Decimālpieraksts

Sacensības #2021.03

2021-03-25

Par šo LU NMS atbalstīto pasākumu
atbild kalvis.apsitis@gmail.com.

Uzdevums 3.1: Ar n apzīmēts mazākais naturālais skaitlis, kas dalās ar 56 un kura decimālpierakstā ir tikai cipari 0 vai 3. Atrast šo n.
Jautājums: Ierakstīt atbildē naturālu skaitli.

Uzdevums 3.2: Sakārtotu pāri (k, m) ar nenegatīviem veseliem skaitļiem sauksim par vienkāršu, ja, saskaitot k un m stabiņā, nerodas pārnesumi. Atrast, cik ir vienkāršu pāru (k, m), kuriem summa $k + m = 1492$.
Jautājums: Ierakstīt atbildē naturālu skaitli – sakārtotu pāru kopskaitu ar aprakstīto īpašību.

Uzdevums 3.3: Katram naturālam skaitlim n apzīmējam ar $f(n)$ tā ciparu kvadrātu summu. Atrast vērtību $f^{2021}(123456789)$, kur $f^2(n) = f(f(n))$, $f^3(n) = f(f(f(n)))$; un $f^{2021}(n)$ apzīmē funkcijas pielietošanu 2021 reizi.
Jautājums: Ierakstīt atbildē naturālu skaitli, $f^{2021}(123456789)$ vērtību.

Uzdevums 3.4: Pieņemsim, ka n ir naturāls skaitlis un d ir cipars (no 0 līdz 9). Atrast n, ja zināms, ka

$$\frac{n}{810} = 0.d25d25d25... = 0.(d25)$$

ir bezgalīga periodiska daļa.
Jautājums: Ierakstīt atbildē naturālu skaitli n.

Uzdevums 3.5: Apzīmēsim ar A racionālo skaitļu apakškopu. Racionāls skaitlis $r \in A$ tad un tikai tad, ja $0 < r < 1$ un

$$r = 0.abcabcabc... = 0.(abc)$$

tātad r izsakāms kā bezgalīga decimāldaļa ar periodu 3 cipari (a, b, c - starp tiem var būt arī vienādi cipari), bet bez priekšperioda.
Ja visus kopas A elementus uzraksta kā nesaīsināmas daļas, cik dažādi skaitītāji ir visām šīm daļām kas pieder A?
Jautājums: Ierakstīt naturālu skaitli: dažādo skaitītāju skaitu, kas iespējami daļām $p/q = r$, kur $r \in A$.

Uzdevums 3.6: Katram naturālam skaitlim n ar $p(n)$ apzīmējam visu nenulles ciparu reizinājumu skaitlī n. (Ja skaitlī n ir tikai viens cipars, tad $p(n) = n$.). Aprēķinām

$$S = p(1) + p(2) + ... + p(999).$$

Atrast skaitļa S lielāko pirmreizinātāju.
Jautājums: Ierakstīt atbildē lielāko pirmskaitli, ar kuru dalās S.

Uzdevums 3.7: Atrast mazāko naturālo k ar īpašību, ka $16^k \equiv 1 \pmod{41}$.
Jautājums: Ierakstīt atbildē mazāko naturālo kāpinātāju k, kuram 16^k dod atlikumu 1, dalot ar 41.

Uzdevums 3.8: Heksadecimālajā sistēmā (ar bāzi $B = 16$) lieto šādus ciparus:

$$\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{2}, \mathtt{3}, \mathtt{4}, \mathtt{5}, \mathtt{6}, \mathtt{7}, \mathtt{8}, \mathtt{9}, \mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C}, \mathtt{D}, \mathtt{E}, \mathtt{F}.$$

Piemēram, cipara $\mathtt{F}_{16}$ vērtība ir 15 (decimāli), bet cipara $\mathtt{A}_{16}$ vērtība ir 10 (decimāli). Skaitlis $\mathtt{FFF}_{16}$ apzīmē $15 \cdot B^2 + 15 \cdot B + 15 = 15 \cdot 256 + 15 \cdot 16 + 15 = 4095$.
Heksadecimālajā sistēmā var pierakstīt arī daļskaitļus. Piemēram,

$$\mathtt{0.AA}_{16} = 10 \cdot B^{-1} + 10 \cdot B^{-2} = 10 \cdot \frac{1}{16} + 10 \cdot \frac{1}{16^2} = 0.6640625.$$

$$\mathtt{0.0F0F0F\ldots}_{16} = \mathtt{0.(0F)}_{16} = 15 \cdot \left(\frac{1}{256}\right) + 15 \cdot \left(\frac{1}{256}\right)^2 + \ldots = \frac{1}{17}.$$

(Summēšanai izmanto bezgalīgu ģeometrisko progresiju.)
Atrast perioda ciparus skaitļa 1/41 heksadecimālajā pierakstā (šeit skaitlis 41 pierakstīts decimāli).
Jautājums: Ierakstīt atbildē perioda ciparus skaitlim 1/41 (bez nulles, punkta vai iekavām). Teiksim, 1/17 gadījumā atbilde būtu `0F`.

Uzdevums 3.9: Skaitli r var uzrakstīt kā decimāldaļu ar četriem cipariem aiz komata: $0.abcd$, kur a, b, c, d ir jebkuri cipari (ieskaitot 0 un arī vienādus ciparus).
Katru šādu r cenšamies tuvināt ar parastu daļskaitli $\dfrac{1}{n}$ vai $\dfrac{2}{n}$ (tātad daļu, kuras skaitītājā ir 1 vai 2).
Izrādījās, ka skaitlim r tuvākā daļa ar šo īpašību ir $\frac{2}{7}$. Cik ir dažādas iespējamās vērtības skaitlim r?
Jautājums: Ierakstīt atbildē naturālu skaitli - dažādo r vērtību skaitu.

Uzdevums 3.10: Naturālam skaitlim n ar $S(n)$ apzīmējam tā ciparu summu, bet ar $T(n)$ apzīmējam izteiksmi $T(n) = |S(n+2) - S(n)|$. Piemēram, $T(2019) = |S(2021) - S(2019)| = |5 - 12| = 7$.
Cik daudzas no funkcijas $T(n)$ iespējamajām vērtībām nepārsniedz 1999?

Uzdevums 3.11: Cik daudzām vērtībām k, $\text{MKD}(6^6, 8^8, k) = 12^{12}$?
($\text{MKD}(a, b, c)$ apzīmē mazāko kopīgo dalāmo naturāliem skaitļiem a, b, c.)
Jautājums: Ierakstīt atbildē iespējamo k vērtību skaitu.

Uzdevums 3.12: Cik daudziem naturāliem skaitļiem $n < 1000$ lielums $\lfloor \log_2 n \rfloor$ ir pāra skaitlis? (Šeit $\log_2 n$ apzīmē logaritmu ar bāzi 2; un $\lfloor x \rfloor$ ir veselā daļa – lielākais veselais skaitlis, kas nepārsniedz x.)