Dažāda skaitļu teorija

Sacensības #2021.05

2021-04-29

Par šo LU NMS atbalstīto pasākumu
atbild `kalvis.apsitis@gmail.com`.

Uzdevums 5.1: Atrast, cik ir sakārtotu pāru ar naturāliem skaitļiem (m, n), ka $m, n \in \{1, 2, \ldots, 64\}$ un lielākais kopīgais dalītājs $\text{LDK}(2^m + 1, 2^n - 1) > 1$.

Atbilde. `1365`
Visiem nepāra m, $2^m + 1$ dalās ar 3. Tāpēc veido derīgu pāri ar jebkuru pāra skaitli n (kam savukārt $2^n - 1$ dalās ar 3). Šādu pāru ir pavisam $32 \cdot 32 = 1024$.
Visiem pāra m (kas nedalās ar 4), $2^m + 1$ dalās ar 5. Tie veido derīgu pāri ar jebkuru n, kas dalās ar 4. Šādu pāru ir pavisam $16 \cdot 16 = 256$.
Visiem pāra m (kas dalās ar 4, bet nedalās ar 8), $2^m + 1$ dalās ar 17. Tie veido derīgu pāri ar jebkuru n, kas dalās ar 4. Šādu pāru ir pavisam $8 \cdot 8 = 64$. Utt.
Visbeidzot $m = 32$ veido pāri tikai ar $n = 64$ (var pārbaudīt dalāmību, izmantojot kvadrātu starpības formulu).

$$32 \cdot 32 + 16 \cdot 16 + 8 \cdot 8 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 1365.$$

Uzdevums 5.2: Skolotājs iedomājās skaitļu kopu S no četriem skaitļiem; katru skaitli no kopas S viņš iečukstēja ausī vienam no četriem skolēniem. Tad skolotājs visiem skaļi pateica, ka tie ir četri pēc kārtas sekojoši divciparu skaitļi; ka vismaz viens no tiem dalās ar 6, bet kāds cits šīs kopas skaitlis dalās ar 7. Viņš jautāja skolēniem, vai viņi var nosaukt visus skaitļus no kopas S un skolēni (kuri vienmēr runā patiesību un izdara pareizus loģiskus secinājumus) visi korī atbildēja "Nē".
Tomēr, tiklīdz kā viņi bija dzirdējuši cits cita atbildes, katrs no viņiem jau varēja pateikt visus kopas S elementus: $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$. Atrast visu iespējamo s_1 summu (ar s_1 apzīmē S mazāko elementu).
Jautājums. Ierakstīt atbildē naturālu skaitli: Visu iespējamo s_1 summu.

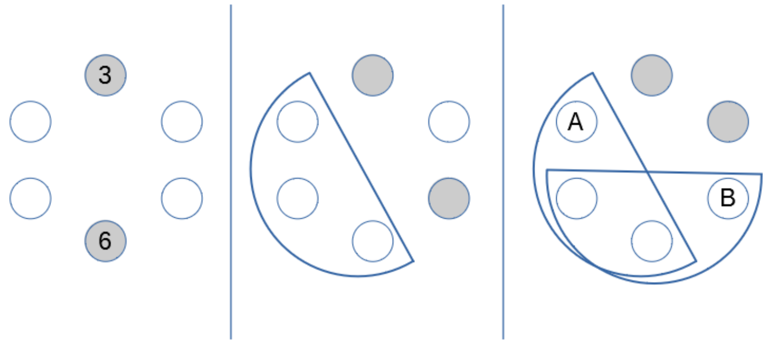
Atbilde. `246`
Skaitļiem, kuri dalās ar 6 un 7 jāatrodas skaitļu "četrinieka" vidū (ja kāds atrodas malā, tad tas, kurš atrodas otrā malā, var uzreiz uzminēt).
Atrodam visus četrus 7 daudzkārtņus, kas ir blakus 6 daudzkārtnim: $\{35, 49, 77, 91\}$ (6 daudzkārtņi ir attiecīgi $36, 48, 78, 90$).
Mazākie skaitļi šajās kopās ir šādi: $34, 47, 76, 89$. To summa ir 246.

Uzdevums 5.3: Ar $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ apzīmējam skaitļu $1, 2, 3, 4, 5, 6$ permutāciju (katrs skaitlis ir piešķirts vienam no mainīgajiem; visu mainīgo vērtības ir dažādas). Atrast, cik ir tādu permutāciju, kurām sekojoša izteiksme dalās ar 3:

$$x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_5 + x_4x_5x_6 + x_5x_6x_1 + x_6x_1x_2.$$

Atbilde. `336`.

Uzrakstām visus permutācijas elementus uz apļa kā Attēlā 1. Der visi tie izvietojumi, kuros abas vērtības, kas dalās ar 3 (3 un 6) atrodas pretī viena otrai (jo tad visi saskaitāmie arī dalās ar 3). Šādu izvietojumu ir $6 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ (pirmo skaitli "3" izvēlas vienā no sešām vietām; tad skaitļa "6" atrašanās vieta ir tikai viena iespējamā; pēc tam $1, 2, 4, 5$ novieto pārpalikušajās 4 vietās 4! dažādos veidos.



Attēls 1: Trīs gadījumi atkarībā no skaitļu 3 un 6 savstarpējā novietojuma.

Tie izvietojumi, kur starp 3 un 6 ir viens skaitlis, neder (jo tad izteiksmē ir tieši viens saskaitāmais, kurš nedalās ar 3). Tas redzams vidējā sadaļā Attēlā 1, kur skaitļu 3 un 6 aplīši ir iekrāsoti pelēki.

Visbeidzot, izvietojumi, kur 3 un 6 atrodas blakus, der tad un tikai tad, ja skaitļi, kuri ir blakus attiecīgi skaitļiem "3" un "6" nav savstarpēji kongruenti pēc moduļa 3. Attēla 1 labajā daļā $A \not\equiv B \pmod{3}$. Tikai šajā gadījumā divi saskaitāmie, kuri nedalās ar 3, summā dos skaitli, kas dalās ar 3). Tādu izvietojumu pavisam ir $6 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1$ (vispirms novietojam "3" kādā no sešām vietām; pēc tam novietojam skaitli "6" tam vienā vai otrā pusē - var izdarīt divos veidos; pēc tam patvaļīgi izvēlas otru skaitļa "3" kaimiņu (četros veidos); tad izvēlas otru skaitļa "6" kaimiņu (divos veidos, jo tas nav kongruents ar iepriekšējā solī izvēlēto). Visbeidzot, 2! veidos aizpilda atlikušās divas vietas.

Iegūstam summu: $6 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 6 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 336$.

Uzdevums 5.4: Cik daudzi pozitīvie skaitļa 2021^{2021} dalītāji ir tādi, kuriem pašiem ir tieši 2021 pozitīvi dalītāji?

Atbilde. `4`.

Sadalām pirmreizinātājos: $2021 = 43 \cdot 47$. Skaitļa 2021^{2021} visi dalītāji būs formā $43^a \cdot 47^b$.

Meklējam skaitļus ar tieši 2021 (nepāra skaitu) dalītāju kā pilnus kvadrātus: $d = 43^{2m}47^{2n}$, kur abi pirmreizinātāji kāpināti pāra pakāpēs. Šādiem skaitļiem visu dalītāju skaits ir $(2m+1)(2n+1)$; prasām, lai šis reizinājums būtu tieši 2021. Šo reizinājumu var iegūt četros veidos: $1 \cdot 2021 = 43 \cdot 47 = 47 \cdot 43 = 2021 \cdot 1$.

Atbilstošie skaitļa 2021^{2021} dalītāji (katram no kuriem ir tieši 2021 pozitīvi dalītāji) ir $43^0 \cdot 47^{2020}$, $43^{42} \cdot 47^{46}$, $43^{46} \cdot 47^{42}$, $43^{2020} \cdot 47^0$.

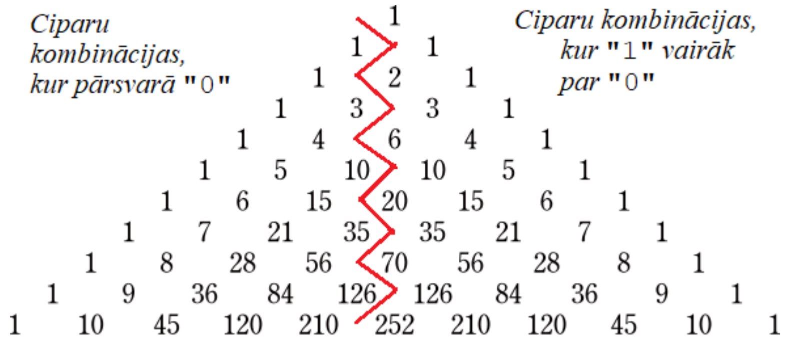
Uzdevums 5.5: Ar N apzīmējam naturālo skaitļu skaitu, kas nepārsniedz 2021 un kuru binārajā pierakstā ir vairāk ciparu `1` nekā ciparu `0`. Atrast skaitli N.

Atbilde. `1173`

Pierakstām skaitli 2021 binārajā pierakstā:

$$2021_{10} = 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 0 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 4 + 0 \cdot 2 + 1 = 11111100101_2.$$

Visiem turpmākajiem skaitļiem līdz pat $2^{11} - 1 = 2047$ būs vieninieku pārsvars pār nullēm (jo arī tiem skaitļa pieraksts sākas ar vismaz sešiem vieniniekiem).
Tāpēc vispirms saskaitīsim, cik ir skaitļu, kuros ir vairāk ciparu `1` nekā ciparu `0` no skaitļa 1 līdz pat 2047. To skaits redzams Attēlā 2 attēlotajā Paskāla trijstūrī (pa labi no sarkanās robainās līnijas).



Attēls 2: Paskāla trijstūris ar kombinācijām, kurās `1` vairāk nekā `0`.

Tie skaitļi, kuru binārais pieraksts satur k ciparus (no kuriem pirmais vienmēr ir `1`) atbilst Paskāla trijstūra $(k-1)$-tajai rindiņai. Piemēram, ir $6 + 4 + 1 = 11$ dažādi 5-ciparu skaitļi, kuros vieninieku skaits pārsniedz nuļļu skaitu:

- $C_4^2 = 6$ skaitļi, kur pirmajam vieniniekam seko kombinācija ar diviem vieniniekiem un divām nullēm: `10011`, `10101`, `10110`, `11001`, `11010`, `11100`.
- $C_4^3 = 4$ skaitļi, kur pirmajam vieniniekam seko kombinācija ar trim vieniniekiem un vienu nulli: `11110`, `11101`, `11011`, `10111`.
- $C_4^4 = 1$ skaitlis, kur pirmajam vieniniekam seko vēl četri vieninieki: `11111`.

Zinot to, ka n-tajā Paskāla trijstūra rindiņā kombināciju summa ir 2^n, iegūstam šādu izteiksmi:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{10}\right) + \frac{1}{2} \cdot (1 + 2 + 6 + 20 + 70 + 252) = 1199.$$

Ņemot vērā to, ka esam ieskaitījuši arī visus skaitļus no 2022 līdz 2047 (abus galapunktus ieskaitot), jāatņem $(2047 - 2022) + 1 = 26$.
Iegūstam $1199 - 26 = 1173$.

Uzdevums 5.6: Sauksim skaitli n par *faktoriāla asti*, ja eksistē kāds naturāls m, kuram $m!$ decimālpieraksts beidzas ar tieši n nullēm. Cik daudzi naturāli skaitļi no intervāla $[1; 2021]$ **nav** faktoriālu astes?

Atbilde. 402.
Ievērojam, ka nuļļu skaits faktoriāla $n!$ beigās atkarīgs no lielākās skaitļa 5 pakāpes, ar kuru dalās $n!$ (jo katra nulle veidojas, sareizinot pirmreizinātāju 2 ar pirmreizinātāju 5 un skaitļa 2 pakāpe, ar kuru dalās $n!$ aug straujāk nekā skaitļa 5 pakāpe).

Ar $\nu_5(m)$ apzīmēsim skaitļa m "5-valuāciju" – lielāko kāpinātāju k, pie kura m dalās ar 5^k. Ir spēkā Ležandra formula, kas izsaka valuāciju jebkuram faktoriālam:

$$\nu_5(n!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{5^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{125} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{625} \right\rfloor + \ldots.$$

Risinām vienādojumu:

$$f(n) := \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{125} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{625} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3125} \right\rfloor = 2021. \qquad (1)$$

Summa $n/5 + n/25 + n/125 + n/625 + n/3125 \approx n/4$ ir aptuveni ģeometriskā progresija, kas tiecas uz $n/4$; tāpēc n būs tuvs $2021 \cdot 4$ (ja ignorē noapaļošanu uz leju veselajās daļās $\lfloor \ldots \rfloor$). Bet, ievietojot $n = 8084$ izteiksmē (1), iegūstam $f(8084) = 2017$, t.i. n vajag palielināt apmēram par $4 \cdot 4 = 16$.
Izrādās, ka vienādojumu (1) neapmierina neviens skaitlis, jo $f(8095) = 2020$, bet $f(8100) = 2022$ (t.i. 8100! beidzas jau ar 2022 nullēm) un skaitlis 2021 **nav** faktoriāla aste.
Pavisam pirms vērtības $f(8100) = 2022$ ir $8100/5 = 1620$ **atšķirīgas** faktoriāla astes (jo ikreiz, kad n dalās ar 5, astes garums pieaug vismaz par vienu jaunu nulli). Atmetam skaitli $0 \not\in [1; 2021]$ (daži pirmie faktoriāli vispār nebeidzas ar nullēm), tātad naturālās astes, kuras nepārsniedz 2021 ir tieši 1619.
Tātad tieši $2021 - 1619 = 402$ skaitļi nebūs faktoriālu astes (tiem pārlēks pāri pateicoties tam, ka n dalās ar 25, 125 vai vēl augstāku 5 pakāpi).

Uzdevums 5.7: Ar n apzīmējam mazāko naturālo skaitli, kas dalās ar 75 un kam ir tieši 75 naturāli dalītāji (ieskaitot 1 un pašu skaitli). Atrast šo skaitli n.

Atbilde. 32400.
Ievērojam, ka 75 ir nepāra skaitlis; tāpēc skaitlis n ar šādu dalītāju skaitu ir pilns kvadrāts (visi tā pirmreizinātāji tiek kāpināti pāra pakāpēs).
Skaitlim n ir vismaz divi dažādi pirmreizinātāji (3 un 5), citādi tas nedalīsies ar 75. Bet tam varētu būt arī trīs dažādi pirmreizinātāji: $n = 3^{2a}5^{2b}2^{2c}$ (izvēlēties skaitļa 2 vietā pirmskaitli $p \geq 7$ nav optimāli, jo dalītāju skaits nemainīsies, bet skaitlis n kļūs lielāks).
Aplūkosim vispirms 3 pirmreizinātāju gadījumu, jeb $n = 3^{2a}5^{2b}2^{2c}$.
Tad skaitļa n dalītāju skaitu var izteikt kā $(2a+1)(2b+1)(2c+1)$, kas vienāds ar 75. Iegūstam, ka divi no mainīgajiem a, b, c vienādi ar 2, bet viens vienāds ar 1, lai $(2\cdot2+1)(2\cdot2+1)(2\cdot1+1) = 75$. Mazāko kāpinātāju lietosim lielākajam pirmskaitlim 5. Tātad, der atbilde $n = 2^4 3^4 5^2 = 32400$, kas arī ir optimālā atbilde.
Skaitlim n nevar būt vairāk kā 3 pirmreizinātāji (visi pāra pakāpēs, jo n ir pilns kvadrāts). Jo citādi, piemēram, $(2a+1)(2b+1)(2c+1)(2d+1)$ (četru nepāra skaitļu > 1 reizinājums) pārsniegtu 75.
Nav arī izdevīgi, ja skaitlim n ir tikai divi pirmreizinātāji, jo tad jāizvēlas $n = 3^{2a}5^{2b}$, un $(2a+1)(2b+1) = 75$. Vismaz viena no iekavām (piemēram $2a+1$ ir vismaz 15 (jo $15 \cdot 5 = 75$). Bet tad 3^{14} jau pārsniedz 32400, ko atradām iepriekš (vēl jo vairāk, ja to pareizinās ar kādu skaitļa 5 pakāpi). Tāpēc optimālā atbilde ir $n = 32400$, kam vajag trīs pirmreizinātājus.

Uzdevums 5.8: Atrast lielāko iespējamo k vērtību, kurai 6^6 var izteikt kā k pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu summu.

Atbilde. 243.
Pie $k = 243$ var sasummēt $71 + 72 + \ldots + 312 + 313 = 46656$. (Šajā progresijā vidējais loceklis ir $6^6/243 = 192$ un no tā var izrēķināt visus pārējos.)
Piezīme. Lai stingri pamatotu, ka nekā labāka nav, jāaplūko arī dažas pāru atbildes (piemēram $k = 128$, jo var summēt $301 + \ldots + 428 = 46656 = 6^6$). Bet tās šoreiz nav optimālas.

Uzdevums 5.9:

$$\begin{cases} \sqrt{2 \cdot 8} = 4 = n^2, \\ (2+8)/2 = 5 = n^2 + 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{27 \cdot 48} = 36 = n^2, \\ (27+48)/2 = 37.5 = n^2 + 1.5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{128 \cdot 162} = 144 = n^2, \\ (128+162)/2 = 145 = n^2 + 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{4802 \cdot 5000} = 4900 = n^2, \\ (4802+5000)/2 = 4901 = n^2 + 1. \end{cases}$$

Attēlā redzamajos piemēros ir vairākas n vērtības ($n = 2, 6, 12, 70$), kurām eksistē divi naturāli a, b, kuru vidējais ģeometriskais $\sqrt{ab}$ ir n^2, bet vidējais aritmētiskais ir par 1 vai par 1.5 lielāks nekā n^2.
Atrast vēl kādu n vērtību (divciparu vai trīsciparu skaitli) ar šādu īpašību.

Atbilde. 84 vai 408.
Var pārbaudīt vienādības:

$$\begin{cases} \sqrt{6912 \cdot 7203} = 7056 = 84^2, \\ (6912+7203)/2 = 7057.5 = 84^2 + 1.5. \end{cases}$$

Kā arī

$$\begin{cases} \sqrt{165888 \cdot 167042} = 166464 = 408^2, \\ (165888+167042)/2 = 166465 = 408^2 + 1. \end{cases}$$

Tās vērtības n, kurām $\sqrt{ab} = n^2$ un $(a+b)/2 = n^2+1$ apmierina Pella vienādojumu $2n^2+1 = m^2$ (kaut kādam veselam m). Pella vienādojums izskaidro, kāpēc attālumi starp atrisinājumiem strauji pieaug.

Uzdevums 5.10: Skaitļu virkni $501, 504, 509, 516, 525, \ldots$ veido pēc formulas $a_n = 500 + n^2$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Ar d_n apzīmējam skaitļu a_n, a_{n+1} lielāko kopīgo dalītāju. Atrast d_n maksimumu, ja n pieņem visas iespējamās vērtības no naturālo skaitļu kopas.

Atbilde. 2001.
Izteiksmēm $500 + n^2$ un $500 + n^2 + 2n + 1$ lieto Eiklīda algoritmu, pēc vairākiem pārveidojumu soļiem iegūst $\text{LKD}(n - 1000, 2001)$.

Uzdevums 5.11: Kādam naturālam skaitlim $b > 1$ ir definēts polinoms

$$P(x) = \frac{1}{b}x^5 + \frac{1}{b},$$

kurš trim pēc kārtas sekojošiem naturāliem skaitļiem pieņem naturālas vērtības: $P(n)$, $P(n+1)$ un $P(n+2)$.
Atrast polinomu (ievietot tajā derīgu parametru b), kas izpilda šo īpašību un atrast mazāko n, kam $P(n)$, $P(n+1)$ un $P(n+2)$ ir naturāli skaitļi.
Jautājums. Ierakstīt atbildē mazāko polinoma vērtību $P(n)$. (Tātad atbildē jānorāda vērtība, nevis arguments n.)

Atbilde. 707.
Var pamatot, ka vienīgā naturālā $b > 1$ vērtība, kam trīs vērtības $x^5 + 1$ pēc kārtas dalās ar b ir $b = 11$. Un jāievieto skaitļi $n = 6$, $n + 1 = 7$, $n + 2 = 8$. Ievietojot mazāko n, iegūstam:

$$(6^5 + 1)/11 = 7777/11 = 707.$$

Uzdevums 5.12: Ar S apzīmējam visu logaritmu (ar logaritma bāzi 10) summu skaitļiem, kuri ir skaitļa 1000000 dalītāji. Kurš veselais skaitlis ir vistuvākais skaitlim S?

Atbilde. 147.
Skaitlim $1000000 = 2^6 5^6$ dalītāju skaitu var atrast ar izteiksmi:

$$\sigma_0(1000000) = (1 + 6) \cdot (1 + 6) = 49.$$

Viens no dalītājiem ir $d = 1000$, kura logaritms ir 3. Visi citi ir sadalāmi pa pāriem tā, ka $ab = 1000000$; tāpēc $\log_{10} a + \log_{10} b = 6$. Vidēji jāpieskaita 3 uz katru dalītāju.
Visu šo logaritmu summa būs $3 \cdot 49 = 147$.