Dž.Dudajeva gatve

ARITMĒTISKAS PROGRESIJAS

KURĀ NODAĻĀ ESAM?

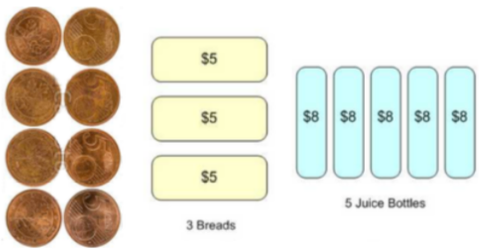
#1: Eksperimenti un pretpiemēri	**#9: Aritmētiskas progresijas**
#2: Mainīgo izteiksmes un pārveidojumi	#10: Ģeometriskas progresijas
#3: Algebriskas struktūras	#11: Rekurentas virknes
#4: Dalāmība un pirmreizinātāji	#12: Ekstrēmie elementi
#5: LKD, MKD un valuācijas	#13: Dirihlē princips
#6: Kongruences fiksētam modulim	#14: Invarianti un indukcija
#7: Pretrunas moduļa izvēle	#15: Nevienādības
#8: Decimālpieraksts	#16: Kombinatoriskas metodes

Kāpēc aritmētiskas progresijas saistītas ar veselu skaitļu dalāmību?

- Kāpēc progresijas locekļu skaits intervālā atkarīgs ne vien no intervāla garuma, bet arī no tā novietojuma?
- Kāpēc, dalot aritmētiskas progresijas locekļus ar skaitli, ne vienmēr rodas visi atlikumi?
- Kāpēc vienādojuma $ax + by = c$ atrisināšanai veselos skaitļos nepietiek ar skolas pamatkursa algebru?

Aritmētisku progresiju lietojumi

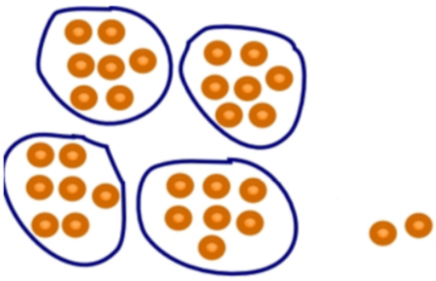
Pirkumi, maksājumi



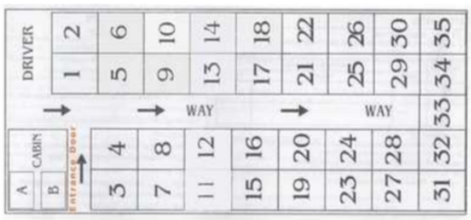
Daudzkārtņi

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80

Atlikumi, pēdējie cipari



Sēdvietas, telpas, datumi



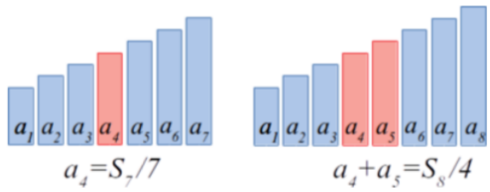
SASNIEDZAMIE REZULTĀTI (1-2)

1. Lietot skolas formulas par progresijām.
2. Izmantot S_n dalāmību ar n un vidējo locekli (attiecīgi ar $n/2$ un abu vidējo locekļu summu).
3. Novērtēt progresijas summas augšanu atkarībā no n.
4. Atrast, cik progresijas locekļu ir sākumintervālā un citos intervālos.
5. Aprakstīt progresiju $a \cdot k$ un $b \cdot k$ sakrītošos locekļus ar jaunu progresiju, kam $d = \mathrm{MKD}(a, b)$.
6. Izmantot izteiksmi dalījumam ar atlikumu.
7. Izmantot $\mathrm{LKD}(a_n, d)$ nemainību, ja n aug.
8. Atrast iespējamos atlikumus, dalot progresiju ar fiksētu skaitli.
9. Izmantot Bezū lemmu

(1) $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$:

```
S =  1 +  2   +...+(n-1)+ n
S =  n +(n-1)+...+  2  + 1
2S=(n+1)+(n-1)+...+(n+1)+(n+1)
```

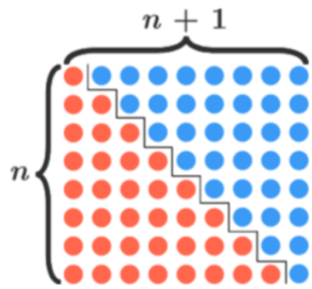
(2) 1 vidējais vai 2 vidējie:



Sasniedzamie rezultāti (3-4)

1. Lietot skolas formulas par progresijām.
2. Izmantot S_n dalāmību ar n un vidējo locekli (attiecīgi ar $n/2$ un abu vidējo locekļu summu).
3. Novērtēt progresijas summas augšanu atkarībā no n.
4. Atrast, cik progresijas locekļu ir sākumintervālā un citos intervālos.
5. Aprakstīt progresiju $a \cdot k$ un $b \cdot k$ sakrītošos locekļus ar jaunu progresiju, kam $d = \mathrm{MKD}(a, b)$.
6. Izmantot izteiksmi dalījumam ar atlikumu.
7. Izmantot $\mathrm{LKD}(a_n, d)$ nemainību, ja n aug.
8. Atrast iespējamos atlikumus, dalot progresiju ar fiksētu skaitli.
9. Izmantot Bezū lemmu

(3) Summa S_n kā laukums



(4) Skaitļu $7k$ (un $7k + a$) skaits intervālā:

Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Sasniedzamie rezultāti (5-7)

1. Lietot skolas formulas par progresijām.
2. Izmantot S_n dalāmību ar n un vidējo locekli (attiecīgi ar $n/2$ un abu vidējo locekļu summu).
3. Novērtēt progresijas summas augšanu atkarībā no n.
4. Atrast, cik progresijas locekļu ir sākumintervālā un citos intervālos.
5. Aprakstīt progresiju $a \cdot k$ un $b \cdot k$ sakrītošos locekļus ar jaunu progresiju, kam $d = \text{MKD}(a, b)$.
6. Izmantot izteiksmi dalījumam ar atlikumu.
7. Izmantot $\text{LKD}(a_n, d)$ nemainību, ja n aug.
8. Atrast iespējamos atlikumus, dalot progresiju ar fiksētu skaitli.
9. Izmantot Bezū lemmu

(5) $d = 3$ un $d = 4$ sakrītošie locekļi:

(6) Fiksētu atlikumu izteiksmes ar $a = bq + r$:

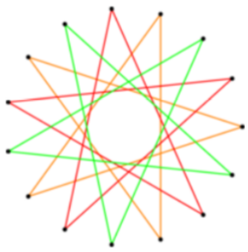
Pāru sk.	$2k$
Nepāru sk.	$2k + 1$
Beidzas ar "3"	$10k + 3$

(7) Skaitļi, kas dalās ar 2, bet nedalās ar 4:
Ja (a_k) ir $2, 6, 10, 14, 18, 22, \ldots$
tad visiem k: $\text{LKD}(a_k, 4) = 2$.

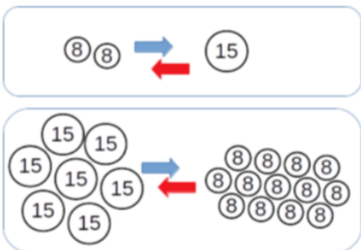
Sasniedzamie rezultāti (8-9)

1. Lietot skolas formulas par progresijām.
2. Izmantot S_n dalāmību ar n un vidējo locekli (attiecīgi ar $n/2$ un abu vidējo locekļu summu).
3. Novērtēt progresijas summas augšanu atkarībā no n.
4. Atrast, cik progresijas locekļu ir sākumintervālā un citos intervālos.
5. Aprakstīt progresiju $a \cdot k$ un $b \cdot k$ sakrītošos locekļus ar jaunu progresiju, kam $d = \text{MKD}(a, b)$.
6. Izmantot izteiksmi dalījumam ar atlikumu.
7. Izmantot $\text{LKD}(a_n, d)$ nemainību, ja n aug.
8. Atrast iespējamos atlikumus, dalot progresiju ar fiksētu skaitli.
9. Izmantot Bezū lemmu

(8) 15-staru zvaigznes zīmēšana:



(9) Kā ar 15 un 8 centu monētām samaksāt 1¢:



ARITMĒTISKAS PROGRESIJAS

ARITMĒTISKAS PROGRESIJAS SKOLĀ

Definīcija: Par *aritmētisku progresiju* sauc tādu virkni $a_1, a_2, \ldots$, kurā jebkuru blakusesošu locekļu starpība ir konstanta:

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad \text{ja} \quad n \geq 1.$$

Šo nākamā un iepriekšējā locekļa starpību d sauc par progresijas *diferenci* (*common difference, die Differenz, шаг*).

Progresiju formulas

Progresijas n-tais loceklis:

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad \text{kur } n > 1.$$

Progresijas pirmo n locekļu summa:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Šo summu var aprēķināt ar formulu:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Summa 1+2+…+n

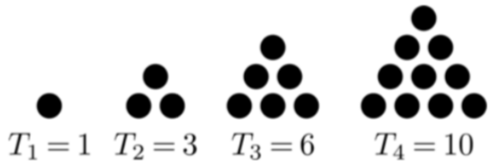
Bieži jāsummē naturālie skaitļi līdz n:

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

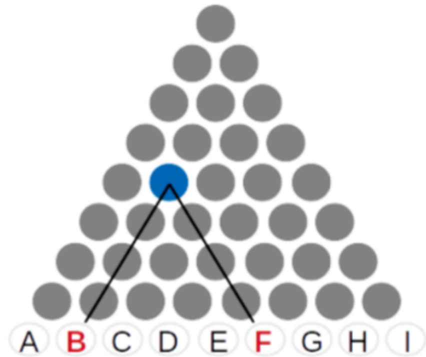
Lai gan polinoma $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ abi koeficienti ir daļskaitļi, visas tā vērtības ir naturāli skaitļi, jo reizinājums $n(n+1)$ vienmēr ir pāru.

Trijstūru skaitļi

Summai $1 + 2 + \ldots + n$ ir līdzība ar t.s. "trijstūru skaitļiem":



Trijstūru skaitlis T_n izsaka arī, cik veidos no $n + 1$ elementiem var izvēlēties divus: $T_n = C^2_{n+1}$.



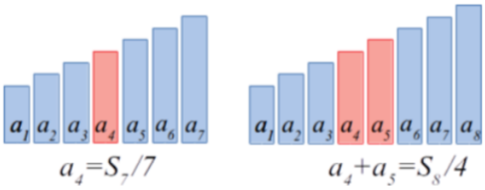
PROGRESIJAS SUMMAS DALĀMĪBA

Apgalvojums: Katrai aritmētiskai progresijai ar n veseliem locekļiem $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ir spēkā:

(a) Visu n locekļu aritmētiskais vidējais sakrīt ar vidējo locekli $a_{\frac{n+1}{2}}$, ja n ir nepāru un ar divu vidējo locekļu aritmētisko vidējo, ja n ir pāru.

(b) Summa $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ dalās ar n (ja n ir nepāru) un ar $n/2$, ja n ir pāru. Tā dalās arī ar vidējo locekli (attiecīgi - ar divu vidējo locekļu summu).

Piemēri: Progresiju summas



- *Ja n ir nepāru:* $S_7 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7$ dalās ar 7 un ar $a_4 = \frac{a_1 + a_7}{2}$.
- *Ja n ir pāru:*
  $S_8 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = \frac{a_1 + a_8}{2} \cdot 7$ dalās ar $n/2 = 4$ un ar $a_4 + a_5$: divkāršotu progresijas aritmētisko vidējo. (Ja n ir pāru, tad aritmētiskais vidējais var nebūt vesels.)

LV.NO.2015.10.3

Vairāku pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu summa ir 177. Kādas vērtības var pieņemt mazākais no šiem saskaitāmajiem?

LV.NO.2015.10.3

- Cik daudzu pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu summa noteikti pārsniedz 177?
- Kā samazināt aplūkojamo gadījumu skaitu? Vai ir vērts pārbaudīt summas, sākot ar jebkuru naturālu skaitli?

LV.NO.2015.10.3

- Ja n ir nepāru, tad $S_n = 177 = a_{vid} \cdot n$.
- Var būt $n = 3$ vai $n = 59$ (bet $1 + \ldots + 59 > 177$).

(A) $177 = 3 \cdot 59 = 58 + 59 + 60$.

- Ja n ir pāru, tad S_n dalās ar $n/2$.
- Var būt $n = 2$ vai $n = 6$ (jo $n = 2 \cdot 59$ ir par lielu).

(B) $177 = 2 \cdot 88\frac{1}{2} = 88 + 89$,

(C) $177 = 6 \cdot 29\frac{1}{2} = 27 + 28 + 29 + 30 + 31 + 32$.

KĀ AUG PROGRESIJAS SUMMA

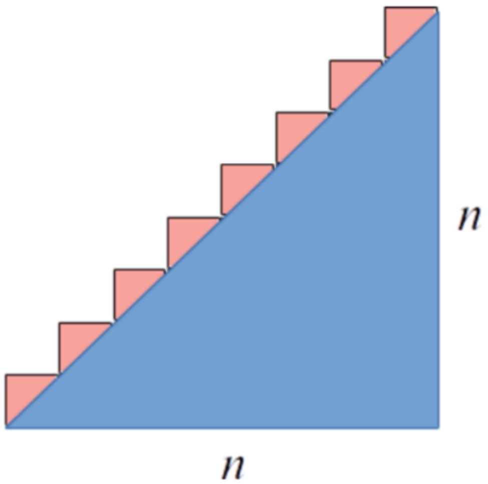
Apgalvojums: Ja a_n ir augoša aritmētiska progresija, tad tās summa S_n ir kvadrātfunkcija atkarībā no n.

Lai to pārbaudītu, pārveidojam:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n =$$

$$= \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n.$$

Tuvināšana ar trijstūra laukumu



- Progresijas summa aptuveni proporcionāla reizinājumam $n \cdot n = n^2$.
- Progresijas summa (mūsu zīmējumā: $\frac{n(n+1)}{2}$) nav precīzi vienāda ar trijstūra vai trapeces laukumu, jo ir jāpieskaita arī “zobiņu” laukums.

LV.NO.2002.8.3

Burtnīcā ir 100 lapas; tās lappuses sanumurētas dabīgā kārtībā ar numuriem no 1 līdz 200. Vai izrauto lappušu numuru summa var būt 1000, ja tiek izrautas

(a) 31 lapa;

(b) 30 lapas?

Piezīme. Lapas var neraut pēc kārtas.

LV.NO.2002.8.3

- Vai ir ekstrēma (lielākā/mazākā) vērtība, ko gribētu pārbaudīt?
- Izraujot 1 lapu, summai pievienojas divi lappušu nummuri. Kādas var būt šo abu lappušu numuru summas?

Atlikumi un nevienādības

(a) summa būtu nepāru. **(b)** trīsdesmit $4k_i - 1$ summa nedalītos ar 4.

Var pamatot arī ar nevienādību:
Jau $1 + \ldots + 60 > 1000$, tādēļ pat vismazāko lapu numuru summa ir par lielu.

Vienmērīgi paātrināta kustība

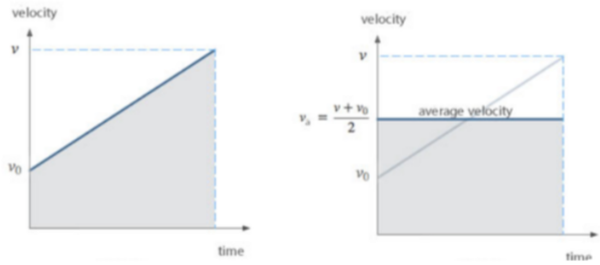
Apgalvojums: Ja materiāls punkts kustas ar sākotnējo ātrumu v_0 un paātrinājumu a, tad tā noietais ceļš iegūstams ar formulu, kas līdzīgi iepriekšējai ir kvadrātfunkcija no laika t:

$$s = vt + \frac{at^2}{2}.$$

Piezīme. Ja materiāls punkts sākumā ir nekustīgs ($v = 0$) un pēc tam brīvi krīt t sekundes ar paātrinājumu $g = 9.81\, m/s^2$, tad tā pārvietojums ir $\frac{gt^2}{2}$.

Vidējais ātrums

Līdzīgi kā aritmētiskas progresijas summa izmanto vidējo locekli, vienmērīgi paātrinātas kustības ceļu var atrast, izmantojot vidējo ātrumu.

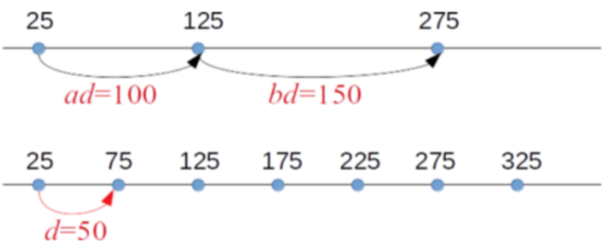


Brīvās krišanas paātrinājumam $g \approx 10\, m/s^2$:

- Pirmajā sekundē krīt $5\ m$,
- Otrajā sekundē krīt $15\ m$,
- Trešajā sekundē krīt $25\ m$, utt.

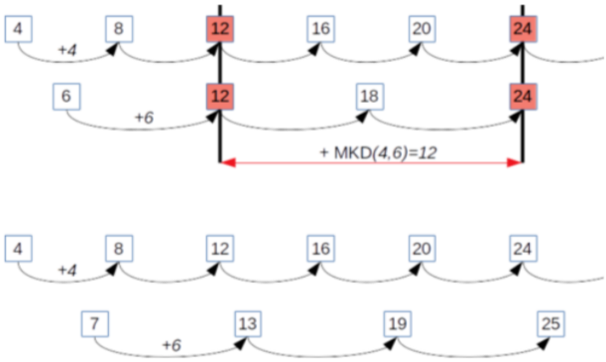
LIELĀKO DIFERENCI MEKLĒJOT (LKD)

Apgalvojums: Katrai augošai naturālu skaitļu virknei $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ atradīsies lielākais d, ka visi a_i pieder aritmētiskai progresijai ar diferenci d. Tas ir visu starpību $(a_i - a_j)$ lielākais kopīgais dalītājs.



Mazāko diferenci meklējot (MKD)

Apgalvojums: Divām aritmētiskām progresijām ar diferencēm d_1 un d_2 vai nu nav kopīgu locekļu, vai arī tie veido aritmētisku progresiju ar diferenci $\mathrm{MKD}(d_1, d_2)$
Piezīme. Ar $\mathrm{MKD}(a, b)$ apzīmējam divu skaitļu mazāko kopīgo dalāmo.



BBK2012.P1.36/LV.SO.2017.10.2

Trīs no aritmētiskās progresijas locekļiem ir $41, 113, 193$. Atrast lielāko iespējamo diferences vērtību, ja zināms, ka tā ir vesels skaitlis.

BBK2012.P1.36/LV.SO.2017.10.2

- Vai progresijas locekļi $41, 113, 193$ seko pēc kārtas?
- Kāda ir vienkārša aritmētiska progresija (ne obligāti ar lielāko diferenci), kas satur šos skaitļus?
- Vai diferenci var izvēlēties jebkādu? Kāda īpašība tai jāizpilda?

BBK2012.P1.36/LV.SO.2017.10.2

- Aplūkojam starpības $113 - 41 = 72, 193 - 113 = 80$.
- $\mathrm{LKD}(80, 72) = \mathrm{LKD}(72, 8) = \mathrm{LKD}(8, 0)$ (Eiklīda algoritms)
- Diference var būt 8 (vai kāds no 8 dalītājiem). Nevar būt lielāks par 8.

LOCEKĻU SKAITS INTERVĀLĀ

Apgalvojums: Intervālā $[1; n]$ ir tieši $\lfloor n/d \rfloor$ daudzkārtņu progresijai $a_k = k \cdot d$, $k \in \mathbb{N}$.

Piezīme. Ar $\lfloor x \rfloor$ apzīmē skaitļa x apakšējo veselo daļu: tas ir lielākais veselais skaitlis, kas nepārsniedz x. Piemēram, $\lfloor 2.4 \rfloor = 2$, $\lfloor -3.14 \rfloor = -4$.

Intervāli un progresijas

- Ja progresija ir $d, 2d, 3d, \ldots$, tad locekļu skaitu iegūst n/d noapaļojot **uz leju** - līdz tuvākajam veselajam skaitlim, kurš **nepārsniedz** n/d.
- Citos gadījumos drošāk atrast pirmo un pēdējo locekli.

Piemēri:

(A) $a_k = 5k$ ir $\lfloor 24/5 \rfloor = \lfloor 4.8 \rfloor$ jeb 4 locekļi intervālā $[1; 24]$

(B) $a_k = 2 + 5k$ pirmais loceklis intervālā $[1; 24]$ ir $a_0 = 2$, bet pēdējais ir $a_4 = 22$. To pavisam ir $(4 - 0) + 1$ jeb 5.

BBK2012.P1.123

Cik daudz ir tādu naturālu skaitļu $n \leq 1000$, kuri nedalās ne ar 5, ne ar 7?

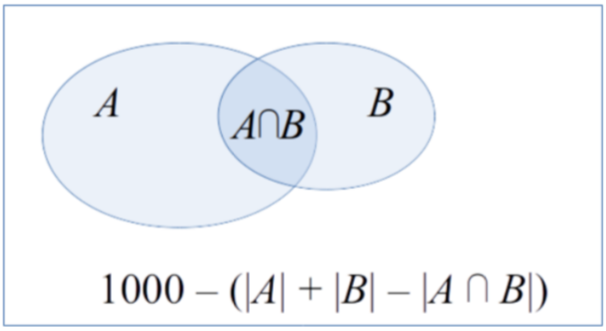
Ieteikumi

Stratēģija: Saskaitīt kaut ko citu.

- Cik ir skaitļu, kas dalās ar 5? Ar 7?
- Cik ir skaitļu, kas dalās ar abiem?
- Kā novērtēt aritmētisko progresiju locekļu skaitu $\mathbb{N}$ sākumintervālā $[1; 1000]$

Eilera-Venna diagramma

- Ar 5 dalās $|A| = \lfloor 1000/5 \rfloor = 200$ skaitļi.
- Ar 7 dalās $|B| = \lfloor 1000/7 \rfloor = 142$ skaitļi.
- Ar abiem dalās $|A \cap B| = \lfloor 1000/35 \rfloor = 28$ skaitļi.
- Visa zilā daļa ir $|A| + |B| - |A \cap B| = 314$.
- Ne ar 5, ne ar 7 nedalās $1000 - 314 = 686$.



DALĀMĪBA AR ATLIKUMU

Apgalvojums: Ja a ir vesels skaitlis, bet b ir naturāls skaitlis, tad var izteikt:

$$a = q \cdot b + r, \quad \text{kur } 0 \leq r < b.$$

$q \in \mathbb{Z}$ sauc par a un b dalījuma veselo daļu, bet r sauc par *atlikumu*.

Piemēri dalīšanai ar atlikumu

- Pāru skaitļus n var izteikt formā $2q$
- Nepāru skaitļus n var izteikt formā $2q + 1$
- Skaitļus, kuru decimālpieraksts beidzas ar ciparu “7” var izteikt formā $10q + 7$

LV.NO.2009.8.1

Tabulā (sk. zīmējumu) Katrīnai jāizvēlas 4 rūtiņas tā, ka katrā rindā un katrā kolonnā tika izvēlēta tieši viena rūtiņa. Pierādiet: neatkarīgi no tā, kuras 4 rūtiņas saskaņā ar šiem noteikumiem Katrīna izvēlēsies, tajās ierakstīto skaitļu summa būs 64.

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

LV.NO.2009.8.1

- "Katrā rindā un katrā kolonnā tika izvēlēta tieši viena rūtiņa" - Kuras šaha figūras neapdraudētu cita citu, ja tās šādi izvietotu?
- Cik veidos kvadrātā 4×4 var izvēlēties četras rūtiņas atbilstoši šim nosacījumam? (Ja veidu ir ļoti nedaudz - varbūt tos visus var pārbaudīt, tieši saskaitot?)
- Kāda īpašība saglabājas nemainīga/invarianta, neatkarīgi no tā, kā izvēlamies četras rūtiņas?

LV.NO.2009.8.1

Dalot ar atlikumu, piemēram, ar 8 katrs skaitlis a pārveidojas par summu $8k + r$, kur k ir dalījums un r - atlikums.

1	**3**	5	7
9	11	13	**15**
17	19	21	23
25	27	**29**	31

=

0	0	0	0
8	8	8	8
16	16	16	16
24	24	24	24

+

1	3	5	7
1	3	5	7
1	3	5	7
1	3	5	7

Neatkarīgi no rūtiņu izvēles pirmajā tabuliņā būs tieši pa vienam skaitlim no $\{0, 8, 16, 24\}$, bet otrajā pa vienam no $\{1, 3, 5, 7\}$. To visu summa ir $48 + 16 = 64$.

ARITMĒTISKAS PROGRESIJAS ATLIKUMI

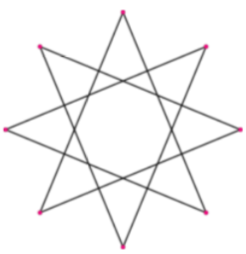
Apgalvojums: Ja (a_k) ir aritmētiska progresija ar diferenci d, m ir kaut kāds naturāls skaitlis, un $\mathrm{LKD}(d, m) = K$, tad progresija a_k pieņem m/K dažādus atlikumus, dalot ar m.

Piezīme: Atlikumi ik pēc m/K soļiem cikliski atkārtojas.
Ja diference d un dalītājs m ir savstarpēji pirmskaitļi, tad progresija pieņem visus m atlikumus.

Piemēri: Atlikumi ar 8

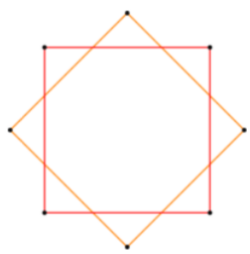
A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
0					5		
		10					15
				20			
	25					30	
			35				
40					45		

$\mathrm{LKD}(5, 8) = 1$, t.i. progresijai $5k$ ir visi atlikumi, dalot ar 8.



A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
0						6	
				12			
		18					
24						30	

$\mathrm{LKD}(6, 8) = 2$, t.i. progresijai $6k$ ir tikai $8/2 = 4$ atlikumi, dalot ar 8. Ja zīmē atlikumus pa apli (un savieno ik pēc 6 soļiem), rodas nevis zvaigznīte, bet divi cikli - sarkanais un oranžais.



BBK2012.P1.122/LV.VO.1983.8.1

Cik daudz ir tādu naturālu skaitļu $n \leq 1983$, kuriem $3n + 5$ dalās ar 7?

BBK2012.P1.122/LV.VO.1983.8.1

- Vai ir kaut viens skaitlis formā $3n + 5$, kas dalās ar 7?
- Ja kādai n vērtībai $3n + 5$ dalās ar 7, kura būs nākamā n vērtība, kurai dalīsies?

BBK2012.P1.122/LV.VO.1983.8.1

A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6
					5	
	8			11		
14			17			20
		23			26	
	29			32		
35			38			41
		44			47	

- $\mathrm{LKD}(3,7) = 1$, t.i. progresijā $3n+5$ katrs septītais dalīsies ar 7.
- Der skaitļi $14, 35, \ldots$ (progresija ar diferenci 21)
- Lielākais ir $1967 = 93 \cdot 21 + 14 < 1983$.
- Pavisam ir 94 šādi locekļi.

BEZŪ LEMMA

Lemma (Bézout's lemma): Ja a un b ir naturāli skaitļi un $\mathrm{LKD}(a,b) = d$, tad eksistē veseli x un y, ka $ax + by = d$.

Piezīme: Ja $\mathrm{LKD}(a,b) = 1$, tad aritmētiskā progresijā $a_k = a \cdot k$ atradīsies visi b iespējamie atlikumi, dalot ar b (ieskaitot atlikumu 1).

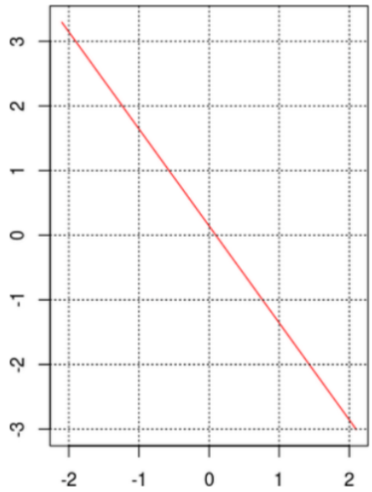
Piezīme 2: Praktiski tas nozīmē, ka, mainoties ar a un b eirocentu monētām, var nomaksāt jebkuru veselu skaitu centu tad un tikai tad, ja a, b ir savstarpēji pirmskaitļi.

Vienādojumi algebrā un skaitļu teorijā

Atrisināt:
$21x + 14y = 2$.

Algebrā:
Ja abi koeficienti vienlaikus nav 0, vienmēr var atrisināt. Patvaļīgi izvēlas, teiksim, y. Izsaka otru nezināmo:
$x = \frac{2-14y}{21}$.

Skaitļu teorijā: Meklē veselus x, y. $\mathrm{LKD}(14, 21) = 7$, tad $21x + 14y \neq 2$.



LV.NO.2007.7.1

Kurus naturālos skaitļus n var izsacīt formā $n = \frac{x}{y}$, kur $x = a^5, y = b^3$, a un b – naturāli skaitļi?

LV.NO.2007.7.1

- Kādi būtu “visvienkāršākie” skaitļi, ko izteikt minētajā formā a^5/b^3?
- Vai iegūto konstrukciju var attiecināt uz dažiem citiem skaitļiem?
- Vai konstrukciju var attiecināt uz visiem naturālajiem skaitļiem?

LV.NO.2007.7.1

- $n = 1 = \frac{1^5}{1^3}$. Pirmais “interesantais” skaitlis ir $n = 2$.
- Izvēlamies a un b kā divnieka pakāpes. Pēc mēģinājumiem/kļūdām iegūstam, ka $2 = \frac{(2^2)^5}{(2^3)^3} = 2^{2 \cdot 5 - 3 \cdot 3} = 2^1$, ja ievieto $a = 2^2 = 4$ un $b = 2^3 = 8$.
- Jebkuram citam n arī var izvēlēties $a = n^2$ un $b = n^3$.

Kāpēc izdevās manipulācija ar pakāpēm? Bezū identitāte skaitļiem 5 un 3:

$$5x + 3y = 1, \quad \text{ja } (x, y) = (2, 3).$$

ARITMĒTISKAS PROGRESIJAS

JAUTĀJUMS NR.1

Nosaukt piecus mazākos kopīgos dalītājus skaitļiem 8 un 18.

Jautājums Nr.1

- Gan 8, gan 18 dalītāji veido aritmētisku progresiju.
- Šīm progresijām ir kopīgi locekļi - progresija ar $d = \mathrm{MKD}(8, 18) = 72$.
- Pirmie pieci 72 daudzkārtņi ir: $72, 144, 216, 288, 360$.

JAUTĀJUMS NR.2

Atrast $\mathrm{MKD}(6, 7, 8)$ - visu trīs skaitļu mazāko kopīgo dalītāju.

Jautājums Nr.2

- Var noteikt kopsaucēju, piemēram, visām 3 daļām:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}.$$

Mazākais skaitlis, kas dalās ar $6, 7, 8$ ir 168.

Šo pašu rezultātu var iegūt arī divos soļos:

- Mazākais skaitlis, kurš dalās ar 6 un 8 ir $3 \cdot 8 = 24$.
- Mazākais skaitlis, kurš bez tam dalās ar 7, ir $7 \cdot 24 = 168$.

JAUTĀJUMS NR.3

(a) Dota aritmētiska progresija (a_n), kam $a_1 = 12, d = 29$. Atrast, cik daudzi tās locekļi ir trīsciparu skaitļi.
(b) Kādu a_1 jāizvēlas, lai progresijā ar $d = 29$ būtu iespējami daudz trīsciparu skaitļu?

Jautājums Nr.3

(a) Mazākais trīsciparu skaitlis šajā progresijā ir $12 + 4 \cdot 29 = 128$. Lielākais trīsciparu skaitlis apmierina $12 + k \cdot 29 \leq 999$ jeb $k \leq 34$.
Virknē $4, \ldots, 34$ ir pavisam $(34 - 4) + 1 = 31$ loceklis.
Tātad arī attiecīgo progresijas locekļu būs 31.

k	4	5	6	...	34
$12 + 29k$	128	157	186	...	998

Jautājums Nr.3

(b) Neveicot aprēķinus, a_1 izvēlas kā mazāko trīsciparu skaitli: $a_1 = 100$. Tad progresijā ir 32 locekļi:

$$100, 129, 158, 187, \ldots, 999.$$

Ja progresiju nedaudz nobīdītu, tajā būtu tikai "garantētais" skaits, ko iegūst, dalot "trīsciparu skaitļu intervāla" $[100, 1000)$ garumu 900 ar 29 un apaļojot uz leju:

$$\left\lfloor \frac{900}{29} \right\rfloor = \lfloor 31.03448 \rfloor = 31.$$

JAUTĀJUMS NR.4

Kāds ir mazākais naturālais skaitlis, kuru, dalot ar 20, atlikumā iegūst 13, bet, dalot ar 21, atlikumā iegūst 3.

Jautājums Nr.4

- Meklējam atbildi formā $20k + 13$ $(k \geq 0)$, t.i. kā progresiju $13, 33, 53, 73, \ldots$.
- Ievērojam, ka atlikumi, dalot ar 21, katrā solī samazinās par 1: Tie veido virkni $13, 12, 11, \ldots$.
- Tieši 11. loceklis sarkanajā progresijā dos atlikumu 3, dalot ar 21.
- Jāievieto $k = 10$. Tad $20k + 13 = 213$.

Sal. 7.klases Atklātās olimpiādes uzdevumu: LV.AO.2011.7.3.
Šis uzdevums ir arī atsevišķs gadījums Ķīniešu atlikumu teorēmai, kuru 7.klase nav vēl mācījusies.

JAUTĀJUMS NR.5

Karlsons sev pusdienām nopirka 8 pīrādziņus un 15 magoņmaizītes, bet Brālītis – vienu pīrādziņu un vienu magoņmaizīti. Karlsons par savām pusdienām samaksāja tieši divus eiro (katra maizīte un pīrādziņš maksā veselu skaitu centu). Cik samaksāja Brālītis?

Jautājums Nr.5

- Apzīmējam: x - pīrādziņa cena; y - magoņmaizītes cena.
- Lai $8x + 15y = 200$, $200 - 8x$ jādalās ar 15.
- Tātad, x jādalās ar 5 un $x = 10, 25, 40, 55, \ldots$.
- Pozitīvs y sanāk tikai tad, ja $x = 10$ (un $y = 8$).
- Brālītis samaksāja $x + y = 10 + 8 = 18$ centus.

Sal. 7.klases Atklātās olimpiādes uzdevumu: LV.AO.2016.7.2.

Jautājums Nr.5 (arī negatīvas cenas)

- Pēc Bezū lemmas eksistē veseli (x, y), kam $8x + 15y = 1$ (un, pareizinot x, y ar konstanti C) var atrisināt arī $8x + 15y = C$ jebkuram veselam C. Tikai var gadīties, ka x, y nav vienlaikus pozitīvi.
- Piemēram, $8x + 15y = 1$, ja $(x, y) = (2, -1)$. T.i. Karlsons var samaksāt 1 centu, ja pīrādziņš maksā 2 centus, bet magoņmaizīte -1 (mīnus vienu) centu.
- Ja cenas x, y pareizina ar 200 (t.i. ja $(x, y) = (200, -100)$), Karlsons samaksāja tieši divus eiro. Brālītis šajā gadījumā samaksāja $x + y = 100$ jeb vienu eiro.

ARITMĒTISKAS PROGRESIJAS

LV.AO.2004.8.5 ✱

Virknē augošā kārtībā izrakstīti naturālie skaitļi no 1 līdz 2004 ieskaitot, katrs vienu reizi. Izsvītrojam no tās skaitļus, kas atrodas $1., 4., 7., 10., \ldots$ vietās. No palikušās virknes atkal izsvītrojam skaitļus, kas tajā atrodas $1., 4., 7., \ldots$ vietās. Ar iegūto virkni rīkojamies tāpat, utt., kamēr paliek neizsvītrots viens skaitlis. Kurš tas ir?

LV.AO.2004.8.5 (Lasīšana) ✱

Lasīšana:

1. Ar ko atšķiras “skaitlis” un “numurs” šajā uzdevumā?
2. Vai skaitļu numuri var mainīties?
3. Vai pārnumurēšana notiek jau pēc viena skaitļa izsvītrošanas? Vai vēlāk?
4. Kas ir “palikusī virkne”? “Iegūtā virkne”?
5. Vai uzdevumā aprakstītais beigu stāvoklis vienmēr iestājas? Ja nu paliek neizsvītroti divi vai vairāk skaitļi?

Novērojumi:

1. Uzdevumā aprakstītā procedūra sastāv no vairākiem “gājieniem” jeb “iterācijām”.
2. Katras iterācijas laikā izsvītro apmēram trešdaļu no virknes locekļiem, locekļus pārnumurē, iegūstot jaunu virkni.

LV.AO.2004.8.5 (Ieteikumi)

Stratēģija: Vienkāršojam sev dzīvi

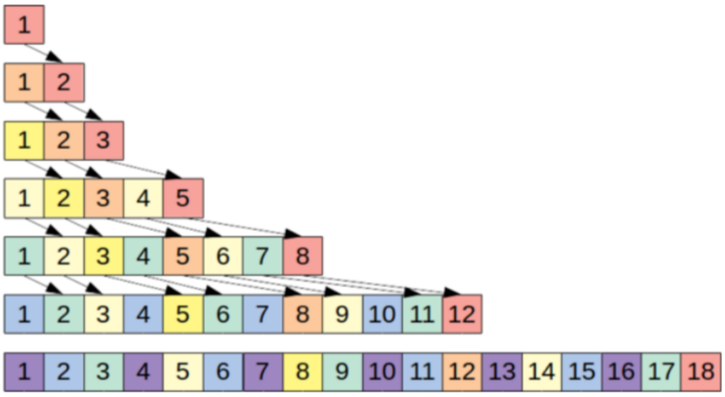
1. Kas paliktu beigās, ja svītrotu skaitļus, kas atrodas $1., 3., 5., \ldots$ vietās?
2. Vai skaitlis, kas paliek beigās, vienmēr mainās, ja sākumā ir par vienu skaitli vairāk?

Stratēģija: Sākam no beigām

1. Kāda izskatās pēdējā "iterācija"? Un priekšpēdējā?
2. Vai ir kāds veids, kā aprakstīt pašreizējo "iterāciju". (Teiksim, ja svītrojām $1., 3., 5., \ldots$ vietās, tad pēc kārtējās k-tās iterācijas pazuda skaitļi, kuri nedalījās ar 2^k.)
3. Vai ir kāds veids, kā arī sākotnējā uzdevumā aprakstīt skaitļus, kuri ir "ilgdzīvotāji", t.i. paliek neizsvītroti daudzās iterācijās.

LV.AO.2004.8.5 (No beigām)

- Konstrukcijā "no beigām" sākam ar vienu skaitli (pašu pēdējo). Pēc tam tam pievienojam tos, kas pirms viņa tika izsvītroti.
- Kā redzams diagrammā, skaitlis 18 paliek neizsvītrots sešās pēdējās iterācijās, skaitlis 12 - pēdējās piecās, utt.



LV.AO.2004.8.5 (Virkne)

- To kārtas numuru, kurš pirmais "izdzīvo" pēc n iterācijām apzīmējam ar x_n.
- Nulltais loceklis $x_0 = 1$ (pirmais izdzīvo, ja vairs neko nesvītro).
- Pēc iepriekšējās diagrammas, $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 5, x_4 = 8$, $x_5 = 12, x_6 = 18$, utt.

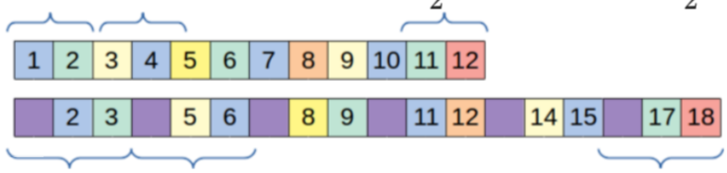
Apgalvojums: $x_{n+1} = \left\lceil \frac{3x_n}{2} \right\rceil$.

Piezīme. $\lceil x \rceil$ apzīmē *augšējo veselo daļu* - mazāko veselo skaitli, kas nav mazāks par x.

Apgalvojumu pierādām atsevišķi gadījumiem, kad x_n ir pāru un x_n ir nepāru.

LV.AO.2004.8.5 (Rekurences pierādījums)

1. Ja x_n ir pāru, tad konstrukcijā "no beigām" visas vietas no 1 līdz x_n var sadalīt pāros pa divi un katram pārim priekšā pierakst izsvītrojamo skaitli (attiecīgi 1., 4., 7., utt. vietās). Tā rezultātā no jauna iesprausto (violeto) vietiņu skaits ir precīzi trešdaļa. Tādēļ x_n pareizinās ar $\frac{3}{2}$ jeb $x_{n+1} = \frac{3x_n}{2}$.



2. Ja x_n ir nepāru, tad spriedums ir līdzīgs - vietas no 1 līdz $x_n - 1$ var sadalīt pāros, bet pati pēdējā vietiņa x_n paliek bez pāra (un tai vienai pašai priekšā iesprauž vienu violeto rūtiņu). Tādēļ šajā gadījumā daļa $\frac{3x_n}{2}$ (kas nav vesela) jānoapaļo uz augšu.

LV.AO.2004.8.5 (Vispārīgais gadījums)

Esam pamatojuši, ka skaitļi no 1 līdz x_n pēc n iterācijām tiek izsvītroti tā, ka paliek tikai pēdējais skaitlis (t.i. x_n)

Apgalvojums: Ja uzrakstīti skaitļi no 1 līdz X, kur $x_n < X < x_{n+1}$, tad pēc n izsvītrošanām paliks pāri viens skaitlis (tas, kurš sākumā ir vietā ar numuru x_n).
Piemēram, ja uzrakstīti skaitļi no 1 līdz 15, tad pēc piecām iterācijām paliks pāri 12.skaitlis.

Pierādījums: Tā kā pirmais skaitlis, kurš "izdzīvo" pēc $n+1$ iterācijām ir $x_{n+1} > X$, tad no 1 līdz X pēc k svītrošanām paliks pāri tikai viens skaitlis (un tas var būt vienīgi x_n, jo svītrošana aiz x_n šī skaitļa izdzīvošanu neiespaido).

LV.AO.2004.8.5 (2004 skaitļi)

Konstruējam virkni ar rekurento sakarību $x_{n+1} = \left\lceil \frac{3x_n}{2} \right\rceil$ līdz tā pārsniedz $X = 2004$:

$$1; 2; 3; 5; 8; 12; 18; 27; 41; 62;$$
$$93; 140; 210; 315; 473; 710; 1065; 1598; 2397$$

Katrs nākamais loceklis ir 1.5 reizes lielāks par iepriekšējo (vai noapaļots par $\frac{1}{2}$ uz augšu).

Atbilde: Esam ieguvuši, ka pēdējais neizsvītrotais ir skaitlis 1598.

Žūrijas atrisinājums

8.5. Apzīmēsim skaitli, kas ir pirmais neizsvītrotais pēc n svītrošanas sērijām, ar x_n (n = 0; 1; 2; ...). Viegli pārbaudīt, ka $x_0 = 1$; $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; $x_3 = 5$; $x_4 = 8$.

Pretēji domai par Fibonači skaitļiem pierādīsim, ka

$$(*)\quad x_{n+1} = \begin{cases} \frac{3}{2}x_n & \text{, ja } x_n \text{ – pāra skaitlis,} \\ \frac{3}{2}x_n & \text{, ja } x_n \text{ – nepāra skaitlis.} \end{cases}$$

Tiešām, pieņemsim, ka $x_n = 2m$, $m \in N$. Apskatām skaitli 3m. Ir m skaitļi, kas mazāki par 3m un dod atlikumu 1, dalot ar 3. Tāpēc pēc pirmās svītrošanu sērijas 3m atradīsies 2m–jā vietā; tātad vēl pēc n sērijām tas būs pirmajā vietā. Tagad pieņemam, ka $x_n = 2m+1$, $m = 0; 1; \ldots$. Apskatām skaitli $\frac{3}{2}(2m+1)+\frac{1}{2} = 3m+2$. Pēc pirmās svītrošanu sērijas, kurā izsvītros m + 1 par to mazākus skaitļus, šis skaitlis atradīsies 2m + 1 –ā vietā; tātad vēl pēc n sērijām tas būs pirmajā vietā. Sakarība (*) pierādīta.

Tagad pakāpeniski iegūstam x_i vērtības 1; 2; 3; 5; 8; 12; 18; 27; 41; 62; 93; 140; 210; 315; 473; 710; 1065; 1598. Nākošais loceklis jau būtu lielāks par 2004, tāpēc uzdevuma atbilde ir 1598.

ARITMĒTISKAS PROGRESIJAS

BBK2012.P1.124 ✳

Atrast
(a) visu to naturālo skaitļu summu, kas nepārsniedz 1000 un dalās ar 5;
(b) visu to naturālo skaitļu summu, kas nepārsniedz 1000 un dalās vai nu ar 3, vai ar 5.

BBK2012.P1.124 ✳

Stratēģija: Skaitām kaut ko citu.

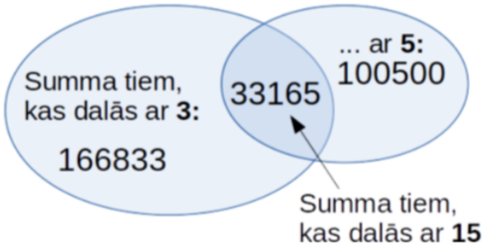
- Kā aprakstīt visus skaitļus, kas nepārsniedz 1000 un dalās ar 5? Kā noteikt šādas kopas summu?
- Kā izvietoti skaitļi, kuri dalās ar 3 VAI ar 5? Vai tos ir patīkami summēt?
- Vai mēs protam summēt kaut ko citu? Vai vajadzīgo summu var iegūt netieši?

BBK2012.P1.124

(a) $5+10+\ldots+1000 = \frac{5+1000}{2} \cdot 200 = 100500.$

(b) Summas skaitļiem, kas dalās ar 3, ar 5 un ar abiem (jeb ar 15):

$$\begin{cases} 3+6+\ldots+999 = \frac{3+999}{2} \cdot 333 = 166833, \\ 5+10+\ldots+1000 = 100500, \\ 15+30+\ldots+990 = \frac{15+990}{2} \cdot 66 = 33165. \end{cases}$$



Ieslēgšanas-izslēgšanas princips: Saskaitām abus ovālus, atņemam pārklājošos daļu, kas ieskaitīta divreiz: $166833 + 100500 - 33165 = 234168.$

LV.AO.2004.7.3

Kādam mazākajam naturālajam n visas daļas

$$\frac{5}{n+7}, \frac{6}{n+8}, \frac{7}{n+9}, \ldots, \frac{35}{n+37}, \frac{36}{n+38}$$

ir nesaīsināmas?

LV.AO.2004.7.3

Stratēģija: Pārtulkojam jautājumu citādi.

- Kādu progresiju locekļi ir daļu skaitītājos un saucējos?
- Kā pateikt citādi, ka daļa ir nesaīsināma?

Arī:

- Kāds ir invariants, kas saglabājas visās daļās?

LV.AO.2004.7.3

Rēķinot $\mathrm{LKD}(a, b)$, starpības starpības ir konstantas:

- $\mathrm{LKD}(5, n+7) = \mathrm{LKD}(5, n+2) = 1$,
- $\mathrm{LKD}(6, n+8) = \mathrm{LKD}(6, n+2) = 1, \ldots$
- $\mathrm{LKD}(36, n+38) = \mathrm{LKD}(36, n+2) = 1$.

Jāatrod mazākais skaitlis $n+2$, kas ir savstarpējs pirmskaitlis ar visiem skaitļiem $5, 6, \ldots, 36$.

LV.VO.2002.11.5

Kuriem naturāliem skaitļiem n, kas lielāki par 3 un nedalās ar 3, izpildās īpašība: visi tie naturālie skaitļi, kas mazāki par n un kuru lielākais kopīgais dalītājs ar n ir 1, veido aritmētisku progresiju?

LV.VO.2002.11.5

Stratēģija: Vispārinām savus novērojumus.

- Novērojums: Kādiem nelieliem skaitļiem veidojas/neveidojas aritmētiska progresija?
- Vispārināšana: Kā secinājumus pārnes uz lielākiem skaitļiem?
- Novērošana: Kā izskatās pretpiemēri - kāpēc tie nav progreijas?
- Vispārināšana: Kā no šiem pretpiemēriem iegūt vispārīgo atbildi?

LV.VO.2002.11.5 (pozitīvie piemēri)

Ar $\Phi(n)$ apzīmējam tos skaitļus no $[1; n]$, kas ir savstarpēji pirmskaitļi ar n.

- Visiem pirmskaitļiem p, $\Phi(p)$ ir progresija ar $d = 1$, piemēram, $\Phi(7) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Visām divnieka pakāpēm 2^k, $\Phi(2^k)$ ir progresija ar $d = 2$, piemēram, $\Phi(8) = \{1, 3, 5, 7\}$

LV.VO.2002.11.5 (negatīvie piemēri)

- Ja $n = pq$ ir nepāru, bet nav pirmskaitlis, tad $\Phi(n)$ nevar būt progresija, jo $1, 3 \in \Phi(n)$ (ir dots, ka n nedalās ar 3). Bet nepāru dalītājs $p \notin \Phi(n)$.
- Ja $n = 2^k p$ (kur p ir nepāru), tad $\Phi(n)$ nevar būt progresija. Pamatojums tāds pats.

ARITMĒTISKAS PROGRESIJAS

KO DARĪJĀM ŠAJĀ NODARBĪBĀ?

1. Atkārtojām skolas formulas aritmētiskām progresijām.
2. Noteicām, kad S_n dalās/nedalās ar n un citiem skaitļiem.
3. Novērojām, kā S_n mainās atkarībā no n.
4. Noteicām, cik progresijas locekļu ir $\mathbb{N}$ intervālos.
5. Aprakstījām mazāko kopīgo dalāmo $\mathrm{MKD}(a, b)$ ar progresiju sakrītošajiem locekļiem.
6. Izmantojām $a = bq + r$ - izteiksmi a dalīšanai ar b ar atlikumu.
7. Pamatojām $\mathrm{LKD}(a_n, d)$ nemainību, ja n aug.
8. Noteicām visus atlikumus, kas rodas, dalot progresiju ar fiksētu skaitli.
9. Izmantojām Bezū lemmu, izsakot $\mathrm{LKD}(a, b)$ kā $ax + by$.

ATSAUCES

- A.Bērziņa, A.Bērziņš. Diferencēti uzdevumi skaitļu teorijā, 2013 - Daži uzdevumi par progresijām.
- Wikipedia. Trijstūru skaitļi - Par jēdziena vēsturi.
- Wikipedia. Ķīniešu atlikumu teorēma - Vispārīgā situācija, kur jāmeklē vairāku aritmētisku progresiju kopīgie locekļi.
- Wikipedia. Poligrammas jeb regulāras zvaigznes - Kuros gadījumos aritmētiska progresija cikliski pieņem visus atlikumus, dalot ar m (un kuros nē).
- Wikipedia. Bezū identitāte - Pierādījums, kurā nekonstruktīvi izvēlas mazāko naturālo skaitli bezgalīgā kopā.
- F.Šopēns: Noktirne op.9 nr.1 si$\flat$ minors - Vietām poliritmisks gabals: Kreisajai rokai 6 vienāda garuma notis, labajai rokai tikmēr 11 notis.

PAPILDU UZDEVUMI

1. EE.PK.2019.10.3
   Cik ir tādu veselu negatīvu skaitļu pāru (a, b), kas apmierina vienādību $22a + 15b = 2019$?
2. LV.VO.2014.10.3
   Ir pieejams neierobežots daudzums 7 un 13 centu pastmarku, kuras izmanto pasta sūtījumu apmaksāšanai. Diemžēl dažas summas nav iespējams apmaksāt tikai ar šīm pastmarkām (piemēram, ja sūtījums maksā 6, 8 vai 25 centus). Kāda ir lielākā summa, kuru nav iespējams apmaksāt izmantojot tikai šīs pastmarkas?
3. Israeli Oral Olympiad #7
   Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi $1, 2, \ldots, 100$. Cvi grib nokrāsot N no šiem skaitļiem zilus tā, lai katra aritmētiska progresija garumā 10, ko veido uz tāfeles uzrakstītie skaitļi, saturētu kādu zilu skaitli. Kāda ir mazākā N vērtība?
4. Danube 2014 p3
   Katram naturālam $n \geq 2$ parādīt, ka eksistē aritmētiska progresija ar n locekļiem, kuri visi ir salikti skaitļi un katri divi ir savstarpēji pirmskaitļi.