Latvijas papildsacensības, Skaitļu teorija

Uzd. LV.TST.1976.9.3. Dots, ka n - naturāls skaitlis. Pierādīt, ka $3n + 2$ un $7n + 5$ ir savstarpēji pirmskaitļi.

Uzd. LV.TST.1976.10.3. Pierādīt, ka vienādojumam $x^2 - 6y^2 = 1$ ir bezgalīgi daudz atrisinājumu naturālos skaitļos.

Uzd. LV.TST.1976.11.5. Pierādīt, ka eksistē tikai galīgs skaits tādu naturālu skaitļu n, ka skaitļa 5^n ciparu summa ir mazāka par 1976^{1976}.

Uzd. LV.TST.1977.9.1. Atrisināt vienādojumu $x(x + 1) = 4y(y + 1)$ naturālos skaitļos.

Uzd. LV.TST.1977.10.2. $P(x)$ ir polinoms ar veseliem koeficientiem; a, b un c - dažādi veseli skaitļi. Dots, ka $P(a) = P(b) = P(c) = 1$. Pierādīt, ka vienādojumam $P(x) = 0$ nav atrisinājumu veselos skaitļos.

Uzd. LV.TST.1977.10.4. Pierādīt, ka katru naturālu skaitli x var bezgalīgi daudz veidos izsacīt formā

$$x = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \cdots \pm n^2$$

kur n, kā arī plus un mīnus zīmes kvadrātu priekšā izvēlas atkarībā no x.

Uzd. LV.TST.1977.11.4. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $x(x + 1) = p^{2n} \cdot y(y + 1)$, ja p – pirmskaitlis, n – naturāls skaitlis.

Uzd. LV.TST.1978.9.3. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $x^2 + 8z = 2y^2 + 3$.

Uzd. LV.TST.1978.10.3. Atrast pēc iespējas lielāku naturālu skaitli n ar šādu īpašību: naturālos skaitļus, no 1 līdz n ieskaitot, var sadalīt 2 grupās tā, ka neviena grupa nesatur aritmētisku progresiju ar četriem locekļiem.

Uzd. LV.TST.1978.10.5. Atrast visus naturālos skaitļus, kurus nevar izsacīt kā dažu (vairāk kā viena) pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu summu.

Uzd. LV.TST.1978.11.4. p ir pirmskaitlis, $p > 5$. Pierādīt, ka bezgalīga decimāldaļā $\frac{1}{p}$ perioda ciparu summa dalās ar 9.

Uzd. LV.TST.1979.9.1. Pierādīt, bezgalīgi daudziem pirmskaitļiem p var atrast tādus naturālus skaitļus x un y, ka $2x^2 + 2x + 1 = py$.

Uzd. LV.TST.1979.10.2. Pierādīt, ka eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka n^2+1 dalās ar 5^{1979}.

Uzd. LV.TST.1979.11.3. Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz naturālu skaitļu, kas nav izsakāmi kā 1979 naturālu skaitļu 1979-o pakāpju summas.

Uzd. LV.TST.1980.10.1. Cik dažādu skaitļu ir galīgā virknē

$$\left\lfloor \frac{0^2}{1980} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{1^2}{1980} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2^2}{1980} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{3^2}{1980} \right\rfloor, \ldots, \left\lfloor \frac{1979^2}{1980} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{1980^2}{1980} \right\rfloor?$$

Uzd. LV.TST.1981.9.2. Aplūkojam visus naturālos skaitļus no 1 līdz 2 000 000 ieskaitot. Izvēlēsimies no tiem kaut kādus 1 000 001 skaitļus. Pierādīt, ka starp izvēlētajiem skaitļiem noteikti atradīsies divi tādi, kas ir savstarpēji pirmskaitļi. Vai to noteikti var apgalvot, ja tiek izvēlēti 1 000 000 skaitļi?

Uzd. LV.TST.1981.11.3. a un b ir konstantes – naturāli skaitļi; $a > b$. Aplūkosim visus skaitļus, kas izsakāmi formā $ax + by$, kur $x \geq 0$ un $y \geq 0$ – veseli skaitļi. Dots, ka ir tieši 35 veseli pozitīvi skaitļi, kas nav izsakāmi šādā formā, un viens no tiem ir 58. Atrast a un b.

Uzd. LV.TST.1981.11.4. Ar $\lfloor x\rfloor$ apzīmējam lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz x. Izmantojot četru aritmētisko operāciju darbību zīmes, kā arī simbolus $\lfloor\ \rfloor$ un $\sqrt{\ }$, uzrakstīt vispārīgā locekļa formulu tādai skaitļu virknei (a_n), kas katru naturālu skaitli satur kā savu locekli bezgalīgi daudzas reizes. Vai var uzrakstīt tādu formulu, neizmantojot simbolu $\lfloor\ \rfloor$?

Uzd. LV.TST.1982.9.1. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^3 - y^3 - z^3 = 3xyz \\ x^2 = 2(y+z) \end{cases}$$

Uzd. LV.TST.1982.10.1. Skaitļa $1982^{1982}+1$ ciparu summa ir A. Skaitļa A ciparu summa ir B. Skaitļa B ciparu summa ir C. Skaitļa C ciparu summa ir D. Atrast D.

Uzd. LV.TST.1983.9.3. Dots, ka n-ciparu skaitlis $\overline{a_1a_2a_3\ldots a_{n-1}a_n}$, starp kura cipariem nav nuļļu, ir pirmskaitlis. Ne visi tā cipari ir vienādi. Pierādīt, ka visi n skaitļi

$$\overline{a_1a_2\ldots a_{n-1}a_n},\ \overline{a_2a_3\ldots a_{n-1}a_na_1},\ \overline{a_3\ldots a_{n-1}a_na_1a_2},\ \ldots,\ \overline{a_{n-1}a_na_1a_2\ldots a_{n-2}},\ \overline{a_na_1a_2\ldots a_{n-1}}$$

ir dažādi.

Uzd. LV.TST.1983.10.3. Par skaitļu virkni (x_n) dots, ka $x_1 = 0$ un katram naturālam n pastāv vienādība

$$x_{n+1} = 5x_n + \sqrt{24x_n^2+1}.$$

Pierādīt, ka visi šīs virknes locekļi ir veseli skaitļi.

Uzd. LV.TST.1983.11.4. Pierādīt, ka katram pirmskaitlim p var atrast tādus naturālus skaitļus x un y, ka x^2+y^2+1 dalās ar p.

Uzd. LV.TST.1984.9.1. Pierādīt, ka katrā augošā aritmētiskā progresijā ir bezgalīgi daudz skaitļu, kas nav vesela skaitļa pakāpes ar kāpinātāju, lielāku par 1.

Uzd. LV.TST.1984.10.5. Funkcija $f(x)$ ir stingri augoša, definēta naturālām argumenta vērtībām, tās vērtības ir naturāli skaitļi, $f(2) = 2$. Ja m un n ir tādi naturāli skaitļi, kuru lielākais kopīgais dalītājs ir 1, tad $f(m\cdot n) = f(m)\cdot f(n)$. Pierādīt, ka visiem x pastāv vienādība $f(x) = x$.

Uzd. LV.TST.1984.11.1. Ar kādu lielāko skaitu vienādu, no nulles atšķirīgu ciparu var beigties naturāla skaitļa kvadrāts?

Uzd. LV.TST.1985.9.1. Dots, ka a un b ir racionāli skaitļi, pie tam $a \neq 0$. Pierādīt, ka var atrast tādus četrus racionālus skaitļus (starp tiem var būt arī vienādi), kuru summa ir a, bet reizinājums ir b.

Uzd. LV.TST.1985.9.3. Pierādīt, ka katru naturālu skaitli, kas lielāks par 17, var izsacīt kā triju tādu naturālu skaitļu summu, no kuriem katriem diviem lielākais kopīgais dalītājs ir 1.

Uzd. LV.TST.1985.10.2. Skaitļu virkni (x_n) veido šādi:

(a) $x_1 = 1$;

(b) ja $k \geq 1$, tad x_{k+1} ir skaitļa $1985\cdot x_k$ ciparu summa.

Pierādīt, ka, sākot no kādas vietas, virkne (x_n) kļūst periodiska.

Uzd. LV.TST.1985.11.2. Pierādīt, ka eksistē 1985 pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi, no kuriem neviens nav naturāla skaitļa pakāpe, augstāka par pirmo.

Uzd. LV.TST.1986.9.3. Kādiem pirmskaitļiem p skaitlis 2^p+p^2 arī ir pirmskaitlis?

Uzd. LV.TST.1986.10.1. Naturālu skaitļu virkni $p_1, p_2, p_3, \ldots$ definē šādi: $p_1 = 2$; $p_2 = 3$; p_{n+1} ir lielākais pirmskaitlis, ar kuru dalās $p_1 p_2 p_3 \cdots p_n + 1$, $(n \geq 2)$. Pierādīt, ka šajā virknē nav skaitļa 5.

Uzd. LV.TST.1986.10.1. Dots, ka p -pirmskaitlis. Pierādīt, ka $2^p + 3^p$ nav naturāla skaitļa pakāpe ar kāpinātāju, lielāku par 1.

Uzd. LV.TST.1986.11.5. Doti 19 veseli skaitļi. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties tieši 10 skaitļus tā, ka visu izraudzīto skaitļu summa dalās ar 10.

Uzd. LV.TST.1987.9.5. Kaudzē $1,987,000\,000$ akmeņu. Ar vienu gājienu no kaudzes var paņemt p^k akmeņus, kur p -pirmskaitlis, bet $k = 0; 1; 2; 3; \ldots$ (piemēram, var ņemt 25, 1, 5, 8 utt.). Divi spēlētāji pēc kārtas izdara gājienus. Uzvar tas, kas paņem pēdējo akmeni. Kurš uzvar, pareizi spēlējot, – tas, kurš izdara pirmo gājienu, vai tas, kurš izdara otro gājienu?

Uzd. LV.TST.1987.10.3. Pierādīt, ka, lai kāda arī būtu konstante A, vienādojumam $x! - y^2 = A$ ir tikai galīgs skaits (varbūt neviena) atrisinājumu naturālos skaitļos.

Uzd. LV.TST.1987.11.3. Dots, ka

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots + \frac{1}{1984 \cdot 1985 \cdot 1986} = \frac{m}{n}$$

kur m un n -naturāli skaitļi. Pierādīt, ka m dalās ar 1987.

Uzd. LV.TST.1988.9.1. Vai piecu pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu reizinājums var būt naturāla skaitļa kvadrāts?

Uzd. LV.TST.1988.10.1. Kuram no naturāliem skaitļiem no 1 līdz 1988 ir vislielākais dalītāju skaits?

Uzd. LV.TST.1988.10.5. Skaitļu virkne definēta šādi: $a_1 = k$, k -naturāls skaitlis,

$$a_{n+1} = k\left(a_n + 1\right) + \left(k+1\right) a_n + 2\sqrt{k\left(k+1\right) a_n \left(a_n + 1\right)}, \text{ ja } n \geq 1.$$

Pierādīt, ka visi šīs virknes locekļi ir naturāli skaitļi.

Uzd. LV.TST.1988.11.1. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $5^x \cdot 7^y + 4 = 3^z$.

Uzd. LV.TST.1989.10.2. Dots, ka a, b un c ir naturāli skaitļi, kuru (visu triju) lielākais kopīgais dalītājs ir 1. Dots arī, ka

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}.$$

Pierādīt, ka $a + b$ ir naturāla skaitļa kvadrāts.

Uzd. LV.TST.1989.10.3. Reālu skaitļu virkni definē šādi: x_1 un x_2 izvēlas patvaļīgi, un

$$x_{n+2} = \frac{x_n x_{n+1}}{3x_n - 2x_{n+1}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Atrast visas iespējas, kā var izvēlēties x_1 un x_2, lai bezgalīgi daudzi virknes (x_n) locekļi būtu naturāli skaitļi.

Uzd. LV.TST.1989.11.3. Dots, ka a, b un c ir veseli skaitļi, kas atšķiras no nulles. Zināms, ka vienādojumam 1 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ nav atrisinājumu racionālos skaitļos (x, y, z). Pierādīt, ka vienīgais vienādojuma $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ atrisinājums veselos skaitļos ir $x = y = z = 0$.

Uzd. LV.TST.1990.9.5. Vai var atrast četrus tādus naturālus skaitļus, lai, katru divu reizinājumam pieskaitot 1990, iegūtu kaut kāda naturāla skaitļa kvadrātu?

Uzd. LV.TST.1990.10.2. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $7^x - 3 \cdot 2^y = 1$.

Uzd. LV.TST.1990.11.5. A ir bezgalīga naturālu skaitļu kopa. Katrs A elements ir ne vairāk kā 1990 dažādu pirmskaitļu reizinājums. Pierādīt, ka eksistē tāds skaitlis p un tāda kopas A bezgalīga apakškopa B, ka katru divu dažādu B elementu lielākais kopīgais dalītājs ir p.

Uzd. LV.TST.1991.10.3. Augoša aritmētiskā progresija sastāv no 12 naturāliem skaitļiem. Tās diference nepārsniedz 1991. Pierādīt, ka visi progresijas locekļi nevar vienlaicīgi būt pirmskaitļi.

Uzd. LV.TST.1991.12.5. Dots, ka $n_1, n_2, \ldots, n_k$ – naturāli skaitļi, pie tam $2^{n_1} - 1$ dalās ar n_2, $2^{n_2} - 1$ dalās ar n_3, …, $2^{n_{k-1}} - 1$ dalās ar n_k, $2^{n_k} - 1$ dalās ar n_1. Pierādīt, ka $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = 1$.

Uzd. LV.TST.1992.9.1. Dots, ka n - naturāls skaitlis un $n+1$ dalās ar 24. Pierādīt, ka skaitļa n visu naturālo dalītāju summa arī dalās ar 24.

Uzd. LV.TST.1992.10.1. Izsakiet skaitli 1992 kā naturālu skaitļu summu tā, lai to reizinājums būtu vislielākais iespējamais.

Uzd. LV.TST.1992.10.2. Kādiem naturāliem n vienādojumam

$$x^n + (2+x)^n + (2-x)^n = 0$$

ir vesela sakne?

Uzd. LV.TST.1992.10.4. Vai naturālos skaitļus no 1 līdz 1918 ieskaitot var sadalīt 4 daļās tā, lai neviena daļa nesaturētu 10 locekļu aritmētisku progresiju?

Uzd. LV.TST.1992.11.2. Pierādīt, ka, lai kāds būtu naturāls skaitlis a, vienādojumam

$$\left(a^2 - 1\right)\left(x^2 - 1\right) = \left(y^2 - 1\right)$$

eksistē vismaz 2 atrisinājumi naturālos skaitļos.

Uzd. LV.TST.1992.12.1. Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz naturālu skaitļu kvadrātu, kurus var iegūt, divas reizes pēc kārtas uzrakstot kādu naturālu skaitli.

Uzd. LV.TST.1992.12.3. Naturālu skaitļu virknes (a_n) locekļi apmierina nosacījumus

$$a_1 = 2,\ a_2 = 7,\ -\frac{1}{2} < a_{n+1} - \frac{a_n^2}{a_{n-1}} \leq \frac{1}{2},\ \text{ja } n \geq 2$$

Pierādīt, ka visi locekļi, sākot ar otro, ir nepāra skaitļi.

Uzd. LV.TST.1993.9-12.2. Dots naturāls skaitlis $a > 2$. Pierādīt, ka eksistē tikai galīgs skaits tādu naturālu n, ka $a^n - 1$ dalās ar 2^n.

Uzd. LV.TST.1994.9-12.1. Dots, ka x un y ir naturāli skaitļi un

$$3x^2 + x = 4y^2 + y.$$

Pierādīt, ka $x - y$, $3x + 3y + 1$ un $4x + 4y + 1$ ir naturālu skaitļu kvadrāti.

Uzd. LV.TST.1994.9-12.2. Vai var atrast tādus 2^{1994} dažādus naturālu skaitļu pārus (a_i, b_i), ka vienlaikus izpildās šādas prasības:

(1) $\dfrac{1}{a_1 b_1} + \dfrac{1}{a_2 b_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_{2^{1994}} b_{2^{1994}}} = 1;$

(2) $(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{1994}}) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_{2^{1994}}) = 3^{1995}.$

Uzd. LV.TST.1995.9-12.2. Naturālu skaitli sauksim par baltu, ja tas dod atlikumu 1, dalot ar 4, un par melnu, ja tas dod atlikumu 3, dalot ar 4. Pierādīt, ka katram naturālam n balto dalītāju nav mazāk nekā melno.

Uzd. LV.TST.1996.9-12.3. Atrast visus tādus pirmskaitļus p, ka $p \cdot \left(2^{p-1} - 1\right)$ ir naturāla skaitļa pakāpe, augstāka par pirmo, un pierādīt, ka citu bez atrastajiem nav.

Uzd. LV.TST.1996.9-12.5. Apskatām skaitļus $a_n = 3^n - 2^n$, $n = 1; 2; 3; \ldots$. Pierādīt, ka nekādi 3 šīs virknes locekļi a_m, a_n, a_k $(m < n < k)$ neveido ģeometrisku progresiju.

Uzd. LV.TST.1997.9-12.1. Dots, ka a un b - dažādi naturāli skaitļi. Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz tādu naturālu skaitļu n, ka $a + n$ un $b + n$ lielākais kopīgais dalītājs ir 1.

Uzd. LV.TST.1998.9-12.2. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu

$$p^x - y^p = 1,$$

ja p ir pirmskaitlis.

Uzd. LV.TST.1999.9-12.5. Skaitļu virkni $a_1, a_2, a_3, \ldots$ veido sekojoši: $a_1 = 99$; $a_{n+1} = a_n + p\left(a_n\right)$, kur ar $p(x)$ apzīmēts lielākais pirmskaitlis, ar kuru dalās x. Aprēķināt a_{1999}.

Uzd. LV.TST.2004.9-12.3. Skaitļu virkni $a_0, a_1, a_2, \ldots$ veido sekojoši:

$$a_0 = 1;\ a_1 = 1;\ a_{n+2} = 7a_{n+1} - a_n - 2 \text{ pie } n \geq 0.$$

Pierādīt, ka visi virknes locekļi ir naturālu skaitļu kvadrāti.

Uzd. LV.TST.2004.9-12.4. Dots, ka a un b ir naturāli skaitļi, bet p -pirmskaitlis, kas dod atlikumu 2, dalot ar 3. Dots, ka $a^2 + ab + b^2$ dalās ar p. Pierādīt, ka gan a, gan b dalās ar p.

Uzd. LV.TST.2005.9-12.3. Atrast visas naturālu skaitļu kopas S, kas vienlaicīgi apmierina sekojošas īpašības:

(i) S satur vismaz 3 elementus,

(ii) ja $n \in S$ un k ir skaitļa n naturāls dalītājs, tad arī $k \in S$,

(iii) ja $a \in S$, $b \in S$ un $1 < a < b$, tad $1 + ab \in S$.

Uzd. LV.TST.2006.9-12.1. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu

$$3^x = 2^x \cdot y + 1.$$

Uzd. LV.TST.2007.9-12.3. Dots, ka p -pirmskaitlis, $p > 2$, un $x^p + y^p$ dalās ar p (x, y - naturāli skaitļi). Pierādīt, ka $x^p + y^p$ dalās ar p^2.

Uzd. LV.TST.2008.9-12.3. Ar kādu vislielāko naturālu n vienādojumu sistēmai

$$(x+1)^2 + y_1^2 = (x+2)^2 + y_2^2 = \ldots = (x+n)^2 + y_n^2$$

eksistē atrisinājums veselos skaitļos?

Uzd. LV.TST.2009.9-12.1. Kādiem naturāliem skaitļiem m un n, kas abi lielāki par 1, skaitlis $n^3 - 1$ dalās ar $m \cdot n - 1$?

Uzd. LV.TST.2010.9-12.3. Atrast visas veselās x vērtības, kurām izteiksmes $\left|4x^3 - 20x^2 - 21x - 5\right|$ vērtība ir pirmskaitļa pakāpe.

Uzd. LV.TST.2011.9-12.1. Cik ir tādu naturālu skaitļu N, $1000 < N < 3000$, kurus nav iespējams izteikt kā divu vai vairāku secīgu naturālu skaitļu summu?

Uzd. LV.TST.2012.9-12.1. Ar $S(x)$ apzīmēsim skaitļa x ciparu summu. Aprēķināt $S(S(S(2012^{2012})))$.

Uzd. LV.TST.2012.9-12.2. Dotas divas virknes $x_1 = x_2 = 3$, $x_{n+2} = x_{n+1}^2 + x_n + 2$ visiem $n \geq 1$ un $y_1 = y_2 = 4$, $y_{n+2} = y_n y_{n+1} - 1$ visiem $n \geq 1$. Pierādīt, ka nav tāda naturāla skaitļa, kas pieder abām virknēm.

Uzd. LV.TST.2014.9-12.4. Pierādīt, ka vienādojumam $(a-b)^2 = 6ab + 7$ nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

Uzd. LV.TST.2015.9-12.3. Naturālus skaitļus x un y sauc par *draudzīgiem*, ja $xy + 1$ ir naturāla skaitļa kvadrāts. Piemēram, skaitļi 2 un 40 ir draudzīgi. Pierādīt: ja skaitļi a un b ir draudzīgi, tad eksistē tāds naturāls skaitlis c, ka vienlaikus a un c ir draudzīgi, un arī b un c ir draudzīgi.