Skaitļu teorija
ATV

Uzdevumu lapa #5

2021-02-03

Šie uzdevumi no nesenām "Baltic Way" olimpiādēm izmanto *Kāpinātāja pacelšanas lemmas* (*Lifting the Exponent Lemmas*).

Uzdevums 100.5: Ar $P(n)$ apzīmējam lielāko pirmskaitli, ar ko dalās n. Atrast visus naturālos skaitļus $n \geq 2$, kam

$$P(n) + \lfloor \sqrt{n} \rfloor = P(n+1) + \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor.$$

(Piezīme: $\lfloor x \rfloor$ apzīmē lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz x.)

Uzdevums 100.6: Atrast visus naturālos skaitļus n, kuriem $n^{n-1} - 1$ dalās ar 2^{2015}, bet nedalās ar 2^{2016}.

Uzdevums 100.7: Dots pirmskaitlis $p > 3$, kuram $p \equiv 3 \pmod 4$. Dotam naturālam skaitlim a_0 virkni $a_0, a_1, \ldots$ definē kā $a_n = a_{n-1}^{2^n}$ visiem $n = 1, 2, \ldots$. Pierādīt, ka a_0 var izvēlēties tā, ka apakšvirkne $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ nav konstanta pēc moduļa p nevienam naturālam N.

Uzdevums 100.8: Ar $\omega(n)$ apzīmēsim dažādo pirmskaitļu skaitu, ar ko dalās n. Pierādīt, ka ir bezgalīgi daudz tādu naturālu skaitļu n, kuriem $\omega(n) < \omega(n+1) < \omega(n+2)$.

Uzdevums 100.9: Pirmskaitlim p un naturālam skaitlim n apzīmējam ar $f(p, n)$ lielāko veselo skaitli k, kuram $p^k \mid n!$. Dots fiksēts pirmskaitlis p, bet m un c ir jebkādi naturāli skaitļi. Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudzi tādi naturāli skaitļi n, kuriem $f(p, n) \equiv c \pmod m$.