NMS izlases nodarbība, 2019-06-21

IMO.SHL.2014.N6: Ar $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ apzīmējam naturālus skaitļus, kas ir savstarpēji pirmskaitļi. Turklāt a_1 ir pirmskaitlis un $a_1 \geq n+2$. Reālās taisnes nogrieznī $I = [0, a_1 a_2 \cdots a_n]$ atzīmējam visus veselos skaitļus, kas dalās ar vismaz vienu no skaitļiem $a_1, \ldots, a_n$. Šie punkti sadala I mazākos nogriežņos. Pierādīt, ka šo nogriežņu garumu kvadrātu summa dalās ar a_1.

IMO.SHL.2014.N7: Dots naturāls skaitlis $c \geq 1$. Definējam naturālu skaitļu virkni ar vienādībām $a_1 = c$ un

$$a_{n+1} = a_n^3 - 4c \cdot a_n^2 + 5c^2 \cdot a_n + c$$

visiem $n \geq 1$. Pierādīt, ka jebkuram naturālam $n \geq 2$ eksistē pirmskaitlis p, ar kuru dalās a_n, bet nedalās neviens no skaitļiem $a_1, \ldots, a_{n-1}$.

IMO.SHL.2014.N8: Katram reālam skaitlim x, ar $||x||$ apzīmējam attālumu starp x un tuvāko veselo skaitli. Pierādīt, ka jebkuram naturālu skaitļu pārim (a, b) eksistē nepāru pirmskaitlis p un naturāls skaitlis k, kas apmierina sakarību: $\left|\left|\frac{a}{p^k}\right|\right| + \left|\left|\frac{b}{p^k}\right|\right| + \left|\left|\frac{a+b}{p^k}\right|\right| = 1$.

IMO.SHL.2015.N8: Katram naturālam skaitlim n, kura sadalījums pirmreizinātājos ir $n = \prod_{n=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, definējam

$$\mho(n) = \sum_{i: p_i > 10^{100}} \alpha_i.$$

Tātad, $\mho(n)$ ir skaitļa pirmreizinātāju skaits, kuri lielāki par 10^{100}, kas summēti, ņemot vērā atkārtojumus. Atrast visas stingri augošas funkcijas $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, ka visiem veseliem a un b, kam $a > b$, izpildās sakarība: $\mho\left(f(a) - f(b)\right) \leq \mho(a - b)$

IMO.SHL.2016.N7: Ar n apzīmēts nepāru naturāls skaitlis. Dekarta plaknē izraudzīts daudzstūris (vienkārša, slēgta lauzta līnija) P, kura laukums ir S. Visām tā virsotnēm abas koordinātes ir veseli skaitļi, un visu tā malu garumu kvadrāti dalās ar n. Pierādīt, ka $2S$ ir vesels skaitlis, kas dalās ar n.

IMO.SHL.2016.N8: Atrast visus polinomus $P(x)$ ar nepāru pakāpi d un veseliem koeficientiem, kas apmierina sekojošu īpašību: Katram naturālam skaitlim n eksistē n naturāli skaitļi $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ka $\dfrac{1}{2} < \dfrac{P(x_i)}{P(x_j)} < 2$ un $\dfrac{P(x_i)}{P(x_j)}$ vienāds ar racionālu skaitli kāpinātu pakāpē d (visiem indeksu pāriem i un j, kur $1 \leq i, j \leq n$).

IMO.SHL.2017.N6: Atrast mazāko naturālo skaitli n vai pierādīt, ka tāds neeksistē, kam būtu sekojoša īpašība: Ir bezgalīgi daudz tādu pozitīvu racionālu skaitļu komplektu $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, kuriem abi skaitļi $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ un $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$ ir veseli.

IMO.SHL.2017.N7: Sakārtots veselu skaitļu pāris (x, y) ir primitīvs punkts, ja x un y lielākais kopīgais dalītājs ir 1. Pierādiet, ka katrai galīgai primitīvu punktu kopai S eksistē vesels pozitīvs skaitlis n un tādi veseli skaitļi $a_0, a_1, \ldots, a_n$, ka katram (x, y) pārim no S izpildās:
$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \cdots + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n = 1$.

IMO.SHL.2018.N3: Definējam virkni $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ar sakarību $a_n = 2^n + 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$. Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudzi šīs virknes locekļi, ko var izteikt kā (divu vai vairāku) šīs virknes locekļu summu. Kā arī bezgalīgi daudzi locekļi, kurus tādā veidā nevar izteikt.

IMO.SHL.2018.N6: Dota $f : \{1, 2, 3, \ldots\} \to \{2, 3, \ldots\}$, funkcija, kas apmierina sakarību $f(m+n) \mid f(m) + f(n)$ ($f(m+n)$ ir $f(m) + f(n)$ dalītājs) visiem naturālu skaitļu pāriem m, n. Pierādīt, ka eksistē naturāls skaitlis $c > 1$, kurš ir visu f vērtību dalītājs.

IMO.SHL.2018.N7: Dots vesels skaitlis $n \geq 2018$ un $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ ir pa pāriem dažādi naturāli skaitļi, kas nepārsniedz $5n$. Pieņemsim, ka virkne

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$$

veido aritmētisku progresiju. Pierādīt, ka visi virknes locekļi ir savā starpā vienādi.