

NMS Izlase junioriem: 2.nodarbība skaitļu teorijā

Ieteicams izvēlēties un rakstiski noformēt 5 no 8 uzdevumiem līdz 2019.g. 30.decembrim.

Var risināt uz papīra vai iesūtīt elektroniski: "kalvis.apsitis", domēns "gmail.com"

3.nodaļa: Ķīniešu atlikumu teorēma

Uzdevums 1.1: Pierādīt, ka jebkuram naturālam skaitlim n , ir n pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi, ka jebkuram no tiem ir dalītājs, kas ir pilns kvadrāts, kas lielāks par 1.

Uzdevums 1.2: Katram naturālam skaitlim n , ir n pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi, no kuriem neviens nav *potents skaitlis*.

Piezīme: Par *potentu* saucam naturālu skaitli n , ka jebkuram pirmskaitlim p : ja n dalās ar p , tad n dalās arī ar p^2 . Sk. https://en.wikipedia.org/wiki/Powerful_number.

Uzdevums 1.3: Dotajam naturālam skaitlim n , ar $f(n)$ apzīmējam mazāko naturālo skaitli, ka $\sum_{k=1}^{f(n)} k$ dalās ar n . Pierādīt, ka $f(n) = 2n - 1$ tad un tikai tad, ja n ir skaitļa 2 pakāpe.

Uzdevums 1.4: Ar n un k apzīmējam veselus skaitļus, ka $n > 0$ un skaitlis $k(n - 1)$ ir pāra skaitlis. Pierādīt, ka eksistē skaitļi x un y , ka $\gcd(x, n) = \gcd(y, n) = 1$ un $x + y \equiv k \pmod{n}$.

Uzdevums 1.5: Dots naturāls skaitlis x . Pierādīt, ka ir n pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi, no kuriem neviens nav pirmskaitļa pakāpe.

Uzdevums 1.6: Ar m, n apzīmēti naturāli skaitļi, kas apmierina šādu īpašību:

$$\gcd(11k - 1, m) = \gcd(11k - 1, n)$$

ir spēkā visiem naturāliem skaitļiem k . Pierādīt, ka $m = 11^r n$ kādam vesalam skaitlim r .

2.nodaļa: Valuācijas