

## Matemātikas pulciņš #3, 2024-10-30

### DIRIHLĒ PRINCIPS

**Dirihlē princips (vienkāršākais gadījums):** Ja vairāk kā  $n$  objektus saliek  $n$  kastēs, tad vismaz vienā no kastēm ir vismaz divi objekti.

**Dirihlē princips (vispārīgāks gadījums):** Visiem naturāliem skaitļiem  $n$  un  $t$ , ja  $tn + 1$  objektus saliek  $n$  kastēs, tad vismaz vienā kastē nonāks vairāk kā  $t$  objekti.

**Apgalvojums par vidējo vērtību:** Ja  $n$  skaitļu vidējais aritmētiskais ir  $t$ , tad vismaz viens no skaitļiem ir vismaz  $t$ . Un arī vismaz viens no skaitļiem nepārsniedz  $t$ .

**Pierādījums:** No pretējā: ja visi  $n$  skaitļi būtu mazāki par  $t$ , tad to summa

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n < \underbrace{t + t + \dots + t}_{n \text{ reizes}} = nt.$$

Izdalām abas nevienādības puses ar  $n -$  iegūstam, ka vidējais aritmētiskais šiem  $n$  skaitļiem ir mazāks par  $t$ , kas ir pretrunā ar to, ka tas vienāds ar  $t$ .

“Vobegona ezers, kur visas sievietes ir stipras, visi vīrieši ir izskatīgi, un visi bērni ir virs vidusmēra.”  
(“Lake Wobegon, where all the women are strong, all the men are good-looking, and all the children are above average.”)

#### Piemēri

**Par skaitļu starpību:** Pierādīt, ka no jebkuriem astoņiem naturāliem skaitļiem var izvēlēties tādus divus, kuru starpība dalās ar 7.

**Par skaitļu summu:** Doti naturāli skaitļi no 1 līdz 8. Kāds mazākais skaits no tiem jāizvēlas, lai starp tiem atrastos divi, kuru summa ir 9?

**Par skaitļu dalāmību:** Uz galda ir 5 kartiņas; uz katras uzrakstīts naturāls skaitlis. Pierādīt, ka varēs izvēlēties trīs kartiņas tā, lai uz tām uzrakstīto skaitļu aritmētiskais vidējais būtu vesels skaitlis.

**Zeķu uzdevums:** Tumšā skapī atrodas 8 pāri sarkanu zeķu, 7 pāri zilu zeķu, 6 pāri zaļu zeķu. Tās ir sajauktas un var izvilkt tikai pa vienai. Cik zeķu neskatoties jāizvelk, lai starp tām būtu divas vienādā krāsā.

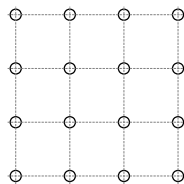
**Vispārināts zeķu uzdevums:** Citplanētiem ir silti, ja viņam ir kāds no sekojošiem apģērbu komplektiem ( pietiek izpildīt vienu variantu):

(A) 1 sega, (B) 2 džemperī, (C) 3 šalles, (D) 4 legingi, (E) 5 adītas cepurītes, (F) 6 zeķes.

Kāds mazākais apģērbu skaits nepieciešams, lai citplanētiem noteikti būtu silti?

**Komplektu veidošana:** Sniegbaltīte uzdāvināja katram no 7 rūķīšiem pa 5 konfektēm: “Vāverīti”, “Margrietīņu” un “Lācīti”, pie tam katrs rūķītis saņēma vismaz vienu katra veida konfekti. Pierādīt ka ir divi tādi rūķīši, kam viņa uzdāvināja vienādus konfekšu komplektus.

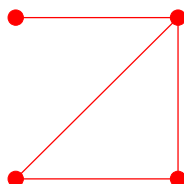
**Ģeometriskā konfigurācija:** Rūtiņu virsotnēs atzīmēti 16 punkti; sākumā tie visi ir balti (sk. zīmējumu). Vai tieši 7 punktus var nokrāsot melnus tā, lai nekādi trīs vienā krāsā nokrāsoti punkti neatrastos uz vienas taisnes?



### Uzdevumi

**1.uzdevums:** Ir 4 monētas ar dažādām masām un sviras svāri bez atsvariem (uz tiem var uzlikt divas monētas un noskaidrot, kura monēta ir smagāka). Vai var sakārtot monētas augošā secībā pēc masas, salīdzinot monētas (**A**) tieši 4 reizes; (**B**) tieši 5 reizes?

**2.uzdevums:** Kādā valstī ir  $N$  pilsētas; dažas no tām savieno divvirzienu avioreisi. Pierādīt, ka atradīsies divas tādas pilsētas, no kurām ir avioreisi uz vienādu skaitu pilsētu. (Piemēram, zīmējumā abām apakšējām pilsētām ir avioreisi uz divām pilsētām.)

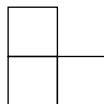


**3.uzdevums:** Vienādmalu trijstūrī ar malas garumu 1 atzīmēti desmit punkti. Pierādīt, ka starp tiem atrodas divi punkti, kuru attālums nepārsniedz  $\frac{1}{3}$ .

**4.uzdevums:** Apskatām 20 skaitļus  $S = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ . Pierādīt, ka izvēloties 11 skaitļus no šīs kopas  $S$  atradīsies divi tādi skaitļi, ka viens skaitlis dalās ar otru.

**5.uzdevums:** Pierādīt, ka starp jebkuriem 35 divciparu skaitļiem var atrast trīs tādus skaitļus, kuru ciparu summas ir vienādas.

**6.uzdevums:** Kādu mazāko skaitu rūtiņu jāiekrāso kvadrātā ar izmēru  $6 \times 6$  rūtiņas, lai neiekrāsotajā daļā nevarētu ievietot tādu “stūrīti” (varbūt citādi pagrieztu), kāds redzams zīmējumā?



**7.uzdevums:** Pierādīt, ka no septiņiem patvaļīgiem naturāliem skaitļiem var izvēlēties divus tādus skaitļus, kuru kvadrātu starpība dalās ar 11.