Latvijas papildsacensības, Skaitļu teorija: Atrisinājumi

Uzd. LV.TST.2012.9-12.1.SOL. Ar $S(x)$ apzīmēsim skaitļa x ciparu summu. Aprēķināt $S(S(S(2012^{2012})))$.

Atrisinājums. Kā zināms no dalāmības pazīmes ar 9, ir spēkā sakarība

$$n \equiv S(n) \pmod 9$$

t.i. jebkurš naturāls skaitlis n un tā ciparu summa pieder tai pašai kongruences klasei $(\mathrm{mod}\, 9)$. Noskaidrosim, kādai kongruences klasei pieder 2012^{2012}, jeb kāds ir šī skaitļa atlikums, to dalot ar 9.

$$2012^{2012} \equiv 5^{2012} \equiv 5^2 5^{2010} \equiv 25 \cdot (5^6)^{335} \equiv 25 \equiv 7 \pmod 9$$

Mēs izmantojām Eilera teorēmu: ja $\gcd(a, 9) = 1$, tad $a^{\varphi(9)} \equiv 1 \pmod 9$, kur $\varphi(9)$ ir Eilera funkcija (cik daudzi no skaitļiem $\{1, \ldots, 9\}$ ir savstarpēji pirmskaitļi ar 9). Viegli redzēt, ka $\varphi(9) = 6$, tādēļ $5^6 \equiv 1 \pmod 9$.

Kad esam uzzinājuši, ka 2012^{2012} ir kongruents ar 7 pēc 9 moduļa, dalāmības pazīme skaitlim 9 ļauj secināt, ka arī $s_1 = S(2012^{2012})$, $s_2 = S(S(2012^{2012}))$ un $s_3 = S(S(S(2012^{2012})))$ pieder šai pašai kongruences klasei. Citiem vārdiem, skaitlis $s_3 = S(S(S(2012^{2012})))$ dod atlikumu 7, dalot ar 9 jeb s_3 ciparu summa dod atlikumu 7, dalot ar 9. Pamatosim, ka $s_3 = S(S(S(2012^{2012})))$ vienāds ar 7.

Apgalvojums A: Mazākais naturālais skaitlis $n \equiv 7 \pmod 9$, kam $S(n) > 7$, ir 79.

Pamatojums: Izrakstām dažus mazākos naturālos skaitļus, kuri dod atlikumu 7, dalot ar 9:

$$7, 16, 25, 34, 43, 52, 61, 70, 79, \ldots$$

Viegli redzēt, ka 79 ir pirmais skaitlis šajā virknē, kuram ciparu summa ir nevis 7, bet 16. □

Apgalvojums B: Mazākais naturālais skaitlis $n \equiv 7 \pmod 9$, kam $S(S(n)) > 7$ ir 799999999

Pamatojums: Mums jāatrod mazākais n, kuram $S(n) \equiv 7 \pmod 9$, bet $S(n) > 7$. Saskaņā ar iepriekšējo apgalvojumu, mazākā ciparu summa $S(n)$ ar šādu īpašību ir 79. Mazākais ciparu skaits skaitlī, kura ciparu summa ir 79 ir deviņi cipari. Summu 79 var iegūt divos veidos:

$$79 = 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 7$$
$$79 = 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 8 + 8$$

Vismazākais deviņciparu skaitlis sanāks tad, ja tā pirmais cipars būs mazākais iespējamais, t.i. "7".

Tā kā, skaitlim pieaugot par 1, tā ciparu summa var palielināties ne vairāk kā par 1, nevarēs gadīties tā, ka mazākais naturālais skaitlis n (kam $n \equiv 7 \pmod 9$ un $S(S(n)) > 7$) būs ar ciparu summu, kas lielāka par 79, jo ciparu summa 79 tiks sasniegta pirms jebkuras lielākas ciparu summas. □

Apgalvojums C: Ir spēkā nevienādība $S(2012^{2012}) < 8 \cdot 10^8 - 1$.

Pamatojums: Novērtēsim skaitli 2012^{2012} no augšas:

$$\begin{aligned} 2012^{2012} &< 2100^{2012} = 2100^2 2100^{2010} = 2100^2 (2100^3)^{670} = \\ &= 441 \cdot 100^2 \cdot (9261 \cdot 10^6)^{670} < 441 \cdot 10^4 \cdot (10^{10})^{670} = \\ &= 441 \cdot 10^4 \cdot 10^{6700} < 1000 \cdot 10^{6704} = 10^{6707} \end{aligned}$$

Esam ieguvuši, ka skaitļa 2012^{2012} decimālpierakstā ir ne vairāk kā 6707 cipari, jo šis skaitlis ir mazāks par 10^{6707}. Tādēļ šī skaitļa ciparu summa nevar pārsniegt $9 \cdot 6707 = 60363$, jo neviens cipars nav lielāks par 9. Šis ciparu summas novērtējums ir daudz mazāks nekā $8 \cdot 10^8 - 1$. □

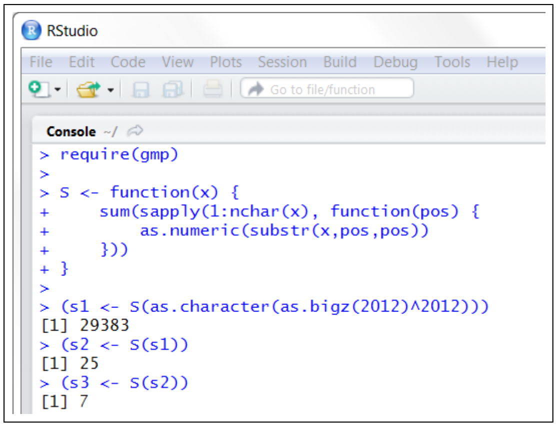
Saskaņā ar Apgalvojumu C, $S(2012^{2012}) < 799999999$.

Saskaņā ar Apgalvojumu B, $S(S(2012^{2012})) < 79$.

Saskaņā ar Apgalvojumu A, $S(S(S(2012^{2012}))) = 7$.

Atbilde. $S(S(S(2012^{2012}))) = 7$.

Piezīme. Izmantojot valodu R un `gmp` (Gnu multiple precision) bibliotēku, atbildi 7 var pārbaudīt ar tiešu skaitļošanu:




```
> require(gmp)
>
> S <- function(x) {
+     sum(sapply(1:nchar(x), function(pos) {
+         as.numeric(substr(x,pos,pos))
+     }))
+ }
>
> (s1 <- S(as.character(as.bigz(2012)^2012)))
[1] 29383
> (s2 <- S(s1))
[1] 25
> (s3 <- S(s2))
[1] 7
```