

**IMO.SHL.2014.N6:** Ar  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  apzīmējam naturālus skaitļus, kas ir savstarpēji pirmskaitļi. Turklāt  $a_1$  ir pirmskaitlis un  $a_1 \geq n+2$ . Reālās taisnes nogrieznī  $I = [0, a_1 a_2 \dots a_n]$  nokrāsojam sarkanus visus veselos skaitļus, kas dalās ar vismaz vienu no skaitļiem  $a_1, \dots, a_n$ . Sarkanie punkti sadala nogriezni  $I$  mazākos nogriežņos. Pierādīt, ka šo nogriežņu garumu kvadrātu summa dalās ar  $a_1$ .

*Pierādījums.*

Apzīmējam reizinājumu  $A = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$ . Intervāla  $X$  garumu apzīmējam ar  $|X|$ .

Ar  $\mathcal{S}$  apzīmējam visus intervālus  $[x, y] \subseteq [0, A]$ ,  $x < y$ , kam abi galapunkti bija sarkani.

Ar  $\mathcal{T}$  apzīmējam visus tos intervālus ar veseliem galapunktiem, kam  $[x, y] \subseteq [0, A]$  un kuru iekšpusē nav neviena sarkanā punkta. (Šo intervālu skaitu un garumus būs vieglāk novērtēt nekā tos, kurus mums vajag - no kopas  $\mathcal{S}$ .)

Mums jāpamato, ka summa  $\sum_{X \in \mathcal{S}} |X|^2$  dalās ar  $p$ . Piekārtosim katram intervālam  $Y \in \mathcal{T}$  svaru  $w(|Y|)$ , kas atkarīgs tikai no tā garuma:

$$w(|Y|) = \begin{cases} 1, & \text{ja } |Y| = 1 \\ 2, & \text{ja } |Y| \geq 2 \end{cases}$$

Apskatīsim jebkuru intervālu  $X \in \mathcal{S}$ ; un tos intervālus no  $\mathcal{T}$ , kuri tajā ietilpst. Intervāls  $X$  saturēs vienu intervālu  $Y \in \mathcal{T}$  garumā  $|X|$ , divus intervālus garumā  $|X| - 1$ , utt., visbeidzot  $|X|$  intervālus no  $\mathcal{T}$  garumā 1. Visu šo apakšintervālu svaru summa:

$$\sum_{Y \subseteq X} w(|Y|) = (1 + 2 + \dots + (|X| - 1)) \cdot 2 + |X| \cdot 1 = |X|^2.$$

Tā kā intervāli no  $\mathcal{S}$  nepārklājas, katrs intervāls  $Y \in \mathcal{T}$  pieder tieši vienam no tiem. Lai atrastu visu intervālu  $X \in \mathcal{S}$  kvadrātu summu  $|X|^2$ , tai vietā saskaitīsim svarus intervāliem  $Y \in \mathcal{T}$ .

Katram iespējamam garumam  $d = 1, \dots, a_1$ , noskaidrosim, cik ir intervālu no  $\mathcal{T}$  garumā tieši  $d$ . Tātad - cik ir tādu veselu  $x \in [0; A - 1]$  vērtību, kam  $[x, x + d]$  nesatur nevienu sarkanu punktu? Šai nolūkā dalām  $x$  ar visiem skaitļiem  $a_1, a_2, \dots, a_n$  un iegūstam atlikumus  $r_1, r_2, \dots, r_n$ . Pēc ķīniešu atlikumu teorēmas, katram  $x$  šis komplekts ar atlikumiem  $(r_1, \dots, r_n)$  būs cits (un arī katram atlikumu komplektam atbilst noteikts  $x \in [0; A)$ ).

Bez sarkanajiem punktiem būs tie nogriežņi  $[x; x + d]$ , kuriem  $r_i + d \leq a_i$  (katram  $i = 1, \dots, n$ ). Pēc reizināšanas likuma, šādu atlikumu būs

$$f(d) = (a_1 + 1 - d) \cdot (a_2 + 1 - d) \cdot \dots \cdot (a_n + 1 - d).$$

Izmantojot apzīmējumu  $f(d)$ , varam izteikt tālāk:

$$\sum_{X \in \mathcal{S}} |X|^2 = \sum_{Y \in \mathcal{T}} w(|Y|) = 2 \sum_{d=1}^{a_1} f(d) - f(1).$$

Viegli redzēt, ka  $f(1) = a_1 a_2 \dots a_n$  dalās ar  $a_1$ . Savukārt summa  $\sum f(d)$  ir  $n$ -tās pakāpes polinoms attiecībā pret mainīgo  $d$ . Tā kā summēšana notiek pa visām  $a_1$  kongruences klasēm (no 1 līdz  $a_1$  ieskaitot), tad varam pamatot, ka tā dalās ar  $a_1$ , izmantojot sekojošo Lemmu. Tātad arī  $\sum |X|^2$  dalās ar  $a_1$ .

**Lemma.** Ja  $p$  ir pirmskaitlis,  $F(x)$  ir polinoms ar veseliem koeficientiem, kura pakāpe nepārsniedz  $p - 2$ , tad  $\sum_{x=1}^p F(x)$  dalās ar  $p$ .

*Pierādījums.* Pietiek pamatot šo rezultātu visiem  $F(x) = x^k$ , kur  $k \leq p - 2$ . Pierāda pēc indukcijas. Ja  $k = 0$ , tad summa ir vienāda ar  $p$  - tātad dalās ar  $p$ .

Izvēlamies  $k \leq p - 2$  un pieņemam, ka visām mazākām pakāpēm lemma ir spēkā. Tad

$$0 \equiv p^{k+1} = \sum_{x=1}^p \left( x^{k+1} - (x-1)^{k+1} \right) \equiv (k+1) \sum_{x=1}^p x^k \pmod{p}$$

Tā kā  $0 < k + 1 < p$ , tad ar  $(k + 1)$  var noīsināt un iegūt  $0 \equiv \sum_{x=1}^p x^k \pmod{p}$ .  $\square$

**IMO.SHL.2014.N7:** Dots naturāls skaitlis  $c \geq 1$ . Definējam naturālu skaitļu virkni ar vienādībām  $a_1 = c$  un

$$a_{n+1} = a_n^3 - 4c \cdot a_n^2 + 5c^2 \cdot a_n + c$$

visiem  $n \geq 1$ . Pierādīt, ka jebkuram naturālam  $n \geq 2$  eksistē pirmskaitlis  $p$ , ar kuru dalās  $a_n$ , bet nedalās neviena no skaitļiem  $a_1, \dots, a_{n-1}$ .

*Pierādījums.* Definējam  $x_0 = 0$  un  $x_n = a_n/c$  visiem  $n \geq 1$ . Tad jaunā virkne  $(x_n)$  izpilda šādu rekurentu sakarību:

$$x_{n+1} = c^2 (x_n^3 - 4x_n^2 + 5x_n) + 1$$

visiem veseliem  $n \geq 0$ . Šī sakarība parāda arī, ka visi virknes locekļi ir naturāli skaitļi (piemēram,  $x_1 = 1$  un  $x_2 = 2c^2 + 1$ ). No šīs sakarības var arī pamatot, ka virkne ir stingri augoša ( $x_{n+1} > x_n$ ) - piemēram, iznesot pirms iekavām  $x_n$  un atdalot pilno kvadrātu.

Pirmie locekļi  $(x_1, x_2)$  ir savstarpēji pirmskaitļi. Vēlamies pamatot, ka arī lielākiem  $n$  ( $n \geq 2$ ) eksistēs pirmskaitlis  $p$ , kas ir  $x_n$  dalītājs, bet nedala nevienu no skaitļiem  $x_1, \dots, x_{n-1}$ . Šajā nolūkā pamatosim trīs apgalvojumus.

**Apgalvojums 1:** Ja  $i \equiv j \pmod{m}$  izpildās kaut kādiem  $i, j \geq 0$  un  $m \geq 1$ , tad izpildās arī  $x_i \equiv x_j \pmod{x_m}$ .

*Pierādījums.* Pamatosim, ka  $x_i$  un  $x_{i+m}$  dod vienādus atlikumus, dalot ar  $x_m$ . (T.i. apskatām gadījumu, kad  $j - i = m$ . Gadījumi, kad  $j - i = 2m, 3m, \dots$  iegūstami, izejot atlikumu ciklu divas, trīs vai vairāk reizes.)

Indukcijas bāze  $i = 0$ : Tad jebkuram fiksētam  $m$  būs spēkā  $x_0 \equiv x_m \pmod{x_m}$ , jo  $x_0 = 0$ .

Induktīvā pāreja:  $i \rightarrow i + 1$ . Pieņemsim, ka  $x_{i+m} \equiv x_i \pmod{x_m}$  kādam  $i$ . Tad rekursīvā sakarība, kas izsaka  $x_{i+m+1}$  no  $x_{i+m}$  un  $x_{i+1}$  no  $x_i$  parāda, ka arī  $x_{i+m+1}$  un  $x_{i+1}$  ir kongruenti pēc  $x_m$  moduļa.  $\square$

**Apgalvojums 2.** Ja veseli skaitļi  $i, j \geq 2$  un  $m \geq 1$  apmierina sakarību  $i \equiv j \pmod{m}$ , tad ir spēkā arī  $x_i \equiv x_j \pmod{x_m^2}$ .

*Pierādījums.* Pietiek parādīt, ka  $x_{i+m} \equiv x_i \pmod{x_m^2}$  visiem veseliem  $i \geq 2$  un  $m \geq 1$ . Indukcijas pāreja var izmantot rekurento sakarību, kas  $x_{n+1}$  izsaka ar  $x_n$ , bet šoreiz indukcijas bāze ( $i = 2$ ) ir grūtāka.

Apzīmējam  $L = 5c^2$ . Tad pēc  $x_n$  rekurentās sakarības būs arī  $x_{m+1} \equiv Lx_m + 1 \pmod{x_m^2}$ . Un tāpat:

$$x_{m+1}^3 - 4x_{m+1}^2 + 5x_{m+1} \equiv (Lx_m + 1)^3 - 4(Lx_m + 1)^2 + 5(Lx_m + 1) \equiv 2 \pmod{x_m^2}.$$

No šejienes savukārt seko, ka  $x_{m+2} \equiv 2c^2 + 1 \equiv x_2 \pmod{x_m^2}$ .  $\square$

**Apgalvojums 3.** Katram vesalam skaitlim  $n \geq 2$ , ir spēkā  $x_n > x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-2}$ .

*Pierādījums.* Pēc indukcijas pa  $n$ . Gadījumi  $n = 2$  un  $n = 3$  ir vienkārši. Pieņemsim, ka apgalvojums spēkā kādam  $n \geq 3$ . Tad

$$x_{n+1} > x_n^3 - 4x_n^2 + 5x_n > 7x_n^2 - 4x_n^2 > x_n^2 > x_n x_{n-1},$$

kas kopā ar indukcijas hipotēzi dod vajadzīgo apgalvojumu.  $\square$

Visbeidzot - pēc Apgalvojuma 3, atradīsim pirmskaitli  $p$ , kura kāpinātājs  $x_n$  sadalījumā pirmreizinātājos ir augstāks nekā tā kāpinātājs reizinājumā  $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-2}$ . Pamatosim, ka šis pirmskaitlis nevar dalīt nevienu skaitli  $x_1, \dots, x_{n-1}$ .

No pretējā - pieņemsim, ka  $k$  ir mazākais koeficients, kam  $x_k$  dalās ar  $p$ . Tā kā  $x_{n-1}$  un  $x_n$  ir savstarpēji pirmskaitļi un  $x_1 = 1$ , tad šis minimālais koeficients izpilda  $2 \leq k \leq n-2$ . Izsakām  $n = qk + r$  (dalījums ar atlikumu). Pēc Apgalvojuma 1 ir jāizpildās  $x_n \equiv x_r \pmod{x_k}$ , tāpat  $p$  dala arī  $x_r$ . Tā kā  $k$  bija minimālais, ir jābūt  $r = 0$  (t.i.  $n$  dalās ar  $k$ ).

Pēc Apgalvojuma 2 secinām, ka  $x_n \equiv x_k \pmod{x_k^2}$ . Apzīmējam  $\alpha = \nu_p(x_k)$  - skaitļa  $x_k$   $p$ -valuācija. Tātad  $x_k^2$  un arī  $x_n$  dalās ar  $p^{\alpha+1}$ . Iegūta pretruna, jo  $x_n$  bija jādalās ar augstāku pirmskaitli  $p$  pakāpi nekā jebkuram  $x_k$  ( $k < n$ ).  $\square$

**IMO.SHL.2018.N6:** Dota  $f : \{1, 2, 3, \dots\} \rightarrow \{2, 3, \dots\}$ , funkcija, kas apmierina sakarību  $f(m+n) \mid f(m) + f(n)$  ( $f(m+n)$  ir  $f(m) + f(n)$  dalītājs) visiem naturālu skaitļu pāriem  $m, n$ . Pierādīt, ka eksistē naturāls skaitlis  $c > 1$ , kurš ir visu  $f$  vērtību dalītājs.

*Atrisinājums.*

Katram naturālam  $m$  apzīmēsim ar  $S_m$  visu to argumentu  $n$  kopu, kam  $f(n)$  dalās ar  $m$ .

**Lemma.** Ja  $S_m$  ir bezgalīga, tad  $S_m = \{d, 2d, 3d, \dots\}$ , t.i. satur tieši skaitļa  $d$  daudzkārtņus.

*Pierādījums.* Apzīmējam  $d = \min S_m$ ; skaitlis  $m$  ir  $f(d)$  dalītājs. Ja  $n \in S_m$  un  $n > d$ , tad

$$m \mid f(n) \text{ un } f(n) \mid f(n-d) + f(d),$$

tātad  $m$  dala arī  $f(n-d)$  un  $n-d \in S_m$ . Pēc indukcijas arī  $n-2d, n-3d, \dots \in S_m$ . Tā kā  $m$  bija mazākais  $S_m$  elements, tad nevar rasties pozitīvs atlikums  $r \in (0; d)$  (ja no  $n$  atņem pietiekami daudzus  $d$ ). Tāpēc  $n$  dalās ar  $d$  bez atlikuma.  $\square$

**Apgalvojums 1.** Ja funkcija  $f$  ir ierobežota (t.i. tās vērtības nepārsniedz kādu fiksētu naturālu skaitli), tad visas šīs vērtības dalās ar vienu un to pašu pirmskaitli.

*Pierādījums.* Ir tikai galīgs skaits pirmskaitļu, kuri dala kaut vienu  $f(n)$  vērtību. Starp tiem varētu būt tādi pirmskaitļi ("sarkanie"), kuri ir  $f(n)$  dalītāji galīgi daudziem argumentiem  $n$  (un visi citi - "zilie", kuri ir  $f(n)$  dalītāji bezgalīgi daudziem  $n$ ).

1. Apzīmēsim ar  $N$  tik lielu naturālu skaitli, lai tas pārsniegtu visus tos  $n_i$ , kam  $f(n_i)$  dalās ar kādu "sarkanu" pirmskaitli.

2. Katram no "zilajiem" pirmskaitļiem  $p_1, \dots, p_k$  eksistēs tāds  $d_1, \dots, d_k$ , ka  $S_{p_i}$  satur tieši visus  $d_i$  daudzkārtņus.

Konstruējam jaunu skaitli:

$$n^* = N \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_k + 1.$$

Visi  $f(n^*)$  dalītāji ir zilie pirmskaitļi, jo  $n^* > N$ . Ar  $p_i$  apzīmēsim kādu zilo pirmskaitli, kas ir  $f(n^*)$  dalītājs. Tad  $n^* \in S_{p_i}$  un tātad  $d_i$  ir  $n^*$  dalītājs (jo ir spēkā Lemma).

Bet tanī pašā laikā  $n^*$  dod atlikumu 1, dalot ar  $d_i$ , tātad  $d_i = 1$ . Tas nozīmē, ka  $S_{p_i}$  satur visus naturālos skaitļus un tātad  $p_i$  dala visas  $f(n)$  vērtības.  $\square$

**Apgalvojums 2.** Ja funkcija  $f$  ir neierobežota, tad  $f(1) = a$  ir jebkuras vērtības  $f(n)$  dalītājs.

*Pierādījums.* Tā kā  $1 \in S_a$ , tad saskaņā ar lemmu pietiek pamatot, ka  $S_a$  ir bezgalīga.

Sauksim naturālu skaitli  $q$  par "lokālu maksimumu", ja  $f(q)$  ir lielāks nekā jebkura no iepriekšējām vērtībām ( $f(1), \dots, f(q-1)$ ). Tā kā  $f$  ir neierobežota, šādu lokālo maksimumu būs bezgalīgi daudz. Apzīmēsim visu šo maksimumu virkni ar  $1 = q_1 < q_2 < \dots$ , un  $h_k = f(q_k)$ . katram no maksimumiem  $q_i$  un katram  $k < q_i$  izpildās  $f(q_i) \mid f(k) + f(q_i - k) < 2f(q_i)$ , tātad

$$f(k) + f(q_i - k) = f(q_i) = h_i.$$

Pēc Dirihlē principa, starp skaitļiem  $h_1, h_2, \dots$  ir bezgalīgi daudzi, kas kongruenti pēc  $a$  moduļa. Šo apakšvirkni apzīmējam ar  $h_{k_0} \equiv h_{k_1} \equiv \dots \pmod{a}$ . Tad

$$f(q_{k_i} - q_{k_0}) = f(q_{k_i}) - f(q_{k_0}) = h_{k_i} - h_{k_0}$$

t.i.  $q_{k_i} - q_{k_0}$  pieder  $S_a$ .

Tādēļ kopā  $S_a$  ir bezgalīgi daudz elementu un  $f(1) = a$  ir jebkura  $f(n)$  dalītājs.  $\square$

**IMO.SHL.2018.N7:** Dots vesels skaitlis  $n \geq 2018$  un  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  ir pa pāriem dažādi naturāli skaitļi, kas nepārsniedz  $5n$ . Pieņemsim, ka virkne

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$$

veido aritmētisku progresiju. Pierādīt, ka visi virknes locekļi ir savā starpā vienādi.

*Atrisinājums:*

Pieņemsim no pretējā, ka  $\frac{a_1}{b_1}, \dots$  ir aritmētiska progresija un tās difference ir  $\Delta = \frac{c}{d} > 0$ , kas izteikta kā nesaīsināma daļa.

Atrādīsim, cik daudzi no saucējiem  $b_i$  dalās ar  $d$ . Šai nolūkā katram  $i \in [1; n]$  un katram skaitļa  $d$  pirmreizinātājam  $p$  teiksim, ka indekss  $i$  ir  $p$ -savāds, ja  $b_i$  dalās ar zemāku pirmskaitļa  $p$  pakāpi nekā  $d$ , t.i.  $\nu_p(b_i) < \nu_p(d)$  (kur  $\nu_p(x)$  apzīmē skaitļa  $x$   $p$ -valuāciju - kāpinātāju pie  $p$ , kur  $x$  sadalīts pirmreizinātājos).

**Apgalvojums 1.** Katram pirmskaitlim  $p$ , visi  $p$ -savādie indeksi atšķiras par  $p$  daudzkārti (t.i. viņi visi pieder kaut kādai aritmētiskai progresijai ar diferenci  $p$ ).

*Pierādījums:* Pieņemsim no pretējā, ka  $i$  un  $j$  abi ir  $p$ -savādi (un nedalās ar  $p^\alpha$ , kur  $d$  satur pirmreizinātāju  $p$  precīzi pakāpē  $\alpha$ ), turklāt  $i - j$  nedalās ar  $p$ . Šajā gadījumā arī daļu  $\frac{a_i}{b_i}$  un  $\frac{a_j}{b_j}$  mazākais kopsaucējs nedalās ar  $p^\alpha$ . Tas nav iespējams, jo šo daļu starpība ir  $(i - j)\Delta = \frac{(i-j)c}{d}$  - nesaīsināma daļa, kuras saucējs dalās ar  $p^\alpha$ . Pretruna.  $\square$

**Apgalvojums 2.** Skaitlim  $d$  nav pirmreizinātāju, kas pārsniedz 5.

*Pierādījums:* Pieņemsim, ka  $d$  dalās ar pirmskaitli  $p \geq 7$ . No indeksiem  $1, 2, \dots, n$  ne vairāk kā  $\left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil < \frac{n}{p} + 1$  ir  $p$ -savādi. Tātad  $p$  dala visus pārējos no skaitļiem  $b_1, \dots, b_n$ , kuru pavisam ir  $n - \left(\frac{n}{p} + 1\right)$ . Tā kā viņi visi ir dažādi, lielākais no tiem ir vismaz

$$\left(\frac{p-1}{p} \cdot n - 1\right)p = pn - n - p = (p-1)(n-1) \geq 6(n-1) > 5n,$$

kas ir pretrunā ar nosacījumu.  $\square$

**Apgalvojums 3.** Starp jebkuriem 30 pēc kārtas sekojošiem daļu saucējiem  $b_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_{k+30}$  vismaz 8 ir tādi, kas dalās ar  $d$ .

*Pierādījums:* Ir pavisam  $\varphi(30) = 8$  (Eilera funkcija) dažādi atlikumi, dalot ar 30, kuri nepieder tām aritmētiskajām progresijām ar diferencēm 2, 3 vai 5, kas varētu būt 2-savādas, 3-savādas vai 5-savādas. (Tie indeksi, kuri nav savādi, satur pirmreizinātājus 2, 3, 5 vismaz tādā pašā pakāpē kā  $d$  - tātad attiecīgie  $b_i$  dalās ar  $d$ .)

**Apgalvojums 4.**  $|\Delta| < \frac{20}{n-2}$  un tātad saucējs  $d$  daļskaitlī  $\Delta = c/d$  ir lielāks par apgrieztu lielumu  $\frac{n-2}{20}$ .

*Pierādījums.* Starp visām daļām  $\frac{a_i}{b_i}$  aplūkosim tikai tās daļas, kurām saucēji  $b_i \geq n/2$ . Tādu daļu ir vismaz  $n - n/2 = n/2$ , katrs saucējs ir vismaz  $n/2$ , bet attiecīgās daļas skaitītājs ir  $a_i \leq 5n$ . Neviena šāda attiecība  $\frac{a_i}{b_i}$  nepārsniedz  $\frac{5n}{n/2} = 10$ . Tātad visas šīs daļas (izņemot izmestās ar ļoti maziem saucējiem) izpilda  $\frac{a_i}{b_i} \in (0; 10]$

Aritmētiskās progresijas difference  $\Delta$  nevar pārsniegt  $\frac{10}{n/2-1} = \frac{20}{n-2}$ , jo citādi  $n/2$  reizes pa šo diferenci paejot uz priekšu, progresija "izlīstu" no intervāla  $(0; 10]$ .  $\square$

**Secinājums.** Skaitlis  $\Delta = c/d$  nevar būt pozitīvs.

*Pierādījums.* Ir vismaz  $\lfloor n/30 \rfloor \cdot 8$  dažādi  $b_i$ , kuri (pēc Apgalvojuma 3) dalās ar  $d$ . Tātad vislielākais no tiem ir vismaz

$$\left(\left\lfloor \frac{n}{30} \right\rfloor \cdot 8\right) \cdot d = \left(\frac{n}{30} - 1\right) \cdot 8 \cdot \frac{n-2}{20} > 5n,$$

ja  $n$  vietā ievieto  $n \geq 2018$ , jo  $\frac{n-2}{20}$  ir lielāks par 100. Pretruna, jo  $(\forall i)(b_i < 5n)$ .  $\square$