Skaitļu teorija
ATV

Uzdevumu lapa #6

2021-02-10

Dirihlē principu (*Pigeonhole principle*) bieži var izmantot neapzināti. Vienkāršākajā formā to formulē šādi: "Ja n trusīšus jāizvieto $n-1$ būrīšos, tad kādā no būrīšiem atradīsies vismaz divi trusīši." Šis princips nepiedāvā nekādu metodi atrast šo būrīti (un svarīgi, ka trusīšu skaits tur ir *vismaz divi*, tātad varētu būt arī lielāks).
Tālāk dosim precīzus formulējumus vairākiem Dirihlē principa variantiem:

- Ja kopa no m elementiem ir sadalīta n grupās, un $n < m$, tad kādā no grupām ir ne mazāk kā divi elementi.
- Ja m-elementu kopā ir izvēlēti n elementi, un $n < m$, tad kopā ir vismaz viens elements, kurš atšķiras no izvēlētajiem elementiem.
- Ja kopa, kura satur vairāk kā mn elementus, ir sadalīta n grupās, tad kādā no grupām ir ne mazāk kā $m + 1$ elements.

Atlikumu salīdzināšana pēc moduļa.

Risinot tālākos uzdevumus, izmantosim faktu, ka atlikumu skaits pēc moduļa n ir vienāds ar n.

Uzdevums 102.1: Pierādiet, ka no patvaļīgiem trim veseliem skaitļiem var izvēlēties divus tā, ka to summa dalās ar 2.

Uzdevums 102.2: Pierādiet, ka patvaļīgiem veseliem skaitļiem reizinājums

$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

dalās ar 12.

Uzdevums 102.3: Pierādiet, ka no patvaļīgiem pieciem veseliem skaitļiem var izvēlēties tādus trīs, kuru summa dalās ar 3.

Uzdevums 102.4: Pierādīt: ja a, b, c ir veseli skaitļi, $n > 3$ ir naturāls skaitlis, tad eksistē tāds naturāls skaitlis k, ka neviens no skaitļiem $k + a$, $k + b$, $k + c$ nedalās ar n.

Uzdevums 102.5: Doti 12 dažādi divciparu skaitļi. Pierādiet, ka no tiem var izvēlēties 2 skaitļus, kuru starpība ir divciparu skaitlis, un kurš ir uzrakstāms ar diviem vienādiem cipariem.

Uzdevums 102.6: Pierādiet, ka no patvaļīgiem 5 naturāliem skaitļiem var izvēlēties 2 skaitļus tā, lai to kvadrāti dotu vienādus atlikumus pēc moduļa 7.

Uzdevums 102.7: Pierādīt: ja $a, a+d, a+2d, \ldots, a+(n-1)d$ ir savstarpēji pirmskaitļi ar skaitli n, tad skaitļi d un n nav savstarpēji pirmskaitļi.

Uzdevums 102.8: Doti 37 veseli skaitļi. Pierādīt, ka no tiem var atrast septiņus skaitļus, kuru summa dalās ar 7.

Uzdevums 102.9: Dots, ka x, y, z, t ir nepāra skaitļi. Pierādīt, ka reizinājums

$$(x-y)\cdot(x-z)\cdot(x-t)\cdot(y-z)\cdot(y-t)\cdot(z-t)$$

(a) dalās ar 64,

(b) dalās ar 256,

(c) dalās ar 768.

Uzdevums 102.10: Pierādīt, ka katram pirmskaitlim p var atrast tādus naturālus skaitļus x un y, ka $x^2 + y^2 + 1$ dalās ar p.

Uzdevums 102.11: Doti 19 veseli skaitļi. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties tieši 10 skaitļus tā, ka visu izraudzīto skaitļu summa dalās ar 10.

Skaitļu kombināciju salīdzināšana

Turpmākajos uzdevumos Dirihlē princips ir jāpielieto skaitļu pāriem, skaitļu virknēm un citām skaitļu kombinācijām.

Uzdevums 102.12: Plaknē doti pieci punkti ar veselām koordinātēm. Pierādiet, ka no tiem var izraudzīties divus punktus tā, ka nogrieznim, kura gala punkti atrodas šajos punktos, viduspunkta koordinātes ir veseli skaitļi,

Uzdevums 102.13: Telpā novietots izliekts daudzskaldnis tā, ka tā virsotnes atrodas punktos, kuru koordinātes ir veseli skaitļi. Daudzskaldņa iekšpusē, uz skaldnēm un šķautnēm nav citu punktu, kuru koordinātes ir veseli skaitļi. Pierādiet, ka daudzskaldnim ir ne vairāk kā 8 virsotnes.

Uzdevums 102.14: Izliekta 63-stūra virsotnēs uzrakstīti dažādi naturāli skaitļi, kuri nepārsniedz 1997. Pierādiet, ka atradīsies divas daudzstūra diagonāles, kuru galapunktos uzrakstīto skaitļu starpības ir vienādas.

Uzdevums 102.15: Pierādiet, ka no 10 patvaļīgiem dažādiem divciparu skaitļiem var izvēlēties divas dažādas nešķeļošas skaitļu grupas tā, ka skaitļu summas abās grupās ir vienādas.

Uzdevums 102.16: Dota tāda augošu naturālu skaitļu virkne (a_i), ka katrs naturāls skaitlis ir vai nu šīs virknes loceklis vai arī divu dažādu šīs virknes locekļu summa. Pierādīt, ka $a_n \leq n^2$ visiem naturāliem skaitļiem n.

Uzdevums 102.17: Pierādiet, ka katram naturālam skaitlim $n > 1$ eksistē tāds vesels skaitlis M, ka nekādiem veseliem skaitļiem x un y skaitlis $x^n + y^n - M$ nedalās ar n^2.

Uzdevums 102.18: Divdesmit četri studenti risināja 25 uzdevumus. Pasniedzējam ir tabula ar izmēriem 24×25, kurā ierakstīts kādus uzdevumus risinājis katrs students. Izrādījās, ka katru uzdevumu risināja vismaz viens students. Pierādiet, ka var atzīmēt dažus uzdevumus tā, ka katrs students risināja pāra skaitu atzīmēto uzdevumu.

Uzdevums 102.19: Šaha dēlīša 8×8 katrā rūtiņā ir ierakstīts naturāls skaitlis. Atļauts izdalīt patvaļīgu kvadrātu ar izmēriem 3×3 vai 4×4 un visus skaitļus, kas atrodas šajā kvadrātā, palielināt par 1. Atkārtoti izpildot šādas operācijas, mēs gribam panākt, lai visi rūtiņās ierakstītie skaitļi dalītos ar 10. Vai vienmēr to ir iespējams izdarīt?

Uzdevums 102.20: Doti naturāli skaitļi A, B, C, kas nepārsniedz 100. Pierādiet, ka eksistē trīs veseli skaitļi a, b, c, kas pēc moduļa nepārsniedz 18, visi vienlaicīgi nav vienādi ar 0, un kuriem izpildās vienādība $aA + bB + cC = 0$.

Uzdevums 102.21: Taisnstūris, kura izmēri ir 300×1000, sadalīts vienības kvadrātiņos. Patvaļīgās 30 kvadrātu virsotnēs novietotas vienādas lodes. Pierādīt, ka var izvēlēties nešķeļošu ložu grupas (ne vairāk kā 10 lodes katrā grupā) tā, ka to smaguma centri sakrīt.

Uzdevums 102.22: Doti 17 dažādi naturāli skaitļi; neviens no tiem nepārsniedz 25. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties divus tādus, kuru reizinājums ir vesela skaitļa kvadrāts.

Uzdevums 102.23: Naturāla skaitļa pierakstā nav nuļļu, un tas sastāv no 28 cipariem. Pierādīt, ka dažus tā ciparus var izsvītrot tā, lai pāri palikušie veidotu skaitli, kas dalās ar 101.

Uzdevums 102.24: Jānis sareizināja divus trīsciparu skaitļus. Vai var gadīties, ka visi cipari, kas ietilpst reizinātājos un reizinājumā, ir dažādi?

Uzdevums 102.25: Jānis raksta uz tāfeles skaitļus. Pirmais skaitlis ir 23, katrs nākošais ir divas reizes lielāks par iepriekšējo. (Tātad pirmie uzrakstītie skaitļi ir $23; 46; 92; 184; \ldots$.) Vai starp Jāņa uzrakstītajiem skaitļiem atradīsies divi tādi skaitļi, kuru pirmie cipari ir vienādi, otrie – arī vienādi, priekšpēdējie – arī vienādi? (Uzskatām, ka Jānis turpina rakstīšanu neierobežoti ilgi).

Uzdevums 102.26: Vai naturālos skaitļus

(a) no 1 līdz 12 ieskaitot,

(b) no 1 līdz 50 ieskaitot

var tā sadalīt pa pāriem, lai visas pāros ieejošo skaitļu summas būtu dažādas, un katra no tām būtu pirmskaitlis? (Piemēram, skaitļus no 1 līdz 6 varētu sadalīt tā: $1 + 2 = 3$, $3 + 4 = 7$, $5 + 6 = 11$).

Uzdevums 102.27: Sniegbaltīte uzrakstīja rindā kaut kādā kārtībā visus naturālos skaitļus no 1 līdz 7, katru skaitli tieši vienu reizi. To pašu izdarīja katrs no 7 rūķīšiem. Katrs rūķītis atrada, kurus skaitļus viņš uzrakstījis tajās pašās vietās (pirmajā, otrajā, trešajā, ...) kā Sniegbaltīte. Visiem rūķīšiem šādu skaitļu daudzumi izrādījās atšķirīgi. Vai var gadīties, ka neviens rūķītis neuzrakstīja skaitļus tieši tādā pašā kārtībā kā Sniegbaltīte?