7.-9.kl. uzdevumi ar matemātiskās indukcijas elementiem

Uzdevums 1.1 (EE.PK.1993.9.5): Rindā izvietotas n ārēji atšķirīgas figūriņas. Ir atļauts mainīt vietām jebkuras divas figūriņas, starp kurām atrodas tieši viena cita figūriņa. Vai ar šādiem pārvietojumiem var visas figūriņas pārlikt secībā, kura ir pretēja sākotnējai? Pamatot atbildi.

Uzdevums 1.2 (EE.PK.1994.9.1): Atrast koeficientu a_{50} šādā identitātē:

$$\left(1 + x + \ldots + x^{100}\right)\left(1 + x + \ldots + x^{25}\right) = 1 + a_1 x + \ldots + a_{125} x^{125}.$$

Uzdevums 1.3 (EE.PK.1995.7.3): Kādā 20-stāvu ēkā lifts sabojāts tādā veidā, ka ar to var uzbraukt vai nu 8 stāvus uz augšu, vai arī 11 stāvus uz leju (ja uz augšu vai uz leju nav tik daudz stāvu, tad attiecīgajā virzienā lifts nepārvietojas).

(a) Vai ar liftu var no 20. stāva nobraukt uz pirmo?

(b) Uz kuriem stāviem var ar šo liftu aizbraukt no pirmā stāva?

(*Sk. arī LV.AO.2013.5.2.*)

Uzdevums 1.4 (EE.PK.1998.7.TEST.5): Skaitļi izkārtoti rindās tā, kā parādīts zīmējumā. Kāds skaitlis atrodas devītās rindas vidū?

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & 1 & 2 & 3 & & & \\
 & & & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & & \\
 & & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & \\
 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\
25 & 26 & \ldots & & & & & & &
\end{array}$$

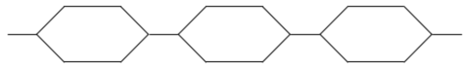
Uzdevums 1.5 (EE.PK.2001.8.TEST.5): Naturālie skaitļi, sākot no 1, izvietoti trijstūrveida tabulā, kuras pirmās četras rindas redzamas zīmējumā. Par cik skaitlis, kurš 17.rindā ir pirmais no kreisās, ir mazāks par to skaitli, kurš 19.rindā ir pirmais no labās?

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 2 & & 3 & & \\
 & 4 & & 5 & & 6 & \\
7 & & 8 & & 9 & & 10 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Uzdevums 1.6 (EE.PK.2001.8.TEST.5): Naturālos skaitļus no 1 līdz 2001 raksta tabulā, kura sastāv no septiņām kolonnām, kā attēlots zīmējumā. Ar kādu burtu apzīmēta kolonna, kurā ierakstīs skaitli 2001?

A	B	C	D	E	F	G
1		2		3		4
	5		6		7	
8		9		10		11
	12		13		14	

Uzdevums 1.7 (EE.PK.2003.9.4): Zīmējumā attēlota dzelzceļa mezgla shēma. No kreisās puses uz labo tam tuvojas 8 lokomotīves, kuras var virzīties pa šo ceļu tikai no kreisās uz labo pusi. Parādīt, kā var pārkārtot lokomotīves šajā dzelzceļa mezglā tā, lai tās labajā pusē izbrauktu secībā, kas ir pretēja sākotnējai. (Katrs ceļa posms šajā mezglā ir pietiekami garš, lai vajadzības gadījumā tur novietotos visas lokomotīves.)



Uzdevums 1.8 (EE.PK.2004.9.4): Marija un Juris spēlē sekojošu spēli uz laukuma, ko veido n rūtiņu virkne ($n > 2$). Katram spēlētājam ir viena figūriņa, abas figūriņas spēles sākumā novietotas spēles laukuma abos galos. Vienā gājienā spēlētājs pārvieto savu figūriņu par vienu vai divām rūtiņām jebkurā virzienā. Uzvar tas spēlētājs, kurš novieto savu figūriņu uz tās rūtiņas, kurā atrodas pretinieka figūriņa. Kādām n vērtībām Marijai ir uzvaroša stratēģija; pie kādām n vērtībām Jurim ir uzvaroša stratēģija.

Uzdevums 1.9 (EE.PK.2005.9.4): Doti 2005 veseli skaitļi. Burvis Merlins spēlē šādu spēli. Vienā gājienā viņš izvēlas 7 skaitļus, un katru izvēlēto skaitli (neatkarīgi no citiem izvēlētajiem) palielina par 1 vai reizina ar -1. Pierādīt, ka pēc galīga gājienu skaita Merlins var visus 2005 skaitļus pārvērst par nullēm.

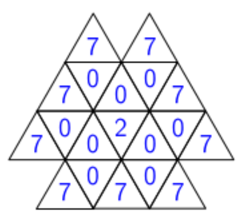
Uzdevums 1.10 (EE.PK.2006.9.TEST.4): Atrast izteiksmes vērtību:

$$1 + \frac{100}{2006} - \frac{101}{2006} + \frac{102}{2006} - \frac{103}{2006} + \ldots,$$

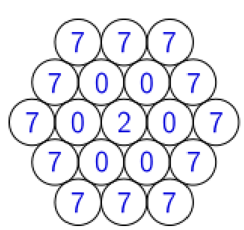
ja izteiksme satur 1003 zīmes ``$+$" un 1003 zīmes ``$-$".

Uzdevums 1.11 (EE.PK.2006.9.4): Katrs Brīnumzemes iedzīvotājs vai nu vienmēr runā patiesību, vai arī vienmēr melo. Reiz visus Brīnumzemes iedzīvotājus sadalīja pa pāriem un katrs no viņiem pateica par savu pāra kaimiņu "Viņš melo" vai arī "Viņš saka patiesību". Vai varēja gadīties, ka abi šie apgalvojumi tika izteikti vienādu skaitu reižu, ja Brīnumzemē ir **(a)** 2004 iedzīvotāji?
(b) 2006 iedzīvotāji?

Uzdevums 1.12 (EE.PK.2007.7.TEST.6): Cik dažādos veidos var izveidot skaitli 2007, sākot ar zīmējumā attēloto trijstūrīti, kurā ir cipars 2 un katrā solī pārvietojoties no viena trijstūrīša uz citu, kuram ar iepriekšējo ir kopīga mala?



Uzdevums 1.13 (EE.PK.2007.8.TEST.6): Cik dažādos veidos var izveidot skaitli 2007, ja zīmējumā redzamajā figūrā sāk ar aplīti, kurā ir cipars 2 un katrā solī pārvietojas uz citu aplīti, kas pieskaras iepriekšējam?

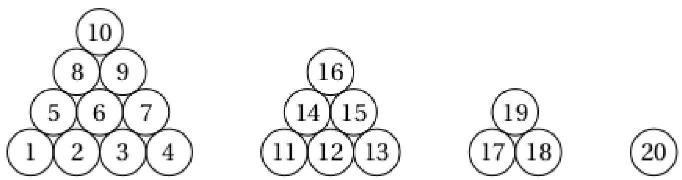


Uzdevums 1.14 (EE.PK.2007.9.TEST.6): Cik dažādos veidos var izveidot skaitli 2007, sākot ar kvadrātiņu, kurā ir skaitlis 2 un katrā solī pārvietojoties uz citu kvadrātu, kuram ar iepriekšējo ir kopīga mala vai kopīga virsotne?

7	7	7
0	0	7
2	0	7

Uzdevums 1.15 (EE.PK.2008.9.3): Rūtiņu laukumā 8×8 daļa no rūtiņām iekrāsotas melnas, bet pārējās – baltas. Katrā solī izvēlas vienu rūtiņu; tad taisnstūrī, kura kreisais augšējais stūris ir visa 8×8 laukuma stūris, bet labais apakšējais stūris ir izraudzītā rūtiņa, nomaina visu rūtiņu krāsojumu uz pretējo. Vai ar šādiem soļiem no jebkura sākotnējā krāsojuma var sasniegt stāvokli, kurā visas rūtiņas ir baltas?

Uzdevums 1.16 (EE.PK.2011.7.TEST.10): Marija salikusi uz galda kaudzīti ar 20 mandarīniem trijstūra piramīdas veidā. Pirmos 10 mandarīnus viņa liek uz galda tā, kā parādīts kreisajā zīmējumā, virs tiem viņa liek slāni no 6 mandarīniem (katrs no kuriem balstās uz trim mandarīniem no zemāk esošā slāņa), un tā tālāk.



Mandarīnus var no kaudzītes paņemt pa vienam. Bet nevar paņemt mandarīnu, kurš pieskaras tādam mandarīnam, kurš atrodas augstāk. Kāds mazākais skaits mandarīnu no kaudzītes jāpaņem, pirms radīsies iespēja dabūt mandarīnu **(a)** ar numuru 6? **(b)** ar numuru 4? **(c)** ar numuru 7?

Uzdevums 1.17 (EE.PK.2011.9.3): Skaitļiem x un y pieraksts $x * y$ apzīmē skaitli $\dfrac{x+y}{xy+4}$. Atrast izteiksmes vērtību:

$$0 * (1 * (2 * (3 * (4 * (5 * (6 * (7 * (8 * 9))))))))$$

Uzdevums 1.18 (EE.PK.2017.7.1): Virknē uzrakstīti 7 naturāli skaitļi, no kuriem pirmais ir a un ir b. Katrs nākamais skaitlis šajā virknē vienāds ar divu to virknes skaitļu summu, kuri uzrakstīti tieši pirms viņa.

(a) Atrast pēdējo skaitli šajā virknē, izsakot to ar a un b.

(b) Atrast lielāko iespējamo skaitļa a vērtību, ja zināms, ka pēdējais skaitlis virknē ir 2017.

Uzdevums 1.19 (EE.PK.2017.9.4): Uz rūtiņu laukuma 8×8 daļa rūtiņu nokrāsotas baltas, bet pārējās melnas. Vienā gājienā var izvēlēties jebkuru taisnstūri ar izmēru 2×3 vai 3×2, kura malas sakrīt ar rūtiņu līnijām, un pārkrāsot visas melnās rūtiņas baltas un visas baltās rūtiņas melnas. Vai jebkuram sākotnējam krāsojumam ar minētajiem gājieniem var iegūt tādu laukumu, kurā visas rūtiņas ir melnas?