Gadījumlielumi
ATV

Uzdevumi nedēļai #17

2021-04-28

Uzdevums 117.1: Iedomāsimies, ka mums ir divi metamie kauliņi: viens ar 6 skaldnēm (ar skaitļiem $1, \ldots, 6$) un otrs ar 8 skaldnēm (ar skaitļiem $1, \ldots, 8$). Uz abiem reizē uzmet skaitļus. Ar T apzīmējam gadījumlielumu – uz abiem kauliņiem uzmesto skaitļu summu.

Figure 1: Oktaedra formas kauliņi ar 8 skaldnēm.

(a) Katrai no iespējamajām T vērtībām a atrast, cik veidos to var uzmest (un kāda ir varbūtība, ka tieši šo vērtību uzmetīs: $p(T = a)$).

(b) Atrast $E(T)$ – gadījumlieluma vidējo vērtību.

(c) Atrast $p(T = E(T))$ (t.i. varbūtību, ka T būs vienāds pats ar savu vidējo vērtību).

(d) Atrast varbūtības $p(T = (E(T) - 1))$ un $p(T = (E(T) + 1))$.

(e) Atrast dispersiju $V(T)$. To rēķina pēc formulas $V(T) = E((T - E(T))^2)$.

Uzdevums 117.2: Vienā eksperimentā ripinām divus parastus metamos kauliņus (uz tiem var uzmest skaitļus $1, \ldots, 6$ ar vienādām varbūtībām). Definējam šādus notikumus:

$$\begin{cases} A := \text{uz abiem kauliņiem uzmesto punktu summa ir 7,} \\ B := \text{uz pirmā kauliņa uzmeta 2,} \\ C := \text{uz otrā kauliņa uzmeta 5.} \\ D := \text{uz abiem kauliņiem uzmesto punktu summa ir vismaz 7,} \end{cases}$$

(a) Atrast nosacītās varbūtības $p(B|A)$ un $p(B|D)$?

(b) Vai notikumi A, B, C ir pa pāriem neatkarīgi? (Jāpārbauda trīs vienādības: $p(A \cap B) = p(A)p(B)$, $p(A \cap C) = p(A)p(C)$, $p(B \cap C) = p(B)p(C)$.)

(c) Vai notikumi B, C, D ir pa pāriem neatkarīgi?

(d) Vai notikumi A, B, C ir savstarpēji neatkarīgi?
Piezīme. Trīs notikumi A, B, C ir savstarpēji neatkarīgi, ja tie ir pa pāriem neatkarīgi un bez tam arī visu trīs notikumu šķēluma varbūtība $p(A \cap B \cap C) = p(A)p(B)p(C)$.

Uzdevums 117.3: Teātrī iegāja n cilvēki; katrs nodeva garderobē savu cepuri. Izejot no teātra garderobists cepures sajauca (visas $n!$ cepuru permutācijas var notikt ar vienādu varbūtību).

(a) Atrast varbūtību notikumam, ka tieši trīs cilvēki saņēma atpakaļ savas cepures tad, ja $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$. (Apzīmējam šīs varbūtības attiecīgi ar p_4, p_5, p_6.)

(b) Pamatot, ka p_n apmierina vienādību:

$$p_n = \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{n-3}\frac{1}{(n-3)!}\right).$$

Ieteikums. Var izmantot ieslēgšanas-izslēgšanas principu (principle of inclusion-exclusion) par elementu skaitu kopu apvienojumā.

Uzdevums 117.4: Divi spēlētāji spēlē sekojošu spēli ar vienu monētu (monēta ir simetriska un abi iznākumi notiek ar vienādām varbūtībām):

- Spēlētājs A izvēlas virknīti no 3 burtiem; katrs burts ir `C` (cipars) vai `Ģ` (ģerbonis).
- Spēlētājs B izvēlas citu virknīti no 3 burtiem; arī katrs burts ir `C` vai `Ģ`.
- Pēc tam viņi met monētu, kamēr katrs no viņiem ir ieraudzījis savu virknīti trīs pēc kārtas sekojošos metienos.

Pieņemsim, ka spēlētājs A izvēlējās `"CCĢ"`, bet spēlētājs B izvēlējās `"ĢCC"`. Ar X apzīmēsim gadījumlielumu ar vērtībām $n \in \{3, 4, 5, \ldots\}$, kas parāda, cik reizes bija jāmet monēta, lai metienu rezultātos pirmo reizi parādītos spēlētāja A virknīte `"CCĢ"`.

(a) Atrast $p(X = n)$ pie $n = 3, 4, 5, 6$ (t.i. varbūtību, ka virknītes "CCĢ" iegūšanai monēta bija jāmet tieši 3 reizes, tieši 4 reizes, utt.).

(b) Atrast vidējo vērtību $E(X)$ (ja grūti precīzi summēt šo virkni, var izmantot arī Python programmu - piemēram, uz datora "izspēlēt" 1000 monētu mešanas virknītes un atrast, cik ātri tur parādās virknīte `"CCĢ"`. Sk. funkciju `random.choices(...)` Attēlā 2.

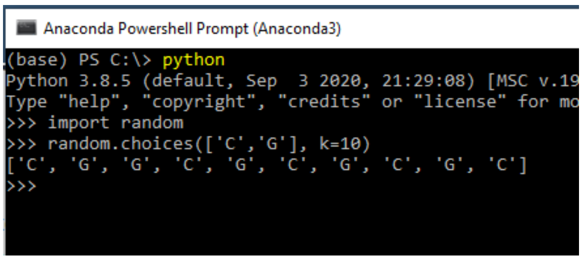

Figure 2: Nejaušas virknes (`list`) iegūšana Python.

(c) Atrast varbūtību, ka spēlētājs A uzvar spēlētāju B (t.i. viņa virknīte parādās ātrāk).

(d) Kādu 3-burtu virknīti ir visizdevīgāk izvēlēties, ja esat spēlētājs A un varat izvēlēties pirmais?

Uzdevums 117.5: 1000 cilvēkus testē uz kādu slimību; tests dod pareizu atbildi ar 90% varbūtību (ar 10% varbūtību tas kļūdās vienā vai otrā virzienā – ir pozitīvs veseliem cilvēkiem vai arī negatīvs slimiem). Zināms, ka 40% no visiem 1000 cilvēkiem ir šī slimība.

(a) Kāda ir varbūtība, ka testa rezultāts konkrētam cilvēkam būs pozitīvs?

(b) Kādam cilvēkam testa rezultāts ir pozitīvs. Kāda varbūtība, ka viņam tiešām ir šī slimība?