Skaitļu teorija
NMS juniori

Mājasdarbs #2

2020./2021.m.g.

2020.gada 15.novembris

Iesniegšanas termiņš: 2020.g. 5.decembris
Kam iesūtīt: `kalvis.apsitis`, domēns `gmail.com`

Uzdevums 2.1: Regulāra n-stūra virsotnes savienotas ar slēgtu lauztu līniju, kurai ir n posmi.

(A) Pierādīt, ka jebkuram pāra skaitlim $n \geq 4$, lauztajai līnijai ir vismaz divi paralēli posmi.

(B) Pierādīt, ka jebkuram nepāra skaitlim $n > 3$ nav iespējams, ka lauztajai līnijai ir tieši divi paralēli posmi (t.i. divi posmi ir paralēli, bet nekādi citi nav šiem diviem paralēli, vai arī paralēli savā starpā).

Uzdevums 2.2: Dots pirmskaitlis p un naturāli skaitļi $a \geq 2$, $m \geq 1$.
Zināms, ka $a^m \equiv 1 \pmod{p}$ un $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$.

(A) Pierādīt, ka $a^m \equiv 1 \pmod{p^2}$.

(B) Atrast kādu pirmskaitli $p > 10$ un a, m, kam minētie apgalvojumi izpildās.

Uzdevums 2.3: Vai var atrast piecus tādus pirmskaitļus p, q, r, s, t, ka $p^3 + q^3 + r^3 + s^3 = t^3$?

Uzdevums 2.4: Atrast visus pirmskaitļus p un q, kuriem izpildās vienādība

$$p + q = (p - q)^3.$$

Uzdevums 2.5: Dots nepāra vesels skaitlis a. Pierādīt, ka $a^{2^n} + 2^{2^n}$ un $a^{2^m} + 2^{2^m}$ ir savstarpēji pirmskaitļi visiem naturāliem n un m, kam $n \neq m$.

Piezīme. Pieraksts a^{b^c} vienmēr nozīmē $a^{(b^c)}$, t.i. darbību locekļus saliktās pakāpēs grupē no labās puses uz kreiso, nevis no kreisās uz labo. (Savukārt $(a^b)^c$ ir cita izteiksme, tā ir $a^{b \cdot c}$.)

Uzdevums 2.3: Atbilde: Vienādojumam nav atrisinājumu veselos skaitļos.
Pamatosim, ka viens no pirmskaitļiem, piemēram, p ir 2. No pretējā: Ja visi 5 pirmskaitļi būtu nepāru, tad mēs iegūtu, ka 4 nepāru skaitļu summa ir nepāru skaitlis. Pretruna.
Aplūkosim atlikumus, kādus veido veselu skaitļu kubi, dalot ar 7. Pārlasot visas 7 kongruenču klases (t.i. skaitļus a, kas dod visus iespējamos atlikumus $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, tos dalot ar 7), iegūstam, ka

$$\begin{cases} a^3 \equiv 1 \pmod 7, & \text{ja } a \equiv 1 \text{ vai } a \equiv 2 \text{ vai } a \equiv 4 \pmod 7 \\ a^3 \equiv 6 \pmod 7, & \text{ja } a \equiv 3 \text{ vai } a \equiv 5 \text{ vai } a \equiv 6 \pmod 7 \\ a^3 \equiv 0 \pmod 7, & \text{ja } a \equiv 0 \pmod 7 \end{cases}$$

Tā kā viens no kreisās puses saskaitāmajiem ir 2^3 (atlikums 1, dalot ar 7), tad ir tikai nedaudzi veidi, kā tam pieskaitot vēl 3 kongruenču klases, izvēloties no 0, 1, 6 pēc (mod 7) varam iegūt summu 0, 1 vai 6, kas varētu atbilst kāda vesela skaitļa kubam:

$$\begin{cases} 1 + (0 + 0 + 0) & \equiv & 1 \pmod 7 \\ 1 + (0 + 0 + 6) & \equiv & 0 \pmod 7 \\ 1 + (0 + 1 + 6) & \equiv & 1 \pmod 7 \\ 1 + (0 + 6 + 6) & \equiv & 6 \pmod 7 \\ 1 + (1 + 6 + 6) & \equiv & 0 \pmod 7 \end{cases}$$

Faktiski, $1+(1+6+6) \equiv 0$ nav iespējams panākt, jo tad sanāktu, ka saskaitot četru pirmskaitļu kubus, var iegūt 7^3. Bet, pat izvēloties pašus lielākos pirmskaitļus, kuru kubi dotu attiecīgi atlikumus 1, 6 un 6, mēs dabūtu $2^3 + (3^3 + 5^3 + 5^3) = 285 < 343 = 7^3$. Tādēļ ekvivalences kreisajā pusē noteikti viens no četriem saskaitāmajiem ir kongruenču klase 0, kuru dod vienīgi pirmskaitlis, kas vienāds ar 7 (jebkurš cits skaitlis, kurš dalās ar 7 nav pirmskaitlis). Apzīmējumus izvēlamies tā, lai $q = 7$.
Esam ieguvuši vienādojumu $2^3 + 7^3 + r^3 + s^3 = t^3$. Tālāk aplūkojam kongruenču klases pēc (mod 13). Kongruenču klases no 0 līdz 12, ja tās kāpina kubā, dod šādus 13 rezultātus:

$$\{0, 1, 8, 1, 12, 8, 8, 5, 5, 1, 12, 5, 12\}.$$

Ņemot vērā to, ka divi no pirmskaitļiem kreisajā pusē ir 2 un 7, un $2^3 \equiv 8 \pmod{13}$, bet $7^3 \equiv 5 \pmod{13}$, tad šo abu kongruenču klašu summa ir 0. Piemeklēt r^3, s^3 un t^3 starp kongruenču klasēm $\{0, 1, 5, 8, 12\}$ tā, lai $2^3+7^3+r^3+s^3$ un t^3 piederētu tai pašai klasei (mod 13) var tikai divos veidos, ja neņem vērā abu iekavās esošo saskaitāmo secību: $8 + 5 + (1 + 12) \equiv 0$ vai arī $8 + 5 + (5 + 8) \equiv 0$. Jebkurā gadījumā sanāk, ka t^3 un arī t ir kongruents 0 jeb dalās ar 13. Tādēļ $t = 13$, jo tas ir vienīgais pirmskaitlis, kurš dalās ar 13.
Iegūstam, ka jārisina vienādojums $2^3 + 7^3 + r^3 + s^3 = 13^3$. Turklāt, kongruences pēc (mod 7) parāda, ka vienīgā iespēja ir $1+0+6+6 \equiv 6 \pmod 7$, jo 13^3 labajā pusē ir kongruents skaitlim 6. Bet šajā situācijā r^3 un s^3 atrast vairs nav iespējams, jo vienīgais pirmskaitlis, kurš nepārsniedz 13 un dod atlikumu 6, dalot ar 7 ir skaitlis 13. Bet, acīmredzot, $2^3 + 7^3 + 13^3 + 13^3 \neq 13^3$. Iegūta pretruna. Tādēļ pirmskaitļi p, q, r, s, t, kas apmierinātu uzdevuma vienādību, neeksistē.
■