Igaunijas 7.-9.kl. uzdevumi ar matemātiskās indukcijas elementiem

Uzdevums 1.1 (EE.PK.1993.9.5): Rindā izvietotas n ārēji atšķirīgas figūriņas. Ir atļauts mainīt vietām jebkuras divas figūriņas, starp kurām atrodas tieši viena cita figūriņa. Vai ar šādiem pārvietojumiem var visas figūriņas pārlikt secībā, kura ir pretēja sākotnējai? Pamatot atbildi.

Uzdevums 1.2 (EE.PK.1994.9.1): Atrast koeficientu a_{50} šādā identitātē:

$$\left(1 + x + \ldots + x^{100}\right)\left(1 + x + \ldots + x^{25}\right) = 1 + a_1 x + \ldots + a_{125} x^{125}.$$

Uzdevums 1.3 (EE.PK.1995.7.3): Kādā 20-stāvu ēkā lifts sabojāts tādā veidā, ka ar to var uzbraukt vai nu 8 stāvus uz augšu, vai arī 11 stāvus uz leju (ja uz augšu vai uz leju nav tik daudz stāvu, tad attiecīgajā virzienā lifts nepārvietojas).

(a) Vai ar liftu var no 20. stāva nobraukt uz pirmo?

(b) Uz kuriem stāviem var ar šo liftu aizbraukt no pirmā stāva?

(*Sk. arī LV.AO.2013.5.2.*)

Uzdevums 1.4 (EE.PK.1998.7.TEST.5): Skaitļi izkārtoti rindās tā, kā parādīts zīmējumā. Kāds skaitlis atrodas devītās rindas vidū?

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 1 & 2 & 3 & & & \\
 & & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & & \\
 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & \\
16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24
\end{array}$$
$$25 \; 26 \; \ldots$$

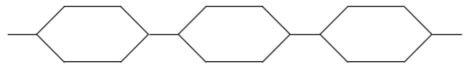
Uzdevums 1.5 (EE.PK.2001.8.TEST.5): Naturālie skaitļi, sākot no 1, izvietoti trijstūrveida tabulā, kuras pirmās četras rindas redzamas zīmējumā. Par cik skaitlis, kurš 17.rindā ir pirmais no kreisās, ir mazāks par to skaitli, kurš 19.rindā ir pirmais no labās?

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 2 & & 3 & & \\
 & 4 & & 5 & & 6 & \\
7 & & 8 & & 9 & & 10 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

Uzdevums 1.6 (EE.PK.2001.8.TEST.5): Naturālos skaitļus no 1 līdz 2001 raksta tabulā, kura sastāv no septiņām kolonnām, kā attēlots zīmējumā. Ar kādu burtu apzīmēta kolonna, kurā ierakstīs skaitli 2001?

A	B	C	D	E	F	G
1		2		3		4
	5		6		7	
8		9		10		11
	12		13		14	

Uzdevums 1.7 (EE.PK.2003.9.4): Zīmējumā attēlota dzelzceļa mezgla shēma. No kreisās puses uz labo tam tuvojas 8 lokomotīves, kuras var virzīties pa šo ceļu tikai no kreisās uz labo pusi. Parādīt, kā var pārkārtot lokomotīves šajā dzelzceļa mezglā tā, lai tās labajā pusē izbrauktu secībā, kas ir pretēja sākotnējai. (Katrs ceļa posms šajā mezglā ir pietiekami garš, lai vajadzības gadījumā tur novietotos visas lokomotīves.)



Uzdevums 1.8 (EE.PK.2004.9.4): Marija un Juris spēlē sekojošu spēli uz laukuma, ko veido n rūtiņu virkne ($n > 2$). Katram spēlētājam ir viena figūriņa, abas figūriņas spēles sākumā novietotas spēles laukuma abos galos. Vienā gājienā spēlētājs pārvieto savu figūriņu par vienu vai divām rūtiņām jebkurā virzienā. Uzvar tas spēlētājs, kurš novieto savu figūriņu uz tās rūtiņas, kurā atrodas pretinieka figūriņa. Kādām n vērtībām Marijai ir uzvaroša stratēģija; pie kādām n vērtībām Jurim ir uzvaroša stratēģija.

Uzdevums 1.9 (EE.PK.2005.9.4): Doti 2005 veseli skaitļi. Burvis Merlins spēlē šādu spēli. Vienā gājienā viņš izvēlas 7 skaitļus, un katru izvēlēto skaitli (neatkarīgi no citiem izvēlētajiem) palielina par 1 vai reizina ar -1. Pierādīt, ka pēc galīga gājienu skaita Merlins var visus 2005 skaitļus pārvērst par nullēm.

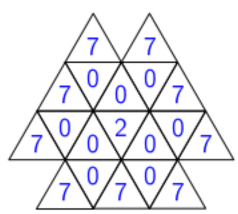
Uzdevums 1.10 (EE.PK.2006.9.TEST.4): Atrast izteiksmes vērtību:

$$1 + \frac{100}{2006} - \frac{101}{2006} + \frac{102}{2006} - \frac{103}{2006} + \ldots,$$

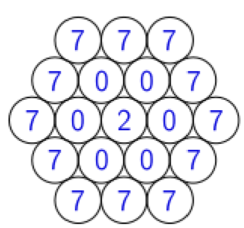
ja izteiksme satur 1003 zīmes ``$+$" un 1003 zīmes ``$-$".

Uzdevums 1.11 (EE.PK.2006.9.4): Katrs Brīnumzemes iedzīvotājs vai nu vienmēr runā patiesību, vai arī vienmēr melo. Reiz visus Brīnumzemes iedzīvotājus sadalīja pa pāriem un katrs no viņiem pateica par savu pāra kaimiņu "Viņš melo" vai arī "Viņš saka patiesību". Vai varēja gadīties, ka abi šie apgalvojumi tika izteikti vienādu skaitu reižu, ja Brīnumzemē ir **(a)** 2004 iedzīvotāji?
(b) 2006 iedzīvotāji?

Uzdevums 1.12 (EE.PK.2007.7.TEST.6): Cik dažādos veidos var izveidot skaitli 2007, sākot ar zīmējumā attēloto trijstūrīti, kurā ir cipars 2 un katrā solī pārvietojoties no viena trijstūrīša uz citu, kuram ar iepriekšējo ir kopīga mala?



Uzdevums 1.13 (EE.PK.2007.8.TEST.6): Cik dažādos veidos var izveidot skaitli 2007, ja zīmējumā redzamajā figūrā sāk ar aplīti, kurā ir cipars 2 un katrā solī pārvietojas uz citu aplīti, kas pieskaras iepriekšējam?

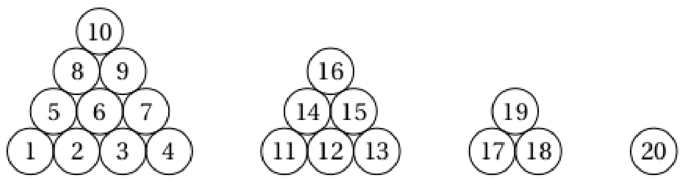


Uzdevums 1.14 (EE.PK.2007.9.TEST.6): Cik dažādos veidos var izveidot skaitli 2007, sākot ar kvadrātiņu, kurā ir skaitlis 2 un katrā solī pārvietojoties uz citu kvadrātu, kuram ar iepriekšējo ir kopīga mala vai kopīga virsotne?

7	7	7
0	0	7
2	0	7

Uzdevums 1.15 (EE.PK.2008.9.3): Rūtiņu laukumā 8×8 daļa no rūtiņām iekrāsotas melnas, bet pārējās – baltas. Katrā solī izvēlas vienu rūtiņu; tad taisnstūrī, kura kreisais augšējais stūris ir visa 8×8 laukuma stūris, bet labais apakšējais stūris ir izraudzītā rūtiņa, nomaina visu rūtiņu krāsojumu uz pretējo. Vai ar šādiem soļiem no jebkura sākotnējā krāsojuma var sasniegt stāvokli, kurā visas rūtiņas ir baltas?

Uzdevums 1.16 (EE.PK.2011.7.TEST.10): Marija salikusi uz galda kaudzīti ar 20 mandarīniem trijstūra piramīdas veidā. Pirmos 10 mandarīnus viņa liek uz galda tā, kā parādīts kreisajā zīmējumā, virs tiem viņa liek slāni no 6 mandarīniem (katrs no kuriem balstās uz trim mandarīniem no zemāk esošā slāņa), un tā tālāk.



Mandarīnus var no kaudzītes paņemt pa vienam. Bet nevar paņemt mandarīnu, kurš pieskaras tādam mandarīnam, kurš atrodas augstāk. Kāds mazākais skaits mandarīnu no kaudzītes jāpaņem, pirms radīsies iespēja dabūt mandarīnu **(a)** ar numuru 6? **(b)** ar numuru 4? **(c)** ar numuru 7?

Uzdevums 1.17 (EE.PK.2011.9.3): Skaitļiem x un y pieraksts $x * y$ apzīmē skaitli $\dfrac{x+y}{xy+4}$. Atrast izteiksmes vērtību:

$$0 * (1 * (2 * (3 * (4 * (5 * (6 * (7 * (8 * 9))))))))$$

Uzdevums 1.18 (EE.PK.2017.7.1): Virknē uzrakstīti 7 naturāli skaitļi, no kuriem pirmais ir a un ir b. Katrs nākamais skaitlis šajā virknē vienāds ar divu to virknes skaitļu summu, kuri uzrakstīti tieši pirms viņa.

(a) Atrast pēdējo skaitli šajā virknē, izsakot to ar a un b.

(b) Atrast lielāko iespējamo skaitļa a vērtību, ja zināms, ka pēdējais skaitlis virknē ir 2017.

Uzdevums 1.19 (EE.PK.2017.9.4): Uz rūtiņu laukuma 8×8 daļa rūtiņu nokrāsotas baltas, bet pārējās melnas. Vienā gājienā var izvēlēties jebkuru taisnstūri ar izmēru 2×3 vai 3×2, kura malas sakrīt ar rūtiņu līnijām, un pārkrāsot visas melnās rūtiņas baltas un visas baltās rūtiņas melnas. Vai jebkuram sākotnējam krāsojumam ar minētajiem gājieniem var iegūt tādu laukumu, kurā visas rūtiņas ir melnas?

Lietuvas 5.-8.kl. uzdevumi ar matemātiskās indukcijas elementiem

Uzdevums 1.20 (LT.58.1999.5to7.4): Karlsonam un Brālītim ir parasta šokolādes tāfelīte ar izmēriem 1999×1999 kvadrātiņi, ko atdala iespiestas rieviņas. Karlsons jebkurā tāfelītes vietā drīkst izlauzt sev šokolādes gabaliņu ar izmēriem 2×2 kvadrātiņi, bet Brālītis sev - tikai gabaliņu ar izmēriem 1×1 (visām lauzuma vietām jāiet pa rieviņām). Viņi lauž pārmaiņus, pirmais lauž Karlsons. Ja kāds no viņiem vairs nevar aprakstītajā veidā izlauzt kvadrātiņu, tad visa pārpalikusī šokolāde tiek otrajam. Vai var kāds no lauzējiem lauzt tā, ka viņam tiktu vairāk nekā puse no visas šokolādes, lai kā arī lauztu otrs.

Uzdevums 1.21 (LT.58.2003.7to8.1): Cik ir piecciparu skaitļu, ko var pierakstīt tikai ar cipariem ``2" un ``5" (ne obligāti abiem), turklāt nekādi divi cipari ``2" neatrodas blakus? Bet cik ir tādu desmitciparu skaitļu?

Uzdevums 1.22 (LT.58.2005.5to6.2): Uz četrām vienā plaknē atzīmētām taisnēm atzīmējiet 6 punktus tā, lai uz katras taisnes būtu pa 3 atzīmētiem punktiem.

Uzdevums 1.23 (LT.58.2005.7to8.1): Vai uz vienas plaknes piecām taisnēm atzīmēt kopumā 10 punktus tā, ka uz katras no piecām taisnēm būtu pa 4 atzīmētajiem punktiem?

Uzdevums 1.24 (LT.58.2008.5to6.3): Ikreiz, ieraugot skaitli, kurā ir divas pēc kārtas sekojošas nulles, Toms satrūkstas. Sestdienās, kad viņiem ir pietiekami laika, Džeris izraksta skaitļu virknes un rūpīgi skaita Toma satrūkšanās reizes.

(a) Pirmajā sestdienā Džeris izrakstīja visu skaitļu virkni no 000 līdz 999 un saskaitīja, cik reizes satrūkās Toms. Kādu skaitli Džeris ieguva?

(b) Otrajā sestdienā Džeris izrakstīja visu skaitļu virkni no 0000 līdz 9999 un vēl rūpīgāk saskaitīja, cik reizes satrūkās Toms. Kādu skaitli tagad ieguva Džeris?

(c) Trešajā sestdienā Džeris jau izrakstīja virknē skaitļus no 00000 līdz 99999 un vēlreiz rūpīgi saskaitīja, cik reizes satrūkās Toms. Cik reizes viņš satrūkās tagad?

Uzdevums 1.25 (LT.58.2011.5to6.3): Ēzelītis Dainius bija vecs un uzticams zirga Dominika draugs un vienmēr mēdza nest Dominikam kādus neredzētus uzdevumus, kurus no sākuma Dominiks pārāk netiecās risināt. Bet, sācis risināt, Dominiks ļoti piktojās, ja viņam neizdevās tos kaut kā pabeigt. Šodien atnācis, ēzelītis Dainius izvilka no kabatas 16 salipušus burtu un skaitļu pārus:

$$a1, a2, a3, a4, b1, b2, b3, b4, c1, c2, c3, c4, d1, d2, d3, \text{un } d4.$$

un ņēmās mudināt Dominiku uzrakstīt tos salipušos pārus pa vienam katrā tabulas 4×4 lodziņā tā, lai katrā tabulas rindiņā un katrā šīs tabulas stabiņā būtu pa vienai reizei sastopami gan visi četri burti a, b, c, d, gan visi četri skaitļi $1, 2, 3, 4$.
Dominiks ne ļoti tic, ka to var izdarīt, bet ēzelītis Dainius saka, ka to vajadzētu varēt kaut vai tādēļ, ka tāda tabula ļoti skaisti izskatītos - padomājiet tik: nevienā rindiņā un nevienā stabiņā nekādi burti un skaitļi neatkārtojas. Ar ko beigsies šī pāru ierakstīšana?

Uzdevums 1.26 (LT.58.2014.5to6.2): 9 elektriskās spuldzītes ir izkārtotas ``kvadrātiskā veidā" (režģī 3×3). Izglītotais Miškas zina, ka ikvienai spuldzītei ir divi pretēji stāvokļi: Stāvoklis "IE" un stāvoklis "IZ". Zaķītis Mikas Paikutis vai cits pilnvarots zvēriņš var spiest ar ķepu uz jebkuras spuldzītes. Pēc spuldzītes nospiešanas, tās stāvoklis "mainās uz pretējo": Ja līdz nospiešanai spuldzīte bija stāvoklī "IE", tad pēc spiešanas tā būs stāvoklī "IZ", un otrādi; bez tam, uz pretējo stāvokli pēc nospiešanas pāriet arī visas citas spuldzītes attiecīgajā rindiņā un attiecīgajā stabiņā.
Sākumā visas 9 spuldzītes bija stāvoklī "IE". Kāds ir vismazākais spuldzīšu nospiešanu skaits, ko jāveic zaķītim Mikam Paikutim, lai visas spuldzītes nonāktu stāvoklī "IZ". (Atbilžu varianti: 3, 4, 5, 9, "to nevar izdarīt".)

Uzdevums 1.27 (LT.58.2014.7to8.5): Meža vidū stāv liela tāfele, pie kuras rosās 85 Zaķi, kuri ko prot, ko ne, bet viņi visi raksta skaitļus ``gaismas ātrumā". Kā stāv rakstīts, viņi dzīvo pašā Mācītā Meža vidū pie neiedomājama lieluma tāfeles, uz kuras pēc kārtas uzrakstīti visi veselie skaitļi no 1 līdz 2150.
Katrā minūtē cits Zaķis, sākot ar 1. un beidzot ar 85.zaķi pagūst veikt ar šiem skaitļiem sekojošu darbību: Ja skaitlis dalās ar 100, tad to izdala ar 100, bet ja skaitlis ar 100 nedalās, tad no tāda skaitļa atņem 1. Pēc tam visus agrākos skaitļus nodzēš un to vietā ieraksta iegūtos rezultātus (atceramies, ka visus 2150 skaitļus var nomainīt minūtes laikā - un tā dara katrs zaķis). Kāds skaitlis būs lielākais no visiem uz tāfeles uzrakstītajiem, kad savas izmaiņas būs beidzis pēdējais, 85.zaķis vārdā Mīkoliņš?

Uzdevumi no "Diskrētās matemātikas" mācību grāmatām

Sākumtekstos veikti labojumi, lai uzdevumi atbilstu olimpiāžu stilam.

Uzdevums 1.28 (SusannaEpp.Ch5.P32): (a) 5×5 kvadrātam izgriezta kaut kāda viena rūtiņa. Kurām izgrieztajām rūtiņām atlikušo kvadrātu var sagriezt L formas trimino figūriņās? Kuriem nevar? Pamatojiet savu atbildi.

(b) Kādos gadījumos L formas trimino var sagriezt kvadrātus $n \times n$ (Šeit $n > 5$ ir patvaļīgs skaitlis, kas nedalās ar 3).

Uzdevums 1.29 (SusannaEpp.Ch5.P35): Pa apli kaut kādā secībā sarakstīti veseli skaitļi no 1 līdz 30 katrs tieši vienu reizi.

(a) Vai noteikti atradīsies trīs pēc kārtas uzrakstīti skaitļi, kuru summa ir vismaz 45?

(b) Vai noteikti atradīsies trīs pēc kārtas uzrakstīti skaitļi, kuru summa ir mazāka par 45?

Uzdevums 1.30 (SusannaEpp.Ch5.P40): Dots šaha galdiņš ar izmēriem $2n \times 2n$ rūtiņas, kur n ir jebkurš naturāls skaitlis. Tā rūtiņas izkrāso pārmaiņus melnas un baltas - tā, lai katrām divām rūtiņām ar kopīgu malu būtu atšķirīgs krāsojums. Pēc tam no šaha galdiņa izgriež kaut kādas divas rūtiņas - vienu baltu un otru melnu. Pierādīt, ka atlikušo figūru varēs sagriezt taisnstūrīšos 1×2, griežot pa rūtiņu līnijām.

Uzdevums 1.31 (Rosen2019.Ch5.P38): Pieņemsim, ka valstī starp katrām 2 pilsētām A un B eksistē lidmašīnu satiksme vienā virzienā (vai nu no A uz B, vai arī no B uz A). Pierādīt, ka eksistē pilsēta, kurā var nokļūt no jebkuras citas pilsētas vai nu ar tiešu avioreisu vai arī ar vienu pārsēšanos.

Uzdevums 1.32 (Rosen2019.Ch5.P44): Racionālus skaitļus formā p/q vēlamies izteikt kā vairāku daļu $1/n$ summu, kam skaitītāji ir vienādi ar 1, bet daļu saucēji visi ir atšķirīgi. Piemēram, $5/7 = 1/2 + 1/5 + 1/70$.

(a) Pierādīt, ka jebkuru racionālu skaitli var izteikt kā $1/n_1 + 1/n_2 + \ldots + 1/n_k$, kur $k \geq 1$ un visi n_i ir dažādi.

(b) Atrast mazāko dažādu saskaitāmo $1/n$ skaitu, lai izteiktu F_m/F_{m+1}, kur F_m ir m-tais Fibonači skaitlis. Fibonači virkni definē šādi: $F_1 = F_2 = 1$, bet katru nākamo iegūst, saskaitot divus iepriekšējos virknes locekļus (t.i. virkne ir $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$). Izsakāmie racionālie skaitļi ir $F_2/F_1 = 1/1$, $1/2$, $2/3$, $3/5$, $5/8$, $8/13$, $13/21$ utt.

Uzdevums 1.33 (Rosen2019.Ch5.P49): Pierādīt, ka n riņķa līnijas sadala plakni $n^2 - n + 2$ apgabalos, ja katras divas riņķa līnijas krustojas tieši divos punktos un nekādām trim riņķa līnijām nav kopīga punkta.