Skaitļu teorija
NMS juniori

Mājasdarbs #4

2020./2021.m.g.

2021.gada 27.marts

Iesniegšanas termiņš: 2021.g. 17.aprīlis
Kam iesūtīt: `kalvis.apsitis`, domēns `gmail.com`

Uzdevums 4.1: Polinomā $f(n) = n^2 + n + 41$ pēc kārtas ievieto veselos nenegatīvos skaitļus $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ un iegūst sekojošas vērtības:

$$41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151, 173, 197, 223, 251, 281, 313, 347, 383, 421, 461, \ldots$$

Izrakstām šīs virknes locekļu ciparus un iegūstam skaitli $\alpha = 0.4143475361718397113\ldots$. Pierādīt, ka skaitlis α ir iracionāls.

Uzdevums 4.2: Definējam virkni $L_0, L_1, L_2, \ldots$ ar šādu formulu:

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

(a) Pierādīt, ka virknes L_n locekļi apmierina sakarību:

$$L_n^2 = 5F_n^2 + 4(-1)^n \text{ visiem } n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

F_n apzīmē Fibonači skaitļus ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$, un $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, ja $n \geq 2$).

(b) Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudzi pirmskaitļi p, kuri dala kādu virknes L_k locekli.

(c) Pierādīt, ka L_k nedalās ar pirmskaitļiem $p = 20m + 13$ (piemēram $p = 13, 53, 73, 113, \ldots$)
Ieteikums. Var izmantot formulu (1).

Uzdevums 4.3: Ar a_n apzīmējam n-to locekli virknē $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, \ldots$, ko veido, atkārtojot katru naturālu skaitli k tieši k reizes. Pierādīt, ka

$$a_n = \left\lfloor \sqrt{2n} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

Uzdevums 4.4: Pieņemsim, ka γ, δ ir pozitīvi iracionāli skaiļi, turklāt $\dfrac{1}{\gamma} + \dfrac{1}{\delta} = 1$. Definējam divas virknes:

$$a_n = \lfloor n\gamma \rfloor, \quad b_n = \lfloor n\delta \rfloor.$$

Pierādīt, ka ikviens naturāls skaitlis parādās tieši vienā no abām virknēm a_n vai b_n (bet ne abās virknēs).

Uzdevums 4.5: Kopu A sauksim par *sanumurējamu*, ja $|A| \leq |\mathbf{N}|$, t.i. eksistē injektīva funkcija $f : A \to \mathbf{N}$. (Citiem vārdiem, kopas A elementiem var piekārtot numurus, kas ir naturāli skaitļi, tā, lai neviens numurs netiktu izmantots divreiz).

(a) Ar S apzīmējam visu naturālo skaitļu virkņu kopu (tās elementi ir bezgalīgas virknes no naturāliem skaitļiem, kur locekļi var arī atkārtoties). Vai kopa S ir sanumurējama?

(b) Ar S_1 apzīmējam visu *nedilstošo* naturālo skaitļu virkņu kopu (tā satur bezgalīgas virknes $x_1, x_2, x_3, \ldots$, kurām $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots$). Vai kopa S_1 ir sanumurējama?

(c) Ar S_2 apzīmējam visu *neaugošo* naturālo skaitļu virkņu kopu (tā satur bezgalīgas virknes $x_1, x_2, x_3, \ldots$, kurām $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \ldots$). Vai kopa S_2 ir sanumurējama?

Ieteikums. Tām kopām, kuras nav sanumurējamas, var izmantot Kantora diagonalizāciju (sk. `https://bit.ly/3lYe8cy`); sanumurējamām kopām pietiek atrast veidu, kā sanumurēt.