Decimālpieraksts

Sacensības #2021.03

2021-03-25

Par šo LU NMS atbalstīto pasākumu
atbild `kalvis.apsitis@gmail.com`.

Uzdevums 3.1: Ar n apzīmēts mazākais naturālais skaitlis, kas dalās ar 56 un kura decimālpierakstā ir tikai cipari 0 vai 3. Atrast šo n.
Jautājums: Ierakstīt atbildē naturālu skaitli.

Atbilde. 3003000
Tā kā $56 = 7 \cdot 2^3$, tad ir nepieciešami un pietiekami, lai skaitlis dalītos ar abām pirmreizinātāju pakāpēm (t.i. gan ar 7, gan ar 8).
Lai skaitlis, kura beigās ir nepāru cipars (3), dalītos ar 8, tam galā jāpieraksta trīs nulles. Savukārt, mazākais skaitlis, kas dalās ar 7 (no cipariem 3 un 0) ir 3003. To pārbaudām, izmēģinot dalīt 3, 33, 303, 333 ar 7 (un pārliecināties, ka tie nedalās).
Tāpēc dalāmībai ar 7 jāizvēlas nākamais mazākais skaitlis 3003.
Tātad rezultāts ir $3003 \cdot 1000 = 3003000$.

Uzdevums 3.2: Sakārtotu pāri (k, m) ar nenegatīviem veseliem skaitļiem sauksim par vienkāršu, ja, saskaitot k un m stabiņā, nerodas pārnesumi. Atrast, cik ir vienkāršu pāru (k, m), kuriem summa $k + m = 1492$.
Jautājums: Ierakstīt atbildē naturālu skaitli – sakārtotu pāru kopskaitu ar aprakstīto īpašību.

Atbilde. 300
Daļēja Atbilde. 298
Pavisam sakārtotu pāru ar vajadzīgo summu ir $1492 + 1 = 1493$. Sākot ar $(0; 1492)$, $(1; 1491)$, $\ldots$, $(1492; 0)$.
No tiem daži ir tādi, kuros nav pārnesumu.
Tūkstošu ciparā var būt $0 + 1$ vai $1 + 0$ (pavisam divi veidi iegūt summā 1).
Simtu ciparā var būt $0 + 4 = 1 + 3 = 2 + 2 = 3 + 1 = 4 + 0$ (pavisam pieci veidi kā iegūt 4).
Veidu skaits katrā decimālpieraksta pozīcijā ir par vienu lielāks nekā attiecīgais cipars. Tādēļ veidu skaitu varam izteikt kā reizinājumu:

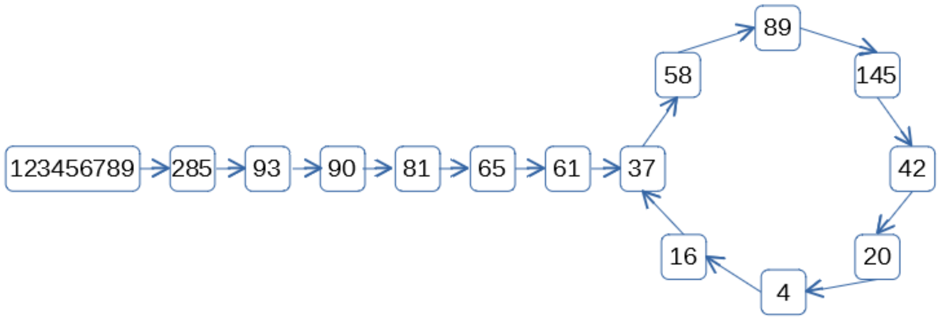
$$(1 + 1) \cdot (4 + 1) \cdot (9 + 1) \cdot (2 + 1) = 300.$$

Piezīme. Pārnesumu skaits dažreiz ir svarīgs arī uzdevumos, kas nav saistīti ar skaitļa pierakstu – sk. *Kummera teorēmu* (`https://bit.ly/2QFwrb9`), kas ļauj paregot, ar kādu pirmskaitļa p pakāpi dalīsies kombināciju skaits C_n^k. Bet šajā uzdevumā tas nedarbojas, jo 10 nav pirmskaitlis. Ja skaita nevis pārus ar veseliem nenegatīviem skaitļiem, bet ar naturāliem skaitļiem (t.i. neatļauj pārus $(0; 1492)$ un $(1492; 0)$, tad sanāk atbilde 298, kas skaitās daļēji pareiza.

Uzdevums 3.3: Katram naturālam skaitlim n apzīmējam ar $f(n)$ tā ciparu kvadrātu summu. Atrast vērtību $f^{2021}(123456789)$, kur $f^2(n) = f(f(n))$, $f^3(n) = f(f(f(n)))$; un $f^{2021}(n)$ apzīmē funkcijas pielietošanu 2021 reizi.
Jautājums: Ierakstīt atbildē naturālu skaitli, $f^{2021}(123456789)$ vērtību.

Atbilde. 4
Daļēja Atbilde. 20 (neliela nobīde pa ciklu)

Skaitļa ciparu kvadrātu summa (atšķirībā no parastās ciparu summas, kas kalpo kā pazīme dalāmībai ar 3 un ar 9) nav pazīstama kā svarīga pazīme vai invariants.
Toties viegli pamatot, ka pēc kāda laika ciparu kvadrātu summa ieciklosies (lielām n vērtībām virkne $n, f(n), f(f(n)), \ldots$ vispirms strauji dilst, bet pēc tam nonāk intervālā $[1;199]$, no kura ārā vairs nekad netiek, jo $1^2+9^2+9^2 \leq 199$). Tāpēc neizbēgami kaut kad šajā virknē parādīsies divas vienādas vērtības $f^k(n)$ un $f^m(n)$, kam $k \neq m$.
Mūsu gadījumā "satikšanās punkts" ir $f^7(123456789) = f^{15}(123456789)$, t.i. iegūstam virkni ar priekšperioda garumu 7 un perioda garumu 8.



Attēls 1: Ciparu kvadrātu summu virkne ar priekšperiodu un periodu.

Kāds ir šīs virknes 2021.loceklis? Atņemam priekšperiodu un dalām ar periodu: $(2021-7)$ dod atlikumu 6, dalot ar 8. Tāpēc $f^{2021}(123456789) = 4$, kas ir 6.skaitlis periodā (sk. astoņstūraino ciklu Attēlā 1).
Piezīme. Priekšperiods šajā situācijā rodas tādēļ, ka $f(16) = f(61) = 37$, t.i. diviem atšķirīgiem $n_1 = 16$ un $n_2 = 61$ funkcijas vērtības sakrīt: $f(n_1) = f(n_2)$. Šādu situāciju sauc par "kolīziju" jeb "sadursmi" un tad arī saka, ka funkcija f nav injektīva, jo skaitlim 37 eksistē divi dažādi skaitļi (16 un 61), kuri par to attēlojas. (Sk. `https://bit.ly/3spwxlc`).

Uzdevums 3.4: Pieņemsim, ka n ir naturāls skaitlis un d ir cipars (no 0 līdz 9). Atrast n, ja zināms, ka

$$\frac{n}{810} = 0.d25d25d25... = 0.(d25)$$

ir bezgalīga periodiska daļa.
Jautājums: Ierakstīt atbildē naturālu skaitli n.

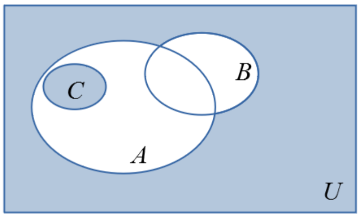
Atbilde. 750
Šo uzdevumu var efektīvi risināt ar "pilno pārlasi: Var reizināt visus skaitļus 0.(025), 0.(125), ..., 0.(925) ar 810, kamēr iegūstam veselu skaitli (jāpārbauda tikai 10 iespējas).
Bet tā kā olimpiādēs kalkulatorus parasti nevar izmantot, papūlēsimies atrast analītisku risinājumu. Ievērojam, ka $1/999 = 0.(001)$, tāpēc katrs skaitlis ar 3-ciparu periodu ir pierakstāms kā $\overline{d25}/999$. Tā kā 999 dalās ar 37, bet 810 nedalās ar 37, tad ar 37 jāvar noīsināt daļā $\overline{d25}/999$. Vienīgais skaitlis, kurš dalās ar 37 būs $925 = 37 \cdot 25$, tātad cipars $d = 9$.
Visbeidzot atrisinām $\frac{925}{999} = \frac{n}{810}$. Iegūstam $n = 750$.

Uzdevums 3.5: Apzīmēsim ar A racionālo skaitļu apakškopu. Racionāls skaitlis $r \in A$ tad un tikai tad, ja $0 < r < 1$ un

$$r = 0.abcabcabc... = 0.(abc)$$

tātad r izsakāms kā bezgalīga decimāldaļa ar periodu 3 cipari (a, b, c - starp tiem var būt arī vienādi cipari), bet bez priekšperioda.
Ja visus kopas A elementus uzraksta kā nesaīsināmas daļas, cik dažādi skaitītāji ir visām šīm daļām kas pieder A?
Jautājums: Ierakstīt naturālu skaitli: dažādo skaitītāju skaitu, kas iespējami daļām $p/q = r$, kur $r \in A$.

Atbilde. 660
Daļēja Atbilde. 648
Tā kā $1/999 = 0.001001\ldots = 0.(001)$, tad visus $r \in A$ var uzrakstīt kā $n/999$, kur $n = 1, \ldots, 998$ un daļa $n/999$, iespējams, ir saīsināma.
Noskaidrosim, kurām n vērtībām tā ir saīsināma. Sadalām pirmreizinātājos $999 = 3^3 \cdot 37$. Tāpēc n vērtības, kuras dalās ar 3 vai ar 37 tūlīt varēs saīsināt. Tas gan nenozīmē, ka pēc saīsināšanas $n/999 = p/q$ nevar iegūt tādu daļas skaitītāju p, kas dalītos ar 3. Jo izrādās, ka 999 dalās ar 27, bet ir arī 12 tādi skaitļi $(81, 162, \ldots, 972)$, kuri dalās ar 81, un kuri izveido vēl divpadsmit tādas daļas p/q, kurām pirmreizinātāji 3^k noīsinās tikai daļēji (jo 999 dalās ar 3^3, bet ar augstākām 3 pakāpēm tas nedalās).



Attēls 2: Eilera diagramma skaitļu kopām, kas dalās ar 3, ar 37, ar 81.

Lai šo situāciju uzskatāmāk saprastu, ieviesīsim šādas kopas:
Kopa U satur visus $n \in [1; 998]$ (vislielāko kopu, kurā veic visas darbības, sauc par "universu"),
Kopa A satur tos $n \in [1; 998]$, kas dalās ar 3,
Kopa B satur tos $n \in [1; 998]$, kas dalās ar 37,
Kopa $C \subset A$ satur tos $n \in [1; 998]$, kas dalās ar 81,
Kopa $A \cup B$ satur tos $n \in [1; 998]$, kas dalās ar 3 vai ar 37 (kopu A, B apvienojums),
Kopa $A \cap B$ satur tos $n \in [1; 998]$, kas dalās ar 3 un ar 37 (kopu A, B šķēlums).
Attēlā 2 attēlota Eilera diagramma (atšķirībā no Venna diagrammas, tai jāattēlo nevis visi $2^3 = 8$ reģioni, ko veido trīs šķeļo bet tikai tie, kuri reāli eksistē; tātad C var zīmēt kopas A iekšpusē.
Unikālus daļu skaitītājus dod tikai tie reģioni, kuri Attēlā 2 iekrāsoti (t.i. vai nu atrodas ārpus A un B, vai arī atrodas kopā C un izveido daļas skaitītāju, kurš dalās ar 3).
Ja kopu elementu skaitu apzīmējam ar $|U|$, $|A|$, $|B|$, $|C|$, tad iegūsim šādu izteiksmi iekrāsotajam reģionam:

$$|U| - |A \cup B| + |C| = |U| - (|A| + |B| - |A \cap B|) + |C| = 998 - (332 + 26 - 8) + 12 = 660.$$

Mēs te izmantojām to, ka elementu skaits kopā A ir $|A| = \lfloor 998/3 \rfloor = 332$,
$|B| = \lfloor 998/37 \rfloor = 26$,
$|A \cap B| = \lfloor 998/111 \rfloor = 8$,
$|C| = \lfloor 998/81 = 12 \rfloor$.
Sakarību, kas ļauj pārrakstīt $|A \cup B|$ par $|A| + |B| - |A \cap B|$ kombinatorikā sauc par ieslēgšanas-izslēgšanas principu; sk. `https://bit.ly/2P6ZqUM`.

Piezīme. Tie, kuri aizmirsa pieskaitīt 12 (visus tos skaitļus, kuriem daļas $n/999$ skaitītājs dalās ar 81 un tāpēc nenoīsinās pilnībā ar 999), ieguva atbildi 648, ko uzskatām par daļēji pareizu.

Uzdevums 3.6: Katram naturālam skaitlim n ar $p(n)$ apzīmējam visu nenulles ciparu reizinājumu skaitlī n. (Ja skaitlī n ir tikai viens cipars, tad $p(n) = n$.). Aprēķinām

$$S = p(1) + p(2) + ... + p(999).$$

Atrast skaitļa S lielāko pirmreizinātāju.
Jautājums: Ierakstīt atbildē lielāko pirmskaitli, ar kuru dalās S.

Atbilde. 103
Sasummējam pirmos 9 skaitļus (apzīmējam to ar S_1:

$$S_1 = 1 + 2 + \ldots + 9 = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45.$$

Sasummējam arī līdz $p(99)$ (apzīmējam to ar S_2):

$$\begin{aligned} S_2 =& (p(1) + p(2) + \ldots + p(9)) + (p(10) + p(11) + p(12) + \ldots p(19)) + \ldots + (p(90) + \ldots p(99)) = \\ =& S_1 + S_1 \cdot (1 + (1 + 2 + \ldots 9)) = 45 + 45 \cdot 46 = 2115. \end{aligned}$$

Tālāk apskatām visus skaitļus no 1 līdz 999 (izņemot pilnos simtus 100, 200, 300, ..., 900) sagrupējam desmit grupās (atkarībā no simtu cipara):

$$\begin{aligned} S_3 =& (p(1) + \ldots + p(99)) + (p(101) + \ldots + p(199)) + \ldots + (p(901) + \ldots + p(999)) = \\ =& 1 \cdot S_2 + 1 \cdot S_2 + 2 \cdot S_2 + \ldots + 9 \cdot S_2 = \\ =& (1 + 1 + 2 + \ldots + 9) \cdot S_2 = 46 \cdot 2115 = 97290. \end{aligned} \tag{1}$$

Visbeidzot pieskaitām $p(100) + p(200) + \ldots + p(900) = S_1 = 45$. Iegūstam

$$S = 97290 + 45 = 97335.$$

Dalām pirmreizinātājos:

$$97335 = 27 \cdot 3605 = 27 \cdot 5 \cdot 721 = 27 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 103.$$

Lielākais pirmreizinātājs ir 103.

Uzdevums 3.7: Atrast mazāko naturālo k ar īpašību, ka $16^k \equiv 1 \pmod{41}$.
Jautājums: Ierakstīt atbildē mazāko naturālo kāpinātāju k, kuram 16^k dod atlikumu 1, dalot ar 41.

Atbilde. 5
Kāpinot (pēc 41 moduļa), varam atrast

$$\begin{cases} 16^1 \equiv 16 \pmod{41}, \\ 16^2 \equiv 10 \pmod{41}, \\ 16^3 \equiv 37 \pmod{41}, \\ 16^4 \equiv 18 \pmod{41}, \\ 16^5 \equiv 1 \pmod{41}. \end{cases}$$

Tātad jau pie $k = 5$ atlikums 16^k, dalot ar 41, būs 1. Ievērojiet, ka tas notiek daudz ātrāk nekā tas, ko prognozē Mazā Fermā teorēma ($16^{40} \equiv 1 \pmod{41}$), jo pēc šīs teorēmas periods iestājas pēc $p - 1 = 40$ soļiem, ja pirmskaitlis $p = 41$.
Piezīme. Mazāko skaitli k, kuram $a^k \equiv 1 \pmod{p}$ sauc par skaitļa a multiplikatīvo kārtu (pēc pirmskaitļa p moduļa). Tātad skaitļa 16 multiplikatīvā kārta ir $5 \pmod{41}$. Sk. `https://bit.ly/31gCpBe`. Viegli pamatot, ka multiplikatīvā kārta vienmēr ir skaitļa $p-1$ dalītājs, lai būtu ievērota M.Fermā teorēma.

Uzdevums 3.8: Heksadecimālajā sistēmā (ar bāzi $B = 16$) lieto šādus ciparus:

$$\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{2}, \mathtt{3}, \mathtt{4}, \mathtt{5}, \mathtt{6}, \mathtt{7}, \mathtt{8}, \mathtt{9}, \mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C}, \mathtt{D}, \mathtt{E}, \mathtt{F}.$$

Piemēram, cipara $\mathtt{F}_{16}$ vērtība ir 15 (decimāli), bet cipara $\mathtt{A}_{16}$ vērtība ir 10 (decimāli). Skaitlis $\mathtt{FFF}_{16}$ apzīmē $15 \cdot B^2 + 15 \cdot B + 15 = 15 \cdot 256 + 15 \cdot 16 + 15 = 4095$.
Heksadecimālajā sistēmā var pierakstīt arī daļskaitļus. Piemēram,

$$\mathtt{0.AA}_{16} = 10 \cdot B^{-1} + 10 \cdot B^{-2} = 10 \cdot \frac{1}{16} + 10 \cdot \frac{1}{16^2} = 0.6640625.$$

$$\mathtt{0.0F0F0F}\ldots_{16} = \mathtt{0.(0F)}_{16} = 15 \cdot \left(\frac{1}{256}\right) + 15 \cdot \left(\frac{1}{256}\right)^2 + \ldots = \frac{1}{17}.$$

(Summēšanai izmanto bezgalīgu ģeometrisko progresiju.)
Atrast perioda ciparus skaitļa $1/41$ heksadecimālajā pierakstā (šeit skaitlis 41 pierakstīts decimāli).
Jautājums: Ierakstīt atbildē perioda ciparus skaitlim $1/41$ (bez nulles, punkta vai iekavām). Teiksim, $1/17$ gadījumā atbilde būtu `0F`.

Atbilde. `063E7`
Iepriekšējā jautājumā jau noskaidrojām, ka $16^5 - 1 = 1048575$ dalās ar 41; dalīšanas rezultāts ir $(16^5 - 1)/41 = 25575$. Tāpēc

$$\frac{1}{41} = \frac{25575}{1048575} = 25575 \cdot \frac{1}{16^5 - 1} = 25575 \cdot \left(\frac{1}{16^5} + \frac{1}{16^{10}} + \frac{1}{16^{15}} + \frac{1}{16^{20}} + \ldots\right).$$

Pēdējā vienādība seko no bezgalīgas ģeometriskas progresijas summas formulas.
Pārveidojam šo daļu heksadecimālajā skaitīšanas sistēmā:

$$\frac{1}{1048575} = 0.000010000100001\ldots_{16}. \tag{2}$$

Pārveidojam 25575_{10} par heksadecimālu skaitli, atkārtoti dalot ar 16:

$$\begin{aligned}
&25575 = 1598 \cdot 16 + 7,\\
&1598 = 99 \cdot 16 + 14,\\
&99 = 6 \cdot 16 + 3,\\
&6 = 0 \cdot 16 + 6.
\end{aligned}$$

Tāpēc $25575_{10} = \mathtt{063E7}_{16}$. Tagad reizinām to ar (2) (jeb dalām ar 1048575 lai iegūtu precīzi $\frac{1}{41}$). Iegūstam:

$$\frac{25575}{1048575} = \frac{1}{41} = \mathtt{0.063E7063E7063E7}\ldots_{16} = \mathtt{0.(063E7)}_{16}.$$

Piezīme. Šis pieraksts `0.063E7063E7`... ir tieši tas, kā skaitlis $\frac{1}{41}$ glabājas datora atmiņā (jo tur arī daļskaitļus glabā bināri, nevis decimāli). Daļskaitļus un "peldošā punkta" skaitļus (`float`, `double` tipi daudzās programmēšanas valodās) noapaļo, lai tie ietilptu 4-baitu vai 8-baitu atmiņas reģistrā. Viens baits jeb astoņi biti ir divi heksadecimālie cipari, jo $16^2 = 2^8$.

Uzdevums 3.9: Skaitli r var uzrakstīt kā decimāldaļu ar četriem cipariem aiz komata: $0.abcd$, kur a, b, c, d ir jebkuri cipari (ieskaitot 0 un arī vienādus ciparus).
Katru šādu r cenšamies tuvināt ar parastu daļskaitli $\dfrac{1}{n}$ vai $\dfrac{2}{n}$ (tātad daļu, kuras skaitītājā ir 1 vai 2).
Izrādījās, ka skaitlim r tuvākā daļa ar šo īpašību ir $\frac{2}{7}$. Cik ir dažādas iespējamās vērtības skaitlim r?
Jautājums: Ierakstīt atbildē naturālu skaitli - dažādo r vērtību skaitu.

Atbilde. 417
Daļēja atbilde 416.
Ievērosim, ka $\frac{1}{4} < \frac{2}{7} < \frac{1}{3}$. Citi daļskaitļi $1/n$ vai $2/n$ neparādās intervālos $[1/4; 2/7]$ vai $[2/7; 1/3]$. Aprēķināsim aritmētiskos vidējos starp abu intervālu galapunktiem:

$$\begin{cases} \frac{1/4+2/7}{2} \approx 0.267857 \\ \frac{2/7+1/3}{2} \approx 0.309524 \end{cases}$$

Tātad vismazākā četrciparu decimāldaļa, kas apaļojas uz $2/7$ būs 0.2679, bet pati lielākā būs 0.3095. Pavisam šādu daļu būs $(3095 - 2679) + 1 = 417$.
Piezīme. Ja aizmirst beigās pieskaitīt 1 (abi galapunkti $[0.2679; 0.3095]$ ieskaitīti!), tad daļēji pareiza atbilde.

Uzdevums 3.10: Naturālam skaitlim n ar $S(n)$ apzīmējam tā ciparu summu, bet ar $T(n)$ apzīmējam izteiksmi $T(n) = |S(n+2) - S(n)|$. Piemēram, $T(2019) = |S(2021) - S(2019)| = |5 - 12| = 7$.
Cik daudzas no funkcijas $T(n)$ iespējamajām vērtībām nepārsniedz 1999?

Atbilde. 223
Daļēja atbilde. 222

Ir divas iespējas: $S(n+2)$ var būt par 2 lielāks nekā $S(n)$ (ja skaitļa n pēdējais cipars nav 8 vai 9 un nenotiek pārnesums). Vai arī $S(n+2)$ var būt par 7 (vai par 16, vai par 25, vai par 34, utt.) mazāks nekā $S(n)$. Tas notiek tad, ja viens (vai divi, vai trīs, vai četri utt.) deviņnieki decimālpierakstā pārvēršas par nullēm.
Seko daži piemēri:

- Ja $n = 19$, tad $T(19) = |S(21) - S(19)| = |3 - 10| = 7$.
- Ja $n = 199$, tad $T(199) = |S(201) - S(199)| = |3 - 19| = 16$.
- Ja $n = 1999$, tad $T(1999) = |S(2001) - S(1999)| = |3 - 28| = 25$.
- Ja $n = 19999$, tad $T(19999) = |S(20001) - S(19999)| = |3 - 37| = 34$.

Šim samazinājumam noteikti jābūt par skaitli, kas dod atlikumu 7, dalot ar 9 (dalāmības pazīme ar 9, jo $S(n) \equiv n \pmod 9$ un tāpēc $T(n) = S(n) - S(n+2) \equiv -2 \equiv 7 \pmod 9$). Te varam pārveidot $T(n) = |S(n+2) - S(n)| = S(n) - S(n+2)$, jo pieņēmām, ka $S(n) > S(n+2)$ (pretējā gadījumā vienkārši $T(n) = 2$).
Starp pirmajiem 1999 naturālajiem skaitļiem atlikumu 7, dalot ar 9 dos sekojoši skaitļi:

$$7, 16, 25, 34, \ldots, 1996. \tag{3}$$

(Ievērosim, ka 1996 arī dod atlikumu 7, dalot ar 9.)
Šajā aritmētiskajā progresijā ir pavisam $(1996 - 7)/9 + 1 = 222$ skaitļu (jāpieskaita 1, jo abi galapunkti 1996 un 7 ir ieskaitīti).
Visbeidzot, pie visām 222 iespējamām $T(n) \leq 1999$ vērtībām skaitli 2 (jo $T(n)$ var būt arī 2, kas neietilpst progresijā (3). Iegūstam $222 + 1 = 223$.

Uzdevums 3.11: Cik daudzām vērtībām k, $\text{MKD}(6^6, 8^8, k) = 12^{12}$?
($\text{MKD}(a, b, c)$ apzīmē mazāko kopīgo dalāmo naturāliem skaitļiem a, b, c.)
Jautājums: Ierakstīt atbildē iespējamo k vērtību skaitu.

Atbilde. 25
Apzīmējam $a = 6^6 = 2^6 \cdot 3^6$; $b = 8^8 = 2^{24}$. Visbeidzot $N = 12^{12} = 2^{24} \cdot 3^{12}$.
Skaitlim k nedrīkst būt citi pirmreizinātāji kā 2 vai 3, jo citādi tie parādītos arī skaitlī N. Tāpēc apzīmējam $k = 2^u \cdot 3^v$, kur u, v ir kaut kādi veseli nenegatīvi skaitļi.
Mazākais kopīgais dalāmais $\text{MKD}(a, b, k)$ būs ar īpašību, ka tajā esošo pirmreizinātāju pakāpes ir maksimums no visu trīs skaitļu (a, b, k) pirmreizinātāju pakāpēm. Iegūstam šādas sakarības:

$$\begin{cases} \max(6, 24, u) = 24 \\ \max(6, 0, v) = 12 \end{cases}$$

Iegūstam, ka pirmreizinātāja 2 pakāpe mums vajadzīgajā skaitlī $N = 12^{12}$ jau ir sasniegta (pateicoties tam, ka $b = 8^8$ jau satur tieši 2^{24}). Savukārt pirmreizinātāja 3 pakāpe 12 vēl nav sasniegta – jābūt $v = 12$, lai tādu iegūtu. Savukārt u var pieņemt jebkuru vērtību $u = 0, 1, \ldots, 24$.
Tātad iespējamās k vērtības ir sekojošas:

$$k \in \left\{3^6, 2 \cdot 3^6, 2^2 \cdot 3^6, \ldots, 2^{23} \cdot 3^6, 2^{24} \cdot 3^6\right\}.$$

Šādu k vērtību ir pavisam 25.

Uzdevums 3.12: Cik daudziem naturāliem skaitļiem $n < 1000$ lielums $\lfloor \log_2 n \rfloor$ ir pāra skaitlis? (Šeit $\log_2 n$ apzīmē logaritmu ar bāzi 2; un $\lfloor x \rfloor$ ir veselā daļa – lielākais veselais skaitlis, kas nepārsniedz x.)

Atbilde. 341
Daļēja Atbilde. 340

Sadalām $[1; 1000)$ vairākos pusatvērtos intervālos $[a; b)$ (kreisais galapunkts ieskaitīts, labais galapunkts nav ieskaitīts). Ievērojam, ka katrā šādā pusatvērtā intervālā ir tieši $(b - a)$ veseli skaitļi, pieņemot, ka a un b ir veseli.

n	$\log_2 n$ (vai ir pāra?)
$n \in [1;2)$	$\log_2 n = 0$ (pāra)
$n \in [2;4)$	$\log_2 n \in [1;2)$ (nepāra)
$n \in [4;8)$	$\log_2 n \in [2;3)$ (pāra)
$n \in [8;16)$	$\log_2 n \in [3;4)$ (nepāra)
$n \in [16;32)$	$\log_2 n \in [4;5)$ (pāra)
$n \in [32;64)$	$\log_2 n \in [5;6)$ (nepāra)
$n \in [64;128)$	$\log_2 n \in [6;7)$ (pāra)
$n \in [128;256)$	$\log_2 n \in [7;8)$ (nepāra)
$n \in [256;512)$	$\log_2 n \in [8;9)$ (pāra)
$n \in [512;1000)$	$\log_2 n \in [9;10)$ (nepāra)

Katram no intervāliem, kurā $\lfloor \log_2 n \rfloor$ ir pāra, saskaitām tajā esošo veselo skaitļu skaitu, atņemot no intervāla $[a;b)$ labā galapunkta šī intervāla kreiso galapunktu:

$$(2-1)+(8-4)+(32-16)+(128-64)+(512-256)=341.$$

Piezīme. Skaitli $n = 1$ daži risinātāji neieskaitīja, jo $\lfloor \log_2 1 \rfloor = 0$ ir pāra skaitlis (atbilst uzdevuma nosacījumiem), toties nav uzskatāms par naturālu skaitli. Arī šāda jautājuma teksta interpretācija ir kulturāla un iespējama (bet uzdevuma tekstā nav teikts, ka rezultātam $\lfloor \log_2 n \rfloor$ jābūt **pozitīvam** pāra skaitlim).