

## 2. Mājasdarbs Attēlu saspiešana; Kļūdu labošana

Terminš: 2019. gada 28. oktobrī 23:59:59 pēc Austrumeiropas ziemas laika.

Iesūtīšanas veids: PDF uz epastu `kalvis.apsitis@gmail.com`.

1. **Diskrētā krāsu plakne YCbCr.** Koordinātes  $(Y, Cb, Cr)$  aprēķina no koordinātēm  $(R, G, B)$  atbilstoši sekojošai vektoru algebras sakarībai:

$$\begin{pmatrix} Y \\ Cb \\ Cr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65.48 & 128.55 & 24.97 \\ -37.78 & -74.16 & 111.93 \\ 111.96 & -93.75 & -18.21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{255} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{255} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{255} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix}.$$

Sk. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1002/col.22291>.

Atrast YCbCr koordinātes zemāk minētajām krāsām, kas uzdotas  $(R, G, B)$  krāsu plaknē (un noapaļot visas  $(Y, Cb, Cr)$  koordinātes līdz tuvākajam veselajam skaitlim).

- (a) Baltai krāsai #FFFFFF jeb  $(R, G, B) = (255, 255, 255)$ .
  - (b) Ciāna krāsai #00FFFF jeb  $(R, G, B) = (0, 255, 255)$ .
  - (c) Magentas krāsai #FF00FF jeb  $(R, G, B) = (255, 0, 255)$ .
  - (d) Dzeltēnai krāsai #FFFF00 jeb  $(R, G, B) = (255, 255, 0)$ .
  - (e) Melnai krāsai #000000 jeb  $(R, G, B) = (0, 0, 0)$ .
2. **Diskrētais kosinusu pārveidojums.** Dota funkcija  $f(x)$ , kas definēta argumentiem  $x = 0, 1, \dots, N-1$ . Par 1-dimensionālu DCT (diskrēto kosinusu pārveidojumu jeb *discrete cosine transform*) saucsim funkciju  $F(u)$ , kas definēta tām pašām argumenta vērtībām  $u = 0, 1, \dots, N-1$  ar šādām vienādībām:

$$F(u) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{x=0}^{N-1} \lambda_u \cdot \cos\left(\frac{\pi u}{N} \left(x + \frac{1}{2}\right)\right) \cdot f(x),$$

kur  $u = 0, 1, \dots, N-1$  un  $\lambda_u = \frac{1}{\sqrt{2}}$  (pie  $u = 0$ ) un  $\lambda_u = 1$  (pie  $u > 0$ ).

Sk. [https://en.wikipedia.org/wiki/Discrete\\_cosine\\_transform#DCT-II](https://en.wikipedia.org/wiki/Discrete_cosine_transform#DCT-II).

Par inverso diskrēto kosinusu pārveidojumu saucsim atgriešanos no funkcijas  $F(u)$  atpakaļ pie funkcijas  $f(x)$ , ko definē ar šādām vienādībām:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{u=0}^{N-1} \lambda_u \cdot \cos\left(\frac{\pi u}{N} \left(x + \frac{1}{2}\right)\right) \cdot F(u),$$

kur  $x = 0, 1, \dots, N-1$  un  $\lambda_u$  definēti tāpat kā agrāk.

- (a) Aprēķināt diskrēto kosinusu pārveidojumu  $F(u)$  punktā  $u = 3$  funkcijai  $f(x) = (N-1) - x$ , kur  $N = 8$ . Atbilde noapaļot līdz 4 cipariem aiz komata.
- (b) Aprēķināt inverso diskrēto kosinusu pārveidojumu  $f(x)$  visiem punktiem  $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$  no funkcijas  $F(u)$ , kas uzdots ar sekojošām  $N = 8$  vērtībām:

$$\begin{aligned} &(F(0), F(1), F(2), F(3), F(4), F(5), F(6), F(7)) = \\ &= (57.9828, -6.4423, 0, -0.6735, 0, -0.2009, 0, -0.0507). \end{aligned}$$

Atbilde noapaļot līdz 4 cipariem aiz komata.

(Turpinājums lapas otrā pusē.)

3. **Heminga kodi.** Uzrakstām skaitļa  $\pi = 3.14159\dots$  pierakstu divnieku skaitīšanas sistēmā un grupējam tā ciparus aiz komata - divas grupas pa 7 un divas grupas pa 15:

$$\pi = 11.\underbrace{0010010}_{7}\underbrace{0001111}_{7}\underbrace{110110101010001}_{15}\underbrace{000100001011010}_{15}\dots_2.$$

Grupējam šī skaitļa ciparus aiz komata grupās pa 7 (un pēc tam arī pa 15), lai iegūtu ziņojumus. Atrast kļūdas (ja tādas ir) atbilstošajos Heminga koda ziņojumos:

- (a) Heminga koda ziņojums 0010010 (7-bitu Heminga kods, bitu secība apgriezti leksikogrāfiska – no  $x_{111}$  līdz  $x_{001}$ ) – atrast kļūdaino pozīciju, ja tāda ir, un uzrakstīt šo 7-bitu kodu bez kļūdām.
- (b) Heminga koda ziņojums 0001111 (7-bitu Heminga kods) – izlabot kļūdas, ja tās ir, un uzrakstīt 4 ziņojuma bitus  $x_1x_2x_3x_4$ .
- (c) Heminga koda ziņojums 110110101010001 (15-bitu Heminga kods, bitu secība apgriezti leksikogrāfiska – no  $x_{1111}$  līdz  $x_{0001}$ ) – atrast kļūdaino pozīciju, ja tāda ir, un uzrakstīt šo 15-bitu kodu bez kļūdām.
- (d) Heminga koda ziņojums 000100001011010 (15-bitu Heminga kods) – izlabot kļūdas, ja tās ir, un uzrakstīt visus ziņojuma bitus (ziņojumu bitu secība apgriezti leksikogrāfiska  $x_{1111} \dots x_{0011}$ ).

#### 4. Rīda-Solomona kods.

- (a) Izmantojot galīgu lauku  $\text{GF}(7)$  kodējam ziņojumus no 7 simbolu alfabēta  $\{0, 1, 2, \dots, 6\}$  ar 3 pakāpes polinomiem, pārraidot 7 polinoma vērtības  $(f(0), \dots, f(7))$  visos galīgā lauka  $\text{GF}(7)$  punktos. Kāds ir maksimālais kļūdu skaits, pie kura iespējams viennozīmīgi atjaunot sākotnējo ziņojumu? Pamatot, kāpēc ir iespējams koriģēt šādu kļūdu skaitu un kāpēc nav iespējams koriģēt lielāku kļūdu skaitu.
- (b) Galīga lauka  $\text{GF}(2^3)$  elementus  $\{0, 1, t, t+1, t^2, t^2+1, t^2+t, t^2+t+1\}$  apzīmējam attiecīgi ar bitu virknēm  $\{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$ .  
3-pakāpes polinoms  $p(x) = 101 \cdot x^3 + 100 \cdot x^2 + 001 \cdot x + 010$  ir domāts, lai pārraidītu ziņojumu virknīti 101.100.001.010. Atrast polinoma vērtību  $p(011)$ , kur  $011 \in \text{GF}(2^3)$ .  
*Piezīme:* Faktiski Rīda-Solomona kļūdu labošanas kodā vajadzētu sūtīt visas 8 polinoma vērtības, bet šajā vingrinājumā pietiek izrēķināt  $p(x)$  tikai pie  $x = 011$ .

#### 5. I-iespēja (atzīmei 10).

- (a) Uzrakstīt grafu kodu ar 9 ziņojuma bitiem  $x_1, \dots, x_9$  un pēc iespējas mazāku skaitu kontrolbitu  $y_1, \dots, y_k$  tā, lai kods spētu atjaunot jebkurus 2 pazaudētus ziņojuma bitus  $x_i$ .
- (b) Pamatot, ka mazāks kontrolbitu skaits nav iespējams.
- (c) Uzrakstīt grafu kodu ar 9 ziņojuma bitiem  $x_1, \dots, x_9$  un pēc iespējas mazāku skaitu kontrolbitu  $y_1, \dots, y_k$  tā, lai kods spētu atjaunot jebkurus 3 pazaudētus ziņojuma bitus  $x_i$ .