* (formula 1.142). Tātad, šo kustību nosaka mainīga spēka darbība. Saskaņā ar otro Ņūtona likumu

$$F = ma = -m\omega_0^2 x\,. \tag{1.158}$$

Ja apzīmē $m\omega_0^2$ ar k, iegūst

$$F = -kx\,. \tag{1.159}$$

No sakarības (1.159) ir redzams, ka *ķermenis izdara harmoniskas svārstības, ja tam pieliktais spēks ir novirzei proporcionāls (pēc moduļa),bet pretēji vērsts*. Šis spēks cenšas atgriezt ķermeni līdzsvara stāvoklī, tāpēc to sauc par *atgriezējspēku*. Piemēram, elastīgās deformācijas spēks ir šāds spēks. Jebkurš cits spēks, kas apmierina sakarību (1.159), ir *kvazielastīgs* spēks, tādēļ var sacīt, ka ķermenis izdara harmoniskas svārstības, ja tam pieliktais atgriezējspēks ir elastības spēks vai kvazielastīgs spēks.

Ja aizvieto paātrinājumu a ar d^2x/dt^2, tad otro Ņūtona likumu kvazielastīga spēka gadījumā var uzrakstīt:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad \text{vai} \tag{1.160}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x\,. \tag{1.161}$$

Redzams, ka uzrakstītais vienādojums ir harmonisku svārstību diferenciālvienādojums, kura koeficienti k un m nosaka svārstību leņķisko frekvenci ω_0 un periodu T:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.162}$$

un

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,. \tag{1.163}$$

Diferenciālvienādojumau(1.161) atrisinot, iegūs sakarību (1.134).

1.4.4.2. Fizikālais un matemātiskais svārsts

Aplūkosim mehānisku svārstību sistēmu, ko sauc par *fizikālo svārstu*; tas ir ciets ķermenis, kas svārstās gravitācijas spēka iedarbībā ap horizontālu asi, kas perpendikulāra svārstību plaknei (plašāk par fizikālo svārstu lasiet laboratorijas darbā „Fizikālais svārsts”). Fizikāla svārsta leņķiskās frekvences un svārstību perioda izteiksmes:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \tag{1.164}$$

un

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}\,, \tag{1.165}$$

kur m – svārsta masa; d – attālums no iekares punkta līdz masas centram; I – svārsta inerces moments attiecībā pret iekares punktu.

Praksē fizikālo svārstu bieži var aizstāt par *matemātisko svārstu. Par matemātisko svārstu sauc materiālu punktu, kas svārstās bezsvara nedeformējamā diegā.*

Saskaņā ar materiāla punkta inerces momenta definīciju matemātiskā svārsta inerces moments

$$I = ml^2\,,$$

kur m – materiālā punkta masa, l – diega garums. Ievietojot šo izteiksmi formulā (1.165), iegūsim matemātiskā svārsta perioda formulu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \tag{1.166}$$

1.4.4.3. Harmonisku svārstību enerģija

Harmoniskajās svārstībās notiek svārstošā ķermeņa *kinētiskās* enerģijas W_k un *potenciālās* enerģijas W_p periodiska savstarpēja pārveidošanās kvazielastīgā spēka ietekmē. Šo enerģiju summa ir svārstību sistēmas *pilnā* enerģija W:

$$W = W_k + W_p. \tag{1.167}$$

Ievērojot izteiksmi (1.138), var uzrakstīt, ka

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0), \tag{1.168}$$

kur v – ķermeņa kustības ātrums, m – tā masa.

Kvazielastīgo spēku potenciālo enerģiju var izteikt tāpat kā elastīgi deformēta ķermeņa potenciālo enerģiju. Ievērojot izteiksmi (1.134), iegūstam:

$$W_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{k}{2} A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0). \tag{1.169}$$

Bet $k = m\omega_0^2$, tāpēc

$$W_p = \frac{m}{2} A^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0). \tag{1.170}$$

Salīdzinot izteiksmes (1.167), (1.168) un (1.170),

$$W = W_k + W_p = \frac{m\omega_0^2}{2} A^2 (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = \frac{m\omega_0^2}{2} A^2 = \frac{k}{2} A^2. \tag{1.171}$$

Tādējādi, harmonisku *svārstību pilnā enerģija W ir konstanta un proporcionāla svārstību amplitūdas un leņķiskās frekvences kvadrātam.*

1.4.5. Rimstošas svārstības

Tā kā ikviena ķermeņa mehāniskās svārstības notiek vidē, kurā ķermenis atrodas, tad vide iedarbojas uz ķermeni ar berzes vai pretestības spēkiem. Lai tos pārvarētu, tiek patērēta ķermeņa svārstību enerģija. Nepievadot tādai disipatīvai oscilējošai sistēmai enerģiju, svārstību amplitūda laika gaitā samazinās, un svārstības ir rimstošas.

Ja ķermeņa svārstību procesā gāzē vai šķidrumā neveidojas virpuļi, tad pretestības spēks, kas vērsts pretī ķermeņa kustībai, ir proporcionāls ātrumam., Ja svārstības rimst tāpēc, ka oscilējošais ķermenis rada viļņus, arī tad spēks F_r, ar kādu vide iedarbojas uz ķermeņi, ir proporcionāls ātrumam:

$$F_r = -rv = -r\frac{dx}{dt}, \tag{1.172}$$

kur r – proporcionalitātes koeficients, kas atkarīgs no vides viskozitātes un ķermeņa lineārajiem izmēriem.

Kvazielastīga atgriezējspēka gadījumā, t. i., $F_{atgr} = -kx$, saskaņā ar otro Ņūtona likumu

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dv}{dt} \quad (1.173)$$

Šis vienādojums ir *rimstošu svārstību diferenciālvienādojums*. Ja pieņem, ka vienādojuma atrisinājumu var uzrakstīt šādā formā:

$$x = A(t)\cos(\omega t + \varphi_0), \quad (1.174)$$

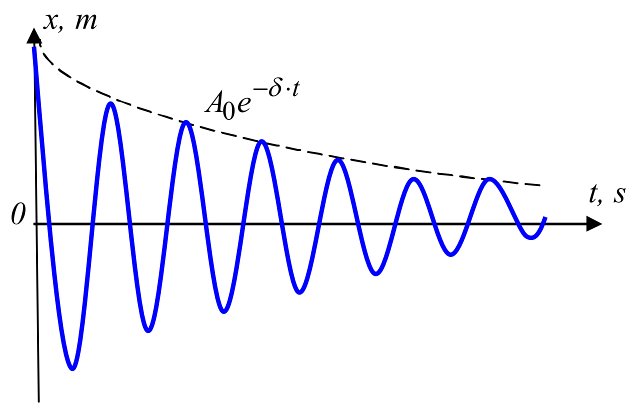
kur *A(t)* – laikā mainīga svārstību amplitūda; ω - leņķiskā frekvence un φ_0 – sākumfāze, un vēl pieņem, ka amplitūdas izmaiņu dA ($dA < 0$) laikā dt var izteikt šādi:

$$dA = -\delta A dt, \quad (1.175)$$

kur δ - *rimšanas koeficients*, tad, atrisinot vienādojumu $\frac{dA}{A} = -\delta dt$, iegūst:

$$A = A_0 e^{-\delta \cdot t}, \quad (1.176)$$

kur A_0 – svārstību amplitūda laika momentā $t = 0$. Tātad, punkta novirze no līdzsvara stāvokļa rimstošu svārstību gadījumā mainās pēc likuma (1.28. att.):



1.28. att.

$$x = A_0 e^{-\delta \cdot t}\cos(\omega t + \varphi_0). \quad (1.177)$$

Šajā vienādojumā

$$\delta = \frac{r}{2m} \quad (1.178)$$

un

$$\omega^2 = \frac{k}{m} - \frac{r^2}{(2m)^2}. \quad (1.179)$$

Bet $k/m = \omega_0^2$, kur ω_0 – brīvu nerimstošu svārstību leņķiskā frekvence tai pašai sistēmai, tad

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2. \quad (1.180)$$

Svārstību periods

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}. \quad (1.181)$$

Lielumi δ un ω saistīti ar sistēmas raksturlielumiem *k*, *r*, *m*.Redzams, ka sakarība (1.177) ir diferenciālvienādojuma (1.173) atrisinājums. Tas ir *brīvu rimstošu svārstību kinemātiskais vienādojums*. Novirze *x* kā funkcija no laika grafiski parādīta 1.28. attēlā.

Tā kā svārstību enerģija $W \sim A^2$, tad rimstošu svārstību enerģija

$$W \sim A_0^2\, e^{-2\delta \cdot t} \sim W_0 e^{-2\delta \cdot t}. \tag{1.182}$$

Laika sprīdis τ, kurā rimstošo svārstību amplitūda samazinās e reizes, ir *svārstību relaksācijas laiks.*

$$\tau = \frac{1}{\delta}. \tag{1.183}$$

Ja laiks starp divām rimstošām svārstībām ir svārstību periods T, tad šo svārstību amplitūdu attiecības naturālo logaritmu sauc par *svārstību rimšanas logaritmisko dekrementu*:

$$\Lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T. \tag{1.184}$$

Var secināt, ka svārstību *rimšanas logaritmiskais dekrements* ir apgriezts lielums svārstību skaitam N_e laika sprīdī τ, kurā svārstību amplitūda samazinās e reizes

$$\Lambda = \frac{1}{N_e}. \tag{1.185}$$

1.4.6. Uzspiestas svārstības. Rezonanse

Lai svārstību kustība neizbeigtos, uz svārstošo sistēmu jāiedarbojas ar periodiski mainīgu spēku (*uzspiedējspēku*). Šādā gadījumā svārstības notiek ar uzspiedējspēka frekvenci, bet svārstību *amplitūdu A un fāzu nobīdi* φ_0 attiecībā pret uzspiedējspēku *nosaka sistēmas parametri*, kā arī *uzspiedējspēka amplitūda un frekvence*.

Ja pieņem, ka oscilējošas sistēmas masa ir m, atgriezējspēks $F_{atgr} = - kx$, pretestības spēks $F_r = -\frac{rdx}{dt}$ un uzspiedējspēks $F^* = F_0 \cos \omega \cdot t$, tad saskaņā ar otro Ņūtona likumu $\vec{a}m = \vec{F}_{atgr} + \vec{F}_r + \vec{F}^*$ un, ievietojot spēku izteiksmes, iegūst:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t, \tag{1.186}$$

Tas ir *uzspiestu svārstību diferenciālvienādojums, kura atrisinājums,* gadījumā, kad *exp(-δt) → 0* (*t* ir liels), *ir*

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0). \tag{1.187}$$

Šajā gadījumā

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \tag{1.188}$$

- uzspiesto svārstību amplitūda (*ir atkarīga no uzspiedējspēka frekvences!*);

Šeit $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, bet $\delta = \frac{r}{2m}$ un

$$tg\varphi_0 = -\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{1.189}$$

Analizējot formulu (1.188), redzams, ka, saglabājoties nemainīgai uzspiedējspēka amplitūdai F_0, uzspiesto svārstību *amplitūda A ir atkarīga* no *uzspiedējspēka frekvences* ω. Tā kā pastāv nosacījums, ka ekstrēmā $\frac{df}{d\omega} = 0$, tad var noskaidrot, vai zemsaknes funkcijai $f(\omega) = \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2$ ir ekstrēms. Par cik $\frac{df}{d\omega} = 2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\left(-2\omega\right) + 8\delta^2\omega$, tad var secināt, ka funkcijas ekstrēms ir punktos $\omega = 0$ un

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \tag{1.190}$$

Funkcijai *f(ω)* otrais atvasinājums punktā $\omega = \omega_r$ ir

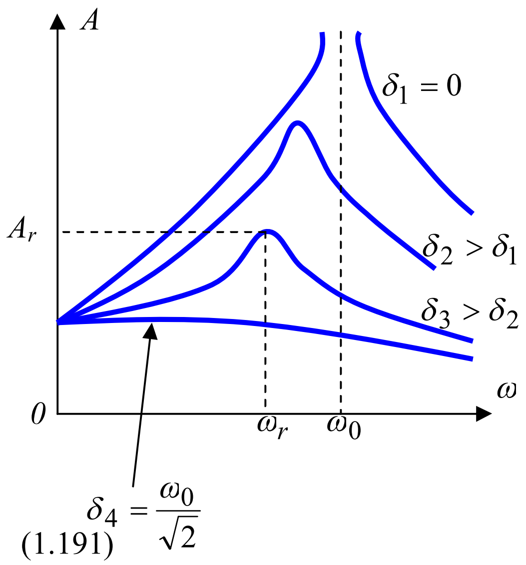
$$\left.\frac{d^2 f}{d\omega^2}\right|_{\omega=\omega_r} = -4\omega_0^2 + 12\omega^2 + 8\delta^2\Big|_{\omega=\omega_r} = 8\omega_0^2 - 16\delta^2 = 8\omega_R^2 > 0$$

Tātad *punktā* $\omega = \omega_r$ funkcijas *f(ω)* vērtība ir minimāla, bet *svārstību amplitūda A irar maksimālo vērtību.*

Ja svārstību frekvencei tuvojoties vērtībai ω_r, *uzspiesto svārstību amplitūda sasniedz maksimumu, tad šādu parādību sauc par rezonansi* (1.29. att.).

No amplitūdas formulas ir redzams, ka samazinoties *δ, amplitūda A* pieaug. Kad $\delta \to 0$, tad $\omega \to \omega_r$, un rezonanses amplitūda $A_r \to \infty$. Ja pie tam $\omega \to 0$, tad neatkarīgi no δ vērtības uzspiesto svārstību amplitūdu var uzrakstīt :

$$A \to \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}. \tag{1.191}$$



1.29. att.

Lielums $A = \frac{F_0}{k}$ ir *statiskā novirze*.

Līknes $A = A(\omega)$, kas redzamas 1.29. attēlā sauc par *rezonanses līknēm*.

Rezonanses parādība novērojama jebkuru svārstību gadījumā. To plaši izmanto akustikā – skaņas pastiprināšanai.

Dažos gadījumos rezonanse ir kaitīga. Tā var radīt konstrukciju (ēku, tiltu u. tml.) stipru vibrāciju uz tām uzstādīto mehānismu (piemēram, motoru) darbības rezultātā. Tāpēc celtņu aprēķinos jānodrošina mehānismu svārstību un konstrukciju pašsvārstību frekvenču ievērojama atšķirība.

Tehnikā sastopams vēl viens nerimstošu svārstību veids – tā sauktās *pašierosmes svārstības* jeb *autosvārstības*, kas atšķiras no uzspiestām svārstībām ar to, ka tajās svārstību enerģijas zudumus kompensē pastāvīgs enerģijas avots, kas darbojas ļoti īsu brīdi (salīdzinājumā ar svārstību periodu). Turklāt šo avotu vajadzīgajā brīdī (parasti katra svārstību perioda sākumā) automātiski ieslēdz pati svārstību sistēma.

Autosvārstību sistēmas piemērs ir pulksteņa svārsts. Šeit paceltā svara (vai deformētās atsperes) potenciālo enerģiju ieslēdz enkura mehānisms.