Dažāda skaitļu teorija

Sacensības #2021.05

2021-04-29

Par šo LU NMS atbalstīto pasākumu
atbild kalvis.apsitis@gmail.com.

Uzdevums 5.1: Atrast, cik ir sakārtotu pāru ar naturāliem skaitļiem (m, n), ka $m, n \in \{1, 2, \ldots, 64\}$ un lielākais kopīgais dalītājs $\text{LDK}(2^m + 1, 2^n - 1) > 1$.

Uzdevums 5.2: Skolotājs iedomājās skaitļu kopu S no četriem skaitļiem; katru skaitli no kopas S viņš iečukstēja ausī vienam no četriem skolēniem. Tad skolotājs visiem skaļi pateica, ka tie ir četri pēc kārtas sekojoši divciparu skaitļi; ka vismaz viens no tiem dalās ar 6, bet kāds cits šīs kopas skaitlis dalās ar 7. Viņš jautāja skolēniem, vai viņi var nosaukt visus skaitļus no kopas S un skolēni (kuri vienmēr runā patiesību un izdara pareizus loģiskus secinājumus) visi korī atbildēja "Nē".
Tomēr, tiklīdz kā viņi bija dzirdējuši cits cita atbildes, katrs no viņiem jau varēja pateikt visus kopas S elementus: $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$. Atrast visu iespējamo s_1 summu (ar s_1 apzīmē S mazāko elementu).
Jautājums. Ierakstīt atbildē naturālu skaitli: Visu iespējamo s_1 summu.

Uzdevums 5.3: Ar $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ apzīmējam skaitļu $1, 2, 3, 4, 5, 6$ permutāciju (katrs skaitlis ir piešķirts vienam no mainīgajiem; visu mainīgo vērtības ir dažādas). Atrast, cik ir tādu permutāciju, kurām sekojoša izteiksme dalās ar 3:

$$x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_5 + x_4x_5x_6 + x_5x_6x_1 + x_6x_1x_2.$$

Uzdevums 5.4: Cik daudzi pozitīvie skaitļa 2021^{2021} dalītāji ir tādi, kuriem pašiem ir tieši 2021 pozitīvi dalītāji?

Uzdevums 5.5: Ar N apzīmējam naturālo skaitļu skaitu, kas nepārsniedz 2021 un kuru binārajā pierakstā ir vairāk ciparu `1` nekā ciparu `0`. Atrast skaitli N.

Uzdevums 5.6: Sauksim skaitli n par *faktoriāla asti*, ja eksistē kāds naturāls m, kuram $m!$ decimālpieraksts beidzas ar tieši n nullēm. Cik daudzi naturāli skaitļi no intervāla $[1; 2021]$ **nav** faktoriālu astes?

Uzdevums 5.7: Ar n apzīmējam mazāko naturālo skaitli, kas dalās ar 75 un kam ir tieši 75 naturāli dalītāji (ieskaitot 1 un pašu skaitli). Atrast šo skaitli n.

Uzdevums 5.8: Atrast lielāko iespējamo k vērtību, kurai 6^6 var izteikt kā k pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu summu.

Uzdevums 5.9:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2 \cdot 8} = 4 = n^2, \\ (2+8)/2 = 5 = n^2 + 1. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{27 \cdot 48} = 36 = n^2, \\ (27+48)/2 = 37.5 = n^2 + 1.5. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{128 \cdot 162} = 144 = n^2, \\ (128+162)/2 = 145 = n^2 + 1. \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \sqrt{4802 \cdot 5000} = 4900 = n^2, \\ (4802 + 5000)/2 = 4901 = n^2 + 1. \end{cases}$$

Attēlā redzamajos piemēros ir vairākas n vērtības ($n = 2, 6, 12, 70$), kurām eksistē divi naturāli a, b, kuru vidējais ģeometriskais $\sqrt{ab}$ ir n^2, bet vidējais aritmētiskais ir par 1 vai par 1.5 lielāks nekā n^2.
Atrast vēl kādu n vērtību (divciparu vai trīsciparu skaitli) ar šādu īpašību.

Uzdevums 5.10: Skaitļu virkni $501, 504, 509, 516, 525, \ldots$ veido pēc formulas $a_n = 500 + n^2$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Ar d_n apzīmējam skaitļu a_n, a_{n+1} lielāko kopīgo dalītāju. Atrast d_n maksimumu, ja n pieņem visas iespējamās vērtības no naturālo skaitļu kopas.

Uzdevums 5.11: Kādam naturālam skaitlim $b > 1$ ir definēts polinoms

$$P(x) = \frac{1}{b}x^5 + \frac{1}{b},$$

kurš trim pēc kārtas sekojošiem naturāliem skaitļiem pieņem naturālas vērtības: $P(n)$, $P(n+1)$ un $P(n+2)$.
Atrast polinomu (ievietot tajā derīgu parametru b), kas izpilda šo īpašību un atrast mazāko n, kam $P(n)$, $P(n+1)$ un $P(n+2)$ ir naturāli skaitļi.
Jautājums. Ierakstīt atbildē mazāko polinoma vērtību $P(n)$. (Tātad atbildē jānorāda vērtība, nevis arguments n.)

Uzdevums 5.12: Ar S apzīmējam visu logaritmu (ar logaritma bāzi 10) summu skaitļiem, kuri ir skaitļa 1000000 dalītāji. Kurš veselais skaitlis ir vistuvākais skaitlim S?