

## NMS Izlase junioriem: 1.nodarbība skaitļu teorijā

Ieteicams izvēlēties un rakstiski noformēt 5 no 8 uzdevumiem pirms 2019-09-28.

Var risināt uz papīra vai iesūtīt elektroniski: "kalvis.apsitis", domēns "gmail.com"

### 1.nodaļa: Pirmskaitļi un dalāmība

**Uzdevums 1.1:** Dota kopa  $S = \{105, 106, \dots, 210\}$ . Noteikt mazāko naturālo  $n$  vērtību, ka, izvēloties jebkuru  $n$  skaitļu apakškopu  $T$  no kopas  $S$ , tajā būs vismaz divi skaitļi, kuri nav savstarpēji pirmskaitļi.

**Uzdevums 1.2:** Visiem veseliem pozitīviem skaitļiem  $m > n$  pierādīt, ka

$$\text{MKD}(m, n) + \text{MKD}(m + 1, n + 1) > \frac{2mn}{\sqrt{m - n}}.$$

**Uzdevums 1.3:** Vai eksistē bezgalīga stingri augoša naturālu skaitļu virkne  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ , ka jebkuram fiksētam naturālam skaitlim  $a$  virknē  $a_1 + a < a_2 + a < a_3 + a, \dots$  ir tikai galīgs skaits pirmskaitļu?

**Uzdevums 1.4:** Pierādīt, ka virkne  $1, 11, 111, \dots$  satur bezgalīgu apakšvirkni, kuras katri divi locekļi ir savstarpēji pirmskaitļi.

### 2.nodaļa: Modulārā aritmētika

**Uzdevums 1.5:** Atrast visus pirmskaitļus  $p$ , ka skaitlim  $p^2 + 11$  ir tieši seši dažādi dalītāji (ieskaitot 1 un pašu skaitli).

**Uzdevums 1.6:** Uz tāfeles sākumā uzrakstīts viens skaitlis:

$$\underbrace{99 \dots 99}_{1997 \text{ deviņnieki}}.$$

Vienā gājienā atļauts kādu uz tāfeles esošo skaitli sadalīt divos reizinātājos; tad katru no reizinātājiem (neatkarīgi vienu no otra) palielināt vai samazināt par 2 un uzrakstīt šos rezultātus uz tāfeles.

Vai pēc kāda no gājieniem uz tāfeles var būt skaitļi, kas visi vienādi ar 9?

**Uzdevums 1.7:** Trijstūra malu garumi ir  $k$ ,  $m$  un  $n$ . Pieņemsim, ka  $k > m > n$  un

$$\left\{ \frac{3^k}{10^4} \right\} = \left\{ \frac{3^m}{10^4} \right\} = \left\{ \frac{3^n}{10^4} \right\}.$$

Noteikt trijstūra perimetra mazāko iespējamo vērtību.

*Piezīme.* Ar  $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$  apzīmē skaitļa  $x$  daļveida daļu - starpību starp skaitli  $x$  un tā veselo daļu (lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz  $x$ ).

**Uzdevums 1.8:** (a) Pierādīt, ka no 39 pēc kārtas sekojošiem naturāliem skaitļiem atradīsies skaitlis, kura ciparu summa dalās ar 11.

(b) Atrast mazākos 38 pēc kārtas sekojošus naturālus skaitļus, kuriem nevienam ciparu summa nedalās ar 11.