39. Ar indukciju pierādām apgalvojumu, no kura seko prasītais: eksistē tādi naturāli skaitļi a un b, kuriem $\left(1-\sqrt{2}\right)^n = \sqrt{a^2} - \sqrt{2b^2}$, un $a^2 - 2b^2 = (-1)^n$.

Ja $n = 1$, tad izvēlēsimies $a = b = 1$.

Pieņemsim, ka apgalvojums ir patiess, ja $n = k$, un pārbaudīsim to, ja $n = k+1$. Tad

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^{k+1} = \left(1-\sqrt{2}\right)^k \left(1-\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{a^2} - \sqrt{2b^2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right) =$$
$$(a+2b) - (a+b)\sqrt{2} = \sqrt{(a+2b)^2} - \sqrt{2(a+b)^2},$$

turklāt $(a+2b)^2 - 2(a+b)^2 = -\left(a^2 - 2b^2\right) = (-1)^{k+1}$. Apgalvojums pierādīts.

40. Ar indukciju pierādīsim stiprāku apgalvojumu, ka eksistē bezgalīgi daudz pāra skaitļu n, kuriem izpildās divas īpašības:

a) $n \mid 2^n + 2$ un

b) $(n-1) \mid 2^n + 1$.

Ja $n = 2$, tad abi nosacījumi izpildās.

Tagad pierādīsim, ka, ja šie nosacījumi izpildās pāra skaitlim n, tad tie izpildās arī pāra skaitlim $2^n + 2$. Tiešām, tā kā $2^{n-1} \equiv -1\left(\mathrm{mod}\left(2^{n-1}+1\right)\right)$ un $\dfrac{2^n+1}{n-1}$ ir vesels nepāra skaitlis, tad $2^{2^n+1} \equiv -1\left(\mathrm{mod}\, 2^{n-1}+1\right)$, t.i. $2^{n-1}+1 \mid 2^{2^n+1}+1$, un $2^n + 2 \mid 2^{2^n+2}+2$. Pirmais nosacījums pierādīts.

Kāpinot kongruenci $2^n \equiv -1\left(\mathrm{mod}\, 2^n+1\right)$ veselā nepāra pakāpē $\dfrac{2^n+2}{n}$, iegūstam otro nosacījumu:

$$2^{2^n+2} \equiv -1\left(\mathrm{mod}\, 2^n+1\right),$$

t.i. $2^n + 1 \mid 2^{2^n+2}+1$. Apgalvojums pierādīts.

41. Sākumā ar indukciju pierādīsim, ka vienādojumam $n^2 - 5m^2 = -1$ eksistē bezgalīgi daudz atrisinājumu naturālos skaitļos.
Ievērosim, ka $n = 2, m = 1$ ir dotā vienādojuma atrisinājums. Turklāt, ja (a,b) ir šī vienādojuma atrisinājums, tad arī $a_1 = 9a + 20b, b_1 = 4a + 9b$ ir šī vienādojuma atrisinājums (pārbaudiet to!).

Tagad pieņemsim, ka $n^2+1=m^2$. Tad $n=\sqrt{\dfrac{m^2+1}{5}}<\dfrac{m}{2}$. Tātad $n!\vdots\left(n^2+1\right)$, jo

$$n!\vdots 5\cdot m\cdot 2m\vdots 5m^2=\left(n^2+1\right).$$

Apgalvojums pierādīts.

42. Apgalvojumu pierāda, izmantojot sekojošu lemmu, ko pierāda ar indukciju pēc skaitļa *r*:

Lemma. Doti veseli skaitļi $b_1,b_2,\ldots,b_r$, kuri nedalās ar pirmskaitli *p*; $0<r<p$. Tad no šiem skaitļiem var sastādīt vismaz $r+1$ summas, kuras pēc moduļa *p* ir dažādas.

43. Summā $a_n \pm a_{n-1} \pm \cdots \pm a_1$ saskaitāmo zīmes izvēlēsimies šādi:

ja $a_n \pm a_{n-1} \pm \cdots \pm a_{k+1} > 0$, tad a_k ņemsim ar "-" zīmi, pretējā gadījumā ar "+" zīmi. Ar indukciju pēc saskaitāmo skaita pierāda, ka $\left|a_n \pm a_{n-1} \pm \cdots \pm a_k\right| \le k$.

Tā kā $a_n \pm a_{n-1} \pm \cdots \pm a_1$ ir pāra skaitlis, tad tas ir vienāds ar 0.

44. Pierādījums analoģisks iepriekšējā uzdevuma pierādījumam.

45. Katram naturālam skaitlim *s* vienādojumam ir vismaz viens atrisinājums naturālos skaitļos. Piemēram, šāds: $x_1=x_2=\cdots=x_s=s$. Lai pierādītu, ka dotajam vienādojumam ir tikai galīgs skaits atrisinājumu, ar indukciju pēc s pierāda vispārīgāku apgalvojumu: jebkuram racionālam skaitlim *w* un jebkuram naturālam skaitlim *s* vienādojumam

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots\frac{1}{x_s}=w$$

ir tikai galīgs skaits atrisinājumu naturālos skaitļos.

46. Apzīmēsim $\underbrace{2^{3^{2^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}}_{n\ simboli}=a_n$ un $\underbrace{3^{2^{3^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}}_{n\ simboli}=b_n$.

Tad $a_1<b_1$, $a_2<b_2$, $a_3=512<6516=b_3$. Tālāk pierāda, ka no nevienādības $3a_i<b_i$ seko nevienādība $3b_{i+1}<a_{i+1}$, un no nevienādības $3b_i>a_i$ seko nevienādība $3a_{i+1}<b_{i+1}$. Tā kā $3a_3<b_3$, tad visiem $n\ge 3$, ja *n* ir nepāra skaitlis, tad $a_n<b_n$, bet, ja *n* ir pāra skaitlis, tad $b_n<a_n$.

47. Tāds skaitlis, piemēram, ir 5^{2n}. Tiešām, šādu skaitli tieši vienā veidā var izteikt kā skaitļu a un b kvadrātu summu, ja $\operatorname{ord}_5 a = \operatorname{ord}_5 b = k$, kur $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$. Pavisam kopā šādu veidu ir n.

Dotais apgalvojums seko no tā, ka skaitlis 5^{2l} ir viennozīmīgi izsakāms kā divu kvadrātu summa, kuri nedalās ar 5. Pēdējo apgalvojumu pierāda ar indukciju.

48. Aplūkojam divus gadījumus:

a) a_1 ir pāra skaitlis; tad $2^{a_n} \equiv 1 \pmod 3$, un $a_{n+1} \equiv a_n + 1 \pmod 3$;

b) a_1 ir nepāra skaitlis; tad $2^{a_n} \equiv 2 \pmod 3$, un $a_{n+1} \equiv a_n + 2 \pmod 3$.

Abos gadījumos izpildās uzdevuma apgalvojumi.

49. Uzdevuma apgalvojums izpildās visiem skaitļiem, kas uzrakstāmi formā $2^n - 1$. Pierādījumā jāaplūko Paskāla trijstūris pēc moduļa 2.

50. Pakāpeniski ar indukciju pierāda, ka $f(1,y) = y+2$, $f(2,y) = 2y+3$, $f(3,y) = 2^{y+3} - 3$ un

$$f(4,y) = \underbrace{2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}_{y+5 \text{ divnieki}} - 3 .$$

Atbilde: $f(4,1980) = \underbrace{2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}_{1985 \text{ divnieki}} - 3$.

51. Tā kā $f(1) < f(2) < \cdots < f(1985) = 1985$ un visas šajā virknē izrakstītās t vērtības ir naturāli skaitļi, tad $f(1) = 1,\ f(2) = 2, \ldots,\ f(1985) = 1985$. Tātad $f(1000) = 1000$.

Pierādīsim, ka patvaļīgam naturālam n pastāv vienādība $f(n) = n$.

Ar matemātisko indukciju pierādīsim šādu faktu:

Ja $1 \le x \le 2^n$, tad $f(x) = x$.

Bāze seko no iepriekš pierādītā.

Pieņemsim, ka apgalvojums pierādīts pie $n = k$.

Ievērosim, ka $f(3 \cdot 2^n) = f(3) \cdot f(2^n) = 3 \cdot 2^n$. Tāpat kā sākotnējā spriedumā, no šejienes seko, ka $f(x) = x$ pie $x = 1, 2, 3, \cdots, 3 \cdot 2^n$, tātad arī pie visiem x no 1 līdz 2^{n+1}. Induktīvā pāreja pierādīta.

Tā kā katrs naturāls skaitlis nepārsniedz kādu divnieka pakāpi, tad apgalvojums pierādīts.

52. Tā kā

$1 = 1;$

$2 = 1+1;$

$3 = 3 = 1+1+1;$

$4 = 1+1+1+1 = 1+3 = 3+1 = 4;$

$5 = 1+1+1+1+1 = 1+1+3 = 1+3+1 = 3+1+1 = 1+4 = 4+1;$

$6 = 1+1+1+1+1+1 = 1+4+1 = 4+1+1 = 1+1+4 = 3+3 =$

$= 3+1+1+1 = 1+3+1+1 = 1+1+3+1 = 1+1+1+3,$

tad redzam, ka $a_1=1$; $a_2=1$; $a_3=2$; $a_4=4$; $a_5=6$; $a_6=9$. Līdzīgi iegūstam $a_7=15$, $a_8=25$.

Rodas hipotēze, ka $a_{2n} = F_n^2$, $a_{2n+1} = F_n F_{n+1}$, kur F_0; F_1; F_2; ... ir Fibonači virkne: $F_0=1$, $F_1=1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. Pierādīsim to ar matemātisko indukciju.

Pierādījumā galveno lomu spēlēs sakarība

$a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + a_{n-4}$.

Tiešām, skaitli n izsakošā summa var sākties ar saskaitāmo 1 (tad atlikušo saskaitāmo summa ir n-1, tāpēc summu skaits ir a_{n-1}), ar saskaitāmo 3 (šādu summu skaits ir a_{n-3}) vai ar saskaitāmo 4 (šādu summu skaits ir a_{n-4}).

<u>Bāze.</u> Apgalvojums pareizs pie n =1; 2; 3; 4; 5; 6.

<u>Pāreja.</u> Pieņemsim, ka apgalvojums pareizs visiem indeksiem, kas mazāki par n. Aplūkosim a_n. Šķirosim divus gadījumus:

a) n - pāra skaitlis, $n = 2k$. Tad

$a_n = a_{n-1}+ a_{n-3}+ a_{n-4} = a_{2k-1}+ a_{2k-3}+ a_{2k-4} =$

$= a_{2(k-1)+1}+ a_{2(k-2)+1}+ a_{2(k-2)} =$

$= F_{k-1}\cdot F_k+ F_{k-2}\cdot F_{k-1}+ F_{k-2}^2 = F_{k-1}\cdot F_k+ F_{k-2}\cdot(F_{k-1}+ F_{k-2}) =$

$= F_{k-1}\cdot F_k+ F_{k-2}\cdot F_k=F_k (F_{k-1} + F_{k-2}) = F_k^2$

b) n - nepāra skaitlis, $n=2k+1$. Tad

$a_n = a_{2k}+ a_{2k-2}+ a_{2k-3} = F_k^2+ F_{k-1}^2+ F_{k-2}\cdot F_{k-1} =$

$= F_k^2+ F_{k-1}(F_{k-1}+ F_{k-2}) = F_k^2+ F_{k-1}\cdot F_k = F_k(F_k+F_{k-1}) = F_k\cdot F_{k+1}$.

Induktīvā pāreja izdarīta, apgalvojums pierādīts.