

2. mājasdarbs

Lietiškie algoritmi, 2019.g. rudens
Terminš: 2019-10-28

1.uzdevums (Diskrētā krāsu plakne YCbCr).

Koordinātes (Y, Cb, Cr) aprēķina no koordinātēm (R, G, B) atbilstoši sekojošai vektoru algebras sakarībai:

$$\begin{pmatrix} Y \\ Cb \\ Cr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65.48 & 128.55 & 24.97 \\ -37.78 & -74.16 & 111.93 \\ 111.96 & -93.75 & -18.21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{255} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{255} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{255} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix}.$$

Sk. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1002/col.22291>.

Atrast YCbCr koordinātes zemāk minētajām krāsām, kas uzdotas (R, G, B) krāsu plaknē (un noapaļot visas (Y, Cb, Cr) koordinātes līdz tuvākajam veselajam skaitlim).

1. Baltai krāsai #FFFFFF jeb $(R, G, B) = (255, 255, 255)$.
2. Ciāna krāsai #00FFFF jeb $(R, G, B) = (0, 255, 255)$.
3. Magentas krāsai #FF00FF jeb $(R, G, B) = (255, 0, 255)$.
4. Dzeltenai krāsai #FFFF00 jeb $(R, G, B) = (255, 255, 0)$.
5. Melnai krāsai #000000 jeb $(R, G, B) = (0, 0, 0)$.

2.uzdevums (Diskrētais kosinusu pārveidojums).

Dota funkcija $f(x)$, kas definēta argumentiem $x = 0, 1, \dots, N-1$. Par 1-dimensionālu DCT (diskrēto kosinusu pārveidojumu jeb *discrete cosine transform*) sauksim funkciju $F(u)$, kas definēta tām pašām argumenta vērtībām $u = 0, 1, \dots, N-1$ ar šādām vienādībām:

$$F(u) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{x=0}^{N-1} \lambda_u \cdot \cos\left(\frac{\pi u}{N} \left(x + \frac{1}{2}\right)\right) \cdot f(x),$$

kur $u = 0, 1, \dots, N-1$ un $\lambda_u = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (pie $u = 0$) un $\lambda_u = 1$ (pie $u > 0$).

Sk. <https://bit.ly/3fcbrc2>.

Par inverso diskreto kosinusu pārveidojumu sauksim atgriešanos no funkcijas $F(u)$ atpakaļ pie funkcijas $f(x)$, ko definē ar šādām vienādībām:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{u=0}^{N-1} \lambda_u \cdot \cos\left(\frac{\pi u}{N} \left(x + \frac{1}{2}\right)\right) \cdot F(u),$$

kur $x = 0, 1, \dots, N-1$ un λ_u definēti tāpat kā agrāk.

1. Aprēķināt diskreto kosinusu pārveidojumu $F(u)$ punktā $u = 3$ funkcijai $f(x) = (N-1) - x$, kur $N = 8$. Atbilde noapaļot līdz 4 cipariem aiz komata.
2. Aprēķināt inverso diskreto kosinusu pārveidojumu $f(x)$ visiem punktiem $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ no funkcijas $F(u)$, kas uzdota ar sekojošām $N = 8$ vērtībām:

$$\begin{aligned} &(F(0), F(1), F(2), F(3), F(4), F(5), F(6), F(7)) = \\ &= (57.9828, -6.4423, 0, -0.6735, 0, -0.2009, 0, -0.0507). \end{aligned}$$

Atbilde noapaļot līdz 4 cipariem aiz komata.

3.uzdevums (Heminga kodi). Uzrakstām skaitļa $\pi = 3.14159 \dots$ pierakstu divnieku skaitīšanas sistēmā un grupējam tā ciparus aiz komata - divas grupas pa 7 un divas grupas pa 15:

$$\pi = 11.\underbrace{0010010}_{7\text{-bitu}}\underbrace{0001111}_{7\text{-bitu}}\underbrace{110110101010001}_{15\text{-bitu}}\underbrace{000100001011010}_{15\text{-bitu}}\dots_2.$$

Grupējam šī skaitļa ciparus aiz komata grupās pa 7 (un pēc tam arī pa 15), lai iegūtu ziņojumus. Atrast kļūdas (ja tādas ir) atbilstošajos Heminga koda ziņojumos:

1. Heminga koda ziņojums 0010010 (7-bitu Heminga kods, bitu secība apgriezti leksikogrāfiska – no x_{111} līdz x_{001}) – atrast kļūdaino pozīciju, ja tāda ir, un uzrakstīt šo 7-bitu kodu bez kļūdām.
2. Heminga koda ziņojums 0001111 (7-bitu Heminga kods) – izlabot kļūdas, ja tās ir, un uzrakstīt 4 ziņojuma bitus $x_1x_2x_3x_4$.
3. Heminga koda ziņojums 110110101010001 (15-bitu Heminga kods, bitu secība apgriezti leksikogrāfiska – no x_{1111} līdz x_{0001}) – atrast kļūdaino pozīciju, ja tāda ir, un uzrakstīt šo 15-bitu kodu bez kļūdām.
4. Heminga koda ziņojums 000100001011010 (15-bitu Heminga kods) – izlabot kļūdas, ja tās ir, un uzrakstīt visus ziņojuma bitus (ziņojumu bitu secība apgriezti leksikogrāfiska $x_{1111} \dots x_{0011}$).

4.uzdevums (Rīda-Solomona kods).

1. Izmantojot galīgu lauku $\text{GF}(7)$ kodējam ziņojumus no 7 simbolu alfabēta $\{0, 1, 2, \dots, 6\}$ ar 3 pakāpes polinomiem, pārraidot 7 polinoma vērtības ($f(0), \dots, f(6)$) visos galīgā lauka $\text{GF}(7)$ punktos. Kāds ir maksimālais kļūdu skaits, pie kura iespējams viennozīmīgi atjaunot sākotnējo ziņojumu? Pamatot, kāpēc ir iespējams koriģēt šādu kļūdu skaitu un kāpēc nav iespējams koriģēt lielāku kļūdu skaitu.
2. Galīga lauka $\text{GF}(2^3)$ elementus $\{0, 1, t, t+1, t^2, t^2+1, t^2+t, t^2+t+1\}$ apzīmējam attiecīgi ar bitu virknēm $\{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$.
3-pakāpes polinoms $p(x) = 101 \cdot x^3 + 100 \cdot x^2 + 001 \cdot x + 010$ ir domāts, lai pārraidītu ziņojumu virknīti 101.100.001.010. Atrast polinoma vērtību $p(011)$, kur $011 \in \text{GF}(2^3)$.
Piezīme: Faktiski Rīda-Solomona kļūdu labošanas kodā vajadzētu būt visām 8 polinoma vērtībām, bet šajā vingrinājumā pietiek izrēķināt $p(x)$ tikai pie $x = 011$.

5.uzdevums (I-iespēja (atzīmei 10)).

1. Uzrakstīt grafu kodu ar 9 ziņojuma bitiem x_1, \dots, x_9 un pēc iespējas mazāku skaitu kontrolbitu y_1, \dots, y_k tā, lai kods spētu atjaunot jebkurus 2 pazaudētus ziņojuma bitus x_i .
2. Pamatot, ka mazāks kontrolbitu skaits nav iespējams.
3. Uzrakstīt grafu kodu ar 9 ziņojuma bitiem x_1, \dots, x_9 un pēc iespējas mazāku skaitu kontrolbitu y_1, \dots, y_k tā, lai kods spētu atjaunot jebkurus 3 pazaudētus ziņojuma bitus x_i .