Atlases sacensības komandu olimpiādei "Baltijas ceļš"

2019. gada 21. septembris, Rīga (1. diena)

Risināšanas laiks: 4 stundas un 30 minūtes.

Jautājumus drīkst uzdot pirmo 60 minūšu laikā.

Atļauts izmantot tikai rakstāmpiederumus, lineālu un cirkuli.

Uzdevums 0.1 (BW.TST.2019.1): Reāliem pozitīviem skaitļiem a, b un c ir spēkā sakarība $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Pierādiet, ka

$$3(ab+bc+ca)+\frac{9}{a+b+c}\leq\frac{9abc}{a+b+c}+2\left(a^2+b^2+c^2\right)+1,$$

un noskaidrojiet, kādiem a,b,c izpildās vienādība.

Uzdevums 0.2 (BW.TST.2019.2): Atrast visas funkcijas $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, kas definētas reāliem skaitļiem, pieņem reālas vērtības un kurām visiem reāliem x un y ir spēkā vienādība

$$f\left(y^2-f(x)\right)=yf(x)^2+f(x^2y+y).$$

Uzdevums 0.3 (BW.TST.2019.3): Sienāzis lēkā pa veselo skaitļu asi. Tas sāk savu ceļu tās sākumpunktā ($x=0$) un katrā lēcienā var lēkt vai nu pa labi, vai pa kreisi, pie tam sienāža n-tā lēciena garums ir tieši n^2.
Pierādiet, ka sienāzis var nokļūt jebkurā (veselā) skaitļu ass punktā.

Uzdevums 0.4 (BW.TST.2019.4): Dots n-tās pakāpes polinoms $P(x)$ ar reāliem koeficientiem, kuram visiem $0\leq y\leq 1$ izpildās $|p(y)|\leq 1$. Pierādīt, ka $p\left(\frac{1}{n}\right)\leq 2^{n+1}-1$.

Uzdevums 0.5 (BW.TST.2019.5): Aplī nostājušies 2019 pirmklasnieki, sākumā katram rokās ir tieši viena gladiola. Katrā gājienā skolotāja izvēlas vienu pirmklasnieku, kuram rokās ir vismaz viena gladiola, un tas vienu savu gladiolu atdod savam kaimiņam vai nu pa labi, vai pa kreisi. Pierādīt, ka neatkarīgi no skolotājas darbībām pirmklasnieki var (saskaņoti) rīkoties tā, lai nevienā brīdī nevienam pirmklasniekam rokās nebūtu vairāk kā divas gladiolas.

Uzdevums 0.6 (BW.TST.2019.6): Vectēvam bēniņos ir galīgs skaits tukšu kartona kastu, katra kaste ir taisnstūra paralēlskaldnis, kura malu garumi ir naturāli skaitļi. Katrai kastei platums nav lielāks kā garums un augstums nav lielāks kā platums. Vienu kartona kasti var ievietot otrā kastē, ja pirmās kastes garums, platums un augstums ir attiecīgi mazāki nekā otrās kastes garums, platums un augstums. Vienā kastē var ielikt divas vai vairāk akstes tikai tad, ja tās ir ieliktas viena otrā.
Vectēvs nolēma savas kastes salikt vienu otrā tā, lai viņam bēniņos paliktu pēc iespējas mazāks skaits kastu (kas nav ieliktas kādā citā kastē). Viņš rīkojās pēc šāda algoritma: katrā solī viņš atrada tādu garāko kastu virkni, ka tās var ielikt pirmo otrajā, otro trešajā, utt. un salika tās vienu otrā, tad šo procesu atkārtoja līdz brīdim, kad nevienu kasti vairs nevarēja ielikt nevienā citā. Katrā solī vectēvam šī garākā kastu virkne, ko viņš salika vienu otrā, bija unikāla, t.i. nevienā solī nebija vairāku virkņu ar vienādiem garumiem. Vai var droši apgalvot, ka tagad vectēvam bēniņos ir mazākais iespējamais skaits kastu (kas nav ieliktas nevienā citā kastē)?

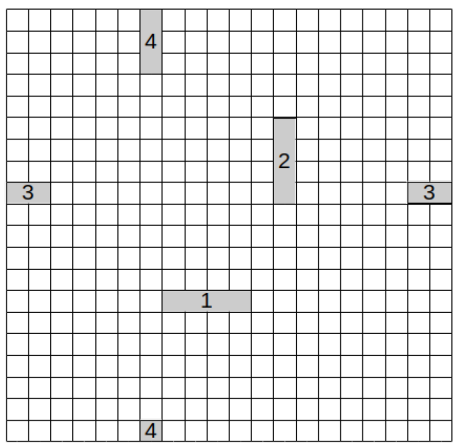
Uzdevums 0.7 (BW.TST.2019.7): Dotas divas virknes b_i, c_i, $0\leq i\leq 100$, kuru locekļi ir naturāli skaitļi, izņemot $c_0=0, b_{100}=0$.
Daži ciemati Graflandē ir savienoti ar ceļiem, pie kam katrs ceļš savieno tieši divus ciematus, ceļi ārpus ciematiem nekrustojas (bet, iespējams, šķērso viens otru ar viaduktu), un katrs ceļš ir tieši 1 km garš. Ciematus, kas ir savienoti ar ceļu, sauksim par *kaimiņiem.* Par *attālumu* starp ciematiem X un Y sauksim īsākā ceļa garumu, pa kuru var nonākt no X uz Y.

Graflandē lielākais attālums starp ciematiem ir 100 km. Tāpat ir zināma sekojoša īpašība: katram ciematu pārim (X, Y) (iespējams, ka $X = Y$), ja attālums starp X un Y ir k km, tad Y ir tieši b_k kaimiņi, kas atrodas attālumā $k+1$ no X, un tieši c_k kaimiņi, kas atrodas attālumā $k-1$ no X.
Pierādiet, ka

$$\frac{b_0 b_1 \cdots b_{99}}{b_1 b_2 \cdots b_{100}}$$

ir naturāls skaitlis!

Uzdevums 0.8 (BW.TST.2019.8): Vienā no 20×20 rūtiņu lapas rūtiņām ir apslēpti dārgumi. Lai atrastu šos dārgumus, mēs šobrīd varam pasūtīt vairākus ģeoloģiskus pētījumus, kuru rezultāti tiks saņemti visi vienlaicīgi pēc mēneša. Katram pētījumam nepieciešams norādīt vienu 1×4 rūtiņu laukumu un pētījuma rezultātā mēs uzzināsim, vai šajā laukumā ir dārgumi, vai nav. Šis 1×4 rūtiņu laukums var būt novietots gan horizontāli, gan vertikāli un tas var arī iet pāri laukuma malai, tādā gadījumā tas "cikliski"turpinās pretējā pusē (Att. 1).
Kāds ir mazākais pētījumu skaits, kas jāpasūta, lai droši varētu noskaidrot, kur atrodas dārgumi?



Att. 1: Četri piemēri, kā var būt novietots 1×4 rūtiņu laukums, kurā tiek veikts pētījums

2019. gada 22. septembris, Rīga (2. diena)

Uzdevums 0.9 (BW.TST.2019.9): Dots rombs $ABCD$, zināms, ka $\sphericalangle ABC > 90°$. Riņķa līnijas Γ_B centrs ir punkts B un tā iet caur punktu C, bet riņķa līnijas Γ_C centrs ir punkts C un tā iet aur punktu B. Vienu no riņķa līniju Γ_B un Γ_C krustpunktiem apzīmēsim ar E, taisne ED vēlreiz krusto riņķa līniju Γ_B punktā F. Atrodiet leņķa $\sphericalangle AFB$ vērtību.

Uzdevums 0.10 (BW.TST.2019.10): Šaurleņķa trijstūra ABC augstumi krustojas punktā H, malas BC viduspunkts ir M. Riņķa līnijas ω_1 diametrs ir AH, riņķa līnijas ω_2 centrs ir M un tā iekšēji pieskaras trijstūra ABC apvilktajai riņķa līnijai. Pierādīt, ka riņķa līnijas ω_1 un ω_2 pieskaras viena otrai.

Uzdevums 0.11 (BW.TST.2019.11): Regulāram 2018-stūrim $A_1 A_2 \ldots A_{2018}$ apvilktās riņķa līnijas rādiuss ir R. Pierādīt, ka

$$A_1 A_{1008} - A_1 A_{1006} + A_1 A_{1004} - A_1 A_{1002} + \ldots A_1 A_4 - A_1 A_2 = R.$$

Uzdevums 0.12 (BW.TST.2019.12): No punkta A Pret riņķa līniju ω novilktas pieskares AX un AY (X un Y ir pieskaršanās punkti). Uz nogriežņiem AX un AY izvēlēti attiecīgi punkti B un C tā, ka trijstūra ABC perimetrs ir vienāds ar nogriežņa AX garumu. Punktam A simetriskais punkts attiecībā pret taisni BC ir D. Pierādīt, ka trijstūrim BDC apvilktā riņķa līnija pieskaras riņķa līnijai ω.

Uzdevums 0.13 (BW.TST.2019.13): Ar $s(k)$ apzīmēsim naturāla skaitļa k ciparu summu. Pierādīt, ka ir bezgalīgi daudz tādu naturālu skaitļu n, kas nedalās ar 10 un kuriem $s\left(n^2\right) < s(n) - 5$.

Uzdevums 0.14 (BW.TST.2019.14): Dots naturāls skaitlis m un pirmskaitlis p, kas ir skaitļa m^2-2 dalītājs. Zināms, ka eksistē tāds naturāls skaitlis a, ka a^2+m-2 dalās ar p. Pierādīt, ka eksistē tāds naturāls skaitlis b, ka b^2-m-2 dalās ar p.

Uzdevums 0.15 (BW.TST.2019.15): Atrodiet visus veselu skaitļu trijniekus (a, b, c), kuriem

$$(a-b)^3(a+b)^2 = c^2 + 2(a-b) + 1.$$

Uzdevums 0.16 (BW.TST.2019.16): Atrodiet visus naturālu skaitļu četriniekus (x, y, z, t), kuri apmierina sekojošu vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} xyz = t! \\ (x+1)(y+1)(z+1) = (t+1)! \end{cases}$$