Skaitļu teorija
ATV

Uzdevumu lapa #4

2021-01-27

Turpmākajos uzdevumos, iespējams, nepieciešams lietot matemātisko indukciju ar induktīvās hipotēzes pastiprināšanu. Tas nozīmē, ka uzdevumā pierādāmo apgalvojumu tīšām pārraksta nedaudz "stiprāku", lai varētu normāli veikt induktīvo pāreju.
Sk. diskusiju `https://bit.ly/3o3OBOA`.

Uzdevums 101.39: Pierādīt, ka jebkuram naturālam skaitlim n eksistē tāds naturāls skaitlis m, kuram

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^n = \sqrt{m}-\sqrt{m-1}.$$

Uzdevums 101.40: Pierādiet, ka eksistē bezgalīgi daudz naturālu skaitļu n, kuriem skaitlis 2^n+2 dalās ar n.

Uzdevums 101.41: Pierādiet, ka eksistē bezgalīgi daudz naturālu skaitļu n, kuriem skaitlis $n!$ dalās ar n^2+1.

Uzdevums 101.42: Dots nepāra pirmskaitlis p un veseli skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$, kuri nedalās ar p. Pierādiet, ka, aizstājot dažus no šiem skaitļiem ar pretējiem, var iegūt $p-1$ skaitļus, kuru summa dalās ar p.

Uzdevums 101.43: Doti tādi naturāli skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ka $a_k \leq k$, un visu šo n skaitļu summa ir pāra skaitlis. Pierādiet, ka, aizvietojot dažus no tiem ar pretējiem, var iegūt n skaitļus, kuru summa ir 0.

Uzdevums 101.44: Doti veseli skaitļi $a_1 = 1, a_2, \ldots, a_n$, kuriem $a_i \leq a_{i+1} \leq 2a_i$ visiem $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Zināms, ka šo skaitļu summa ir pāra skaitlis. Pierādiet, ka šos skaitļus var sadalīt divās grupās tā, ka skaitļu summas abās grupās ir vienādas.

Uzdevums 101.45: Pierādiet, ka jebkuram naturālam skaitlim s vienādojumam

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_s}=1$$

eksistē galīgs, lielāks par nulli, atrisinājumu skaits.

Uzdevums 101.46: Kurš no skaitļiem

$$\underbrace{2^{3^{2^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}}_{n \text{ simboli}} \quad \text{un} \quad \underbrace{3^{2^{3^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}}_{n \text{ simboli}}$$

ir lielāks?

Uzdevums 101.47: Pierādiet, ka jebkuram naturālam skaitlim n eksistē naturāls skaitlis, kuru var uzrakstīt kā divu kvadrātu summu tieši n dažādos veidos. (Izteiksmes a^2+b^2 un b^2+a^2 uzskatīsim par vienādām).

Uzdevums 101.48: Dota virkne $a_1 \in \mathbf{N}$, $a_{n+1} = a_n + 2^{a_n}$, ja $n \geq 1$. Pierādiet, ka šajā virknē ir bezgalīgi daudz locekļu, kuri

(a) nedalās ar 3,

(b) dalās ar 3.

Uzdevums 101.49: Kādiem naturāliem skaitļiem n visi skaitļi

$$C_n^2, C_n^2, \ldots, C_n^n$$

ir nepāra skaitļi?

Piezīme. Ar C_n^k apzīmē kombināciju skaitu pa k no n, t.i. $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Uzdevums 101.50: Dota funkcija $f(x,y)$, kura definēta visiem nenegatīviem pozitīviem skaitļiem. Dots, ka visiem nenegatīviem pozitīviem skaitļiem x un y izpildās vienādības

(a) $f(0,y) = y+1$,

(b) $f(x+1,0) = f(x,1)$,

(c) $f(x+1,y+1) = f(x, f(x+1,y))$.

Aprēķināt vērtību $f(4,1980)$.

Uzdevums 101.51: Funkcija $f(x)$ definēta veselām pozitīvām x vērtībām, un tās vērtības arī ir veseli pozitīvi skaitļi. Zināms, ka vienlaikus ir spēkā šādas trīs īpašības:

(1) $f(1) < f(2) < f(3) < \cdots < f(n) < f(n+1) < \cdots$ t.i., funkcija $f(x)$ ir stingri augoša;

(2) $f(985) = 1985$;

(3) ja veseliem pozitīviem skaitļiem m un k lielākais kopīgais dalītājs ir 1, tad $f(m \cdot k) = f(m) \cdot f(k)$.

Aprēķināt

(a) $f(1000)$;

(b) $f(3599)$;

(c) $f(n)$ patvaļīgam pozitīvam n.

Uzdevums 101.52: Ar a_n apzīmējam to dažādo veidu skaitu, kuros n var izsacīt kā tādu saskaitāmo summu, kas nepieņem citas vērtības kā $1; 3; 4$. Pieļaujamas arī summas, kas sastāv no viena saskaitāmā. Veidus, kas atšķiras tikai ar saskaitāmo kārtību, uzskatām par dažādiem. Piemēram, $a_1 = 1$; $a_2 = 1$; $a_3 = 2$; $a_4 = 4$. Pierādīt: ja n – pāra skaitlis, tad a_n ir naturāla skaitļa kvadrāts.