Atlases sacensības komandu olimpiādei ``Baltijas ceļš''

2017. gada 23. septembris, Rīga (1. diena)

Risināšanas laiks: 4 stundas un 30 minūtes.
Jautājumus drīkst uzdot pirmo 30 minūšu laikā.
Atļauts izmantot tikai rakstāmpiederumus, lineālu un cirkuli.

Uzdevums 0.1 (BW.TST.2017.1): Pierādīt, ka visiem reāliem $x > 0$ ir spēkā vienādība

$$\sqrt{\frac{1}{3x+1}} + \sqrt{\frac{x}{x+3}} \geq 1.$$

Kurām x vērtībām ir spēkā vienādība?

Uzdevums 0.2 (BW.TST.2017.2): Atrast visus reālu skaitļu pārus (x, y), kas apmierina vienādojumu

$$\frac{(x+y)(2-\sin(x+y))}{4\sin^2(x+y)} = \frac{xy}{x+y}.$$

Uzdevums 0.3 (BW.TST.2017.3): Atrast visas funkcijas $f(x) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, kas definētas veseliem skaitļiem, pieņem veselas vērtības un visiem $x, y \in \mathbb{Z}$ izpildās

$$f(x+y) + f(xy) = f(x)f(y) + 1.$$

Uzdevums 0.4 (BW.TST.2017.4): Polinoma $P(x) = 2x^3 - 30x^2 + cx$ vērtības pie kādiem trīs pēc kārtas sekojošiem veseliem skaitļiem arī ir attiecīgi trīs pēc kārtas sekojoši veseli skaitļi. Nosakiet šīs vērtības!

Uzdevums 0.5 (BW.TST.2017.5): Burvju astoņstūris ar astoņstūris, kura malas iet pa rūtiņu lapas rūtiņu līnijām un malu garumi ir $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ (jebkādā secībā). Kāds ir lielākais iespējamais burvju astoņstūra laukums?

Uzdevums 0.6 (BW.TST.2017.6): 13×13 rūtiņu laukuma katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis. Pierādīt, ka var izvēlēties 2 rindas un 4 kolonnas tā, ka to 8 krustpunktos ierakstīto skaitļu summa dalās ar 8.

Uzdevums 0.7 (BW.TST.2017.7): Uz lapas viens aiz otra augošā secībā bez atstarpēm uzrakstīti visi sešciparu naturālie skaitļi no 100000 līdz 999999. Kāda ir lielākā k vērtība, kurai šajā virknē vismaz divās dažādās vietās iespējams atrast vienu un to pašu k-ciparu skaitli?

Uzdevums 0.8 (BW.TST.2017.8): Šaha turnīrā piedalījās 2017 šahisti, katrs ar katru izspēlēja tieši vienu šaha partiju. Sauksim šahistu trijotni A, B, C par principiālu, ja A uzvavrēja B, B uzvarēja C, bet C uzvarēja A. Kāds ir lielākais iespējamais principiālu šahistu trijotņu skaits?

2017. gada 24. septembris, Rīga (2. diena)

Uzdevums 0.9 (BW.TST.2017.9): Vienādsānu trijstūrī ABC, kurā $AC = BC$ un $\sphericalangle ABC < 60°$, I un O ir attiecīgi ievilktās un apvilktās riņķa līniju centri. Trijstūrim BIO apvilktā riņķa līnija vēlreiz krusto malu BC punktā D. Pierādīt, ka

1. taisnes AC un DI ir paralēlas,
2. taisnes OD un IB ir perpendikulāras.

Uzdevums 0.10 (BW.TST.2017.10): Šaurleņķa trijstūra ABC, kuram $AC < AB$, apvilktās riņķa līnijas rādiuss ir R, tās loka BC (kurš nesatur A) viduspunkts ir S. Uz augstuma AD pagarinājuma atlikts punkts T tā, ka D atrodas starp A un T un $AT = 2R$. Pierādīt, ka $\sphericalangle AST = 90°$.

Uzdevums 0.11 (BW.TST.2017.11): Uz trijstūra ABC bisektrises AL pagarinājuma atlikts punkts P tā, ka $PL = AL$. Pierādīt, ka trijstūra PBC perimetrs nepārsniedz trijstūra ABC perimetru.

Uzdevums 0.12 (BW.TST.2017.12): Šaurleņķa trijstūrim ABC apvilktajai riņķa līnijai ω novilkts diametrs AK, uz nogriežņa BC izvēlēts patvaļīgs punkts M, taisne AM krusto ω punktā Q. Perpendikula, kas no M vilkts pret AK, pamats ir D, pieskare, kas riņķa līnijai ω novilkta caur punktu Q, krusto taisni MD punktā P. Uz ω izvēlēts punkts L (atšķirīgs no Q) tā, ka PL ir ω pieskare. Pierādīt, ka punkti L, M un K atrodas uz vienas taisnes.

Uzdevums 0.13 (BW.TST.2017.13): Pierādīt, ka skaitlis

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$$

ir racionāls visiem naturāliem n.

Uzdevums 0.14 (BW.TST.2017.14): Vai var atrast trīs naturālus skaitļus a, b, c, kuru lielākais kopīgais dalītājs ir 1 un kuriem izpildās vienādība

$$ab + bc + ac = (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)?$$

Uzdevums 0.15 (BW.TST.2017.15): Ciparu virkni $D = d_{n-1}d_{n-2}\dots d_0$ sauksim par stabilu skaitļa nobeigumu, ja jebkuram naturālam skaitlim m, kas beidzas ar D, arī jebkura tā naturāla pakāpe m^k beidzas ar D. Pierādīt, ka katram naturālam n ir tieši četri stabili skaitļa nobeigumi, kuru garums ir n.

Uzdevums 0.16 (BW.TST.2017.16): Virknes $a_1, a_2, \dots, a_{2016}$ un $b_1, b_2, \dots, b_{2016}$ katra satur visus naturālos skaitļus no 1 līdz 2016 katru tieši vienu reizi (citiem vārdiem sakot tās abas ir skaitļu $1, 2, \dots, 2016$ permutācijas). Pierādīt, ka var atrast tādus dažādus indeksus i un j, ka $a_ib_i - a_jb_j$ dalās ar 2017.