Skaitļu teorija
NMS juniori

Mājasdarbs #3

2020./2021.m.g.

2021.gada 31.janvāris

Iesniegšanas termiņš: 2021.g. 20.februāris
Kam iesūtīt: `kalvis.apsitis`, domēns `gmail.com`

Uzdevums 3.1: Pierādīt, ka jebkuram naturālam skaitlim n, ir n pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi, ka jebkuram no tiem ir dalītājs, kas ir pilns kvadrāts, kas lielāks par 1.

Uzdevums 3.2: Dotajam naturālam skaitlim n, ar $f(n)$ apzīmējam mazāko naturālo skaitli, ka $\sum_{k=1}^{f(n)} k$ dalās ar n. Pierādīt, ka $f(n) = 2n - 1$ tad un tikai tad, ja n ir skaitļa 2 pakāpe.

Uzdevums 3.3: Ar n un k apzīmējam veselus skaitļus, ka $n > 0$ un skaitlis $k(n-1)$ ir pāra skaitlis. Pierādīt, ka eksistē skaitļi x un y, ka $\text{LKD}(x,n) = \text{LKD}(y,n) = 1$ un $x + y \equiv k \pmod{n}$.

Uzdevums 3.4: Plakne sadalīta kvadrātiņos kā rūtiņu papīra lapa; rūtiņas garums ir 1 un vienā no rūtiņu virsotnēm ir koordinātu sākumpunkts. Sauksim rūtiņu virsotni X šajā plaknē par *redzamu* no koordinātu sākumpunkta $O(0;0)$, ja nogrieznis OX nesatur citas rūtiņu virsotnes ar abām veselām koordinātēm, izņemot O un X. Pierādīt, ka jebkuram naturālam n eksistē kvadrāts ar $n \times n$ rūtiņu virsotnēm (kur kvadrāta malas ir paralēlas koordinātu asīm), ka neviena no šīm n^2 rūtiņu virsotnēm nav redzama no koordinātu sākumpunkta.

Uzdevums 3.5: Ar m, n apzīmēti naturāli skaitļi, kas apmierina šādu īpašību:

$$\text{LKD}(11k-1, m) = \text{LKD}(11k-1, n) \text{ ir spēkā visiem naturāliem skaitļiem } k.$$

Pierādīt, ka $m = 11^r n$ kādam veselam skaitlim r.