23. Parādiet, ka 8, 9 un 10 kapeiku summu var nomaksāt ar 3 un 5 kapeiku monētām. Ja prasītajā veidā var nomaksāt k kapeikas, tad, pievienojot vienu trīskapeiku monētu, var nomaksāt arī $k+3$ kapeikas. Apgalvojums pierādīts.

24. Jebkuru skaitli n, kas lielāks par 11, var izteikt formā $n = 2a + 3b$, $a, b \geq 2$. Pierādīsim to ar indukciju.

Ja $n = 12$, tad $n = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2$; ja $n = 13$, tad $n = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3$.
Pieņemsim, ka $k = 2a + 3b$. Tādā gadījumā $k + 2 = 2(a+1) + 3b$.

Apgalvojums pierādīts, jo $2a$ un $3b$ ir salikti skaitļi.

25. Sākumā ar indukciju pierādīsim, ka to var izdarīt vismaz vienā veidā.

Bāze: $k \in \{1,2,3,4\}$. $1 = 1^2$, $2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$, $3 = -1^2 + 2^2$, $4 = -1^2 - 2^2 + 3^2$.

Induktīvā pāreja $(l \to l+4)$. Ja $l = \pm 1^2 \pm \cdots \pm m^2$, tad

$$l + 4 = \pm 1^2 \pm \cdots \pm m^2 + (m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2.$$

Tālāk ievērosim, ka no jebkuras izteiksmes var iegūt bezgalīgu izteiksmju skaitu, pievienojot jau uzrakstītajai summai, summu, kas ir vienāda ar 0. Tiešām,

$$(m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2 -$$
$$(m+5)^2 + (m+6)^2 + (m+7)^2 - (m+8)^2 = 0.$$

26. Vispirms pierādīsim, ka, ja vienādojumam ir atrisinājums ar $s = r$, tad tāds eksistē arī ar $s = r + 3$. Tiešām, ja $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ ir atrisinājums, kad $s = r$, tad

$$(x_1, \ldots, x_{r-1}, 2x_r, 2x_r, 2x_r, 2x_r)$$

ir vienādojuma atrisinājums, kad $s = r + 3$. Katrai no skaitļu grupām $3m$, $3m+1$, $3m+2$ norādīsim mazāko (bāzes) atrisinājumu:

a) $3m$; $s = 6$, (2, 2, 2, 3, 3, 6);

b) $3m+1$; $s = 1$, (1);

c) $3m+2$; $s = 8$, (2, 2, 2, 3, 3, 7, 14, 21).

Tātad visiem skaitļiem s izņemot 2, 3 un 5 atrisinājumi eksistē. Vēl ir jāpierāda, ka norādītajām s vērtībām nav atrisinājumu.

27. Bāze: ja $s = 3$, tad atrisinājums ir (12, 15, 20, 10);

ja $s = 4$, tad atrisinājums ir

$$(5\cdot 7\cdot 13,\ 5\cdot 12\cdot 13,\ 7\cdot 12\cdot 13,\ 5\cdot 7\cdot 12\cdot 13,\ 5\cdot 7\cdot 12),$$

kurš iegūts no vienādības

$$1^3 + 5^3 + 7^3 + 12^3 = 13^3 .$$

Induktīvā pāreja $(r \to r+2)$: Ja $(t_1, t_2, \ldots, t_r, t_{r+1})$ ir vienādojuma atrisinājums, kad $s = r$, tad

$$(10t_1, 10t_2, \ldots, 10t_{r-1}, 12t_r, 15t_r, 20t_r, 10t_{r+1})$$

ir vienādojuma atrisinājums, kad $s = r+2$. Tas iegūts, izmantojot vienādību

$$\frac{1}{12^3} + \frac{1}{15^3} + \frac{1}{20^3} = \frac{1}{10^3} .$$

No jebkura atrisinājuma var iegūt bezgalīgi daudz atrisinājumu, pareizinot visus mainīgos ar jebkuru naturālu skaitli.

28. Pierādījums balstās uz to, ka vienādojumam eksistē atrisinājums (2, 2, ..., 2), ja $s = 2^m$ (bāze), un atrisinājuma mainīgo skaitu var palielināt par patvaļīgu skaitli $a^m - 1$, ja a ir kāds no atrisinājuma mainīgajiem.

29. Pierādīsim, ka apgalvojums ir spēkā $6k+9$ lodēm, kuru svari ir pirmie $6k+9$ naturālie skaitļi.

Bāze: $n = 9$. Pirmās 9 lodes sadalām šādi: $1+5+9 = 3+4+8 = 2+6+7$.

Nākamās sešas lodes pievienojam šādi:

$$(k+1)+(k+6) = (k+2)+(k+5) = (k+3)+(k+4).$$

30. Kopējā ložu masa ir vienāda ar $\frac{1}{2}n(n+1)$, un tāpēc, ja sadalīšana ir iespējama, tad $n\cdot(n+1)$ dalās ar 3. Tas nozīmē, ka $n = 3m$ vai $n = 3m+2$.

Bāze: pārbaudām, ka sadalījums ir iespējams, ja $n \in \{5,6,8,9\}$.

Induktīvā pāreja: $(n \to n+6)$. Nākamās sešas lodes pievienojam šādi:

$$(k+1)+(k+6) = (k+2)+(k+5) = (k+3)+(k+4).$$

Vēl jāatzīmē, ka 2 un 3 lodes atbilstoši uzdevuma prasībām sadalīt trīs grupās nevar.

Atbilde: $n = 3m$, $m \geq 2$ un $n = 3m + 2$, $m \geq 1$.

31. Apgalvojumu pierāda ar indukciju patvaļīgam $(4k+1)$-ciparu skaitlim.

32. Skaitlis, kura ciparu summa ir 1 ir vienāds ar 10^n un nedalās ar 7. Ar matemātisko indukciju pierādīsim, ka eksistē skaitlis ar ciparu summu $n > 1$, kurš dalās ar 7.
Indukcijas bāze: $n = 2, n = 3$.

Skaitļi 1001 un 21 ar ciparu summu 2 un 3 dalās ar 7. Pierādīsim, ka, ja eksistē skaitlis A ar ciparu summu k, kurš dalās ar 7, tad eksistē arī skaitlis ar ciparu summu $k+2$, kurš dalās ar 7.
Līdz ar to būs pierādīts, ka eksistē skaitlis, kura ciparu summa ir $n > 1$ un kurš dalās ar 7.
Lai konstruētu šādu skaitli, aplūkosim skaitli $\overline{1001A}$; šī skaitļa ciparu summa ir $k+2$ un tas dalās ar 7.

33. No dotā seko, ka $f(n) = f(f(f(n+2)+2)) = f(n+2)+2$. Tātad

$$f(n+2) = f(n) - 2.$$

Acīmredzami $f(1) = f(f(0)) = 0$.
Ar indukciju pierādīsim, ka $f(n) = 1 - n$ visiem nenegatīviem skaitļiem n.
Bāze: ja $n = 0$ vai $n = 1$ apgalvojums izpildās.

Induktīvā pāreja: Pieņemsim, ka apgalvojums izpildās, ja $n = k$ un pārbaudīsim, ka tas izpildās, ja $n = k + 2$.
Dots, ka $f(k) = 1 - k$; jāpārbauda, ka $f(k+2) = 1 - (k+2)$. Pārbaude:

$$f(k+2) = f(k) - 2 = (1-k) - 2 = 1 - (k+2).$$

Līdzīgi pierāda, ka $f(n) = 1 - n$ arī negatīviem skaitļiem.
Pārbaude parāda, ka funkcija $f(n) = 1 - n$ apmierina visus uzdevuma nosacījumus.

34. Ja $m = 1$, tad apgalvojums ir patiess.

Pieņemsim, ka apgalvojums ir patiess jebkuram $m < k$, un pierādīsim to, ja $m = k$. Pieņemsim, ka a_n ir Fibonači virknes lielākais loceklis, kuram $a_n \leq k$. Tad $k - a_n \leq a_{n+1} - a_n = a_{n-1}$. Skaitli $k - a_n$ var izteikt kā dažādu virknes (a_i) locekļu summu, neizmantojot a_n, jo $k - a_n < a_n$. Pievienojot šai summai skaitli a_n, mēs prasītajā veidā izteiksim skaitli k. Apgalvojums pierādīts.

35. Skaidrs, ka skaitļi 0 un 1 ir uzrakstāmi prasītajā veidā. Tālāk pierādīsim apgalvojumu tikai pozitīviem skaitļiem, jo, izmainot visas zīmes uz pretējām, var iegūt atbilstošo pierakstu arī negatīviem skaitļiem. Pieņemsim, ka k ir jebkurš naturāls skaitlis, un mazāki pozitīvie skaitļi ir šādā veidā uzrakstāmi. Aplūkosim divus gadījumus:

a) $k = 2l$; tad no skaitļa l pieraksta $\sum a_i 2^i$ iegūsim prasīto skaitļa k pierakstu $k = \sum a_i 2^{i+1}$.

b) $k = 4l \pm 1$; tad no skaitļa l pieraksta $\sum a_i 2^i$ iegūsim prasīto skaitļa k pierakstu $k = \pm 1 + \sum a_i 2^{i+2}$.

Apgalvojums pierādīts.

36. Apgalvojumu pierādīsim ar indukciju pēc m, uzskatot, ka n ir patvaļīgs naturāls skaitlis.

Ja $m = 1$, tad apgalvojums ir patiess.

Pieņemsim, ka tas ir patiess visiem $m < k$, un aplūkosim daļu $\frac{k}{n}$. Izdalīsim n ar k ar atlikumu: $n = qk + r, \quad 0 < r < k$. Tātad

$$\frac{k}{n} = \frac{1}{q+1} + \frac{(q+1)k - n}{n(q+1)} = \frac{1}{q+1} + \frac{k-r}{n(q+1)}.$$

Tā kā $k - r < k$, tad pēc induktīvā pieņēmuma

$$\frac{k-r}{n(q+1)} = \frac{1}{t_1} + \cdots + \frac{1}{t_s},$$

un visi t_i ir dažādi. Tā kā $\frac{k-r}{n(q+1)} < \frac{1}{q+1}$, tad $t_i > q+1$, un daļu $\frac{k}{n}$ var izteikt prasītajā veidā šādi:

$$\frac{k}{n} = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{t_1} + \cdots + \frac{1}{t_s}.$$

Apgalvojums pierādīts.

37. Pierādījums līdzīgs iepriekšējā uzdevuma pierādījumam.

38. Pierādīsim ar matemātisko indukciju līdzīgu apgalvojumu, kur 1990 aizstāts ar k. Ja $k = 1$, visi A skaitļi ir pirmskaitļi; tātad var ņemt $B = A$ un $p = 1$.

Pieņemsim, ka apgalvojums pareizs visiem $k < n$, un pierādīsim, ka tas izpildās ja $k = n$.

Aplūkosim divus gadījumus:

1) Eksistē tāds naturāls skaitlis *a*, ka $a > 1$ un *a* ir bezgalīgi daudzu kopas *A* elementu dalītājs; Apzīmēsim šo elementu veidoto *A* apakškopu ar A_1. Izveidojam kopu

$$\overline{A} = \left\{ \frac{x}{a} \quad | \quad x \in A_1 \right\}.$$

Tad $\overline{A}$ ir bezgalīga, un katrs $\overline{A}$ elements ir ne vairāk kā $n-1$ pirmskaitļu reizinājums (jo *a* satur vismaz vienu pirmskaitli kā reizinātāju). No $\overline{A}$ izvēlāmies, apakškopu $\overline{B}$ un skaitli $\overline{p}$, kam izpildās uzdevuma nosacījumi; tad kopa $B = \{x \cdot a \quad | \quad x \in \overline{B}\}$ un $p = \overline{p} \cdot a$ der par meklējamiem.

2) Katram naturālam *a* eksistē tikai galīgs daudzums tādu *A* elementu, kas dalās ar *a*. Ņemam patvaļīgu $a_1 \in A$. Ir tikai galīgs skaits *A* elementu, kas dalās ar kādu no a_1 pirmreizinātājiem. Atrodam tādu a_2, kas ne ar vienu no tiem nedalās. Pēc tam atrodam tādu a_3, kas nedalās ne ar vienu no a_1 un a_2 pirmreizinātājiem, utt. Iegūstam bezgalīgu kopas *A* elementu virkni $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Šīs virknes elementi veido kopu *B*, kurā jebkuru divu elementu lielākais kopīgais dalītājs ir 1. Apgalvojums pierādīts.