Modulārā aritmētika

Sacensības 2021#02

2021-03-04

Par šo LU NMS atbalstīto pasākumu
atbild kalvis.apsitis@gmail.com.

Uzdevums 1.1: Regulārā 360-stūrī virsotnes apzīmētas ar veseliem skaitļiem no 0 līdz 359.

- Ar ziliem nogriežņiem savienotas virsotnes a, b, kurām $a + b \equiv 37 \pmod{360}$.
- Ar sarkaniem nogriežņiem savienotas virsotnes a, b, kurām $a + b \equiv 151 \pmod{360}$.

Atrast mazāko leņķi (grādos) kuru var veidot zils nogrieznis ar sarkanu nogriezni. (Ja krustojoties veidojas divi leņķi x un $180° - x$, ierakstīt mazāko pozitīvo x vērtību.)

Atbilde. 57.
Apzīmējam virsotnes ar $A_0, A_1, \ldots, A_{359}$. Visi zilie nogriežņi ir paralēli nogrieznim A_0A_{37}, jo $0+37 \equiv 37 \pmod{360}$. Pārceļot šo nogriezni paralēli, summas atlikums, dalot ar 360 nemainās. Savukārt visi sarkanie nogriežņi ir paralēli nogrieznim $A_{37}A_{114}$, jo $37 + 114 \equiv 151 \pmod{360}$) un visi citi sarkanie nogriežņi ir tam paralēli.
Leņķis $\sphericalangle A_0A_{37}A_{114}$ balstās uz riņķa loka A_0A_{114} garākās daļas, kas lielāka par $180°$. Šis loks ir $360° - 114° = 246°$, tāpēc $\sphericalangle A_0A_{37}A_{114}$ ir puse no tā: $123°$. Bet tā kā šis leņķis ir plats un jāieraksta mazākā vērtība, ko veido divi krustiski nogriežņi, tad mazākais leņķis starp zilu un sarkanu nogriezni ir $180° - 123° = 57°$.

Uzdevums 1.2: Ar kādu periodu mainās pēdējie 10 cipari skaitļa 5^n decimālpierakstā? (Var pieņemt, ka n vērtība ir pietiekami liela un priekšperiods jau ir beidzies.)

Atbilde. 256
Pamatosim, ka skaitļa 5 pakāpēm pēdējie k cipari (ja $k > 2$) mainās periodiski ar periodu 2^{k-2}.

Apgalvojums 1. Apskatām atlikumus pēc moduļa 2^k, kas ir divnieka pakāpe, un a ir nepāra skaitlis. Jebkuram veselam $k \geq 3$ un jebkuram $a \equiv 1 \pmod 2$ izpildās šāda sakarība:

$$a^{2^{k-2}} \equiv 1 \pmod{2^k}$$

(Šis apgalvojums nozīmē, ka skaitļiem $2^k = 8, 16, 32, \ldots$ Eilera teorēmas paredzētā atgriešanās pie atlikuma 1

$$a^{\varphi(2^k)} \equiv 1 \pmod{2^k}$$

faktiski iestājas divreiz ātrāk nekā paredz Eilera teorēma, jo $\varphi(2^k) = 2^{k-1}$, bet atgriešanās pie atlikuma 1 jau kāpinot skaitli a pakāpē 2^{k-2}.

Bāze. Ja $k = 3$, tad iespējamas četras nepāra kongruenču klases $a = 1, 3, 5, 7$. Ikvienu no tām kāpinot pakāpē $2^{k-2} = 2^1 = 2$ iegūsim

$$1^2 \equiv 3^2 \equiv 5^2 \equiv 7^2 \equiv 1 \pmod 8.$$

Induktīvā pāreja. Pieņemsim, ka ir vērtība $k = m$, kurai Apgalvojums 1 izpildās. Faktiski tas nozīmē, ka virknē $a^1, \ldots, a^{2^{m-2}}$ ir ne vairāk kā 2^{m-2} dažādi atlikumi, dalot ar 2^m (kaut arī nepāra skaitļu no 1 līdz 2^m ir tieši 2^{m-1}). Apzīmēsim šos atlikumus ar $r_1, r_2, \ldots, r_{2^{m-2}}$ (visi tie ir kongruenču klases $\pmod{2^m}$)

Tad nākamajai vērtībai $k = m + 1$ varam dabūt divreiz vairāk atlikumu, jo

$$r_1 \equiv r_1 + 2^m \pmod{2^m}, \text{ bet } r_1 \not\equiv r_1 + 2^m \pmod{2^{m+1}}.$$

T.i. katra no kongruenču klasēm pēc moduļa 2^m "sašķeļas uz pusēm", no tās rodas divas kongruenču klases pēc moduļa 2^{m+1}. Tāpēc lielākais iespējamais dažādo atlikumu skaits starp skaitļa a pakāpēm $\pmod{2^{m+1}}$ būs 2^{m-1}.
Pēc Eilera teorēmas $a^{2^m} \equiv 1 \pmod{2^{m+1}}$, tāpēc mazākais veselais skaitlis $x > 1$, kuram $a^x \equiv 1 \pmod{2^{m+1}}$ būs skaitļa 2^m dalītājs (tātad x arī ir divnieka pakāpe). Pēc induktīvā pieņēmuma (un kongruenču klašu sašķelšanās uz pusēm) redzam, ka $x \leq 2^{m-1}$. Tātad x ir tāda divnieka pakāpe kas ir mazāka par 2^m un tātad ir arī skaitļa 2^{m-1} dalītājs. Esam ieguvuši, ka

$$a^{2^{m-1}} \equiv 1 \pmod{2^{m+1}},$$

kas pabeidz induktīvo pāreju. ■

Apgalvojums 2. Mazākais $x > 1$, kuram $5^x \equiv 1 \pmod{2^k}$ ir precīzi vienāds ar 2^{k-2}.

No Apgalvojuma 1 seko, ka $x \leq 2^{k-2}$. Kāpēc x nevar būt mazāks par 2^{k-2} arī var pierādīt ar indukciju, ja sadala reizinātājos:

$$5^{k-2} - 1 = \left(5^{k-3} - 1\right)\left(5^{k-3} + 1\right).$$

Un ievērojam, ka otrais reizinātājs dalās ar 2, bet ne ar 4. Sk. detalizētāk `https://bit.ly/3v79bm1`. ■

Apgalvojums 3. Skaitļu 5^n pēdējie k cipari mainās ar periodu 2^{k-2}, ja n vērtība ir pietiekami liela (ja $n \geq k$).

Lai šo apgalvojumu pamatotu, uzrakstām kongruences ar 5^n vērtībām pēc moduļa 10^k; tad saīsinām visas šīs kongruences ar reizinātāju 5^k un atsaucamies uz Apgalvojumu 2, lai pamatotu, ka cikls iestājas tieši pēc 2^{k-2} soļiem. ■
Apgalvojums 3 nozīmē to, ka pēdējie 10 cipari mainās ar periodu $2^8 = 256$, kas arī pamato mūsu atbildi.

Uzdevums 1.3: $F(0) = 0$; $F(1) = 1$; $F(k+2) = F(k+1) + F(k)$ ir Fibonači skaitļu virkne. Atrast mazāko veselo pozitīvo skaitli n, kuram Fibonači skaitlis $F(n)$ dod atlikumu 5, dalot ar 8 un vienlaikus arī atlikumu 13, dalot ar 21.

Atbilde. 7
Varam atrast, ka $F(7) = 13$, kas dod abus vajadzīgos atlikumus.
Šīm konkrētajām vērtībām bija visai viegli uzminēt atrisinājumu kongruenču sistēmai. Var viegli formulēt arī drusku sarežģītākus piemērus. Piemēram, atrast mazāko n, kuram $F(n)$ apmierina kongruences:

$$\begin{cases} F(n) \equiv 0 \pmod{10} \\ F(n) \equiv 0 \pmod{13} \end{cases}$$

Var pamatot, ka ar 10 dalās visi tie $F(n)$, kuriem n dalās ar 15, bet ar 13 dalās visi tie $F(n)$, kuriem n dalās ar 7. Tāpēc mazākais pozitīvais n, kuram $F(n)$ dalās ar 130 būs $15 \cdot 7 = 105$.

Uzdevums 1.4: Ar cik daudzām nullēm beidzas skaitļa $11^{10^{1918}} - 1$ decimālpieraksts?

Atbilde. 1919.

Lietojam *Kāpinātāja pacelšanas lemmu* - sk. `https://bit.ly/38orQjt`. $x = 11$ un $y = 1$, kāpinātājs ir $n = 10^{1918}$. Izvēlamies divas pirmskaitļu vērtības: $p = 2$ un $p = 5$. Izmantosim kāpinātāja pacelšanas lemmas abus gadījumus (tas atšķiras nepāra pirmskaitlim $p = 5$ un vienīgajam pāra pirmskaitlim $p = 2$).

$$\nu_5\left(x^n - y^n\right) = \nu_5(x-y) + \nu_5(n) = \nu_5(11-1) + \nu_5(10^{1918}) = 1 + 1918 = 1919.$$

$$\nu_2\left(x^n - y^n\right) = \nu_2(x-y)+\nu_2(n)+\nu_2(x+y)-1 = \nu_2(10)+\nu_2(10^{1918})+\nu_2(12)-1 = 1+1918+2-1 = 1920.$$

Iegūstam, ka $x^n - y^n$ dalās ar 5^{1919} (bet ne lielāku 5 pakāpi) un arī ar 2^{1920} (bet ne lielāku 2 pakāpi). Tātad skaitlis $x^n - y^n$ beidzas ar 1919 nullēm.

Uzdevums 1.5: Atrast lielāko naturālo skaitli n ar sekojošām 2 īpašībām:
(a) $n = 7^k$.
(b) Skaitlis $2^{147} - 1$ dalās ar n.

Atbilde: 343

Pamatosim to šajā konkrētajā gadījumā. Pārveidojam par izteiksmi, no kuras var izdalīt reizinātāju $(8-1) = 7$:

$$2^{147} - 1 = (2^3)^{49} - 1^{49} = 8^{49} - 1^{49}. \tag{1}$$

Definīcija. Jebkuram naturālam m apzīmējam ar $\nu_7(m)$ lielāko veselo skaitli k, kuram m dalās ar 7^k.
(Šo augstāko kāpinātāju k sauc par 7-valuāciju skaitlim m. Skaitļiem, kuri nedalās ar 7, valuācija ir 0; tiem, kuri dalās ar 7, bet ne ar 7^2, valuācija ir 1 utt.)
Izteiksme (1) ir atsevišķs gadījums *Kāpinātāja pacelšanas lemmai* - sk. `https://bit.ly/38orQjt`. Mūsu gadījumā apzīmējam $x = 8$, $y = 1$, $p = 7$, bet $n = 49$. Var pārbaudīt, ka $x = 8$ un $y = 1$ nedalās ar $p = 7$, bet šo lielumu starpība $x - y$ dalās ar 7. Tāpēc

$$\nu_7\left(x^n - y^n\right) = \nu_7(x-y) + \nu_7(n) = \nu_7(7) + \nu_7(49) = 1 + 2 = 3.$$

Citiem vārdiem, izteiksme (1) dalās ar $7^3 = 343$, bet nedalās ar augstāku 7 pakāpi.

Uzdevums 1.6: Cik ir tādu naturālu skaitļu pāru (x, y), kuriem gan x, gan y nepārsniedz 1000 un $x^2 + y^2$ dalās ar 7? (Divus naturālu skaitļu pārus (x_1, y_1) un (x_2, y_2) uzskatām par dažādiem, ja $x_1 \neq x_2$ vai $y_1 \neq y_2$.)

Atbilde: 20164
Ja gan x, gan y dalās ar 7, tad x^2+y^2 arī dalās ar 7. Intervālā $[1; 1000]$ ir pavisam $\lfloor 1000/7 \rfloor = 142$ skaitļi, kuri dalās ar 7. Tātad no tiem var izveidot $142^2 = 20164$ pārus.

Apgalvojums: citu atrisinājumu nav. T.i. nevar gadīties pretpiemēri, kur $x \not\equiv 0 \pmod 7$ vai $y \not\equiv 0 \pmod 7$, bet tomēr $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod 7$.

Pierādījums: Gadījumi, kur x dalās ar 7, bet y nedalās (vai arī otrādi) nav iespējami, jo tad x^2 dalās, bet y^2 nedalās (un to summa nedalās).
Ja turpretī abi $x, y \not\equiv 0 \pmod 7$, tad iespējamās šo skaitļu kvadrātu kongruenču klases (atlikumi, kurus veselu skaitļu kvadrāti var dot, dalot ar 7) ir šādi trīs varianti:

$$\begin{cases} 1^2 \equiv 6^2 \equiv 1 \pmod 7, \\ 2^2 \equiv 5^2 \equiv 4 \pmod 7, \\ 3^2 \equiv 4^2 \equiv 2 \pmod 7. \end{cases}$$

Saskaitot jebkurus divus atlikumus no iespējamo atlikumu kopas $\{1, 2, 4\}$, nedabūsim atlikumu 0 (varianti ir šādi: $1+1$, $1+2$, $1+4$, $2+2$, $2+4$, $4+4$; neviens no tiem nedalās ar 7). ■

Uzdevums 1.7: Atrast lielāko naturālo skaitli m, ar kuru dalās visi $n^5 - n$, kur n ir jebkurš nepāra naturāls skaitlis.

Atbilde: 240
Tā kā $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$, pārbaudām dalāmību ar šīm pirmskaitļu pakāpēm.

Apgalvojums 1: Izteiksme $n^5 - n$ katram naturālam n dalās ar 5.
Pārveidojam $n^5 - n = n(n^4 - 1)$. Ja n dalās ar 5, tad arī reizinājums $n(n^4 - 1)$ dalās ar 5. Ja n nedalās ar 5, tad lietojam Mazo Fermā teorēmu (pirmskaitlim $p = 5$). Iegūstam, ka $n^4 - 1$ dalās ar 5.

Apgalvojums 2: Izteiksme $n^5 - n$ katram naturālam n dalās ar 3.
Pārveidojam $n^5 - n = n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$. Ja n dalās ar 3, tad arī šis reizinājums dalās ar 3. Ja n nedalās ar 3, tad izteiksmei $n^2 - 1$ lietojam Mazo Fermā teorēmu (pirmskaitlim $p = 3$).

Apgalvojums 3: Izteiksme $n^5 - n$ katram nepāru naturālam n dalās ar 16.
Pārveidojam $n^5 - n = n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$. Pats n nedalās ar 2, bet par abiem reizinātājiem apgalvojam sekojošo:

- $n^2 + 1 \equiv 0 \pmod 2$.
  Ievērojam, ka nepāra vērtībām n tas ir pāra skaitlis
- $n^2 - 1 \equiv 0 \pmod 8$.
  Lai to pārbaudītu, ievietojam $n = 2k + 1$ (katru nepāra n var šādi izteikt). Iegūstam $(2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1)$. Vismaz viens no skaitļiem k, $k+1$ ir pāra skaitlis. Tāpēc arī reizinājums $4k(k+1)$ dalās ar 8.

Pārliecinājāmies, ka reizinājums $n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$ dalās ar $8 \cdot 2 = 16$.
Sareizinot visus dalītājus (tie ir savstarpēji pirmskaitļi) no Apgalvojumiem 1,2,3 iegūstam, ka $n^5 - n$ dalās ar 240.

Uzdevums 1.8: Dots, ka a un b – naturāli skaitļi un $a^2 + b^2$ dalās ar 21. Kāds ir lielākais naturālais skaitlis, ar kuru noteikti dalās $a^2 + b^2$?

Atbilde. 441.

Apgalvojums 1:
a un b ir jebkuri veseli skaitļi. Kvadrātu summa $a^2 + b^2$ dalās ar 3 tad un tikai tad, ja $a \equiv b \equiv 0 \pmod 3$.

(Citām a, b vērtībām $a^2 \equiv 1 \pmod 3$ un tad atlikumu summas $1+1$ vai $0+1$ nevar dalīties ar 3.)

Apgalvojums 2:
a un b ir jebkuri veseli skaitļi. Kvadrātu summa a^2+b^2 dalās ar 7 tad un tikai tad, ja $a \equiv b \equiv 0 \pmod 7$.
(Citām a, b vērtībām a^2 dod atlikumu 1, 2 vai 4, dalot ar 7. Divu šādu atlikumu summa nevar dalīties ar 7.)
Iegūstam, ka a^2+b^2 dalās ar 21 tad un tikai tad, ja šī summa dalās gan ar 3, gan ar 7. Un tātad a un b arī dalās gan ar 3, gan ar 7 (Apgalvojumi 1 un 2). Tātad abi šie skaitļi dalās ar 21 Ja izsakām $a = 21k$ un $b = 21m$, tad $a^2+b^2 = 441 \cdot (k^2+m^2)$. Tātad a^2+b^2 dalās ar $21^2 = 441$.
Izteiksmes a^2+b^2 dalāmību ar vēl lielākiem skaitļiem garantēt nevar: Divas summas $21^2+42^2 = 5 \cdot 441$ un $42^2+42^2 = 8 \cdot 441$ abas apmierina uzdevuma nosacījumu, bet to lielākais kopīgais dalītājs ir 441.

Uzdevums 1.9: Kādu lielāko skaitļu skaitu var izvēlēties no kopas $\{1, 2, \ldots, 1963\}$ tā, lai jebkuru divu izvēlēto skaitļu summa dalītos ar 26?

Atbilde. 76

Konstrukcija (apakšējais novērtējums). Aplūkojam aritmētisku progresiju $a_k = 13+26k$ (kur $k = 0, \ldots 75$). Tās pirmais loceklis ir 13; pēdējais loceklis ir 1969. Pavisam šajā progresijā ir 76 locekļi; un šie skaitļi apmierina nosacījumu, jo sekojošais skaitlis dalās ar 26:

$$(13+26k_1)+(13+26k_2) = 26+26(k_1+k_2).$$

Neiespējamība uzlabot (augšējais novērtējums). Pieņemsim, ka var izraudzīties vēl vairāk par 76 skaitļiem (un joprojām jebkuru divu summa dalās ar 26).
Ja izvēlamies $77 > \lfloor 1963/26 \rfloor + 1$ skaitļus, tad noteikti būs divi tādi, kuri nav savstarpēji kongruenti (pēc 26 moduļa). Apzīmējam tos ar a un b. Ir jāizpildās $a+b \equiv 0 \pmod{26}$. Bet tad šajā kopā nevar būt vairāk kā šie divi elementi $\{a, b\}$, jo pievienojot jebkuru jaunu elementu c, tas nevar vienlaikus izpildīt abas kongruences:

$$\begin{cases} a+c \equiv 0 \pmod{26} \\ b+c \equiv 0 \pmod{26} \end{cases}$$

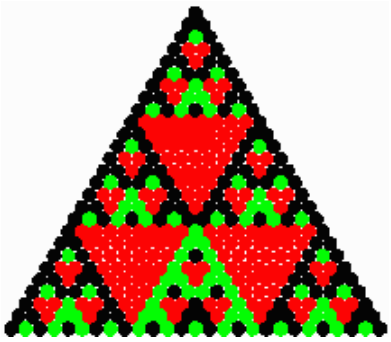
Piezīme. Izvēlēties tos skaitļus, kuri dalās ar 26 bez atlikuma (nevis dod atlikumu 13) arī var. Bet tad iegūsim neoptimālu risinājumu, jo šādu skaitļu ir tikai $\lfloor 1963/26 \rfloor = 75$; tā ir apakšējā veselā daļa no $1963/26$. Optimālajā risinājumā ir par vienu skaitli vairāk.

Uzdevums 1.10: Attēlā 1 uzzīmēts Paskāla trijstūris (k-tais elements šī trijstūra n-tajā rindiņā attēlo, cik dažādos veidos var izvēlēties k elementus no n elementu kopas). Šis Paskāla trijstūris izkrāsots 3 krāsās (aplītis ir sarkans, ja tajā vietā ierakstītais skaitlis dalās ar 3; aplītis ir melns, ja dod atlikumu 1, dalot ar 3, aplītis ir zaļš, ja dod atlikumu 2, dalot ar 3).
Atrast, cik ir melno aplīšu šī Paskāla trijstūra 1000 rindiņā: Cik daudzi no 1001 skaitļiem šajā rindiņā dod atlikumu 1, dalot ar 3.

Atbilde. 16.
Pierakstām skaitli $1000 = 729+243+27+1 = 3^6+3^5+3^3+1 = 1101001_3$ trijnieku skaitīšanas sistēmā.
Aplūkosim vispirms kombinācijas C_{999}^k. Pamatosim, ka ir tieši 8 vērtības, kurām $C_{999}^k \equiv 1 \pmod 3$ jeb rodas melni aplīši (visām pārējām C_{999}^k dalās ar 3: šie aplīši ir sarkani).

$$C_{999}^0 \equiv C_{999}^{27} \equiv C_{999}^{243} \equiv C_{999}^{270} \equiv C_{999}^{729} \equiv C_{999}^{756} \equiv C_{999}^{972} \equiv C_{999}^{999} \equiv 1 \pmod 3. \tag{2}$$

Izmantojot Kummera teorēmu (`https://bit.ly/3rAXHVB`) var pamatot, ka visiem citiem k, $C_{999}^k \equiv 0 \pmod 3$. Tas ir tāpēc, ka visos citos gadījumos iegūt skaitli, kura decimālpieraksts ir 999 ($999_{10} = 1101000_3$) var tikai saskaitot k un $999-k$ tā, ka rodas pārnesums (saskaitot stabiņā trijnieku skaitīšanas sistēmā). Ir tikai 8 veidi kā sadalīt trīs vieniniekus no 1101000_3 pa abiem saskaitāmajiem tā, lai nerastos neviens pārnesums.
Savukārt visas astoņas vērtības, kas minētas kongruencē (2) ir vienādas ar 1 (nevis ar 2), jo ir Lūkas teorēma. Sk. `https://bit.ly/3qujv3T`.
Zem Paskāla trijstūra rindiņas, kurā ir visi C_{999}^k, ir nākamā rindiņa, kurā ir visi C_{1000}^k. Šajā rindiņā melno elementu būs divreiz vairāk, jo katrs no astoņiem melnajiem, kas minēti (2) saskaitīsies ar sarkano kaimiņu kreisajā un arī labajā pusē. Kopā būs 16 melni elementi (bet zaļo - tādu C_{1000}^k, kas kongruenti ar 2 pēc moduļa 3) nebūs. To secina vai nu no iepriekšējās rindiņas, vai arī tieši izmantojot Lūkas teorēmu.



Attēls 1: Paskāla trijstūris (mod 3).

Uzdevums 1.11: Atrast mazāko naturālo skaitli n, kurš var kalpot kā "pretrunas modulis", pierādot, ka vienādojumam $x^3+y^3+z^3 = 1969^2$ nav atrisinājumu veselos skaitļos.
(T.i. aplūkojot atlikumus, dalot ar n, izrādās, ka kreisā puse var dot viena veida atlikumus, bet labā puse - citus atlikumus, kas nekad nesakrīt ar kreisās puses atlikumiem.)

Atbilde. 9
Izrakstām iespējamās x^3 vērtības (mod m), kur $m = 2, 3, \ldots, 9$. Moduļus $m = 6$, $m = 10$ it kā arī varētu aplūkot (un dažos vienādojumos iegūt pretrunas), bet faktiski pretrunas rodas pēc pirmskaitļu (vai pirmskaitļu pakāpju) moduļiem.

$$\begin{cases} x^3 \equiv 0,1 \pmod 2 \\ x^3 \equiv 0,1,2 \pmod 3 \\ x^3 \equiv 0,1,3 \pmod 4 \\ x^3 \equiv 0,1,2,3,4 \pmod 5 \\ x^3 \equiv 0,1,6 \equiv 0,1,-1 \pmod 7 \\ x^3 \equiv 0,1,3,5,7 \pmod 8 \\ x^3 \equiv 0,1,8 \equiv 0,1,-1 \pmod 9 \end{cases}$$

Ievērojam, ka moduļiem $m = 7$ un $m = 9$ ir tikai trīs iespējamie atlikumi ($\{0, 1, -1\}$). Vienlaikus labajā pusē ir šādi atlikumi:

$$\begin{cases} 1969^2 \equiv 4 \pmod 7 \\ 1969^2 \equiv 4 \pmod 9 \end{cases}$$

Vērtībai $m = 7$ atlikumu 4 var iegūt saskaitot -1 trīs reizes: $(-1) + (-1) + (-1) \equiv 4 \pmod 7$.
Arī pie $m < 7$ pretrunas modulis nesanāk, jo kubu summa pieņem jebkādas vērtības.
Atliek pretrunas modulis $m = 9$, kas arī ir mūsu atbilde.

Uzdevums 1.12: Dots kongruenču vienādojums $x^{16} \equiv a \pmod{13}$. Cik dažādām vērtībām a no kopas $\{0, 1, 2, \ldots, 12\}$ eksistē atrisinājums x?

Atbilde. 4.
Ja $x \equiv 0 \pmod{13}$, tad $x^{16} \equiv 0 \pmod{13}$. Visiem $x \not\equiv 0$ izpildās Mazā Fermā teorēma pirmskaitlim $p = 13$: $x^{12} \equiv 1 \pmod{13}$. Tāpēc $x^{16} \equiv x^{12} \cdot x^4 \equiv x^4 \pmod{13}$.
Kāpināsim visus atlikumus $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ ceturtajā pakāpē. Ņemot vērā to, ka $12 \equiv -1 \pmod{13}$, $11 \equiv -2 \pmod{13}$, utt. – pietiek kāpināt ceturtajā (pāru) pakāpē tikai pirmos sešus. Iegūstam vērtības $1, 3, 9$. Kopā ar atlikumu 0 ir četras iespējamās a vērtības: $\{0, 1, 3, 9\}$.
Piezīme. Diezgan jauki vērot, kā mainās dažādo iespējamo a vērtību skaits atkarībā no kāpinātāja k kongruencē $x^k \equiv a$ (izņemot vērtību $a \equiv 0$, kam vienmēr atbilst $x \equiv 0$). Apkoposim tabulā dažādo $a \not\equiv 0$ vērtību skaitu, kurām vienādojumu $x^k \equiv a \pmod{13}$ var atrisināt.

k	a vērtības	Kopskaits
1	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$	12
2	$\{1, 3, 4, 9, 10, 12\}$	6
3	$\{1, 5, 8, 12\}$	4
4	$\{1, 3, 9\}$	3
5	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$	12
6	$\{1, 12\}$	2
7	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$	12
8	$\{1, 3, 9\}$	3
9	$\{1, 5, 8, 12\}$	4
10	$\{1, 3, 4, 9, 10, 12\}$	6
11	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$	12
12	$\{1\}$ (Mazā Fermā teorēma)	1
13	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$	12
14	$\{1, 3, 4, 9, 10, 12\}$	6
15	$\{1, 5, 8, 12\}$	4
16	$\{1, 3, 9\}$	3

Dažādo nenulles kongruenču klašu skaitu priekš x^k var iegūt ar vienkāršu formulu: $\dfrac{12}{\text{LKD}(12, k)}$ jeb vispārīgā gadījumā ja (mod p) ir patvaļīgs pirmskaitlis: $\dfrac{p-1}{\text{LKD}(p-1, k)}$.