Uzdevumu lapa #12

Uzdevums 112.1: Uz galda atrodas n konfektes, n – naturāls skaitlis. Divi spēlētāji pamīšus ēd pa x^2 konfektēm, kur x – naturāls skaitlis (x var mainīties no gājiena uz gājienu). Tas, kam nav ko ēst, zaudē. Pierādīt: ir bezgalīgi daudz tādu n, ka, pareizi spēlējot, otrais spēlētājs var uzvarēt.

Uzdevums 112.2: Naturālu skaitli n sauksim par sakarīgu, ja eksistē slēgta lauzta līnija ar n posmiem, kura katru savu posmu krusto tieši 2 reizes. Tā piemēram, 5 ir sakarīgs skaitlis, skat. Attēlu 1. Noskaidro, kādiem naturāliem k skaitlis 2^k ir sakarīgs!

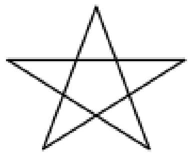

Figure 1: Lauzta līnija ar $n = 5$ posmiem, katru posmu krusto tieši divreiz.

Uzdevums 112.3: Cik veidos taisnstūri ar izmēriem 3×12 rūtiņas var sadalīt taisnstūros ar izmēriem 1×3 rūtiņas? (Dalījuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām, taisnstūri var būt novietoti gan horizontāli, gan vertikāli.)

Uzdevums 112.4: Klasē ir 17 skolēni. Katru dienu daži no viņiem (vismaz viens) tiek izsaukti pie tāfeles. Kāds ir mazākais dienu skaits, pēc kurām ir iespējams, ka katriem diviem klases skolniekiem ir bijusi diena, kad viens no viņiem ir izsaukts pie tāfeles, bet otrs nē?

Uzdevums 112.5: Kādas valodas alfabētā ir i patskaņi ($i \geq 2$) un j līdzskaņi ($j \geq 2$). Šajā valodā par vārdu sauc jebkuru galīgu burtu (patskaņu un līdzskaņu) virkni, kas satur vismaz vienu burtu un kurā nekādi divi patskaņi neparādās pēc kārtas un pēc kārtas uzrakstīti līdzskaņi ir ne vairāk kā divi (piemēram, ja "A" ir patskanis, bet "B" – līdzskanis, tad, piemēram, "ABBA" ir vārds, turpretī "BAAB" un "ABBBA" nav vārdi). Ar $S(n)$ apzīmēsim visu to vārdu skaitu, kuri sastāv no n burtiem, $n \geq 1$. Pierādīt, ka visiem naturāliem skaitļiem n ir spēkā vienādība

$$S(n+3) = i \cdot j \cdot S(n+1) + i \cdot j^2 \cdot S(n).$$