Uzdevums 25.2 (Pagrieziena matricas)

Uzdevums 25.2 Plaknē dots trijstūris $\triangle ABC$ ar virsotnēm $A = A(x_A, y_A)$, $B = B(x_B, y_B)$, and $C = C(x_C, y_C)$.

1. Pieņemsim, ka $\triangle ABC$ ir vienādmalu un divām virsotnēm A, B ir veselas koordinātes ($x_A, y_A, x_B, y_B \in \mathbf{Z}$). Pierādīt, ka tad $\triangle ABC$ laukums ir iracionāls. (Laukuma mērvienība ir vienas rūtiņas jeb vienības kvadrātiņa laukums.)

2. Pieņemsim, ka visām virsotnēm A, B, C koordinātes ir veseli skaitļi. Pierādīt, ka šajā gadījumā $\triangle ABC$ laukums ir racionāls skaitlis.

3. Vai $\triangle ABC$ var būt vienādmalu trijstūris un visu virsotņu A, B, C koordinātes ir racionāli skaitļi?

Ieteikums. Apakšpunktā **(B)** var izmantot Pīka teorēmu: `https://bit.ly/39m3qXH`.

(A)
Pierādījums: Apzīmēsim malas AB garumu $|AB|$ ar a. Tā kā x_A, y_A, x_B, y_B ir visi veseli, tad arī

$$|AB|^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 \in \mathbf{Z}.$$

(Šī vienādība seko no Pitagora teorēmas.) Zināms arī, ka vienādmalu trijstūra laukums, ja malas garums ir a ir vienāds ar

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a^2 \sin 60^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}. \tag{1}$$

Ievērosim, ka $\sqrt{3}$ ir iracionāls skaitlis.
Lai to pamatotu, pieņemsim, ka $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, kas ir nesaīsināma daļa un p, q ir divi naturāli skaitļi, savstarpēji pirmskaitļi. Tad, kāpinot kvadrātā, $3q^2 = p^2$ un iegūstam, ka p^2 dalās ar 3. Tāpēc p arī dalās ar 3 un to var izteikt $p = 3k$ kādam citam naturālam skaitlim k.
Tad $3q^2 = (3k)^2 = 9k^2$ jeb $q^2 = 3k^2$. Iegūstam arī, ka q^2 dalās ar 3. Tātad p un q abi dalās ar 3; tas ir pretrunā ar pieņēmumu, ka ir nesaīsināma daļa, kas vienāda ar $\sqrt{3}$.

Pamatosim arī, ka reizinot racionālu skaitli $r \neq 0, r \in \mathbf{Q}$ ar iracionālu skaitli $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, reizinājums ir iracionāls.
Pieņemsim no pretējā, ka $r \cdot \alpha = r_1$, kur r_1 ir racionāls skaitlis. Šajā gadījumā var izteikt $\alpha = r_1/r$, un tas būtu racionāls, kā divu racionālu skaitļu dalījums. Tas ir pretrunā ar pieņēmumu, ka α ir iracionāls.

Atgriežamies pie vienādojuma (1).
$S_{\triangle ABC}$ ir reizinājums racionālam $\frac{a^2}{4} = \frac{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}{4}$ ar iracionālu skaitli $\sqrt{3}$. To reizinājumam jābūt iracionālam. ■

(B)
Pierādījums: Pieņemsim, ka $\triangle ABC$ visas koordinātes ir veseli skaitļi. Izmantosim Pīka teorēmu: Tā kā ABC ir vienkāršs daudzstūris (tā iekšienē nav caurumu un malas cita citu nekrusto), tad tā laukums ir $S_{\triangle ABC} = i + \frac{b}{2} - 1$, kur i ir iekšējo punktu skaits ar veselām koordinātēm (turpmāk sauktas “rūtiņu virsotnes”), un b ir “rūtiņu virsotņu” skaits uz figūras robežas. Tāpēc laukums šādam trijstūrim vienmēr būs vai nu vesels skaitlis vai vesels skaitlis plus $1/2$. Tādēļ tam vienmēr jābūt racionālam.
Ja nevēlaties izmantot Pīka teorēmu, apvelciet pa rūtiņu līnijām taisnstūri ap ABC. Taisnstūrim ir vesels laukums, un $S_{\triangle ABC}$ var iegūt, atņemot no tā dažu taisnleņķa trijstūru laukumus (ar

abām veselām katetēm).
Attēls 1 parāda abas metodes, kā rēķināt laukumu. Pēc Pīka teorēmas šajā piemērā:

$$S_{\triangle ABC} = 16 + \frac{4}{2} - 1 = 17.$$

Atņemot pelēkos trijstūrus:

$$S_{\triangle ABC} = S_{CKLM} - S_{CKA} - S_{ALB} - S_{BMC} = 42 - \frac{7 \cdot 4}{2} - \frac{2 \cdot 5}{2} - \frac{6 \cdot 2}{2} = 17.$$

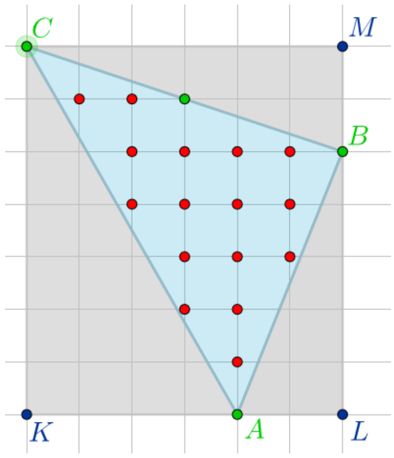

Figure 1: Trijstūris ABC ar visām veselu skaitļu virsotnēm.

(C)
Apgalvojums. Neeksistē vienādmalu trijstūris ABC ar visām racionālām koordinātēm.
Pierādījums. Pieņemsim, ka vienādmalu trijstūrim $\triangle ABC$ visu virsotņu koordinātes x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C in $\mathbf{Q}$ ($\mathbf{Q}$ ir racionālo skaitļu kopa). Visiem sešiem skaitļiem ir saucēji – apzīmējam tos ar $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$. Pareizināsim visas ABC koordinātes ar $q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 \cdot q_5 \cdot q_6$. Pēc pārveidojuma (homotētija ar centru koordinātu sākumpunktā) trijstūris joprojām ir vienādmalu, bet tā visu virsotņu koordinātes ir jau veseli skaitļi.
Kā uzzinājām apakšpunktā **(A)**, $\triangle ABC$ ar veselām koordinātēm laukums ir iracionāls. Bet saskaņā ar **(B)**, trijstūra $\triangle ABC$ laukumam jābūt racionālam, jo visas tā virsotnes ir veseli skaitļi. Laukums $S_{\triangle ABC}$ nevar būt vienlaikus racionāls un iracionāls. Iegūta pretruna un tātad šāds trijstūris neeksistē. ■

Par pagrieziena matricām
Šī piebilde nav vajadzīga uzdevuma risināšanā, bet ir svarīga tiem, kuri apgūst lineāro algebru un matricas. Ir iespējams uzzīmēt trijstūrus, kam visas virsotnes ir veseli skaitļi un kas ir ļoti "tuvi" vienādmalu trijstūriem (bet nav vienādmalu). Sk. Attēlu 2 – tajā punkti $A(0;0)$ un $B(15,4)$, un $C(4,15)$ visi ir ar veselām koordinātēm.
Savukārt, ja mēģināsim iegūt trešo punktu C, pagriežot taisnes nogriezni AB pretēji pulksteņa rādītājiem par $60°$ ap punktu $A(0;0)$, tad C koordinātes var iegūt, izmantojot *pagrieziena matricu* (*Rotation matrix*; `https://bit.ly/3pc1c3F`).

$$\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}.$$

Aprēķināsim virsotnes C koordinātes, ievietojot $x_B = 15$, $y_B = 4$, un $\alpha = 60° = \frac{\pi}{3}$.

$$\begin{cases} x_C = x_B \cdot \cos\alpha - y_B \cdot \sin\alpha = 15 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4.035898384862247\ldots, \\ y_C = x_B \cdot \sin\alpha + y_B \cdot \cos\alpha = 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} = 14.990381056766578\ldots. \end{cases}$$

Šajā gadījumā C ir iracionālas koordinātes (pat ja šajā un līdzīgos piemēros var panākt, lai tās būtu cik patīk tuvu veseliem skaitļiem). Un trijstūra $\triangle ABC$ laukums ir iracionāls.

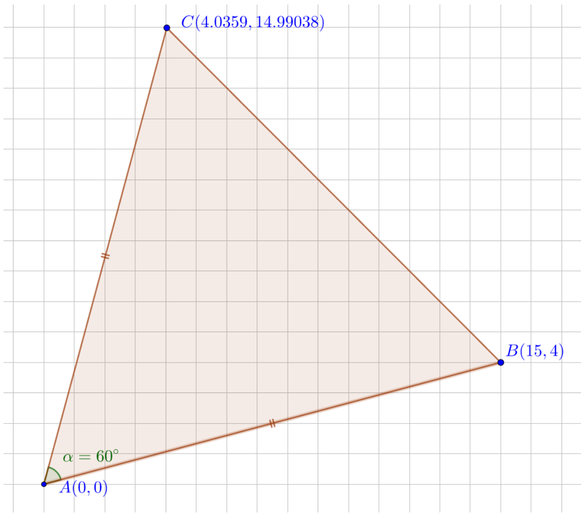

Figure 2: Vienādmalu $\triangle ABC$, kam C koordinātes noapaļotas līdz 5 cipariem.