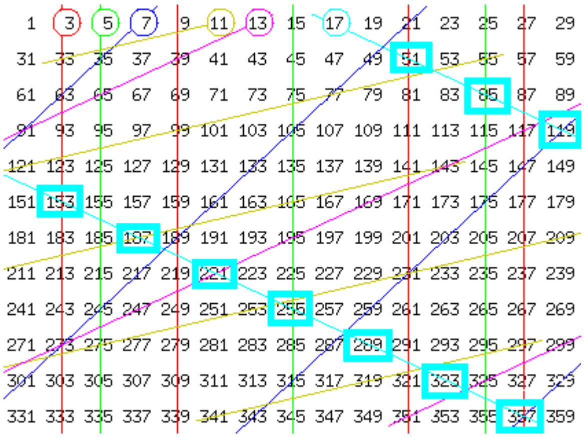
Dalāmība, Pirmskaitļi, LKD un MKD

Sacensības #21.01

2021-02-18

Par šo LU NMS atbalstīto pasākumu atbild `kalvis.apsitis@gmail.com`.



Attēls 1: Eratostēna režģis nepāru skaitļiem.

Uzdevums 1.1: Eratostēnam patīk veidot režģus šādi: Visus nepāra skaitļus viņš izkārto rindās pa 15; tad velk taisnes, uz kurām atrodas saliktie skaitļi, kas dalās ar 3, 5, 7, utt. Attēlā ar taisnstūrīšiem apvilkti visi nepāru saliktie skaitļi, kas dalās ar 17 (tie ir 51,85,119,153,187, ...). Pieņemsim, ka pēdējais skaitlis Eratostēna režģī ir 8999 (attēlā redzama tikai režģa augšdaļa).
Jautājums: Cik daudzi ar taisnstūrīti apvilkti skaitļi atradīsies tajā Eratostēna režģa kolonnā, kurā to ir vismazāk? Ierakstiet atbildē naturālu skaitli. (Par kolonnu saucam vertikāli, kur skaitļi rakstīti viens zem otra. Piemēram $1, 31, \ldots$ vai $3, 33, \ldots$.)

Atbilde: 17
"Vienmērības" Lemma: Nepāra skaitļi, kuri dalās ar 17 (ir apvilkti ar taisnstūrīti) visas vertikāles aizpilda "vienmērīgi": Tas nozīmē to, ka jebkura vertikāle saņem otro taisnstūrīti tikai pēc tam, kad **visas** vertikāles jau saņēmušas pirmo taisnstūrīti; jebkura vertikāle saņem trešo taisnstūrīti tikai pēc tam, kad visas jau saņēmušas otro utt. (Attēlā 1 nākamie ar taisnstūri apvilktie skaitļi nonāks 1.,3.,5.,7. kolonnā, kuras šobrīd ir tukšas, utt.)
Pierādījums seko no tā, ka aritmētiskajā progresijā

$$a_n = 51 + 34(n-1) \tag{1}$$

(nepāra skaitļi, kas dalās ar 17) jāpieskaita tieši 15 diferences $d = 34$, lai atgrieztos tajā pašā kolonnā (pirms tam "izstaigājot" visas citas kolonnas, jo arī tajās aritmētiskā progresija nonāk ne biežāk kā reizi 15 soļos). Mūsu gadījumā

$$a_1 = 51 \equiv a_{16} = 561 \pmod{15}.$$

Šāds "vienmērīgums" seko no tā, ka $\text{LKD}(34, 15) = 1$. Tie skaitļi, kuri dalās ar 3 un ar 5 (kam ir kopīgi dalītāji ar 15), nav izvietoti kolonnās vienmērīgi (sk. vertikālās sarkanās un zaļās taisnes zīmējumā). ■

Intuīcija: Katra tabulas rinda attēlo nepāra skaitļus no $[1;30]$; $[31;60]$ utt. Pavisam tabulā ir $9000/30 = 300$ šādu rindu; pa 15 nepāra skaitļiem katrā. Katrs septiņpadsmitais no tiem ir ar taisnstūrīti. "Vienmērības" īpašības dēļ daļā no kolonnām būs $\lfloor 300/17 \rfloor = \lfloor 17.64706 \rfloor = 17$ taisnstūrīši (ar $\lfloor x \rfloor$ apzīmēta apakšējā veselā daļa). Citās kolonnās būs $17+1 = 18$ taisnstūrīši.
Formāls atbildes pamatojums: Pirmais nepāru saliktais skaitlis, kas dalās ar 17 ir aritmētiskās progresijas (1) loceklis $a_1 = 51$ (pats 17 ir pirmskaitlis, tam nav sava taisnstūrīša); pēdējais ir $a_{264} = 8993$, jo $8993 = 17 \cdot \lfloor 9000/17 \rfloor$ ir lielākais skaitlis no $[1;9000]$, kas dalās ar 17 "Vienmērības lemmas" dēļ visi 264 aritmētiskās progresijas locekļi sadalās pa 15 kolonnām vienmērīgi (taisnstūrīšu skaits dažādās kolonnās nevar atšķirties vairāk kā par 1). Skaitli 264 tikai vienā veidā var izteikt kā 15 skaitļu summu, ievērojot šo nosacījumu:

$$264 = \underbrace{18+18+18+18+18+18+18+18+18}_{9 \text{ saskaitāmie}} + \underbrace{17+17+17+17+17+17}_{6 \text{ saskaitāmie}}.$$

Tādēļ tajās sešās kolonnās, kur taisnstūrīšu ir mazāk kā citās, to būs 17 (bet pārējās deviņās kolonnās būs pa 18).

Uzdevums 1.2: Tabulā attēloti veselie skaitļi $[5041;5160]$. Pirmajā solī izsvītro visus pāra skaitļus; otrajā solī – visus skaitļus, kuri dalās ar 3; trešajā solī – visus skaitļus, kuri dalās ar 5. Cik skaitļi palika neizsvītroti pēc šiem trim soļiem (citiem vārdiem, cik daudzi $x \in [5041;5160]$ nedalās ne ar vienu no skaitļiem 2, 3 vai 5.
Jautājums: Ierakstīt atbildē neizsvītroto skaitļu skaitu.

Atbilde: 32
Skaitļu intervāla garums ir 120; no tā izsvītro visus tos skaitļus, kuriem ir kopīgi dalītāji ar 120. Izsvītroto skaitļu daudzums nemainīsies, ja no katra intervāla skaitļa atņems nobīdi 5040.
Apgalvojums. Katram naturālam x, skaitlis $x+5040$ dalās ar 2 (attiecīgi ar 3, vai ar 5) tad un tikai tad, ja pats x dalās ar 2 (attiecīgi ar 3, vai ar 5).
Apgalvojumu var pamatot ar to, ka pati nobīde 5040 dalās ar $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Tāpēc neizsvītroto skaitļu būs pavisam

$$\varphi(120) = 120 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 120 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = 32.$$

(Sākumā ir 120 skaitļi, vispirms izsvītro katru otro (paliek puse), tad katru trešo (paliek divas trešdaļas no vēl neizsvītrotajiem) un visbeidzot katru piekto (paliek četras piektdaļas).

Uzdevums 1.3: Sienāzis sākumā atrodas punktā ar koordinātēm $(0;0)$. Vienā gājienā tas var pārvietoties no punkta $(x;y)$ uz kādu no četriem punktiem $(x-35;y-12)$, $(x+35;y+12)$, $(x-12;y+35)$ vai $(x+12;y-35)$. Pēc kāda laika sienāzis nonāk punktā $(1;y)$. Atrast mazāko pozitīvo y, kam tas ir iespējams.
Jautājums: Ierakstīt atbildē naturālu skaitli: mazāko y ar minēto īpašību.

Atbilde: 1252
Tā kā $\text{LKD}(35,12) = 1$, tad izpildās Bezū identitāte: Eksistē veseli skaitļi x, y, kam

$$35x + 12y = 1. \text{ Piemēram, } x = -1,\ y = 3.$$

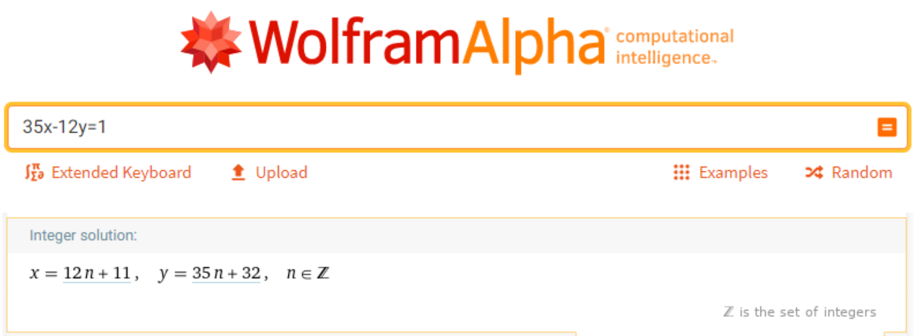
Ja sienāzis vienreiz izmantos gājienu $(x; y) \Rightarrow (x - 35; y - 12)$, bet pēc tam trīsreiz gājienu $(x; y) \Rightarrow (x + 12; y - 35)$, tad pārvietošanās izskatās šādi:

$$(0; 0) \;\Rightarrow\; (-35; -12) \;\Rightarrow\; (-23; -47) \;\Rightarrow\; (-11; -82) \;\Rightarrow\; (1; -117).$$

Šādi var panākt, lai jaunā x koordināte būtu $0 - 35 + 3 \cdot 12 = 1$. Diemžēl, y koordināte nav pozitīva.
Lai sienāzis iegūtu pozitīvu y koordināti, tas var no $(0; 0)$ pārvietoties 11 soļus pa lēcienu $(x + 35; y + 12)$, bet pēc tam 32 reizes pa lēcienu $(-12; +35)$:

$$(0; 0) \;\Rightarrow\; 11 \cdot (35; 12) + 32 \cdot (-12; +35) = (11 \cdot 35 + 32 \cdot (-12); 11 \cdot 12 + 32 \cdot 35 = (1; 1252).$$

Sienāzis nevar izmantot lēcienu $(x+35; y+12)$ mazāk kā 11 reizes, jo pie $k = 1, \ldots, 10$, skaitlim $35k$ nebūs atlikums 1, dalot ar 12. Lai atrastu visus atrisinājumus vienādojumam $35x - 12y = 1$, var izmantot Eiklīda algoritmu (meklēt LKD skaitļiem 35 un 12, lai atrastu veidus, kā izteikt $LKD(35, 12) = 1$). Var arī izmantot WolframAlpha [5] vienādojumu risinātāju; tur ir redzami arī atrisinājumi veselos skaitļos:



Attēls 2: WolframAlpha atrisinājums vienādojumam.

Uzdevums 1.4: Atrast mazāko x vērtību, kurai visi skaitļi $\mathrm{LKD}(14, x)$, $\mathrm{LKD}(14, x + 1)$, $\mathrm{LKD}(15, x)$ un $\mathrm{LKD}(15, x + 1)$ ir lielāki par 1.
Jautājums: Ierakstīt naturālu skaitli x ar šo īpašību.

Atbilde. 20
Lai minētās LKD vērtības nebūtu 1, abi skaitļi 14 un 15 nevar būt savstarpēji pirmskaitļi ne ar x, ne ar $x + 1$ (tas viss neraugoties uz to, ka paši 14 un 15 ir savstarpēji pirmskaitļi; arī x un $x + 1$ tādi ir).
Tā kā $14 = 2 \cdot 7$ un $15 = 3 \cdot 5$, tad x un $x + 1$ (pa abiem kopā) satur šos pašus četrus pirmreizinātājus, tikai citādi sakombinētus.
1.gadījums. x dalās ar $2 \cdot 5$ un $x + 1$ dalās ar $3 \cdot 7$ (maxākais atrisinājums $x = 20$, $x + 1 = 21$.
2.gadījums. x dalās ar $3 \cdot 7$ un $x + 1$ dalās ar $2 \cdot 5$ (mazākais atrisinājums $x = 189$, $x + 1 = 190$.
3.gadījums. x dalās ar $5 \cdot 7$ un $x + 1$ dalās ar $2 \cdot 3$ (maxākais atrisinājums $x = 35$, $x + 1 = 36$.
4.gadījums. x dalās ar $2 \cdot 3$ un $x + 1$ dalās ar $5 \cdot 7$ (mazākais atrisinājums $x = 174$, $x + 1 = 175$.
No visiem minētajiem gadījumiem vismazākais ir $x = 20$, kas arī ir mūsu atbilde.

Uzdevums 1.5: Aprēķināt summu LKD(10!, 1)+LKD(10!, 2)+LKD(10!, 3)+...+LKD(10!, 100), kur saskaita lielākos kopīgos dalītājus skaitlim 10! (desmit faktoriāls) ar pirmajiem 100 naturālajiem skaitļiem.

Atbilde: 1846
Daudziem $n \in [1; 100]$ ir spēkā $\text{LKD}(10!, n) = n$, jo 10! dalās ar n. Tāpēc "pirmo tuvinājumu" iegūstam, summējot skaitļus no 1 līdz 100, iegūstot

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050. \qquad (2)$$

Aplūkojam skaitļus $n = 11k$ ($n = 11, 22, 33, \ldots, 99$). Piemēram, $\text{LKD}(10!, 99) = 9$ (jo 10! nedalās ar 11), bet izteiksmē (2) jau esam pieskaitījuši nevis 9, bet 99. Tāpēc summai 5050 jāpieskaita negatīva "korekcija": $(9 - 99)$. Sagrupējam visas korekcijas skaitļiem ($n = 11, 22, 33, \ldots, 99$):

$$(1 - 11) + (2 - 22) + \ldots + (9 - 99) =$$
$$= (1 + 2 + \ldots + 9) - (11 + 22 + \ldots + 99) = 45 - 45 \cdot 11 = 45 \cdot (-10).$$

Līdzīgi darām arī tiem, kas dalās ar 13 (t.i. $n = 13, 26, \ldots, 91$); arī skaitļiem, kas dalās ar $p = 17, 19, 23, 29, 31$. Izrakstām visas korekcijas.

Ja $p = 13$, tad $(1 + 2 + \ldots + 7) - (13 + 26 + \ldots + 91) = 28 - 28 \cdot 13 = 28 \cdot (-12)$
Ja $p = 17$, tad $(1 + 2 + 3 + 4 + 5) - (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot 17 = 15 - 15 \cdot 17 = 15 \cdot (-16)$
Ja $p = 19$, tad $(1 + 2 + 3 + 4 + 5) - (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot 19 = 15 - 15 \cdot 19 = 15 \cdot (-18)$
Ja $p = 23$, tad $(1 + 2 + 3 + 4) - (1 + 2 + 3 + 4) \cdot 23 = 10 - 10 \cdot 23 = 10 \cdot (-22)$
Ja $p = 29$, tad $(1 + 2 + 3) - (1 + 2 + 3) \cdot 29 = 6 - 6 \cdot 29 = 6 \cdot (-28)$
Ja $p = 31$, tad $(1 + 2 + 3) - (1 + 2 + 3) \cdot 31 = 6 - 6 \cdot 31 = 6 \cdot (-30)$

Ja $p = 37, 41, 43, 47$, tad katram no tiem jāpieskaita $(1 + 2)$, bet jāatņem $(1 + 2) \cdot p$. Iegūstam

$$(1 + 2) \cdot 4 - (1 + 2) \cdot (37 + 41 + 43 + 47) = -492$$

Visbeidzot, ja $p = 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$, tad LKD summas korekcija ir

$$1 \cdot 10 - (53 + 59 + 61 + 67 + 71 + 73 + 79 + 83 + 89 + 97) = -722.$$

Pieskaitām šīs izmaiņas:
$5050 + 45 \cdot (-10) + 28 \cdot (-12) + 15 \cdot (-16) + 15 \cdot (-18) + 10 \cdot (-22) + 6 \cdot (-28) + 6 \cdot (-30) - 492 - 722 = 1972.$
Ja $n = 49$ vai $n = 98$, tad $\text{LKD}(10!, 49) = 7$ un $\text{LKD}(10!, 98) = 14$; tātad pieskaitām vēl divas negatīvas korekcijas: $1972 + (7 - 49) + (14 - 98) = 1846$.
Neviens skaitlis no $[1; 100]$ nevar dalīties ar vairākiem pirmskaitļiem (vai arī $49, 98$), tāpēc skaitļu atkārtošanās šajās korekcijās nav iespējama.

Uzdevums 1.6: Anna saliek 600 akmentiņus m kastītēs tā, ka ikvienā kastītē ir vienāds skaits dārgakmeņu. Kastīšu ir vairāk nekā viena un katrā kastītē ir vairāk nekā viens akmentiņš. Cik dažādām m vērtībām to var izdarīt?

Atbilde: 22
Skaitļa 600 sadalījums pirmreizinātājos ir $600 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2$. (Citiem vārdiem, $600 = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot p_3^{a_3}$, kur $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, bet $a_1 = 3$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$.)
Tādēļ pozitīvo dalītāju skaits skaitlim 600 ir (izmantojam formulu no [2]):

$$\sigma_0(600) = \sum_{d|600} 1 = \prod_{i=1}^{3} (a_i + 1) = (3 + 1)(1 + 1)(2 + 1) = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24.$$

Neder tie gadījumi, kad kastīšu skaits $m = 1$ vai $m = 600$. Atliek $24 - 2 = 22$ iespējas skaitļa m vērtībai.

Uzdevums 1.7: Atrast visu to skaitļu d summu, kuriem $d \mid 360$ un $d \mid 600$ (t.i. d ir skaitļa 360 **un** skaitļa 600 dalītājs).

Atbilde: 360
Skaitļi d ir precīzi tie, kuri ir skaitļa $\text{LKD}(360, 600) = 120$ dalītāji. Sadalām pirmreizinātājos: $120 = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot p_3^{a_3} = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$.
Skaitļa 120 dalītāju summa ir (izmantojam formulu no [3]):

$$\sigma_1(120) = \sum_{d|120} d = \prod_{i=1}^{3} (p_i^{a_i} + p_i^{a_i - 1} + \ldots + p_i + 1) = (1+2+4+8) \cdot (1+3) \cdot (1+5) = 360.$$

Uzdevums 1.8: Atrast visu to skaitļu d summu, kuriem $d \mid 360$ vai $d \mid 600$ (t.i. d ir skaitļa 360 **vai** skaitļa 600 dalītājs).

Atbilde: 2670
Dalām pirmreizinātājos:

$$\begin{cases} 120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1, \\ 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1, \\ 600 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2. \end{cases}$$

Izmantojot formulu no [3], iegūstam

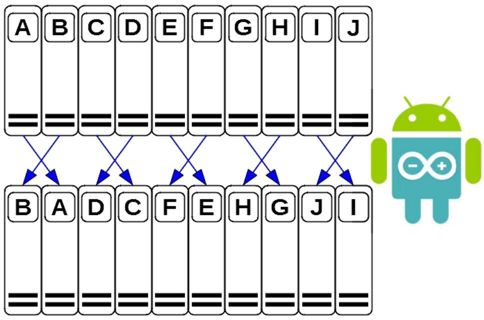
$$\begin{cases} \sigma_1(120) = (1+2+4+8) \cdot (1+3) \cdot (1+5) = 360, \\ \sigma_1(360) = (1+2+4+8) \cdot (1+3+9) \cdot (1+5) = 1170, \\ \sigma_1(600) = (1+2+4+8) \cdot (1+3) \cdot (1+5+25) = 1860. \end{cases}$$

Lai atrastu tos skaitļus, kuri dalās ar 360 vai 600, varam saskaitīt $1170 + 1860$, bet tie d, kuri ir abu šo skaitļu dalītāji (tātad arī skaitļa $120 = \text{LKD}(360, 600)$ dalītāji), ir ieskaitīti divas reizes. Tāpēc no šīs summas jāatņem 360:

$$1170 + 1860 - 360 = 2670.$$

Uzdevums 1.9: Ar faktoriāla palīdzību var konstruēt cik patīk garus intervālus, kuros nav neviena pirmskaitļa. Piemēram, ir zināms, ka intervālā $[14! + 2, \ldots, 14! + 14]$ ir 13 pēc kārtas sekojoši salikti skaitļi. Atrast līdzīgu intervālu $[x, x + 12] \subseteq [100; 200]$, kurā arī ir 13 skaitļi, no kuriem neviens nav pirmskaitlis.
Jautājums: Ierakstīt skaitli x, kur x ir pirmais saliktais skaitlis trīspadsmit saliktu skaitļu virknē.

Atbilde: `114`
Ar tiešām pārbaudēm varam pārliecināties, ka visi trīspadsmit skaitļi intervālā $[114; 126]$ ir salikti.
Piezīme. Atstarpes starp pirmskaitļiem minētas šajā tabulā: [4].



Attēls 3: Sējumu pārkārtošana.

Uzdevums 1.10: Karantīnas dēļ bibliotēkā drīkst uzturēties vienīgi robots. Plauktā ir 10 enciklopēdijas sējumi, kas apzīmēti ar burtiem $A, \ldots, J$, pašā sākumā tie sakārtoti pēc alfabēta. Reizi stundā robots sējumus pārkārto: sējumu, kurš atradās pirmajā vietā, noliek vietā n_1, ..., sējumu, kurš atradās desmitajā vietā, noliek vietā n_{10}. ($n_1, \ldots, n_{10}$ ir dažādi naturāli skaitļi no 1 līdz 10 – tie robota dzīves laikā paliek nemainīgi.)
Pēc tieši T šādām pārkārtošanām sējumi atkal sakārtojas sākotnējā alfabētiskajā secībā. Atrast lielāko perioda T vērtību. Piemēram attēlā redzamajam robotam, kurš vienkārši blakusesošos sējumus apmaina vietām, $T = 2$.
Jautājums: Ierakstīt naturālu skaitli: lielāko iespējamo perioda vērtību.

Atbilde: `30` (1 punkts).
Daļējās atbildes. Var dabūt arī periodus `12`, `15` vai `21` (0.5 punkts).
Grāmatu pārkārtošanu atbilstoši vienam un tam pašam musturam, kurā norādīts, uz kuru vietu pārceļ katru no grāmatām, sauc par saraksta *permutāciju*. Desmit grāmatām iespējamas pavisam $10! = 3628800$ (tik veidos var ieprogrammēt grāmatu jaukšanas robotu).
Permutācijām var veidot *kompozīcijas*, tās pielietojot vienu pēc otras (vispirms pārkārto pēc viena mustura, tad pēc otra). Starp visām permutācijām īpaša loma ir *vienības permutācijai*, kura atstāj visas grāmatas uz vietas. Mūs interesē, cik reizes permutācija "jāreizina" pati ar sevi, lai iegūtu vienības permutāciju (to sauksim par *permutācijas kārtu* jeb *order of a permutation*).
Definīcija Katrai permutācijai par *ciklu* saucam tādu grāmatu virkni ar numuriem $a_1, \ldots, a_n$, kas šajā permutācijā mainās "pa apli": a_1 nonāk vietā a_2, a_2 nonāk a_3, utt. Visbeidzot a_n nonāk a_1. Ja grāmata paliek uz vietas, to raksta kā ciklu garumā 1.
Apgalvojums. Ikviena permutācija izsakāma kā viena vai vairāku ciklu kompozīcija, kur cikliem nav kopīgu elementu.
Piemērs. Aplūkosim šādu "nejaušu" permutāciju:

No kurienes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Uz kurieni	10	1	5	7	6	8	9	3	4	2

Grāmata no vietas #1 vispirms ceļo uz vietu #10, tad uz vietu #2, visbeidzot atpakaļ uz #1.

Tāpēc $(1, 10, 2)$ ir viens cikls. Pavisam tur ir šādi cikli:

$$(1, 10, 2), \quad (3, 5, 6, 8), \quad (4, 7, 9).$$

Šajā piemērā pēc $T = 3 \cdot 4 = 12$ soļiem visas grāmatas būs izgājušas veselu skaitu ciklu un atgriezušās sākotnējās pozīcijās.
Lai izveidotu permutāciju ar iespējami lielu kārtu, apvienosim vienā kompozīcijā vairākus ciklus, kuru garumi ir savstarpēji pirmskaitļi (tad elementa kārta būs visu šo ciklu garumu reizinājums). Piemēram, ja permutācijā piecas grāmatas veido vienu ciklu, trīs citas grāmatas otru ciklu, visbeidzot atlikušās divas vēl vienu ciklu, tad šāda elementa kārta būs $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$.
Varam, piemēram, "pa apli" mainīt grāmatas šādos ciklos: (A, B, C, D, E), (F, G, H) un arī (I, J). Pārrakstot šo par robota programmu:

No kurienes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Uz kurieni	2	3	4	5	1	7	8	6	10	9

Piezīme 1. Šī ir parodija par *University of Albany* pasniedzēja Antun Milas analizētu kontroldarbu [1].
Piezīme 2. Mazā Fermā teorēma arī nosaka kārtas noteikta veida permutācijām (reizināšanai ar a pēc $\pmod{p}$). Piemēram, pirmskaitlim $p = 11$, reizināšanu ar skaitli 3 attēlo sekojoša permutācija:

No kurienes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Uz kurieni	3	6	9	1	4	7	10	2	5	8

Uzrakstīta ar cikliem, tā izskatās šādi:

$$(1, 3, 9, 5, 4), \quad (2, 6, 7, 10, 8).$$

Mazā Fermā teorēma apsola, ka šādām īpašām permutācijām kārta vienmēr ir $p - 1 = 10$ vai arī tā dala skaitli $p - 1$. Piemēram, skaitļa 3 multiplikatīvā kārta $\pmod{11}$ ir 5, jo $3^5 \equiv 1 \pmod{11}$.

$$\begin{aligned}
1/3 &= \texttt{0.333333...} = \texttt{0.(3)}, \quad (\text{periods } T = 1) \\
1/11 &= \texttt{0.090909...} = \texttt{0.(09)}, \quad (\text{periods } T = 2) \\
1/37 &= \texttt{0.027027...} = \texttt{0.(027)}, \quad (\text{periods } T = 3) \\
1/41 &= \texttt{0.0243902439...} = \texttt{0.(02439)}, \quad (\text{periods } T = 5) \\
1/7 &= \texttt{0.142857142857...} = \texttt{0.(142857)}, \quad (\text{periods } T = 6)
\end{aligned}$$

Attēls 4: Bezgalīgu periodisku decimāldaļu piemēri.

Uzdevums 1.11: Attēlā 4 redzami vairāku pirmskaitļu apgriezto lielumu $1/p$ decimālpieraksti ($p = 3, 11, 37, 41, 7, \ldots$), kas ir bezgalīgas periodiskas decimāldaļas ar dažādiem periodiem. Atrast mazāko pirmskaitli p ar īpašību, ka $1/p$ ir periodiska decimāldaļa ar periodu $T = 4$ (viena un tā pati četru ciparu grupa bezgalīgi atkārtojas).
Jautājums: Ierakstīt pirmskaitli p ar minēto īpašību.

Atbilde: `101`
Dalīšanas rezultāts ir $0.00990099\ldots = 0.(0099)$.
Ievērosim arī, ka $1/9999 = 0.00010001\ldots = 0.(0001)$. Tāpēc $p = 101$ ir vienīgais pirmskaitlis ar šādu periodu, jo tam jābūt skaitļa 9999 dalītājam, lai daļu

$$\frac{a}{9999} = \frac{1}{101}.$$

varētu saīsināt vienalga kādam veselam skaitlim a. (Šajā gadījumā $a = 0099 = 99$.)
Bet $9999 = 3^3 \cdot 11 \cdot 101$. Tāpēc vienīgais pirmskaitlis ar šo periodu ir 101, jo skaitļi 1/3 un 1/11 dod īsākus periodus.

Uzdevums 1.12: Lielākais šobrīd zināmais pirmskaitlis ir $2^{82\,589\,933} - 1$ (pirmskaitļus, kas izsakāmi kā $2^p - 1$ sauc par Mersena pirmskaitļiem). Miķelītis uzrakstīja vēl lielāku skaitli $N = 2^{82\,589\,934} - 1$, kuram kāpinātājs 82589934 dalās ar 3. Miķelītis uzskata, ka uzrakstītais N arī ir pirmskaitlis un pārspēj zināmo pasaules rekordu. Pamatojiet, ka Miķelītim nav taisnība.
Jautājums: Ierakstīt atbildē mazāko pirmskaitli $p < N$, ar kuru noteikti dalās N.

Atbilde. `3` (1 punkts)
Daļējās atbildes. Kā ne-mazākais pirmskaitlis der `7` vai `2^1966427 - 1` u.c. (0.5 punkts)
Pamatosim, kāpēc tās der. Tā kā kāpinātājs 82589934 dalās ar 3, tad $N = 2^{3k} - 1$ var dalīt reizinātājos, izmantojot ģeometriskās progresijas summas formulu.
Vispārīgā ģeometriskās progresijas summas formula ir šī algebriskā identitāte:

$$a^k - b^k = (a - b) \cdot \left(a^{k-1} + a^{k-2}b + \ldots + ab^{k-2} + b^{k-1}\right),$$

kas ir līdzvērtīgi citai izteiksmei:

$$\left(a^{k-1} + a^{k-2}b + \ldots + ab^{k-2} + b^{k-1}\right) = \frac{a^k - b^k}{a - b}.$$

Mūsu gadījumā $k = 27529978$, $a = 2^3$ un $b = 1$. Tad

$$N = 2^{82589934} - 1 = \left(2^3\right)^{27529978} - 1^{27529978} = \left(2^3 - 1\right) \cdot \left(\left(2^3\right)^{k-1} + \left(2^3\right)^{k-2} + \ldots + 1\right).$$

Tātad N dalās ar $2^3 - 1 = 7$.
Bet kāpinātāju 82589934 var dalīt reizinātājos arī citādi. Tas dalās arī ar 2. Tādēļ

$$N = 2^{2k} - 1 = (2^2)^k - 1 = (2^2 - 1)((2^2)^{k-1} + \ldots + 1).$$

No šejienes N dalās ar $2^2 - 1 = 3$ (sanāk, ka $p = 3$ ir mazākais pirmskaitlis, kas dala N).
Var dalīt vēl daudzos citos veidos, teiksim, $N = 2^{42k} - 1$, no kurienes N dalās ar $2^{42} - 1$ utml.

References

[1] Antun Milas. SUNY University of Albany. Abstract Algebra AMAT 327 (2015). Review Exam, Problem 3. Savākts no `https://bit.ly/37fSHN2`.

[2] Wissam Raji. Elementary Number Theory (Ch4.2. The Number-of-Divisors Function). American University of Berut. 2020. Savākts no `https://bit.ly/2OT82OP`.

[3] Wissam Raji. Elementary Number Theory (Ch4.2. The The Sum-of-Divisors Function). American University of Berut. 2020. Savākts no `https://bit.ly/3dS6iiW`.

[4] Table of Known Maximal Gaps. *University Tennessee at Martin*. Savākts no `https://bit.ly/3k2Kimo`.

[5] WolframAlpha Web service. Sk. `https://www.wolframalpha.com/`.