3. mājasdarbs

Lietišķie algoritmi: Lineārā programmēšana
Termiņš: 2020-12-11

Atrisinājumus lūdzam pārveidot par vienu PDF.

1.uzdevums (Simpleksalgoritma soļi).
No noliktavas ik dienu jāizved uz galapunktu 480 kastes ar āboliem, 400 kastes ar bumbieriem un 230 kastes ar cidonijām. Katru no produktiem var piegādāt pa pastu, ar kurjeru vai ar dronu. Kurjeri katru dienu var piegādāt līdz 420 kastēm ar jebkuru produktu, droni katru dienu var piegādāt līdz 250 kastēm ar jebkuru produktu. Parastais pasts var piegādāt jebkuru kastu skaitu. Katram piegādes veidam atšķiras pašizmaksa, ātrums un tātad – arī peļņa. Noliktavas peļņa par vienu kasti (atkarībā no produkta veida un piegādes metodes) parādīta tabulā:

Produkts	Pasts	Kurjers	Drons
Āboli	4 EUR	12 EUR	7 EUR
Bumbieri	4 EUR	13 EUR	9 EUR
Cidonijas	8 EUR	14 EUR	11 EUR

(A) Uzrakstīt lineāru programmu, kas ir standartformā, lai ar to varētu sākt simpleksu metodi.
(B) Uzrakstīt visus simpleksa metodes soļus, izmantojot Danciga metodi, nomainot kārtējo brīvo mainīgo ar standartmainīgo. (Šī metode ir izplatītākā. Nomaiņas metožu jeb *Pivot rules* pārskatu sk. šeit: `https://bit.ly/3fDMzkn`).
(C) Atrast, cik kastes jāpiegādā ar katru no metodēm, lai maksimizētu peļņu. (Jūsu atbildes var nebūt veseli skaitļi – veselu skaitļu programmēšanas uzdevumu ar simpleksa metodi parasti nevar atrisināt.)

2.uzdevums (Tuvināšana ar taisni).
Plaknē doti šādi 5 punkti:

$$(1,3),(2,5),(3,6),(5,8),(8,13).$$

Apzīmējam tos attiecīgi ar (x_1,y_1), ..., (x_5,y_5).
(A) Atrast taisni $ax+by=c$, kas iet iespējami tuvu šiem punktiem (neviena taisne nevar iet cauri visiem šiem punktiem). Uzrakstīt lineāru programmu (tā nav jārisina!), lai atrastu taisni, kura minimizē maksimālo absolūto kļūdu:

$$\max_{i\in\{1,\ldots,5\}} |ax_i+by_i-c|.$$

(B) Vai eksistē lineāra programma, kas minimizē pilno kvadrātisko kļūdu:

$$\sum_{i\in\{1,\ldots,5\}} (ax_i+by_i-c)^2.$$

(Parodija par uzdevumu 7.8, sk. p.240 `https://bit.ly/2YcgCtW`.)

3.uzdevums (Veselo skaitļu programmēšana).
Izpildīt "branch and bound" algoritmu: Atrast x_i, kas var pieņemt tikai veselas vērtības 0 vai 1, šādai lineārajai programmai:

$$\min\ x_1+4x_2+x_3+x_4,$$

kur ir spēkā ierobežojumi:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 2, \\ x_1 + x_2 + x_4 \geq 2, \\ 0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq 1, \\ 0 \leq x_3 \leq 1,\ 0 \leq x_4 \leq 1. \end{cases}$$

Piezīme. "Branch and bound" metode meklē atrisinājumu starp visām 16 teorētiski iespējamām bitu (x_1, x_2, x_3, x_4) kombinācijām (lielākam parametru skaitam to var būt daudz vairāk par 16). Lai saprastu, kuras bitu kombinācijas vajag pārbaudīt (un kuras var atmest), dažus mainīgos x_i piesaista noteiktām vērtībām (0 vai 1) un *relaksē* uzdevumu līdz parastai lineārai programmai. Ja arī relaksētā lineārā programma nedod labāku risinājumu par labāko pašreiz zināmo, visu šo zaru (ar visiem apakšvariantiem) atmet. Tas parasti ļauj jau uzreiz ārkārtīgi strauji samazināt meklējumu telpu, aprobežoties tikai ar tām bitu kombinācijām, kas dod risinājumu, kas tuvs optimālajam. Algoritms tiks aplūkots 23.novembra nodarbībā; relaksēto LP risināšanai varat izmantot jebkuru programmēšanas rīku vai Web lietotni, kas risina lineāras programmas.

4.uzdevums (Ceļošana ar motorolleru)

Komanda ar n cilvēkiem grib iespējami ātri nokļūt no punkta A līdz punktam B, virzoties pa ceļu garumā d. Katrs dalībnieks var iet kājām un viņiem ir uz visiem viens motorollers (sākumā tas atrodas punktā A, vienlaikus var pārvietot vienu cilvēku). Katram cilvēkam i $(1 \leq i \leq n)$ ir dots gan viņa iešanas ātrums w_i, gan ātrums, braucot ar motorolleru, s_i.

Uzdevums ir atrast veidu, kā visiem n cilvēkiem veikt ceļu no A uz B tā, lai minimizētu laiku no kustības sākuma līdz brīdim, kurā pēdējais cilvēks nonāk punktā B. Motorolleru jebkurš var atrast ceļmalā un to var savākt jebkurš cits no komandas. Komandas biedri var iet vai braukt ar motorolleru arī pretējā virzienā (pa ceļu atpakaļ uz punktu A), ja tas viņiem kaut kā palīdz.

(A) Aplūkojiet gadījumu, kad $n = 3$, $w_1 = w_2 = 1$, $s_1 = s_2 = 6$, $w_3 = 2$, $s_3 = 8$ un attālums $d = 100$. Atrast ātrāko veidu, kā viņiem visiem trim veikt attālumu d, nonākot no A uz B.

(B) Vispārīgajam gadījumam (jebkurai n vērtībai un patvaļīgiem ātrumiem) izveidot lineāru programmu, kuras atrisinājums ir apakšējais novērtējums laikam, kas vajadzīgs n personu komandai pārvietojoties par attālumu d. Šai lineārajai programmai jābūt iespējami mazai (mainīgo un ierobežojumu skaits ir $O(n)$), tas nav atkarīgs no d vai arī no konstrukcijā izmantoto posmu (pārsēšanos un virziena maiņu) skaita.

(C) Uzrakstīt citu variantu lineārajai programmai, ja neviens nedrīkst iet vai braukt pretējā virzienā (virzienā no B uz A). Vai šāds ierobežojums var palielināt ceļojumam nepieciešamo laiku? (Parodija par 4.uzd. no `https://bit.ly/3ectpC2`.)

5.uzdevums (I-Iespēja)

Definēsim "maksimālā sapārojuma" uzdevumu. Doti n cilvēki un n uzdevumi; zināms, kuri cilvēki drīkst pildīt kurus uzdevumus. Jānosaka maksimālais uzdevumu skaits, ko var izpildīt vienlaikus, ja viens cilvēks drīkst pildīt ne vairāk kā vienu uzdevumu (un vienu uzdevumu drīkst pildīt ne vairāk kā viens cilvēks). Šo uzdevumu var modelēt ar lineāru programmu ar mainīgajiem x_{ij} katram i,j, kur i ir cilvēks, kas drīkst pildīt uzdevumu j:

$$\text{Maksimizēt: } \sum_{ij} x_{ij},$$

ar nosacījumiem

$$\sum_j x_{ij} \leq 1, \text{ katram } i;$$

$$\sum_i x_{ij} \leq 1, \text{ katram } j;$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1, \text{ katram } i, j.$$

Pierādīt, ka šīs programmas maksimums reālos skaitļos sakrīt ar tās maksimumu veselos skaitļos (tas ir, katram atrisinājumam reālos skaitļos, kas sasniedz summu S, ir atrisinājums veselos skaitļos, kas sasniedz vismaz tikpat lielu summu S).