Dirihlē princips - Testi

2018-01-17

# Dirihlē princips (1) - Ievads

* **Anotācija:** Tests par Dirihlē principa vienkāršāko gadījumu ( aplīši, būrīši).

## c.dirichlet.intro.q1

Tumšā skapī ir zeķes 12 krāsās - pa 20 zeķēm katrā no krāsām. Kāds mazākais zeķu skaits jāizvelk, lai starp tām noteikti atrastos divas zeķes vienādā krāsā?

**Atbilde:** 13

**Skaidrojums:** Izvilktās zeķes ir objekti ("truši"), bet iespējamās krāsas ir grupas ("būri"). Tā kā grupu ir tieši , tad izvelkot zeķes, starp tām noteikti būs divas vienādā krāsā. Ar zeķēm nepietiek, jo var neveikties: katra no pirmajām zeķēm var būt citā krāsā.

## c.dirichlet.intro.q2

Rūpnīca ražo ķieģeļus, no kuriem neviens nav smagāks par 3kg, neviens nav vieglāks par 2.7kg. Kāds mazākais ķieģeļu skaits jānopērk, lai starp tiem noteikti atrastos divi tādi, kuru masu starpība ir mazāka par 1g (masu starpību iegūst, no lielākās masas atņemot mazāko)?

**Atbilde:** 302

**Skaidrojums:** Pārveidojam visas masas gramos. Tad intervālu var pārklāt ar maziem intervāliem , , , , . Ja izraudzīti jebkādi ķieģeļi, tad vismaz vienā no intervāliem būs vismaz divi ķieģeļi. Tā kā jebkurš intervāls (izņemot pirmo un pēdējo, kuri ir vēl īsāki) ir pusatvērts ar garumu , tad tas nozīmē, ka tajā esošo abu ķieģeļu masu starpība būs mazāka par . Ar nepietiek, jo var ņemt , , (un tad visas masu atšķirības ir vismaz ).

## c.dirichlet.intro.q3

Kāds mazākais skaits no naturāliem skaitļiem jāizsvītro, lai starp palikušajiem skaitļiem neatrastos tādi divi, kuru summa ir ?

**Atbilde:** 4

**Skaidrojums:** Ir pavisam "būrīši" (, , , ), kuros esošie skaitļu pāri dod summā . Izsvītrojot no katra vienu ir pietiekami. Ja svītro mazāk, tad paliek pāri būrītis ar diviem skaitļiem, kuri summā dod .

## c.dirichlet.intro.q4

Vai skaitļus var uzrakstīt (1) rindiņā, (2) pa apli tā, lai katru divu blakusesošo skaitļu starpības būtu dažādas? (Skaitļu starpību aprēķina, no lielākā skaitļa atņemot mazāko.)

1. Rakstot rindiņā:
   1. Jā
   2. Nē
2. Rakstot pa apli
   1. Jā
   2. Nē

**Atbilde:** a,b

**Skaidrojums:** Var rakstīt, piemēram, šādu virknīti: . Iespējamo starpību ir tieši un visas tās tiek iegūtas.

Ja raksta pa apli, tad arī ir iespējamās starpības (no līdz ), bet veselas vietas, kur saskaras blakusesošie skaitļi. Tādēļ vismaz divas starpības sakritīs.

## c.dirichlet.intro.q5

Atzīmēt, kurš no apgalvojumiem ir vienmēr patiess, ja objektus kaut kā izvieto būros.

1. Eksistē tieši viens būris, kurā ir vismaz divi objekti.
2. Eksistē vismaz viens būris, kurā ir tieši divi objekti.
3. Eksistē vismaz viens būris, kurā ir vismaz divi objekti.
4. Eksistē tieši viens būris, kurā ir tieši divi objekti.

**Atbilde:** c

**Skaidrojums:** Dirihlē princips apgalvo, ka vismaz vienā būrī būs vismaz divi elementi. Tas nesola, ka būs tieši viens tāds būris vai arī, ka tajā būs tieši divi elementi.

## c.dirichlet.intro.q6

trušus kaut kā izvieto būros. Kāds apgalvojums ir vienmēr patiess?

1. Eksistē būris, kurā ir tieši divi truši.
2. Eksistē būris, kurš ir tukšs.
3. Eksistē būris, kurā ir tieši viens trusis.
4. Eksistē vismaz divi būri, kuros ir vismaz pa vienam trusim.

**Atbilde:** b

**Skaidrojums:** Ja būru ir vairāk nekā objektu, tad vismaz viens būris noteikti ir tukšs. (Tas ir līdzīgi Dirihlē principam, tikai būri un truši samainīti vietām - t.i. katram būrim truša nepietiek.) Citiem apgalvojumiem viegli atrast pretpiemērus - var, piemēram, visus trušus salikt vienā no būriem.

## c.dirichlet.intro.q7

Uz galda ir spēļu kārtis. Kāds lielākais skaits no tām noteikti ir vienā krāsā?

**Atbilde:** 8

**Skaidrojums:** Spēļu kārtīm ir divas krāsas (melna un sarkana). Ja tikai septiņas būtu katrā no krāsām, tad to kopskaits nevarētu pārsniegt . Tāpēc vismaz ir vienādā krāsā (nav zināms kādā). Nav obligāti, lai lielāks skaits būtu vienādā krāsā, jo var būt kārtis vienā krāsā, bet kārtis - otrā krāsā.

## c.dirichlet.intro.q8

Kāds ir mazākais skaits skolēnu, kam jābūt skolā, lai divi no tiem noteikti būtu dzimuši vienā datumā (dd.mm). (Garajos gados esošo datumu 29.februāri te neaplūkojam - pieņemam, ka neviens skolēns tajā nav dzimis.)

**Atbilde:** 366

**Skaidrojums:** Gados ir datumi, neskaitot 29. februāri. Ja skolēnu skaits būs , tad noteikti kāds no datumiem atkārtosies. Ja skolēnu ir vai mazāk, tad katram var būt cits dzimšanas datums.

## c.dirichlet.intro.q9

trušus dažādos veidos izvietoja pa būriem. Katram no veidiem būrus sakārtoja trušu skaita dilšanas secībā. Ieguva šādas iespējas (visi četri vienā būrī, abi citi būri ir tukši), , , . Vai eksistē cits trušu izvietojuma veids, kurš te nav parādīts?  
(**Norāde:** *Ja atzīmējāt atbildi "eksistē", tad ierakstiet trūkstošo veidu lodziņā, formā (a,b,c), burtu vietā norādot veselus skaitļus.*)

1. eksistē
2. neeksistē.

**Atbilde:** b

**Skaidrojums:** Ir tikai viens veids, kā divi būri var būt tukši (), un divi veidi, kā viens būris var būt tukšs ( un ). Kā arī viens veids, kurā neviens būris nav tukšs: . Uzdevumā visi tie ir norādīti.

## c.dirichlet.intro.q10

Tumšā skapī ir 100 melnas, 100 zilas un 100 zaļas zeķes. Kāds mazākais skaits zeķu neskatoties ir jāizvelk, lai noteikti starp tām būtu divas melnas vai divas zilas zeķes?

**Atbilde:** 103

**Skaidrojums:** Ar izvilktām zeķēm nepietiek, jo var gadīties zaļas, viena melna un viena zila.  
Ar izvilktām zeķēm vienmēr pietiek, jo vismaz no tām nebūs zaļas un varēs lietot Dirihlē principu - jebkādi piekārtojot zeķes divām krāsām, divas no zeķēm nonāks vienā krāsā.

## c.dirichlet.intro.q11

Valoda satur visus -burtu vārdus no burtiem "A" un "B" (ieskaitot vārdus, kur vienādi burti ir blakus, piemēram "AAA" vai "BBA"). Cik vārdi šajā valodā jāpasaka, lai noteikti būtu pateikti divi vienādi vārdi?

**Atbilde:** 9

**Skaidrojums:** Valodā ir dažādi vārdi. Pasakot vārdus, vismaz viens no tiem būs pateikts divas reizes.

## c.dirichlet.intro.q12

Kāds mazākais daudzums skaitļu no līdz jāizvēlas, lai starp tiem atrastos divi, kuru summa ir ?

**Atbilde:** 6

**Skaidrojums:** Lai nerastos divi skaitļi, kuru summa ir , var izvēlēties skaitli un arī pa vienam no katra pārīša , , , . Ja izvēlas vairāk nekā piecus, tad vismaz divi no izvēlētajiem nonāk vienā no minētajiem pārīšiem, t.i. summā dod .

## c.dirichlet.intro.q13

Auditorijā ir gari soli, uz kuriem kaut kādā veidā jau sasēdušās meitenes. Kādu lielāko skaitu zēnu var sasēdināt šajā auditorijā, ja nekādi divi zēni nedrīkst sēdēt blakus uz viena sola?

**Atbilde:** 110

**Skaidrojums:** Pirms meitenēm auditorijā bija "būrīši" (katrs no soliem), bet katras meitenes nosēdināšana "būrīšu" skaitu palielina par (pārdalot solu vai tā posmu divās daļās). Tādēļ būrīšu ir pavisam . Lai nevienā būrītī nonāktu ne vairāk par vienu zēnu, to skaits nevar pārsniegt .  
, acīmredzot, var izsēdināt. Piemēram, var izsēdināt uz viena sola 11 zēnus un 10 meitenes:

## c.dirichlet.intro.q14

Vienā gadā noteikti var atrast divus tādus mēnešus, kuriem 30. datums ir vienā nedēļas dienā.

1. Jā
2. Nē

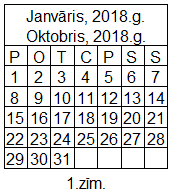
**Atbilde:** a

**Skaidrojums:** Gada laikā ir mēneši, kuros ir 30.datums. Tā kā nedēļas dienu ir tikai septiņas, tad atradīsies divi mēneši, kuriem šis datums ir vienā dienā.

## c.dirichlet.intro.q15

Visos gados, kuros ir dienas (t.i. tajos, kuri nav garie gadi), janvāra un oktobra tabulu kalendārs sakrīt (1.zīm. attēlots 2018.g. kalendārs). Atrast, kurš apgalvojums noteikti ir patiess katrā gadā, kurā ir dienas:

1. Eksistē tāda nedēļas diena, kurā nesākas neviens mēnesis ar 31 dienu.
2. Eksistē trīs tādas nedēļas dienas, kurās nesākas neviens mēnesis ar mazāk nekā 31 dienu.
3. Eksistē tieši divas nedēļas dienas, kurās sākas divi tā paša gada mēneši.



**Atbilde:** a

**Skaidrojums:** Pavisam ir mēneši ar dienu (janvāris, marts, maijs, jūlijs, augusts, oktobris, decembris). Ja zināms, ka divi no tiem (janvāris un oktobris) sākas vienā nedēļas dienā, tad uz pārējām nedēļas dienām atliek tikai mēneši, t.i. vienai nedēļas dienai mēneša nepietiks.

# Dirihlē princips (2) - Vispārinājumi

* **Anotācija:** Tests par Dirihlē principa vispārīgāko gadījumu ( aplīši, būrīši).

## c.dirichlet.generalizations.q1

Makā ir monētas (eiro vai centu). Vai makā noteikti ir vismaz vienādas vērtības monētas?

1. Jā
2. Nē

**Atbilde:** a

**Skaidrojums:** Pavisam ir astoņu vērtību monētas centu, un eiro. No pretējā: Ja nebūtu vismaz monētu ar vienādu vērtību (vienalga kādas vērtības), tad varētu būt ne vairāk kā monētu katrai no astoņām vērtībām, t.i. to kopskaits nevarētu pārsniegt .

## c.dirichlet.generalizations.q2

Autobusā brauc cilvēki. Vai var apgalvot, ka vismaz no tiem dzimuši vienā mēnesī?

1. Jā
2. Nē

**Atbilde:** b

**Skaidrojums:** Tā kā ir pavisam mēneši, var gadīties, ka katrā no tiem dzimuši vai cilvēki no autobusā klātesošajiem (desmit mēnešos dzimuši , bet divos mēnešos dzimuši ). Tad . Šajā gadījumā nebūs neviena mēneša, kurā dzimuši vismaz cilvēki.

## c.dirichlet.generalizations.q3

Auto dīlerim ir Audi, BMW, VW un Volvo automašīnas. Kāds mazākais mašīnu skaits jānopērk, lai varētu apgalvot, ka ir nopirktas vismaz piecas vienas markas automašīnas?

**Atbilde:** 17

**Skaidrojums:** Ja nopirktas tikai mašīnas, tad var būt pa četrām no katras markas. Ja nopirktas mašīnas, tad nevar gadīties, ka no katras markas nopirktas mazāk kā piecas, jo .

## c.dirichlet.generalizations.q4

Kāds ir mazākais skaits skolēnu, kam jābūt klasē, lai varētu apgalvot, ka vismaz 5 no tiem ir dzimuši vienā nedēļas dienā?

**Atbilde:** 29

**Skaidrojums:** Ja skolēnu ir , tad katrā no septiņām nedēļas dienām var būt dzimuši tikai skolēni. Ja skolēnu ir , tad nevar gadīties, ka katrā nedēļas dienā dzimuši mazāk kā skolēni, jo .

## c.dirichlet.generalizations.q5

Dots apgalvojums: Ja istabā ienāk cilvēki, tad vismaz trīs no viņiem noteikti ir dzimuši vienā nedēļas dienā, bet var gadīties, ka neeksistē četri, kuri visi dzimuši vienā nedēļas dienā.  
Atrast mazāko un lielāko vērtību, kurai šis apgalvojums ir patiess.

**Atbilde:** (Mazākā vērtība): 15, (Lielākā vērtība): 21

**Skaidrojums:** Ja , tad ne vairāk kā cilvēkus var sadalīt pa nedēļas dienām tā, lai katrā būtu dzimuši ne vairāk kā .  
Ja cilvēku ir no līdz (abus galapunktus ieskaitot), tad pēc vispārinātā Dirihlē principa iegūsim - vismaz trīs cilvēkus "vispopulārākajā" nedēļas dienā.  
Ja cilvēku ir vairāk kā , tad no tā paša Dirihlē principa iegūsim, ka būs nedēļas diena, kurā dzimuši vismaz četri.

## c.dirichlet.generalizations.q6

Tortes dekorēšanai nepieciešami vai nu divi apelsīni, vai trīs āboli, vai piecas aprikozes, vai septiņi ķirši. Mazā Mija atnesa no veikala augļus, ikviens no kuriem ir apelsīns, ābols, aprikoze vai ķirsis. Kādam mazākajam ar atnestajiem augļiem noteikti pietiek tortes dekorēšanai?

**Atbilde:** 14

**Skaidrojums:** Skaits ir vislielākais, kuram var atnest augļus tā, lai katram no četriem paveidiem viens pietrūktu. Ja atnesīs par vienu vairāk, t.i. , tad vismaz vienam paveidam tiks sasniegts vajadzīgais skaits.

## c.dirichlet.generalizations.q7

Klasē mācās skolēni. Katram skolēnam ir tieši divi vectētiņi; turklāt katriem diviem skolēniem vismaz viens vectētiņš ir kopīgs. (Zināms arī, ka neeksistē visiem skolēniem kopīgs vectētiņš.) Kāds ir lielākais iespējamais šīs klases skolēnu vectētiņu skaits?

**Atbilde:** 3

**Skaidrojums:** Trīs vectētiņi , acīmredzot, ir iespējami - ja katram skolēnam vectētiņu pāris ir , vai , tad katriem diviem skolēniem kāds no vectētiņiem sakritīs (ja četrus vectētiņus var izvēlēties no trim, tad divi sakritīs).

Noskaidrosim, vai aplūkotajā situācijā iespējami četri vectētiņi - pievienosim skolēnus pa vienam. Skolēna vectētiņus apzīmējam ar un . Apskatām to skolēnu , kuram nav vectētiņš (tāds noteikti eksistē, jo uzdevumā zināms, ka nevar būt visu skolēnu kopīgais vectētiņš - t.sk. arī tāds nav). Apzīmēsim vectētiņus ar un ( jābūt vectētiņam, jo tas ir kopīgs skolēniem ). Tālāk aplūkosim tādu skolēnu , kuram nav vectētiņš (arī tāds noteikti eksistē). Lai būtu kopīgi vectētiņi gan ar , gan , tam jābūt ar vectētiņu pāri .

Pievienojot jebkuru jaunu skolēnu utt. mums būs jāizmanto kāds no vectētiņu pāriem , vai (ja skolēnam būtu kāds jauns vectētiņš , tad viņam nevarēs būt kopīgs otrs vectētiņš gan ar , gan ar , gan ar ). Tātad ceturtais vectētiņš ir neiespējams.

## c.dirichlet.generalizations.q8

Klasē mācās skolēni. Katram skolēnam ir tieši divi vectētiņi; turklāt katriem diviem skolēniem šajā klasē vismaz viens vectētiņš ir kopīgs. Kāds ir lielākais skolēnu skaits, kuriem noteikti visiem ir kopīgs vectētiņš?

**Atbilde:** 14

**Skaidrojums:** Ja visiem skolēniem ir visiem kopīgs vectētiņš, tad skolēnu skaits ar kopīgo vectētiņu ir . Bet šāds rezultāts nav garantēts. Ja visiem skolēniem kopīga vectētiņa nav, tad var būt pavisam vectētiņi (sk. iepriekšējo testa jautājumu). Katram no skolēniem ir pa vectētiņi; varam uzskatīt, ka no katra skolēna uz vectētiņu kopu novilktas divas bultiņas - pavisam ir bultiņu. Ja bultiņu galus kaut kā sadala vectētiņiem, pēc Dirihlē principa iegūstam, ka vismaz vienam no vectētiņiem "iedurs" vivsmaz bultiņas, jo .

## c.dirichlet.generalizations.q9

trusīšus kaut kā izvietoja pa būrīšiem. Atrast formulu, kura izsaka mazāko iespējamo trusīšu skaitu tanī būrī, kur viņu ir visvairāk.  
(Ar apzīmēta **apakšējā** veselā daļa - lielākais veselais skaitlis, kas nepārsniedz . Piemēram, un .)

**Atbilde:** b

**Skaidrojums:** Ja , tad lielākajā būrī var garantēt trusīša esamību. Ja , tad trusīšu esamību, utt. Tas atbilst formulai : no atņem vieninieku, atrod apakšējo veselo daļu, dalot ar . Pēc tam pieskaita .

## c.dirichlet.generalizations.q10

Pilnā spēļu kāršu komplektā katrai kārtij ir kāds no nosaukumiem ("2" (divnieks), "3", "4", "5", "6", "7", "8", "9", "10" (desmitnieks), "J" (kalps), "Q" (dāma), "K" (kungs), "A" (dūzis)) un kāds no mastiem (kreics, pīķis, ercs, kāravs). Tātad eksistē pavisam četri divnieki, četri dūži, utt. Kāds mazākais skaits spēļu kāršu jāizvēlas, lai starp izvēlētajām noteikti atrastos divas kārtis ar blakusesošiem nosaukumiem, piemēram, ("2";"3") vai ("10","J") vai ("K","A")?

**Atbilde:** 29

**Skaidrojums:** Izveidosim Dirihlē "būrīšus": ("2";"3"), ("4", "5"), ("6", "7"), ("8", "9"), ("10", "J"), ("Q", "K"), ("A"). Izvēloties kārtis, vismaz nonāks vienā būrītī. Tā kā ar vienu nosaukumu ir tikai kārtis, tad maksimālajā būrītī noteikti būs divu dažādu nosaukumu kārtis - tās arī būs ar blakusesošiem nosaukumiem.

Ar kārtīm, acīmredzot, nepietiek, jo var izvēlēties visus četrus no šiem septiņiem nosaukumiem: "2", "4", "6", "8", "10", "Q", "A". Tur nekādi divi nosaukumi nenonāk blakus, jo tie ņemti, vienu izlaižot.

## c.dirichlet.generalizations.q11

Vai ir patiess sekojošs apgalvojums: Starp jebkuriem naturāliem skaitļiem, kuru summa ir noteikti atradīsies daži (vismaz divi) tādi skaitļi, kuru summa ir .

1. Jā.
2. Nē.

**Atbilde:** a

**Skaidrojums:** Summu var iegūt kā vai , vai , vai . Lai nenotiktu neviens no šiem gadījumiem, kādi var būt izvēlētie skaitļi, kas mazāki par ? Ir sekojošas iespējas: a. Tikai ar trijniekiem: , (vai arī lielāks skaits ar trijniekiem) b. Ar trijniekiem un divniekiem: , (vai arī vēl vairāk trijnieku un viens divnieks) c. Bez trijniekiem, bet ar divnieku: , . d. Bez trijniekiem un divniekiem: .

Visos šajos gadījumos izraudzītais skaitļu komplekts (kopā ar atlikušajiem skaitļiem, kuri ir lielāki vai vienādi ar ) nedos aritmētisko vidējo, kas vienāds ar . To pārbauda ar pilno pārlasi.

1. Ja izraudzīti trijnieki (), tad paliek skaitļi, kas dod summā . Iegūstam, ka vidējais ir . Visas šīs attiecības nepārsniedz , t.i. visi skaitļi nevar būt vismaz .
2. Ja izraudzīti trijnieki () un viens divnieks, tad atliek skaitļi, kas dod summā . Visas šīs attiecības nepārsniedz , t.i. visi skaitļi nevar būt vismaz .
3. Aplūkosim (gadījums ir līdzīgs). Iegūstam, ka ir vēl seši skaitļi, kuru summa ir . Tad , t.i. visi šie seši skaitļi nevar būt vismaz .
4. Ja ir izraudzīti skaitļi un vēl pieci skaitļi, kas dod summā , tad , t.i. piecu skaitļu aritmētiskais vidējais nevar būt vismaz .

## c.dirichlet.generalizations.q12

Kādu lielāko skaitu skaitļu var izvēlēties no kopas tā, lai starp izvēlētajiem neatrastos divi dažādi skaitļi, kuru summa dalās ar ?

**Atbilde:** 23

**Skaidrojums:** Starp šiem skaitļiem ir septiņi skaitļi, kuri dod atlikumu , dalot ar , astoņi skaitļi, kuri dod atlikumu , dalot ar un pa septiņiem skaitļiem, kuri dod visus citus atlikumus (, , , , ), dalot ar . Lai divu skaitļu summas nedalītos ar , nedrīkst izvēlēties divus skaitļus ar atlikumiem ; nedrīkst arī izvēlēties abus atlikumus un , kā arī un vai un .  
Tātad var ņemt vienu skaitli ar atlikumu , visus skaitļus ar atlikumiem , un . Iegūstam .

## c.dirichlet.generalizations.q13

Kopu veido, izvēloties dažus naturālus skaitļus no līdz (abus galapunktus arī drīkst izvēlēties). Zināms, ka, saskaitot jebkurus divus elementus no kopas , nevar iegūt summu . Kāds ir lielākais iespējamais elementu skaits kopā ?

**Atbilde:** 62

**Skaidrojums:** Skaitļi no līdz nevar piedalīties nevienā skaitļu pārī, kam summā sanāk . Visus citus skaitļus var sadalīt pa pāriem, kas veido šādas summas: , , utt., . Šajos pāros ietilpstošo skaitļu pavisam ir , pašu pāru ir . No katra pāra var ņemt ne vairāk kā vienu skaitli. Tātad pavisam var izvēlēties skaitļus.

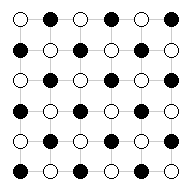
## c.dirichlet.generalizations.q14

Katrs no punktiem kvadrātiskā režģī , nejauši izvēloties, nokrāsots vai nu melns vai balts. Kāds lielākais punktu skaits var būt balti, lai noteikti atrastos horizontāla vai vertikāla taisne, uz kuras ir vismaz melni punkti?

**Atbilde:** 17

**Skaidrojums:** Ja punkti ir balti, tad punkti ir melni. Tos kaut kā sazīmējot uz paralēlām taisnēm režģī (piemēram, horizontālajām) atradīsies punkti uz vienas horizontālās taisnes.

Ja turpretī izvēlas baltos punktus, tad arī melno būs un tos režģī varēs iekrāsot pārmaiņus līdzīgi šaha galdiņa krāsojumam.



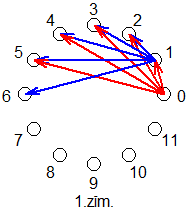
## c.dirichlet.generalizations.q15

Klasē ir skolēni. Katrs no viņiem kaut kā izvēlas klasesbiedrus un nosūta katram no viņiem Jaungada apsveikumu. Kādam mazākajam var apgalvot, ka noteikti atradīsies divi tādi klasesbiedri, kas nosūtījuši apsveikumus viens otram?

**Atbilde:** 6

**Skaidrojums:** Attēlosim klasesbiedrus kā punktus, kas izvietoti uz riņķa līnijas. Pavisam tos savieno šķautnes jeb vēstuļu sūtīšanas "kanāli". Ja tiek sūtītas = vēstules, tad katrai vēstulei nepietiek sava "kanāla"; divām jātiek sūtītām starp tām pašām virsotnēm - t.i. klasesbiedri nosūta vēstules viens otram.

Pretpiemēra veidošanai katru no klasesbiedriem apzīmēsim ar numuru no līdz . Skolēns ar numuru nosūta piecas vēstules skolēniem (ja kāds no skaitļiem ir lielāks vai vienāds ar , tad aprēķinām atlikumu dalot ar ). Pie šādas kārtības neatradīsies nekādi divi skolēni, kuri sūta vēstules viens otram, jo (kur ir naturāli skaitļi, kas nepārsniedz ) nevar dot atlikumu , dalot ar .



# Dirihlē princips (3) - Lietojumi kombinatorikā

* **Anotācija:** Tests par Dirihlē principa lietojumiem kombinatorikas uzdevumos, kur objektu vai būrīšu skaits jāatrod ar kombinatorikas līdzekļiem; jāveic novērtējumi, izvēloties ekstrēmos elementus vai jānovērtē algoritmu ātrdarbība.

## c.dirichlet.combinatorics.q1

Konfektes iesaiņotas vairākās pakās, kurās var būt no līdz konfekšu. Cik konfekšu jāiesaiņo (vienalga kura lieluma pakās) tā, lai noteikti atrastos vai nu divas pakas ar vienādu konfekšu skaitu vai arī divas pakas ar konfekšu summu ?

**Atbilde:** 91

**Skaidrojums:** Ir spēkā vienādība:

Tiklīdz kā konfekšu skaits pārsniedz , tad tās nevar iesaiņot pakās. Ir nepieciešamas vismaz pakas, kas nozīmē to, ka vismaz divas no pakām izrādīsies vienādas vai arī nonāks vienādos attālumos no virknītes galiem (t.i. dod summā ).

## c.dirichlet.combinatorics.q2

Morzes ābece pārraida burtus ar divu veidu pīkstieniem - īsajiem un garajiem. Piemēram, burtu "S" pārraida ar trim īsajiem pīkstieniem. Cik 3-pīkstienu kombinācijas jāpārraida, lai vismaz no šīm kombinācijām būtu vienādas (t.i. saturētu vienādu skaitu ar īsajiem un garajiem pīkstieniem vienādā secībā)?

**Atbilde:** 73

**Skaidrojums:** Pavisam ir astoņas dažādas 3-pīkstienu kombinācijas (reizināšanas likums kombinatorikā: , jo ir trīs pīkstieni un katrs var pieņemt divas vērtības). Pārraidot kombinācijas, iegūstam, ka vispopulārākajā 3-pīkstienu kombinācijā nonāks no tām.

## c.dirichlet.combinatorics.q3

Istabā ir cilvēki; katri divi vai nu pazīst viens otru vai arī nepazīst. (Pazīšanās ir simetriska: ja pazīst , tad arī pazīst .) Izvēlamies cilvēku starp šiem cilvēkiem. Kāds ir lielākais skaits cilvēku, kas vai nu visi pazīst , vai arī visi nepazīst ?

**Atbilde:** 5

**Skaidrojums:** Cilvēkam ir pavisam dažādi citi cilvēki. Katru no tiem var pazīt vai nepazīt. Vismaz no šiem cilvēkiem būs attiecībā "pazīst" vai arī attiecībā "nepazīst". cilvēkus dala divu veidu "būrīšos".

## c.dirichlet.combinatorics.q4

Vecmāmiņa kāpj pa trepēm pakāpienus, ar vienu soli pārvarot , vai pakāpienus. Pavisam viņai nepieciešami soļi augšup. Ja vecmāmiņa piecreiz uzkāpj pa šīm trepēm, cik reižu viņa ciemojusies uz tā pakāpiena, uz kura viņa bijusi visbiežāk (pašu apakšējo - -to un pašu augšējo - -to neskaitot)?

**Atbilde:** 4

**Skaidrojums:** Pavisam ir pakāpieni (neskaitot apakšējo un augšējo). 0-tajā solī vecmāmiņa ir uz apakšējā pakāpiena, bet 30-tajā solī - uz augšējā. Tādēļ viņai katrā uzkāpšanas reizē ir soļi uz pakāpieniem kaut kur pa vidu. Iegūstam, . Sadalot uz "būrīšiem" iegūstam, ka vismaz vienā būrītī būs vismaz objekti. (**Piezīme:** Spēja kāpt tieši pa , vai nav būtiska - varētu atļaut kāpt arī lielāku skaitu pakāpienu, atbilde no tā nemainītos.)

## c.dirichlet.combinatorics.q5

Ir sarkani un zaļi aplīši; uz katra aplīša uzrakstīts cits skaitlis no līdz . Vai noteikti var atrast divus tādus pārus (katrā pārī ir sarkans un zaļš aplītis), ka abos pāros skaitļu summas ir vienādas?

1. Jā
2. Nē

**Atbilde:** a

**Skaidrojums:** Iespējamo aplīšu pāru ir (reizināšanas likums: pirmajā solī izvēlas jebkuru no sarkanajiem aplīšiem; otrajā solī - jebkuru no zaļajiem aplīšiem), savukārt summu ir tikai (no līdz ). Tādēļ pēc Dirihlē principa, divi no pārīšiem iekritīs tanī pašā summā.

Nevar gadīties, ka atrastie pāri daļēji pārklājas. Ja sarkanā/zaļā aplīša pāris ir kā arī , turklāt ; pēc noīsināšanās: . Tātad abi pāri sakrīt - tie nevar daļēji pārklāties. Līdzīgi pamato arī gadījumam, ja zaļie aplīši abos pāros sakristu (tad būtu jāsakrīt arī sarkanajiem - bet Dirihlē princips nodrošina, ka būs divi dažādi pāri).

## c.dirichlet.combinatorics.q6

Ir sarkani un zaļi aplīši; uz katra aplīša uzrakstīts cits skaitlis no līdz . Vai noteikti var atrast divus pārus, kuros ietilpst pa vienam sarkanam un vienam zaļam aplītim, uz kuriem uzrakstīto skaitļu summas ir vienādas?

1. Jā
2. Nē

**Atbilde:** b

**Skaidrojums:** Var gadīties, ka nevar atrast divus šādus pārus. Pretpiemēru var izveidot, izvēloties sarkanos aplīšus, kas visi dalās ar : . Toties zaļie aplīši ir . Katra summa viennozīmīgi izsakās kā tieši viens no zaļajiem aplīšiem (atkarībā no atlikuma, kas rodas dalot ar ) un tieši viens no sarkanajiem aplīšiem: ja no atņem skaitli uz zaļā aplīša.

## c.dirichlet.combinatorics.q7

Vai starp skaitļiem noteikti var atrast divus tādus skaitļus un , ka to summa vai starpība dalās ar ?

1. Jā
2. Nē

**Atbilde:** b

**Skaidrojums:** Var izvēlēties skaitļus: . Visas starpības nepārsniedz . Visas summas ir vismaz un nepārsniedz .

## c.dirichlet.combinatorics.q8

Dotas pēc izskata vienādas monētas, kuru masas ir dažādas. Doti sviras svari ar diviem kausiem un bez atsvariem, uz kuriem var uzlikt jebkuras divas monētas un noskaidrot, kura ir smagāka. Kādam lielākajam noteikti nepietiek ar svēršanām, lai atrastu smagāko monētu.

**Atbilde:** 6

**Skaidrojums:** Ja ar svēršanām ir atrasta smagākā monēta, tad tas nozīmē, ka tā ir salīdzināta ar visām pārējām monētām (vai nu tieši: salīdzinot smagāko ar kādu citu, vai arī netieši: salīdzinot smagāko ar vienu, pēc tam to ar vēl kādu utt.). Citiem vārdiem sakot, ja katru svēršanu iztēlo kā monētu savienošanu ar svītriņu, tad svēršanu beigās eksistē ceļš ar vienu vai vairākām svītriņām, kas ved no smagākās uz jebkuru citu. Nedrīkst palikt izolēti gabali, kas nekad nav salīdzināti ar to monētu, kuru esam pasludinājuši par smagāko.

Pirms visām svēršanām katra monēta veido "izolētu gabalu", tādēļ veicot svēršanas gabalu skaits var samazināties no līdz (katra svēršana var sasaistīt kopā divus gabalus). Bet ar to nepietiek, lai nonāktu līdz vienam gabalam.

## c.dirichlet.combinatorics.q9

Dotas pēc izskata vienādas monētas. Viena no tām ir viltota. Visas citas monētas ir ar vienādu masu, bet viltotā ir vai nu vieglāka vai smagāka par tām. Doti sviras svari ar diviem svaru kausiem un bez atsvariem; var noskaidrot vai kreisais svaru kauss ir smagāks/vienāds/vieglāks par labo svaru kausu.  
Atrast lielāko , kuram var pamatot, ka ar svēršanām uz sviru svariem **nepietiek**, lai atrastu viltoto monētu un uzzinātu vai tā smagāka/vieglāka par citām.

**Atbilde:** 2

**Skaidrojums:** Mums uzdevumā jāspēj izšķirt dažādas situācijas (ikviena no monētām var izrādīties viltota, turklāt tā var būt gan smagāka, gan vieglāka par citām.) Ar divām svēršanām, kam iespējami trīs iznākumi, var iegūt dažādus rezultātus. Tā kā , tad ar šiem iznākumiem nepietiek, lai atšķirtu visas iespējas.

## c.dirichlet.combinatorics.q10

Latviešu alfabētā ir burti. Kādā skolā katrs skolēns parakstās ar iniciāļiem - tieši diviem latviešu alfabēta burtiem (abi burti var būt arī vienādi). Kāds var būt vismazākais skolēnu skaits skolā, lai noteikti atrastos divi skolēni ar vienādiem iniciāļiem, kurus viņi raksta tieši tanī pašā secībā?

**Atbilde:** 1090

**Skaidrojums:** Iespējamo iniciāļu pāru (t.i. Dirihlē principa "būrīšu") ir . Ja skolēnu būs par vienu vairāk, tad diviem no viņiem būs jānonāk vienā "būrītī", t.i. jāizmanto tie paši iniciāļi tanī pašā secībā.

Ja skolēnu ir vai mazāk, katram var būt cits iniciāļu pāris.

## c.dirichlet.combinatorics.q11

Miķelītis reizes pēc kārtas meta monētu un katrā reizē pierakstīja "C", ja uzkrita "cipars" un "Ģ", ja uzkrita ģerbonis - šādi iegūstot burtu virknīti. Kādai mazākajai vērtībai šajā virknītē noteikti atradīsies divi vienādi lasāmi -burtu fragmenti (šie fragmenti drīkst daļēji pārklāties - piemēram "CĢCĢC" divas reizes satur fragmentu "CĢC").

**Atbilde:** 11

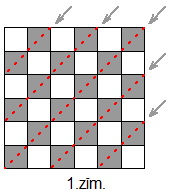
**Skaidrojums:** Ja virknītes garums ir burti, tad tajā ir deviņi trīsburtu gabali (pirmais sākas ar 1.burtu, pēdējais - ar 9.burtu). No deviņiem gabaliem vismaz divi sakritīs, jo no diviem burtiem var izveidot tikai dažādus trīsburtu gabalus.  
Atbilde neder, jo var rasties virkne "CCCĢCĢĢĢCC", kurā katrs no astoņiem trīsburtu gabaliem ietilpst tieši vienreiz.

## c.dirichlet.combinatorics.q12

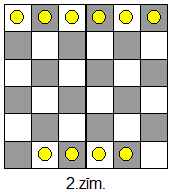
Kādu lielāko skaitu laidņu var izvietot uz šaha galdiņa tā, lai tie viens otru neapdraud (t.i. neatrodas uz vienas diagonāles)?

**Atbilde:** 10

**Skaidrojums:** Ir divu veidu laidņi - uz melnajām un uz baltajām diagonālēm. Ja aplūkojam melnās diagonāles, tad tām eksistē divi virzieni (no kreisā augšējā uz labo apakšējo stūri un no labā augšējā uz kreiso apakšējo). Dirihlē principa lietošanai izdevīgāks tas virziens uz kura ir mazāk diagonāļu ( diagonāles nevis - sk. pelēkās bultiņas 1.zīmējumā). Uz katras no diagonālēm var novietot ne vairāk par vienu laidni. Tas pats sakāms arī par baltajām diagonālēm. Tādēļ laidņu nevar būt vairāk par .



Veids, kā izvietot laidņus ir parādīts 2.zīmējumā.



## c.dirichlet.combinatorics.q13

Kāds mazākais skaits torņu jānovieto uz šaha galdiņa rūtiņas, lai no tiem noteikti varētu izvēlēties trīs torņus, kuri viens otru neapdraud (t.i. neatrodas uz vienas horizontāles vai vienas vertikāles)?

**Atbilde:** 13

**Skaidrojums:** Ja torņu ir vai vēl mazāk, tad tos var izvietot tikai divās horizontālēs - šādā gadījumā savstarpēji neapdraudošus torņus no tiem izvēlēties nevar.

Ja torņu ir , tad atrodam horizontāli , kurā ir vismaz trīs torņi. Tāda noteikti atrodas pēc Dirihlē principa ( torņus izvieto horizontālēs). Atzīmējam šajā horizontālē trīs torņus. Pēc tam šo horizontāli svītrojam.

Mums tagad noder novērtējums no augšas (nevienā horizontālē nevar būt vairāk kā torņi); tādēļ pēc izsvītrošanas paliek pāri vismaz torņi. No atlikušajām horizontālēm atrodam tādu , kurā atrodas vismaz torņi un izsvītrojam arī to. Arī tajā nav vairāk kā torņi, tāpēc paliek vismaz vēl viens tornis. Šo horizontāli apzīmējam ar .

No izvēlamies vienīgo tur garantēti esošo torni. Izsvītrojam šī torņa vertikāli no un (tur paliek attiecīgi divi un viens tornis). Pēc tam ņemam neizsvītroto torni no un izsvītrojam arī viņa vertikāli. Visbeidzot ņemam neizsvītroto torni no . Šī procesa beigās mums ir trīs torņi, kas cits citu neapdraud.

## c.dirichlet.combinatorics.q14

Spēlētājs izvēlas divciparu skaitļus. Spēlētājs no tiem izvēlas netukšu apakškopu (t.i. vienu vai vairākus skaitļus; varbūt arī visus ); pēc tam visus izvēlētos skaitļus saskaita. Kāda ir mazākā un kāda lielākā summa, ko var iegūt?

**Atbilde:** 10,945.

**Skaidrojums:** Ja spēlētājs izvēlējās kopu, kurā ietilpst skaitlis , bet izvēlējās tieši šo skaitli , tad tas arī ir mazākais.

Lielākā summa, ko var iegūt, ir .

## c.dirichlet.combinatorics.q15

Spēlētājs izvēlas divciparu skaitļus. Spēlētājs no tiem izvēlas netukšu apakškopu, t.i. vienu vai vairākus skaitļus (varbūt arī visus ) no tiem, ko paņēma . 1. Cik dažādos veidos to var izdarīt? 2. Vai neatkarīgi no izvēles, noteikti varēs atrast divas dažādas apakškopas, kurās skaitļu summas ir vienādas?" a. Jā b. Nē

**Atbilde:** 1023,a.

**Skaidrojums:** No elementiem apakškopas var izvēlēties dažādos veidos. Tukšā apakškopa mums neder, tādēļ faktiski rezultāts ir par vienu mazāks: .

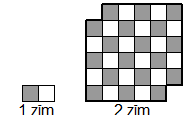
Tā kā iespējamo summu ir (sk. iepriekšējo testa jautājumu), bet iespēju izvēlēties netukšu apakškopu ir , tad vismaz viena summa būs pārstāvēta divas reizes.

# Dirihlē princips (4) - Figūriņu izvietojumi

* **Anotācija:** Tests par Dirihlē principa lietojumiem punktu konfigurācijām, figūriņu izvietojumiem, rūtiņu izvietojumiem.

## c.dirichlet.shapes.q1

Kāds ir lielākais taisnstūrīšu skaits, kuros var sagriezt kvadrātu , kam noņemtas divas rūtiņas kvadrāta pretējos stūros? Griešana jāveic pa rūtiņu līnijām.

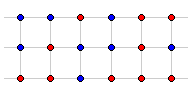


**Atbilde:** 16

**Skaidrojums:** Šādā kvadrātā ir baltas un melnas rūtiņas. Ja vēlēsimies ievietot taisnstūrīšus (katram no kuriem jāsatur viena balta un viena melna rūtiņa), izrādīsies, ka baltajām rūtiņām uzklājušās figūriņas, t.i. katram taisnstūrītim baltas rūtiņas nepietiks.

## c.dirichlet.shapes.q2

Dots kvadrātisks punktu režģis . Katrs punkts šajā režģī nokrāsots zils vai sarkans. Pie kāda mazākā tajā noteikti var atrast taisnstūri ar malām paralēlām režģa malām, kuram visas virsotnes ir vienā krāsā?



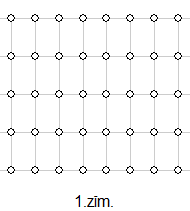
**Atbilde:** 7

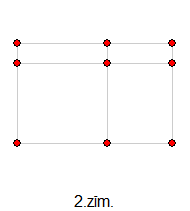
**Skaidrojums:** Ja ir kāda vertikāle uz kuras atrodas visi trīs punkti vienā krāsā (piemēram, sarkanā), tad pievienojot vēl četras vertikāles - ne uz vienas no tām nevarēs likt divus sarkanus punktus, t.i. būs kombinācijas , , vai . Ja kāda no tām atkārtojas (vai ir kopā ar ), iegūstam zilu taisnstūri. Tātad šajā gadījumā lielākais vertikāļu skaits ir : , , vai .

Ja turpretī neeksistē tāda vertikāle uz kuras visi trīs punkti ir vienā krāsā, tad var uzlikt kombinācijas - ar diviem sarkaniem un vienu zilu punktu vai otrādi (ar vienu sarkanu un diviem ziliem). Tiklīdz kā liksim kombinācijas, tad divas atkārtosies.

## c.dirichlet.shapes.q3

Dots punktu režģis . Visi punkti nokrāsoti zili vai sarkani (1.zīm.). Pie kāda tajā noteikti var atrast režģi , kurā visas virsotnes ir vienā krāsā (2.zīm.)?





**Atbilde:** 41

**Skaidrojums:** Lielākais skaits vertikāļu, neveidojot vienkrāsas režģi iegūstamas tad, ja liek visos iespējamajos veidos pa diviem eksemplāriem trīs sarkanas un divas zilas virsotnes (šādu veidu ir ; ja katru atkārto divreiz: ) un arī visos iespējamajos veidos divas sarkanas un trīs zilas (šādu veidu arī ir kopā ar atkārtojumiem ).

Tiklīdz kā vertikāļu būs vismaz , atradīsies pilnīgi vienādi izkrāsotas vertikāles, kurās trīs punkti ir vienā krāsā (piemēram, sarkanā), bet divi citi punkti ir citā krāsā (piemēram, zilā). Tad arī būsim atraduši vienkrāsainu (piemēram, sarkanu) režģi.

## c.dirichlet.shapes.q4

Uz taisnes ik pēc centimetra ir atzīmēts punkts, kas nokrāsots vienā no trim krāsām (zils, zaļš vai sarkans).  
Kāds mazākais punktu skaits no tiem jāizvēlas, lai starp izvēlētajiem noteikti atrastos trīs punkti , kas visi ir vienā krāsā, un visi attālumi centimetros starp tiem dalās ar ?

**Atbilde:** 19

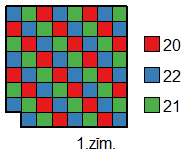
**Skaidrojums:** Ieviešam uz taisnes "koordinātu sākumpunktu" - kādu no atzīmētajiem punktiem, kura koordināti pasludinām vienādu ar . Katrs cits punkts iegūst kādu veselu skaitļu koordināti (pozitīvu vai negatīvu), kas izsaka, cik tālu tas ir no koordinātu sākumpunkta pa labi vai pa kreisi.

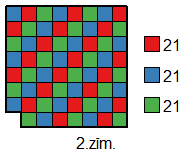
Katram punktam atzīmējam, kādu atlikumu dod šī punkta koordināte, to dalot ar . Būrīši mūsu gadījumā ir deviņas krāsu-atlikumu kombinācijas (piemēram, "sarkanie punkti, kuru koordinātes dalās ar " vai "zilie punkti, kuru koordinātes dod atlikumu , dalot ar "). Tiklīdz kādā no šādiem būrīšiem nonāks trīs punkti, būsim ieguvuši vēlamo rezultātu: trīs punktus , kas visi ir vienā krāsā un visi attālumi starp tiem dalās ar .

Mazākais punktu skaits, kas to nodrošina ir , jo augšējā veselā daļa ir .

## c.dirichlet.shapes.q5

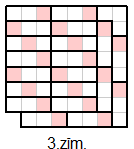
Andrītis un Mārīte krāsoja šaha galdiņu , kuram izņemta stūra rūtiņa trīs krāsās - t.i. tajā ir pavisam rūtiņas. Andrīša krāsojumā zilā krāsa lietota reizes, zaļā krāsa reizi, sarkanā krāsa reizes (1.zīm.). Mārītes krāsojumā visas krāsas lietotas reizi (2.zīm.).  
Kādam lielākajam uz šī šaha galdiņa (neizmantojot izņemto stūra rūtiņu) varēs novietot taisnstūrīšus ?





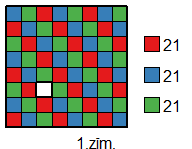
**Atbilde:** 20

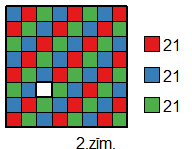
**Skaidrojums:** Pretrunas iegūšanai izdevīgāks Andrīša krāsojums, kurā ir tikai sarkanas rūtiņas. Tiklīdz kā mēģināsim izvietot taisnstūrīti, izrādīsies, ka sarkano rūtiņu visiem taisnstūrīšiem nepietiek. taisnstūrīšus, acīmredzot, var izvietot (3.zīm.).



## c.dirichlet.shapes.q6

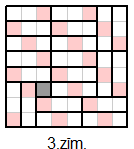
Šaha galdiņu (ar vienu izgrieztu rūtiņu "C3") Andrītis un Mārīte krāsoja katrs savā virzienā pa diagonālēm trīs krāsās (attālumi starp vienādi krāsotām diagonālēm ir vienības). Abiem sanāca vienāds rūtiņu skaits visās trīs krāsās (1.zīm. un 2.zīm.). Kādam lielākajam uz šī šaha galdiņa (neizmantojot rūtiņu "C3") varēs novietot taisnstūrīšus ?





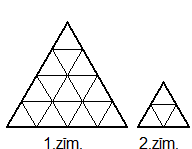
**Atbilde:** 21

**Skaidrojums:** Šoreiz Dirihlē princips pretrunu nedod, tādēļ ir jēga mēģināt novietot taisnstūrīti. Konstrukciju ar taisnstūrīti var atrast ar mēģinājumu un kļūdu metodi - tā attēlota 3.zīmējumā.



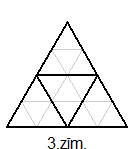
## c.dirichlet.shapes.q7

Uzzīmēta liela trijstūrveida figūra (1.zīm., to veido mazi trijstūrīši), katrā mazajā trijstūrītī ierakstīts vai . Skaitļu summa lielajā figūrā ir . Kādu skaitli noteikti nepārsniedz skaitļu summa 2.zīmējumā attēlotajā figūrā (to veido mazie trijstūrīši, var būt dažādi pagriezta), kur šī skaitļu summa ir vismazākā?



**Atbilde:** 22

**Skaidrojums:** Skaitlis izsakāms kā ; citādi to izteikt nevar (palielinot skaitļu vai skaitu, to summa attiecīgi samazināsies vai palielināsies). Ja sadalām lielo figūru četrās mazajās figūrās (3.zīm.), iegūsim, ka vismaz vienā no četrām mazajām figūrām būs vismaz trīs skaitļi . Tādēļ tur ierakstīto skaitļu summa nepārsniegs .



## c.dirichlet.shapes.q8

Plaknē atzīmēti punkti, nekādi trīs no tiem neatrodas uz vienas taisnes. Katri divi savienoti ar nogriezni kādā no četrām krāsām - zilu, zaļu, oranžu vai sarkanu. Kāds ir lielākais skaitlis ar īpašību, ka šajā zīmējumā noteikti atradīsies nogriežņi vienā krāsā?

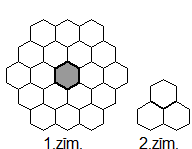
**Atbilde:** 14

**Ieteikums1:** No punktiem nesakārtotu virsotņu pāri var izvēlēties veidos.

**Skaidrojums:** Ir pavisam nogriežņi, kas kaut kā sadalīti pa četrām krāsām. Tādēļ saskaņā ar Dirihlē principu atradīsies vismaz nogriežņi vienā krāsā.

## c.dirichlet.shapes.q9

Dota no sešstūrīšiem veidota figūriņa (1.zīm.), kurai izņemts vidējais sešstūrītis. Katrā sešstūrītī ierakstīts skaitlis vai . Visu ierakstīto skaitļu summa ir . Kādam vismazākajam noteikti atradīsies tāda trīs sešstūrīšu figūriņa (2.zīm.), kurā ierakstīto trīs skaitļu summa ir vismaz ?



**Atbilde:** 13

**Skaidrojums:** Summu var iegūt tad, ja skaitļi un ņemti attiecīgi un reizes, jo

1.zīmējumā redzamo figūru var sagriezt sešos gabalos tā, ka katrs gabals sakrīt ar 2.zīmējumā redzamo figūru. Skaitlis ir sastopams reizes, tādēļ vismaz vienā no 2.zīm. gabaliem nonāks vismaz divi skaitļi . Tādēļ šajā gabalā ierakstīto skaitļu summa būs vismaz .

## c.dirichlet.shapes.q10

Vienības kvadrātā ( garuma vienības) atzīmēti punkti. Ir spēkā apgalvojums, ka neatkarīgi no punktu izvietojuma atradīsies divi tādi punkti, kuru attālums nepārsniedz . Atrast lielāko , kuram šis apgalvojums ir spēkā.

**Atbilde:** c

**Ieteikums:** Tā kā ir atzīmēt pieci punkti, ir izdevīgi sadalīt kvadrātu četros gabalos.

**Skaidrojums:** Attālums starp tuvākajiem punktiem nepārsniedz . Sadalām vienības kvadrātu četros mazākos kvadrātiņos (sk. zīmējumu). Pēc Dirihlē principa vismaz divi punkti atradīsies vienā no kvadrātiņiem ar malas garumu . Lielākais iespējamais attālums ir tad, ja tie atrodas pretējās kvadrāta virsotnēs. Tad to attālums ir .

Šo novērtējumu nevar uzlabot, jo var punktus novietot tā, ka četri no tiem nonāk lielā kvadrāta četrās virsotnēs, bet piektais punkts - lielā kvadrāta centrā. Tad visi attālumi starp punktiem nepārsniedz .



## c.dirichlet.shapes.q11

Uz figūras atzīmēti punkti. Figūru pārgriež vietās tā, ka neviens griezums nesakrīt ar kādu no atzīmētajiem punktiem. Kāds ir mazākais iespējamais skaits punktu uz tā gabala, uz kura atzīmēto punktu ir visvairāk? Aplūkot divus gadījumus:  
(a) ir nogrieznis; (b) ir riņķa līnija.

**Atbilde:** 2,3.

**Skaidrojums:** Nogriežņa gadījumā punkti sagriež to gabalos jeb "būrīšos", t.i. punktus pa tiem var sadalīt tā, ka uz katra gabala ir divi atzīmētie punkti.

Riņķa līniju griezieni sadala gabalos, tādēļ uz viena no gabaliem būs vismaz .

## c.dirichlet.shapes.q12

Vai var uzzīmēt daudzstūri (varbūt neizliektu), kuram ir virsotnes, no kurām virsotnes atrodas uz vienas taisnes?

1. Jā
2. Nē

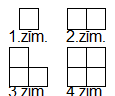
**Atbilde:** b

**Skaidrojums:** Ja virsotnes, kas ir uz vienas taisnes, dalītu grupiņās (par atdalītāju var kalpot tāda virsotne, kas neatrodas uz šīs taisnes), vismaz vienā no gabaliem nonāks virsotnes. Bet tad šādas virsotnes , un , kuras visas pēc kārtas izvietotas uz vienas taisnes, nevar būt daudzstūra virsotnes, jo vidējā virsotne atradīsies uz abu malējo virsotņu veidotās malas .

## c.dirichlet.shapes.q13

Dots šaha galdiņš , kurā kaut kā atzīmētas rūtiņas. Katrai no četrām figūriņām atrast lielāko vērtību, pie kuras noteikti var novietot šo figūriņu, nepārklājot nevienu no atzīmētajām rūtiņām.

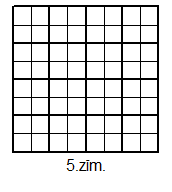
1. Kvadrātiņš (1.zīm.)
2. Taisnstūrītis (2.zīm.)
3. "Stūrītis" - figūriņa no rūtiņām (3.zīm.)
4. Kvadrātiņš (4.zīm.)



**Atbilde:** 63,31,31,15

**Skaidrojums:** Vienu rūtiņu, protams, var novietot, ja vien visas nav iekrāsotas.

Divu vai trīs rūtiņu figūriņas var novietot tiklīdz kā iekrāsotas ne vairāk kā , t.i. stingri mazāk par pusi no , jo tad vismaz vienā kvadrātiņā 2x2 būs tikai viena iekrāsotā. ( rūtiņas var iekrāsot kā šaha galdiņu - un tad 2.zīm. un 3.zīm. figūriņas tur ievietot nevar.)



Ja kvadrātu sadala kvadrātiņos (sk. 5.zīm.), tad vismaz vienā no kvadrātiņiem nonāks ne vairāk kā viena iekrāsotā rūtiņa. Tad šajā kvadrātiņā pietiks vietas 2.zīm. vai 3.zīm. attēlotajai figūriņai.

Līdzīgi, ja iekrāsotas tikai rūtiņas, tad kādā kvadrātiņā nenonāks neviena iekrāsotā rūtiņa - tur varēs ievietot 4.zīm. attēloto figūriņu. Ja atļauts iekrāsot rūtiņas, tad katrā no 5.zīm. attēlotajiem kvadrātiņiem var iekrāsot, piemēram, kreiso augšējo rūtiņu un tur nevarēs ievietot nevienu 4.zīm. figūriņu, nepārklājot kādu no iekrāsotajām.

## c.dirichlet.shapes.q14

Doti nogriežņi, kuru garumi izsakāmi ar veselu skaitu milimetru. Kādam mazākajam no tiem noteikti var izvēlēties dažus nogriežņus (vai varbūt tikai vienu nogriezni) tā, lai to garumu summa būtu vesels skaits centimetru?

**Atbilde:** 10

**Skaidrojums:** Ja ir nogriežņi ar garumiem , varam veidot summas , , utt. . Starp šīm summām var atrasties kāda, kas izsakāma veselā skaitā centimetru - tad vajadzīgais ir iegūts. Ja turpretī starp šīm summām neviena nav izsakāma veselā skaitā centimetru, tad katra no tām pārsniedz veselu skaitu centimetru par , , utt. milimetriem. Šo vērtību ir tikai , tādēļ divas no šīm summām beigsies ar vienādu skaitu milimetru. Pieņemsim, ka tās ir, teiksim summas un . Tad starpība ir vesels skaits centimetru, jo milimetri, atņemot abus lielumus, iznīcinās.

Ja izvēlamies deviņus nogriežņus, kuru garumi ir milimetrs, tad nekāda summa ar tiem neveidos veselu skaitu centimetru. Tādēļ ir labākais novērtējums.

## c.dirichlet.shapes.q15

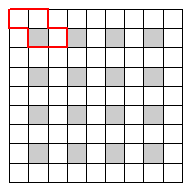
Kādu lielāko skaitu tetromino (1.zīm.) var izgriezt no kvadrāta ? Visi griezumi iet pa rūtiņu līnijām.



**Atbilde:** 16

**Skaidrojums:** Katra tetromino figūriņa pārklāj tieši vienu pelēko rūtiņu (2.zīm.). Ja figūriņu būtu vairāk par , tad pelēko rūtiņu visām figūriņām nepietiktu. (Novērtējot vienkārši pēc rūtiņu skaita, varētu šķist, ka pietiek vietas figūriņām, bet šāds spriedums ignorētu to, ka daudzie tetromino ir blīvi jāsapako bez pārklāšanās.)

Ar figūriņām uzdevumu, acīmredzot var veikt - pietiek ievietot vienu no figūriņām kā parādīts ar sarkano kontūru - un pēc tam citas iegūt, nobīdot šo figūriņu , vai rūtiņas pa labi un/vai uz leju.



# Dirihlē princips (5) - Skaitļu teorija

* **Anotācija:** Tests par Dirihlē principa lietojumiem apgalvojumos par naturāliem skaitļiem, dalāmību, iespēju iegūt noteikta veida summas vai starpības.

## c.dirichlet.nt.q1

Pēterītis iedomājās naturālus skaitļus. Vai noteikti kāds no šiem skaitļiem (vai arī dažu iedomāto skaitļu summa) dalās ar ?

1. Jā
2. Nē

**Atbilde:** b

**Skaidrojums:** Var iedomāties visus skaitļus, kuri dod vienādu atlikumu , dalot ar (vai arī atlikumu , , ). Šajā gadījumā jebkura šo skaitļu summa dos atlikumu , dalot ar .

## c.dirichlet.nt.q2

Pēterītis iedomājās naturālus skaitļus. Vai noteikti kāds no šiem skaitļiem (vai arī dažu iedomāto skaitļu summa) dalās ar ?

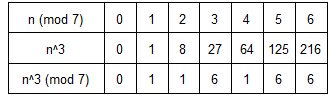
1. Jā
2. Nē

**Atbilde:** a

**Skaidrojums:** Veidojam summas, pievienojot arvien jaunus iedomātos skaitļus: , , , . Ja kāda no šīm summām dalās ar , tad apgalvojums ir pierādīts. Ja neviena no summām nedalās ar , tad iespējamie atlikumi, dalot ar , var būt . Summu pavisam ir , bet atlikumu ir , tādēļ divas no summām dos vienādus atlikumus, dalot ar . (Piemēram un .) No lielākās summas atņemot mazāko, iegūsim dažu iedomāto skaitļu summu, kas dalās ar . (Mūsu piemērā .)

## c.dirichlet.nt.q3

Tabulā apkopoti naturāli skaitļi, to atlikumi, dalot ar , arī to kubi un kubu atlikumi, dalot ar . Cik naturāli skaitļi jāizvēlas, lai starp tiem noteikti varētu atrast divus, kuru kubi dod vienādus atlikumus dalot ar ?



**Atbilde:** 4

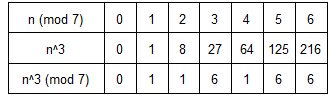
**Skaidrojums:** Pavisam ir dažādi atlikumi, dalot naturālu skaitļu kubus ar . Ja izvēlēsimies skaitļus, tad Dirihlē princips nodrošina, ka vismaz diviem no tiem būs vienādi atlikumi, ja skaitļa kubu dala ar .

Ievērosim, ka arī naturāliem skaitļiem atlikumi visu laiku periodiski atkārto mūsu tabuliņu. Jo

t.i. var izteikt kā četrus saskaitāmos, no kuriem tikai iespaido atlikumu, dalot ar (jo citi izdalās bez atlikuma). Tādēļ un dod vienādus atlikumus, dalot ar . To var apzīmēt svešvārdā: un ir *kongruenti* pēc moduļa jeb ).

## c.dirichlet.nt.q4

Tabulā apkopoti naturāli skaitļi, to kubi un kubu atlikumi, dalot ar . Cik naturāli skaitļi (no kuriem neviens nedalās ar ) jāizvēlas, lai starp tiem noteikti varētu atrast trīs, kuru kubi dod vienādus atlikumus dalot ar ?



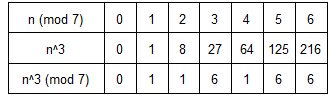
**Atbilde:** 7

**Skaidrojums:** Pavisam iespējami dažādi atlikumi, dalot naturālu skaitļu kubus ar . Tādēļ, izvēloties septiņus šādus atlikumus, vismaz trīs no tiem sakritīs.

Ievērosim, ka arī naturāliem skaitļiem ir tādi paši atlikumi, jo , t.i. var izteikt kā četrus saskaitāmos, no kuriem visi dalās ar , izņemot varbūt . Tādēļ un dod vienādus atlikumus, dalot ar .

## c.dirichlet.nt.q5

Tabulā apkopoti naturāli skaitļi, to atlikumi, dalot ar , arī to kubi un kubu atlikumi, dalot ar . Cik naturāli skaitļi (kas visi dod dažādus atlikumus, dalot ar ) jāizvēlas, lai starp tiem noteikti varētu atrast skaitļus un , kuriem dalās ar ?



**Ieteikums1:** Var izmantot algebrisku identitāti .

**Ieteikums2:** Ja dalās ar , bet nedalās ar , tad dalās ar , jo ar dalās reizinājums .

**Atbilde:** 4

**Skaidrojums:** Izvēloties skaitļus, būs vismaz divi vienādi atlikumi un , dalot ar , jo naturālu skaitļu kubi dod tikai trīs dažādus atlikumus. Tā kā un dod dažādus atlikumus, dalot ar (tas bija dots), tad nedalās ar .

Tādēļ iegūstam, ka dalās ar , bet nedalās ar . Ir spēkā sadalījums reizinātājos - tādēļ iekava noteikti dalās ar .

## c.dirichlet.nt.q6

Miķelītis izvēlējās dažus skaitļus no līdz , kuru kvadrāti dod dažādus atlikumus, dalot ar . Zināms, ka viens no Miķelīša izvēlētajiem skaitļiem ir . Kādu skaitli Miķelītis noteikti nedrīkst izvēlēties?

**Ieteikums1:** dod tādu pašu atlikumu kā , ja to dala ar .

**Atbilde:** 7

**Skaidrojums:** Skaitļa kvadrāts dod atlikumu , dalot ar . Arī dod tādu pašu atlikumu. Arī pieskaitot skaitlim iegūsim skaitli , kas dos atlikumu . Tiešām: dod atlikumu . To pašu var iegūt, atverot iekavas izteiksmē - un pārliecinoties, ka vienīgais saskaitāmais, kas nedalās ar ir .

## c.dirichlet.nt.q7

Skaitļi no līdz sadalīti ģeometriskās progresijās ar kvocientu : katra progresija sākas ar skaitli, kas nedalās ar , katrs nākamais skaitlis progresijā iegūstams, iepriekšējo reizinot ar . Skaitļus, kas pārsniedz , neraksta; dažās progresijās (ja tās sākas ar vai vēl lielāku skaitli) ir tikai viens loceklis. Šādi izskatās dažas pirmās progresijas:

Kāds ir mazākais skaits skaitļu no līdz , kas jāizvēlas, lai kaut kādi divi no tiem noteikti nonāktu vienā progresijā?

**Atbilde:** 68

**Skaidrojums:** Tā kā katrā progresijā ir tieši viens skaitlis, kurš nedalās ar (un ir tieši skaitļi līdz , kas dalās ar ), tad progresiju kopskaits ir . Izvēloties par vienu skaitli vairāk (jeb tieši skaitļus) vismaz vienā progresijā nonāks vismaz divi skaitļi.

## c.dirichlet.nt.q8

Kāds ir lielākais skaitļu skaits no līdz , ko var izvēlēties tā, lai nekādiem diviem no izvēlētajiem skaitļiem un , to dalījums nebūtu vesels skaitlis, kas lielāks par ?

**Ieteikums1:** Jāizmanto fakts, ka divu izvēlēto skaitļu attiecība drīkst būt VIENĀDA ar . Varbūt pietiek atrast lielāko skaitu, ko var izvēlēties tā, lai divu skaitļu dalījums nebūtu skaitļa pakāpe.

**Atbilde:** 67

**Skaidrojums:** Piemērs, ko var izvēlēties - visi naturālie skaitļi no 34 līdz 100. Uzlabot to nevar: Sadalām naturālos skaitļus no līdz ģeometriskās progresijās ar kvocientu (katra progresija sākas ar citu skaitli, kas nedalās ar ). Pavisam ir šādas ģeometriskas progresijas. Ja skaitļu ir par vienu vairāk, tad vismaz divi skaitļi nonāks tanī pašā ģeometriskajā progresijā, t.i. to attiecība būs vesels skaitlis, kas lielāks par (konkrēti vai ).

## c.dirichlet.nt.q9

Kāds ir mazākais skaitļu skaits, ko izvēloties no līdz , starp izvēlētajiem noteikti atradīsim divus tādus, kuru dalījums ir divnieka pakāpe augstāka par -to? (T.i. dalījums ir )

**Atbilde:** 51

**Skaidrojums:** Sadalām skaitļus no līdz vairākās ģeometriskās progresijās ar kvocientu :

Katra šī progresija sākas ar kādu nepāru skaitli no līdz ; turpmākie locekļi tiek iegūti, iepriekšējos reizinot ar . Pavisam ir tieši šādu progresiju. Ja ievietosim skaitļus, tad noteikti divi no tiem izrādīsies vienā no progresijām. Tātad to attiecība būs kvocienta pilna pakāpe.

## c.dirichlet.nt.q10

Virknē uzrakstīti daži pēc kārtas sekojoši skaitļi, kas dod atlikumu 3, dalot ar . Piemēram,

Kāds mazākais skaits šo skaitļu jāuzraksta, lai starp tiem noteikti atrastos tāds, kurš dod atlikumu , dalot ar (neatkarīgi no tā, ar kuru skaitli virkne sākas)?

**Atbilde:** 17

**Skaidrojums:** Ja virknē, kur visi dod atlikumu , dalot ar būs pēc kārtas sekojoši locekļi, no kuriem neviens nedod atlikumu , dalot ar , tad sanāks, ka iespējamie atlikumi ir no līdz (izlaižot ), t.i. tieši vērtības. Pēc Dirihlē principa atradīsies divi locekļi, kuri dod vienādus atlikumus, bet atšķiras kā divi aritmētiskas progresijas locekļi par , kur . Bet šāds skaitlis nevar dalīties ar . Vispārinot šo spriedumu citiem skaitļiem (izņemot un ), citiem atlikumiem kā arī lielākam skaitļu skaitam, varam iegūt ķīniešu atlikumu teorēmu vispārīgajā veidā.

## c.dirichlet.nt.q11

Sportistam dienu laikā ir treniņi - katru dienu vismaz viens treniņš. Vai noteikti atradīsies dažas pēc kārtas sekojošas dienas, kurās ir tieši treniņi dotajām vērtībām?

1. Ja :
   1. Jā
   2. Nē
2. Ja :
   1. Jā
   2. Nē

**Atbilde:** a,a

**Skaidrojums:** Ja jāatrod tieši vai treniņi dažās pēc kārtas sekojošās dienās, tad to vienmēr var izdarīt. Ar apzīmējam treniņu skaitu katrā no dienām. Veidojam summas: cik treniņu bija pirmajā, pirmajās divās, pirmajās trijās utt. dienās:

Šī virkne katrā solī aug (jo katru dienu bija vismaz viens treniņš). Tās vērtības ir skaitļi no līdz .

Katrai no vērtībām pieskaitām skaitli (t.i. vai ). Iegūsim citu skaitļu virkni, kam visi locekļi ir robežās no līdz . Tā kā arī pēc pieskaitīšanas virkne katr solī aug, tad , ja .

Ņemot vērā, ka abās virknēs un ir pavisam locekļu, bet dažādo vērtību ir no līdz (mazāk par ), tad kādā no vērtībām nonāks divi locekļi. Tie nevar būt abi ņemti no tās pašas virknes (jo abas virknes aug). Tādēļ atradīsies loceklis no pirmās, kas vienāds ar citu locekli no otrās, piemēram, . Bet tad uzdevuma apgalvojums izpildās: sākot no dienas ar numuru (neieskaitot) līdz dienai ar numuru (ieskaitot) notika tieši treniņi.

## c.dirichlet.nt.q12

Dots ļoti liels skaitlis . No tiem izvēlas iespējami daudzus skaitļus tā, lai nekādu divu skaitļu starpība nebūtu vai . Kurai no minētajām daļām ir vistuvākais skaitlis ?

**Atbilde:** b

**Skaidrojums:** No katriem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem drīkst izvēlēties ne vairāk kā vienu (citādi šajā skaitļu trijniekā kāda no starpībām ir vai ). Varam izvēlēties aritmētisku progresiju ar diferenci , piemēram, (to turpinot ldz sasniegts skaitlis ). Šajā progresijā ietilpst aptuveni katrs trešais skaitlis, t.i. no visiem. Ja turklāt dalās ar , tad var pamatot, ka lielākais ir precīzi vienāds ar .

## c.dirichlet.nt.q13

Kādu lielāko skaitu naturālu skaitļu no līdz var izvēlēties tā, lai nekādiem diviem izvēlētajiem skaitļiem to starpība nebūtu ne , ne , ne .

**Atbilde:** 240

**Skaidrojums:** No katriem pēc kārtas ņemtiem skaitļiem var izvēlēties ne vairāk kā skaitļus. Aplūkosim, piemēram, (var ņemt arī citu, nobīdītu skaitļu virknīti, katram elementam pieskaitot vienu un to pašu). Acīmredzot, nevar izvēlēties vairāk par vienu skaitli no trijniekiem un , jo visas starpības starp skaitļiem šajos trijniekos ir "neatļautās" (t.i. , vai ).

Tādēļ vienīgā iespēja izvēlēties trīs skaitļus no septiņnieka būtu - izvēlēties skaitli kā arī pa vienam no katra trijnieka un . Tā kā skaitlis konfliktē ar un , tad jāizvēlas atlikušais skaitlis no trijnieka: . Savukārt konfliktē ar un ar - t.i. jāizvēlas atlikušais skaitlis no trijnieka: . Bet un reizē nevar ņemt, jo starp tiem starpība ir .

Esam ieguvuši pretrunu (no pieņēmuma, ka var izvēlēties skaitļus no septiņnieka). Tādēļ katrā no "septiņniekiem", kuros var sadalīt skaitļus no līdz varēs izvēlēties divus skaitļus. Maksimums būs .

## c.dirichlet.nt.q14

Dota naturālu skaitļu kopa , kas satur dažus skaitļus no kopas . Kopa apmierina īpašību: ja tai pieder skaitļi un un , tad nedalās ar .  
(*Atzīmēt visus patiesos apgalvojumus par kopu .*)

1. Kopa var saturēt skaitļus un , kam ?
2. Kopa var saturēt skaitļus un , kam ?
3. Kopa var saturēt skaitļus un , kam ?
4. Kopa var saturēt skaitļus un , kam ?

**Atbilde:** c,d

**Skaidrojums:** Starpības un starp ir neiespējamas: jebkurš skaitlis dalās ar , un jebkuriem diviem skaitļiem , kam summa būs pāru skaitlis, t.i. dalīsies arī ar .

Starpības un starp skaitļiem ir iespējamas. Ja, piemēram, paši nedalās ar un , tad nedalīsies ar , jo arī nedalās ar . Savukārt, ja un pie tam ir nepāru skaitļi, tad to summa nedalās ar .

## c.dirichlet.nt.q15

Dota naturālu skaitļu kopa , kas satur dažus skaitļus no kopas . Kopa apmierina īpašību: ja tai pieder skaitļi un un , tad nedalās ar .  
Kāds lielākais elementu skaits var būt kopā ?

**Atbilde:** 34

**Skaidrojums:** Var izvēlēties kopu , kurā ietilpst visi tie skaitļi no līdz , kas dod atlikumu , dalot ar . T.i.

Jebkuru divu skaitļu summa no šīs kopas dos atlikumu , dalot ar . Savukārt to starpība dalīsies ar . Tādēļ summa nekad nevarēs dalīties ar , jo nedalās ar , bet dalās ar .