

## Atlases sacensības komandu olimpiādei "Baltijas ceļš"

2015. gada 19. septembris, Rīga (1. diena)

**Uzdevums 0.1 (BwTst2015.1):** Doti reāli skaitļi  $x$  un  $y$ , tādi, ka

$$x^4 y^2 + y^4 + 2x^3 y + 6x^2 y + x^2 + 8 \leq 0.$$

Pierādīt, ka  $x \geq -\frac{1}{6}$ .

**Uzdevums 0.2 (BwTst2015.2):** Par funkciju  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zināms, ka

- $f(x) > f(y)$  visiem reāliem  $x > y$ ;
- $f(x) > x$  visiem reāliem  $x$ ;
- $f(2x - f(x)) = x$  visiem reāliem  $x$ .

Pierādīt, ka  $f(x) = x + f(0)$  visiem reāliem skaitļiem  $x$ .

**Uzdevums 0.3 (BwTst2015.3):** Pierādīt, ka neeksistē polinoms  $P(x)$  ar veseliem koeficientiem un naturāls skaitlis  $m$ , tādi, ka

$$x^m + x + 2 = P(P(x))$$

izpildās visiem veseliem skaitļiem  $x$ .

**Uzdevums 0.4 (BwTst2015.4):** Vai izliektā 2014-stūrī var novilkt dažas diagonāles tā, ka tās nekrustojas, viss 2014-stūris ir sadalīts trijstūros un katra virsotne pieder nepāra skaitam šo trijstūru?

2015. gada 20. septembris, Rīga (2. diena)

**Uzdevums 0.5 (BwTst2015.5):**  $BE$  ir šaurleņķa trijstūra  $ABC$  augstums. Taisne  $l$  pieskaras trijstūra  $ABC$  apvilktajai riņķa līnijai punktā  $B$ , no  $C$  pret  $l$  novilkts perpendikuls  $CF$ . Pierādīt, ka taisnes  $EF$  un  $AB$  ir paralēlas.

**Uzdevums 0.6 (BwTst2015.6):**  $AM$  ir trijstūra  $ABC$  mediāna. No punkta  $C$  pret leņķa  $CMA$  bisektrisi novilkts perpendikuls  $CC_1$ , no punkta  $B$  pret leņķa  $BMA$  bisektrisi novilkts perpendikuls  $BB_1$ . Pierādīt, ka taisne  $AM$  krusto nogriezni  $B_1C_1$  tā viduspunktā.

**Uzdevums 0.7 (BwTst2015.7):** Divas riņķa līnijas  $\Gamma_1$  un  $\Gamma_2$  krustojas punktos  $A$  un  $B$ , punkts  $P$  neatrodas uz taisnes  $AB$ . Taisne  $AP$  vēlreiz krusto  $\Gamma_1$  un  $\Gamma_2$  attiecīgi punktos  $K$  un  $L$ , taisne  $BP$  vēlreiz krusto  $\Gamma_1$  un  $\Gamma_2$  attiecīgi punktos  $M$  un  $N$  un visi līdz šim minētie punkti ir dažādi. Ap trijstūriem  $KMP$  un  $LNP$  apvilktu riņķa līniju centri ir  $O_1$  un  $O_2$ . Pierādīt, ka  $O_1O_2$  ir perpendikulārs  $AB$ .

**Uzdevums 0.8 (BwTst2015.8):** Dots fiksēts racionāls skaitlis  $q$ . Skaitli  $x$  saucim par *harizmātisku*, ja var atrast tādu naturālu skaitli  $n$  un veselus skaitļus  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , ka

$$x = (q+1)^{\alpha_1} \cdot (q+2)^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot (q+n)^{\alpha_n}.$$

(A) Pierādīt, ka var atrast tādu  $q$ , kam visi pozitīvie racionālie skaitļi ir harizmātiski.

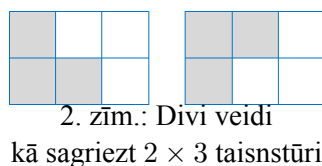
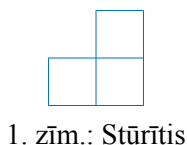
(B) Vai tiesa, ka visiem  $q$ , ja skaitlis  $x$  ir harizmātisks, tad arī  $x+1$  ir harizmātisks?

2015. gada 26. septembris, Rīga (3. diena)

**Uzdevums 0.9 (BwTst2015.9):** Divi spēlētāji uz  $N \times N$  rūtiņu laukuma spēlē sekojošu spēli. Tie pēc kārtas iekrāso pa vienai rūtiņai tā, lai nekādas divas iekrāsotās rūtiņas neatrastos uz vienas diagonāles. Spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu, zaudē. Kādām  $N$  vērtībām pirmajam spēlētājam eksistē uzvaroša stratēģija?

**Uzdevums 0.10 (BwTst2015.10):** Vai tiesa, ka visiem naturāliem  $n$  vienmēr iespējams katram no  $n$  bērniem iedot pa cepurei, kas nokrāsota vienā no 100 krāsām tā, ka, ja kāda meitene ir pazīstama ar vairāk nekā 2015 zēniem, tad ne visiem šiem zēniem cepures ir vienā krāsā, un, ja kāds zēns ir pazīstams ar vairāk nekā 2015 meitenēm, tad ne visām šīm meitenēm cepures ir vienā krāsā?

**Uzdevums 0.11 (BwTst2015.11):** Par figūru uz rūtiņu lapas sauksim patvaļīgu galīgu saistītu rūtiņu kopu, t.i. tādu rūtiņu kopu, kurai no jebkuras rūtiņas uz jebkuru citu iespējams aiziet, ejot tikai pa šīs figūras rutiņām. Pierādīt, ka katram naturālam  $n$  eksistē tāda figūra uz rūtiņu lapas, ka to var sagriezt "stūrīšos" (1. zīm.) tieši  $F_n$  veidos, kur  $F_n$  ir  $n$ -tais Fibonači skaitlis (Fibonači skaitļu virknē  $F_1 = F_2 = 1$  un katram  $i \geq 1$  izpildās  $F_{i+2} = F_{i+1} + F_i$ ). Piemēram,  $2 \times 3$  rūtiņu taisnstūri iespējams sagriezt stūrīšos tieši divos veidos (2. zīm.).



**Uzdevums 0.12 (BwTst2015.12):** Reāliem pozitīviem skaitļiem  $a, b, c$  izpildās vienādība  $abc = 1$ . Pierādīt, ka

$$\frac{a^{2014}}{1+2bc} + \frac{b^{2014}}{1+2ac} + \frac{c^{2014}}{1+2ab} \geq \frac{3}{ab+bc+ac}.$$

**2015. gada 26. septembris, Rīga (4. diena)**

**Uzdevums 0.13 (BwTst2015.13):** Vai eksistē tādi pozitīvi reāli skaitļi  $a$  un  $b$ , ka  $[an + b]$  ir pirmskaitlis visām naturālām  $n$  vērtībām. Ar  $[x]$  apzīmē skaitļa veselo daļu -- lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz  $x$ .

**Uzdevums 0.14 (BwTst2015.14):** Ar  $S(a)$  apzīmēsim skaitļa  $a$  ciparu summu. Kādām naturālām  $R$  vērtībām var atrast tādu naturālu  $n$ , ka

$$\frac{S(n^2)}{S(n)} = R?$$

**Uzdevums 0.15 (BwTst2015.15):** Ar  $\omega(n)$  apzīmēsim dažādo pirmskaitļu skaitu, ar ko dalās  $n$ . Pierādīt, ka ir bezgalīgi daudz tādu naturālu skaitļu  $n$ , kuriem  $\omega(n) < \omega(n+1) < \omega(n+2)$ .

**Uzdevums 0.16 (BwTst2015.16):** Punkti  $X, Y$  un  $Z$  atrodas uz taisnes  $k$  tieši šādā secībā. Uz nogriežņiem  $XZ, XY, YZ$  kā diametriem konstruētas riņķa līnijas  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ . Taisne  $l$ , kas iet caur punktu  $Y$ , krusto  $\omega_1$  punktos  $A$  un  $D$ ,  $\omega_2$  punktā  $B$  un  $\omega_3$  punktā  $C$  tā, ka punkti  $A, B, Y, C, D$  atrodas uz  $l$  tieši šādā secībā. Pierādīt, ka  $AB = CD$ .