

Atlases sacensības komandu olimpiādei "Baltijas ceļš"

2017. gada 23. septembris, Rīga (1. diena)

Risināšanas laiks: 4 stundas un 30 minūtes.

Jautājumus drīkst uzdot pirmo 30 minūšu laikā.

Atļauts izmantot tikai rakstāmpiederumus, lineālu un cirkuli.

Uzdevums 0.1 (BwTst2017.1): Pierādīt, ka visiem reāliem $x > 0$ ir spēkā vienādība

$$\sqrt{\frac{1}{3x+1}} + \sqrt{\frac{x}{x+3}} \geq 1.$$

Kurām x vērtībām ir spēkā vienādība?

Uzdevums 0.2 (BwTst2017.2): Atrast visus reālu skaitļu pārus (x, y) , kas apmierina vienādojumu

$$\frac{(x+y)(2-\sin(x+y))}{4\sin^2(x+y)} = \frac{xy}{x+y}.$$

Uzdevums 0.3 (BwTst2017.3): Atrast visas funkcijas $f(x) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, kas definētas veseliem skaitļiem, pieņem veselas vērtības un visiem $x, y \in \mathbb{Z}$ izpildās

$$f(x+y) + f(xy) = f(x)f(y) + 1.$$

Uzdevums 0.4 (BwTst2017.4): Polinoma $P(x) = 2x^3 - 30x^2 + cx$ vērtības pie kādiem trīs pēc kārtas sekojošiem veseliem skaitļiem arī ir attiecīgi trīs pēc kārtas sekojoši veseli skaitļi. Nosakiet šīs vērtības!

Uzdevums 0.5 (BwTst2017.5): Burvju astoņstūris ar astoņstūris, kura malas iet pa rūtiņu lapas rūtiņu līnijām un malu garumi ir 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (jebkādā secībā). Kāds ir lielākais iespējamais burvju astoņstūra laukums?

Uzdevums 0.6 (BwTst2017.6): 13×13 rūtiņu laukuma katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis. Pierādīt, ka var izvēlēties 2 rindas un 4 kolonnas tā, ka to 8 krustpunktos ierakstīto skaitļu summa dalās ar 8.

Uzdevums 0.7 (BwTst2017.7): Uz lapas viens aiz otra augošā secībā bez atstarpēm uzrakstīti visi sešciparu naturālie skaitļi no 100000 līdz 999999. Kāda ir lielākā k vērtība, kurai šajā virknē vismaz divās dažādās vietās iespējams atrast vienu un to pašu k -ciparu skaitli?

Uzdevums 0.8 (BwTst2017.8): Šaha turnīrā piedalījās 2017 šahisti, katrs ar katru izspēlēja tieši vienu šaha partiju. Sauksim šahistu trijotni A, B, C par principiālu, ja A uzvarēja B , B uzvarēja C , bet C uzvarēja A . Kāds ir lielākais iespējamais principiālu šahistu trijotņu skaits?

2017. gada 24. septembris, Rīga (2. diena)

Uzdevums 0.9 (BwTst2017.9): Vienādsānu trijstūrī ABC , kurā $AC = BC$ un $\angle ABC < 60^\circ$, I un O ir attiecīgi ievilktais un apvilktais riņķa līniju centri. Trijstūrim BIO apvilkta riņķa līnija vēlreiz krusto malu BC punktā D . Pierādīt, ka

1. taisnes AC un DI ir paralēlas,
2. taisnes OD un IB ir perpendikulāras.

Uzdevums 0.10 (BwTst2017.10): Šaurleņķa trijstūra ABC , kuram $AC < AB$, apvilktais riņķa līnijas rādiuss ir R , tās loka BC (kurš nesatur A) viduspunkts ir S . Uz augstuma AD pagarinājuma atlikts punkts T tā, ka D atrodas starp A un T un $AT = 2R$. Pierādīt, ka $\angle AST = 90^\circ$.

Uzdevums 0.11 (BwTst2017.11): Uz trijstūra ABC bisektrises AL pagarinājuma atlikts punkts P tā, ka $PL = AL$. Pierādīt, ka trijstūra PBC perimetrs nepārsniedz trijstūra ABC perimetru.

Uzdevums 0.12 (BwTst2017.12): Šaurleņķa trijstūrim ABC apvilktaļai riņķa līnijai ω novilkts diametrs AK , uz nogriežņa BC izvēlēts patvaļīgs punkts M , taisne AM krusto ω punktā Q . Perpendikula, kas no M vilkts pret AK , pamats ir D , pieskare, kas riņķa līnijai ω novilkta caur punktu Q , krusto taisni MD punktā P . Uz ω izvēlēts punkts L (atšķirīgs no Q) tā, ka PL ir ω pieskare. Pierādīt, ka punkti L , M un K atrodas uz vienas taisnes.

Uzdevums 0.13 (BwTst2017.13): Pierādīt, ka skaitlis

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$$

ir racionāls visiem naturāliem n .

Uzdevums 0.14 (BwTst2017.14): Vai var atrast trīs naturālus skaitļus a, b, c , kuru lielākais kopīgais dalītājs ir 1 un kuriem izpildās vienādība

$$ab + bc + ac = (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)?$$

Uzdevums 0.15 (BwTst2017.15): Ciparu virkni $D = d_{n-1}d_{n-2} \dots d_0$ sauksim par stabilu skaitļa nobeigumu, ja jebkuram naturālam skaitlim m , kas beidzas ar D , arī jebkura tā naturāla pakāpe m^k beidzas ar D . Pierādīt, ka katram naturālam n ir tieši četri stabili skaitļa nobeigumi, kuru garums ir n .

Uzdevums 0.16 (BwTst2017.16): Virknes $a_1, a_2, \dots, a_{2016}$ un $b_1, b_2, \dots, b_{2016}$ katra satur visus naturālos skaitļus no 1 līdz 2016 katru tieši vienu reizi (citiem vārdiem sakot tās abas ir skaitļu $1, 2, \dots, 2016$ permutācijas). Pierādīt, ka var atrast tādus dažādus indeksus i un j , ka $a_i b_i - a_j b_j$ dalās ar 2017.