

NMS Izlase junioriem: 1.nodarbība skaitļu teorijā

1.nodaļa: Pirmskaitļi un dalāmība

1.uzdevums. Dota kopa $S = \{105, 106, \dots, 210\}$. Noteikt mazāko naturālo n vērtību, ka, izvēloties jebkuru n skaitļu apakškopu T no kopas S , tajā būs vismaz divi skaitļi, kuri nav savstarpēji pirmskaitļi.

Atrisinājums.

2.uzdevums. Visiem veseliem pozitīviem skaitļiem $m > n$ pierādīt, ka

$$\text{MKD}(m, n) + \text{MKD}(m + 1, n + 1) > \frac{2mn}{\sqrt{m - n}}.$$

Atrisinājums.

3.uzdevums. Vai eksistē bezgalīga stingri augoša naturālu skaitļu virkne $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$, ka jebkuram fiksētam naturālam skaitlim a virknē $a_1 + a < a_2 + a < a_3 + a, \dots$ ir tikai galīgs skaits pirmskaitļu?

Atrisinājums.

4.uzdevums. Pierādīt, ka virkne $1, 11, 111, \dots$ satur bezgalīgu apakšvirkni, kuras katri divi locekļi ir savstarpēji pirmskaitļi.

Atrisinājums.

2.nodaļa: Modulārā aritmētika

5.uzdevums. Atrast visus pirmskaitļus p , ka skaitlim $p^2 + 11$ ir tieši seši dažādi dalītāji (ieskaitot 1 un pašu skaitli).

Atrisinājums.

6.uzdevums. Uz tāfeles sākumā uzrakstīts viens skaitlis:

$$\underbrace{99 \dots 99}_{1997 \text{ deviņnieki}}.$$

Vienā gājienā atļauts kādu uz tāfeles esošo skaitli sadalīt divos reizinātājos; tad katru no reizinātājiem (neatkarīgi vienu no otra) palielināt vai samazināt par 2 un uzrakstīt šos rezultātus uz tāfeles.

Vai pēc kāda no gājieniem uz tāfeles var būt skaitļi, kas visi vienādi ar 9?

Atrisinājums.

7.uzdevums. Trijstūra malu garumi ir k , m un n . Pieņemsim, ka $k > m > n$ un

$$\left\{ \frac{3^k}{10^4} \right\} = \left\{ \frac{3^m}{10^4} \right\} = \left\{ \frac{3^n}{10^4} \right\}.$$

Noteikt trijstūra perimetra mazāko iespējamo vērtību.

Piezīme. Ar $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ apzīmē skaitļa x daļveida daļu - starpību starp skaitli x un tā veselo daļu (lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz x).

Atrisinājums.

8.uzdevums.

(a) Pierādīt, ka no 39 pēc kārtas sekojošiem naturāliem skaitļiem atradīsies skaitlis, kura ciparu summa dalās ar 11.

(b) Atrast mazākos 38 pēc kārtas sekojošus naturālus skaitļus, kuriem nevienam ciparu summa nedalās ar 11.

Atrisinājums.