

LV.AVGTEST.2024C.7__8.1

Tumšā skapī ir zeķes 12 krāsās – pa 20 zeķēm katrā no krāsām. Kāds mazākais zeķu skaits jāizvelk, lai starp tām noteikti atrastos divas zeķes vienādā krāsā?

- Answer:13

Atrisinājums

Izvilktās zeķes ir objekti (“truši”), bet iespējamās krāsas ir grupas (“būri”). Tā kā grupu ir tieši $N = 12$, tad izvelkot $N + 1 = 13$ zeķes, starp tām noteikti būs divas vienādā krāsā. Ar 12 zeķēm nepietiek, jo var neveikties: katra no pirmajām 12 zeķēm var būt citā krāsā.

LV.AVGTEST.2024C.7__8.2

Rūpnīca ražo ķieģeļus, no kuriem neviens nav smagāks par 3 kg, neviens nav vieglāks par 2.9 kg. Kāds mazākais ķieģeļu skaits jānopērk, lai starp tiem noteikti atrastos divi tādi, kuru masu starpība ir mazāka par 1 g (masu starpību iegūst, no lielākās masas atņemot mazāko)?

- Answer:102

Atrisinājums

Pārveidojam visas masas gramos. Tad intervālu $[2900; 3000]$ var pārklāt ar 101 maziem intervāliem $[2900.0; 2900.5)$, $[2900.5; 2901.5)$, $[2901.5; 2902.5)$, utt., $[2999.5; 3000.0]$. Katram intervālam izņemot pēdējo pieder kreisais galapunkts, bet nepieder labais galapunkts (ar apaļo iekavu).

Ja izraudzīti jebkādi 102 ķieģeļi, tad vismaz vienā no intervāliem nonāks divi ķieģeļi. Tā kā jebkurš intervāls (izņemot pirmo un pēdējo, kuri ir vēl īsāki) ir ar garumu 1 un nesatur vienu galapunktu, tad abu ķieģeļu masu starpība būs mazāka par 1 gramu.

Ja izvēlas tieši 101 ķieģeļus, tad var ņemt 2900, 2901, utt. līdz 3000. (Visas masu atšķirības ir tieši 1 grams.)

LV.AVGTEST.2024C.7__8.3

Kāds mazākais skaits no astoņiem naturāliem skaitļiem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 jāizsvītro, lai starp palikušajiem skaitļiem neatrastos tādi divi, kuru summa ir 9?

- Answer:4

Atrisinājums

Ir pavisam 4 “būrīši” $((1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5))$, kuros esošie skaitļu pāri dod summā 9. Izsvītrojot no katra vienu ir pietiekami. Ja svītro mazāk, tad paliek pāri būrītis ar diviem skaitļiem, kuri summā dod 9.

LV.AVGTEST.2024C.7_8.4

Uz galda ir 15 spēļu kārtis. (Pīķi un kreici ir melni; erci un kāravi ir sarkani.) Kāds lielākais skaits no 15 kārtīm noteikti ir vienā krāsā?

- Answer:8

Ja tikai septiņas būtu katrā no krāsām, tad to kopskaits nevarētu pārsniegt $2 \cdot 7 = 14$. Tāpēc vismaz 8 ir vienādā krāsā (nav zināms kādā).

Nav obligāti, lai lielāks skaits būtu vienādā krāsā, jo var būt 8 kārtis vienā krāsā, bet 7 kārtis - otrā krāsā.

LV.AVGTEST.2024C.7_8.5

Tumšā skapī ir 100 melnas, 100 zilas un 100 zaļas zeķes. Kāds mazākais skaits zeķu neskatoties ir jāizvelk, lai noteikti starp tām būtu divas melnas vai divas zilas zeķes?

- Answer:103

Ar 102 izvilkām zeķēm nepietiek, jo var gadīties 100 zaļas, viena melna un viena zila. Ar 103 izvilkām zeķēm vienmēr pietiek, jo vismaz 3 no tām nebūs zaļas un varēs lietot Dirihlē principu – jebkādi piekārtojot 3 zeķes divām krāsām, divas no zeķēm nonāks vienā krāsā.

LV.AVGTEST.2024C.7_8.6

Uz galda novietotas ļoti daudzas kartītes. Uz katras kartītes rakstīta kāda 3-burtu virkne, kas satur burtus “A” un “B”. (Virknē vienādi burti drīkst atrasties blakus, piemēram, “AAA” vai “BBA”). Cik kartītes jāpaņem, lai uz divām no tām noteikti būtu divas vienādas virknītes.

- Answer:9

Ir pavisam 8 dažādas 3 burtu virknītes. Paņemot 9 kartītes, vismaz viena no virknītēm atkārtosies.

LV.AVGTEST.2024C.7__8.7

Auditorijā ir 10 gari soli, uz kuriem kaut kā jau sasēdušās 100 meitenes. Kādu lielāko skaitu zēnu var sasēdināt šajā auditorijā, ja nekādi divi zēni nedrīkst sēdēt blakus?

- Answer:110

Pirms meitenēm auditorijā bija 10 “būrīši” (katrs no soliem), bet katras meitenes nosēdināšana “būrīšu” skaitu palielina par 1 (pārdalot solu vai tā posmu divās daļās). Tādēļ būrīšu ir pavisam 110. Lai nevienā būrītī nonāktu ne vairāk par vienu zēnu, to skaits nevar pārsniegt 110.

110 zēnus var sasēdināt. Piemēram, var uz viena sola nosēdināt 11 zēnus un 10 meitenes: $(Z, M, Z, M, \dots, M, Z, M, Z)$.

LV.AVGTEST.2024C.7__8.8

Makā ir 25 monētas (eiro vai centu). Kāds ir lielākais skaits monētu ar vienādu vērtību, ko no šī maka noteikti var izņemt?

- Answer:4

Pavisam ir astoņu vērtību monētas 1, 2, 5, 10, 20, 50 centu, 1 eiro un 2 eiro.

Ja nebūtu vismaz 4 monētas ar vienādu vērtību (vienalga kādas vērtības), tad to kopskaits nevarētu pārsniegt $3 \cdot 8 = 24$.

LV.AVGTEST.2024C.7__8.9

Auto dīlerim ir 20 Audi, 20 BMW, 20 VW un 20 Volvo automašīnas. Kāds mazākais mašīnu skaits jānopērk, lai varētu apgalvot, ka ir nopirkta vismaz piecas vienas markas automašīnas?

- Answer:17

Ja nopirkta tikai 16 mašīnas, tad var būt pa četrām no katras markas.

Ja nopirkta 17 mašīnas, tad nevar gadīties, ka no katras markas nopirkta mazāk kā piecas, jo $4 \cdot 4 < 17$.

LV.AVGTEST.2024C.7__8.10

Tortes dekorēšanai nepieciešami vai nu divi apelsīni, vai trīs āboli, vai piecas aprikozes, vai septiņi ķirši. Mazā Mija atnesa no veikala n augļus, ikviens no kuriem ir apelsīns, ābols, aprikoze vai ķirsis.

Kādam mazākajam n ar atnestajiem augļiem noteikti pietiek tortes dekorēšanai?

- Answer:14

Skaits $n = (2 - 1) + (3 - 1) + (5 - 1) + (7 - 1) = 2 + 3 + 5 + 7 - 4 = 13$ ir vislielākais, kuram var atņemt augļus tā, lai katram no četriem paveidiem viens pietrūktu. Ja atnesīs par vienu vairāk, t.i. 14, tad vismaz vienam paveidam tiks sasniegts vajadzīgais skaits.

LV.AVGTEST.2024C.7_8.11

Klasē mācās 20 skolēni. Katram skolēnam ir tieši divi vectētiņi; turklāt katriem diviem skolēniem vismaz viens vectētiņš ir kopīgs. (Zināms arī, ka neeksistē visiem skolēniem kopīgs vectētiņš.) Kāds ir lielākais iespējamais šīs klases skolēnu vectētiņu skaits?

- Answer:3

Atrisinājums

Trīs vectētiņi A, B, C , acīmredzot, ir iespējami - ja katram skolēnam vectētiņu pāris ir vai nu (A, B) , vai (A, C) , vai (B, C) , tad katriem diviem skolēniem kāds no vectētiņiem sakrītīs (ja abu bērnu četrus vectētiņus var izvēlēties no trim, tad divi no tiem sakrītīs).

Visi vectētiņu pāri (A, B) , (A, C) , (B, C) noteikti tiek izmantoti (eksistē bērni, kam ir pāris (A, B) , un arī (A, C) un arī (B, C)), jo ir zināms, ka nevar būt visiem kopīgais vectētiņš.

Bet ceturto vectētiņu pievienot vairs nav iespējams, jo tad, ja parādās vēl kāds bērns, tad viņam nevar piešķirt jaunu vectētiņu "D", jo tad viņam var būt ne vairāk kā viens vectētiņš no saraksta (A, B, C) - un tātad ar kādu no bērniem viņam nebūs kopīga vectētiņa.

Piezīme: Vectētiņu uzdevums ir Dirihlē principa variants, kur katrs objekts ieklasificējas uzreiz divās "kastēs" (jo katram cilvēkam ir divi vectētiņi).

LV.AVGTEST.2024C.7_8.12

Katrs no 36 punktiem kvadrātiskā režģī 6×6 , nejauši izvēloties, nokrāsots vai nu melns vai balts. Kāds mazākais punktu skaits jānokrāso melni, lai noteikti atrastos horizontāla vai vertikāla taisne, uz kuras ir vismaz 4 melni punkti?

- Answer:19

Atrisinājums

Ja 19 punkti ir melni, tad tos kaut kā sazīmējot uz 6 paralēlām taisnēm režģī (piemēram, horizontālajām) atradīsies $\lceil 19/6 \rceil = 4$ punkti uz vienas horizontālās taisnes (19/6 noapaļojam uz augšu.)

Ja izvēlas tikai 18 baltos punktus, tad arī melno būs 18 un tos režģī 6×6 varēs iekrāsot pārmaiņus līdzīgi šaha galdiņa krāsojumam. Uz katras horizontālas vai vertikālas taisnes nonāks tikai 3 melni punkti.

LV.AVGTEST.2024C.7_8.13

Klasē ir 12 skolēni. Katrs no viņiem kaut kā izvēlas n klasesbiedrus un nosūta katram no viņiem Jaungada apsveikumu. Kādam mazākajam n var apgalvot, ka noteikti atradīsies divi tādi klasesbiedri, kas nosūtījuši apsveikumus viens otram?

- Answer:6

Atrisinājums

Attēlosim klasesbiedrus kā punktus, kas izvietoti uz riņķa līnijas. Pavisam tos savieno $C_{12}^2 = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$ šķautnes jeb vēstuļu sūtīšanas “kanāli”. (Tik daudz diagonāļu ir 12-stūrī, kas savieno kaut kādas divas virsotnes).

Ja tiek sūtītas $12 \cdot 6 = 72$ vēstules, tad katrai vēstulei nepietiek sava “kanāla”; divām jātiek sūtītām starp tām pašām virsotnēm - t.i. klasesbiedri nosūta vēstules viens otram.

LV.AVGTEST.2024C.7_8.14

Istabā ir 10 cilvēki; katri divi vai nu pazīst viens otru vai arī nepazīst. (Pazīšanās ir simetriska: ja A pazīst B , tad arī B pazīst A .) Izvēlamies cilvēku X starp šiem 10 cilvēkiem.

Kāds ir lielākais skaits cilvēku, kas vai nu visi pazīst X , vai arī visi nepazīst X ?

- Answer:5

Atrisinājums

Cilvēkam X ir pavisam 9 dažādi citi cilvēki. Katru no tiem var pazīt vai nepazīt. Vismaz 5 no šiem cilvēkiem būs attiecībā “pazīst” vai arī attiecībā “nepazīst”. 9 cilvēkus dala divu veidu “būrišos” - un vismaz pieciem jābūt savstarpēji vienādiem.

LV.AVGTEST.2024C.7_8.15

Vecmāmiņa kāpj pa trepēm 49 pakāpienus uz augšu, ar vienu soli pārvarot vienu, divus vai trīs pakāpienus. Pavisam viņai nepieciešami 30 soļi augšup. Ja vecmāmiņa piecreiz uzkāpj pa šīm trepēm, cik reižu viņa ciemojusies uz tā

pakāpiena, uz kura viņa bijusi visbiežāk (neskaitot pašu apakšējo - 0-to un pašu augšējo - 49-to)?

- Answer:4

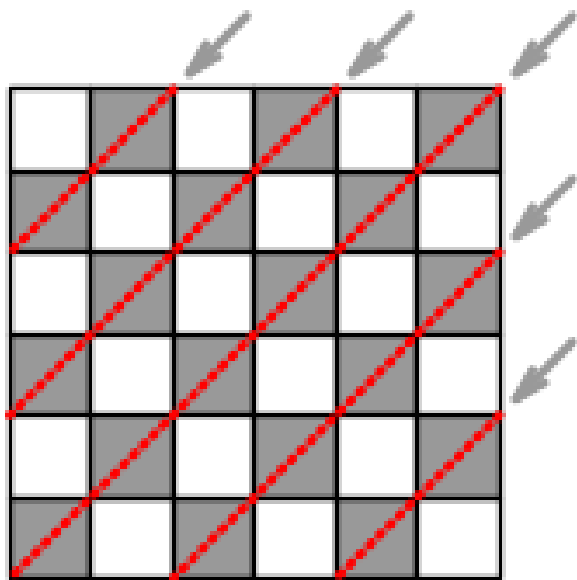
Atrisinājums

Pavisam ir 48 pakāpieni (neskaitot apakšējo un augšējo). 0-tajā solī vecmāmiņa ir uz apakšējā pakāpiena, bet 30-tajā solī - uz augšējā. Tādēļ viņai katrā uzkāpšanas reizē ir 29 soļi uz pakāpieniem kaut kur pa vidu. Iegūstam, $29 \cdot 5 = 145$. Sadalot 145 uz 48 "būrišiem" iegūstam, ka vismaz vienā būrītī būs vismaz $\lceil 145/48 \rceil = \lceil 3.02 \rceil = 4$ objekti. (Noapaļo uz augšu.)

Piezīme: Spēja kāpt tieši pa 1, 2 vai 3 pakāpieniem nav būtiska – varētu atļaut kāpt arī lielāku skaitu pakāpienu, atbilde no tā nemainītos.

LV.AVGTEST.2024C.7_8.16

Kādu lielāko skaitu laidņu var izvietot uz šaha galda 6×6 tā, lai tie viens otru neapdraud (t.i. neatrodas uz vienas diagonāles)? Laidņu gājienus sk. zīmējumā - ja tie pārvietojas pa melnajiem lauciņiem. Ir arī laidņi, kas pārvietojas pa baltajiem lauciņiem.



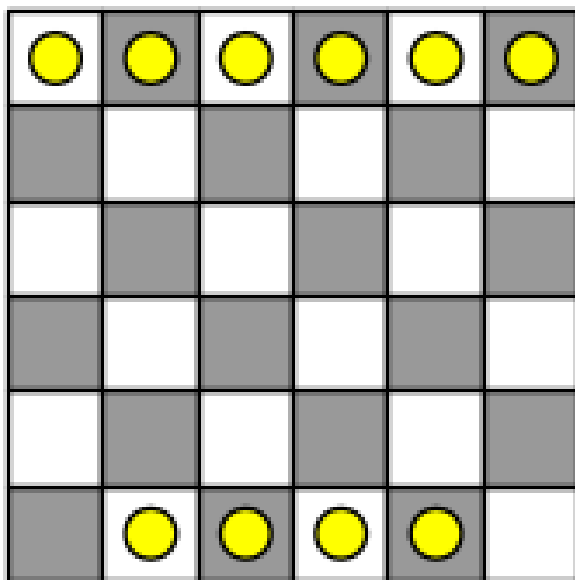
1. zīm.

- Answer:10

Atrisinājums

Ir divu veidu laidņi - uz melnajām un uz baltajām diagonālēm. Ja aplūkojam melnās diagonāles, tad tām eksistē divi virzieni (no kreisā augšējā uz labo apakšējo stūri un no labā augšējā uz kreiso apakšējo). Dirihlē principa lietošanai izdevīgāks tas virziens uz kura ir mazāk diagonāļu (5 diagonāles nevis 6). Uz katras no 5 diagonālēm var novietot ne vairāk par vienu laidni.

Tas pats sakāms arī par baltajām diagonālēm. Tādēļ laidņu nevar būt vairāk par $5 + 5 = 10$. Kā novietot tieši 10 laidņus tā, lai tie viens otru neapdraud, attēlots zīmējumā



2.zīm.