Dažāda skaitļu teorija

Sacensības #2021.05

2021-04-29

Par šo LU NMS atbalstīto pasākumu
atbild `kalvis.apsitis@gmail.com`.

Uzdevums 5.1: Ar n apzīmējam mazāko naturālo skaitli, kuram $149^n - 2^n$ dalās ar $3^3 \cdot 5^5 \cdot 7^7$. Atrast cik skaitlim n ir veselu pozitīvu dalītāju.

Uzdevums 5.2: Atrast, cik ir tādu naturālu skaitļu, kuri dala vismaz vienu no skaitļiem 10^{10}, 15^7, 18^{11}.

Uzdevums 5.3: Atrast mazāko naturālo n, kuram $2^n + 5^n - n$ dalās ar 1000.

Atbilde. 797.
Šajā uzdevumā nevar tieši izmantot Mazo Fermā vai Eilera teorēmu, jo gan 2, gan 5 ir kopīgi dalītāji ar 1000. Tāpēc analizējam citādi: Sākam ar novērojumu, ka n ir nepāru skaitlis, jo citādi 2^n un n būtu pāra skaitļi, bet 5^n ir nepāra (un summa nedalītos ar 1000).
Tā kā n ir nepāra (un mazas vērtības $n = 1, 2$ uzdevuma nosacījumus neapmierina), tad $5^n \equiv 125$. Tāpēc jārisina kongruenču vienādojums:

$$2^{2k+1} + 125 - (2k+1) \equiv 0 \pmod{1000}.$$

Šeit apzīmēts $n = 2k + 1$.
Vispirms risinām šo kongruenci pēc 10 moduļa, tad pēc 100 moduļa, tad pēc 1000 moduļa. Pakāpeniski iegūstam, ka $k \equiv 8 \pmod{10}$, tad $k \equiv 98 \pmod{100}$ un visbeidzot $k \equiv 398 \pmod{1000}$.
Pēdējā kongruence nozīmē, ka $n = 2k + 1$ ir kongruents ar 797 pēc 1000 moduļa (t.i. 797 ir mazākais skaitlis).

Uzdevums 5.4: Cik daudzi naturāli skaitļi, kas dalās ar 1001 var būt izteikti formā $10^j - 10^i$, kur i, j ir veseli skaitļi, $0 \leq i < j \leq 99$?