Atlases sacensības komandu olimpiādei ``Baltijas ceļš''

2015. gada 19. septembris, Rīga (1. diena)

Uzdevums 0.1 (BW.TST.2015.1): Doti reāli skaitļi x un y, tādi, ka

$$x^4y^2 + y^4 + 2x^3y + 6x^2y + x^2 + 8 \leq 0.$$

Pierādīt, ka $x \geq -\frac{1}{6}$.

Uzdevums 0.2 (BW.TST.2015.2): Par funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zināms, ka

- $f(x) > f(y)$ visiem reāliem $x > y$;
- $f(x) > x$ visiem reāliem x;
- $f(2x - f(x)) = x$ visiem reāliem x.

Pierādīt, ka $f(x) = x + f(0)$ visiem reāliem skaitļiem x.

Uzdevums 0.3 (BW.TST.2015.3): Pierādīt, ka neeksistē polinoms $P(x)$ ar veseliem koeficientiem un naturāls skaitlis m, tādi, ka

$$x^m + x + 2 = P(P(x))$$

izpildās visiem veseliem skaitļiem x.

Uzdevums 0.4 (BW.TST.2015.4): Vai izliektā 2014-stūrī var novilkt dažas diagonāles tā, ka tās nekrustojas, viss 2014-stūris ir sadalīts trijstūros un katra virsotne pieder nepāra skaitam šo trijstūru?

2015. gada 20. septembris, Rīga (2. diena)

Uzdevums 0.5 (BW.TST.2015.5): BE ir šaurleņķa trijstūra ABC augstums. Taisne l pieskaras trijstūra ABC apvilktajai riņķa līnijai punktā B, no C pret l novilkts perpendikuls CF. Pierādīt, ka taisnes EF un AB ir paralēlas.

Uzdevums 0.6 (BW.TST.2015.6): AM ir trijstūra ABC mediāna. No punkta C pret leņķa CMA bisektrisi novilkts perpendikuls CC_1, no punkta B pret leņķa BMA bisektrisi novilkts perpendikuls BB_1. Pierādīt, ka taisne AM krusto nogriezni B_1C_1 tā viduspunktā.

Uzdevums 0.7 (BW.TST.2015.7): Divas riņķa līnijas Γ_1 un Γ_2 krustojas punktos A un B, punkts P neatrodas uz taisnes AB. Taisne AP vēlreiz krusto Γ_1 un Γ_2 attiecīgi punktos K un L, taisne BP vēlreiz krusto Γ_1 un Γ_2 attiecīgi punktos M un N un visi līdz šim minētie punkti ir dažādi. Ap trijstūriem KMP un LNP apvilkto riņķa līniju centri ir O_1 un O_2. Pierādīt, ka O_1O_2 ir perpendikulārs AB.

Uzdevums 0.8 (BW.TST.2015.8): Dots fiksēts racionāls skaitlis q. Skaitli x sauksim par *harizmātisku*, ja var atrast tādu naturālu skaitli n un veselus skaitļus $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, ka

$$x = (q+1)^{\alpha_1} \cdot (q+2)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot (q+n)^{\alpha_n}.$$

(A) Pierādīt, ka var atrast tādu q, kam visi pozitīvie racionālie skaitļi ir harizmātiski.

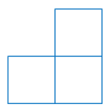
(B) Vai tiesa, ka visiem q, ja skaitlis x ir harizmātisks, tad arī $x + 1$ ir harizmātisks?

2015. gada 26. septembris, Rīga (3. diena)

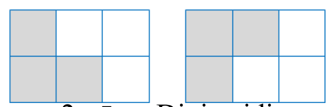
Uzdevums 0.9 (BW.TST.2015.9): Divi spēlētāji uz $N \times N$ rūtiņu laukuma spēlē sekojošu spēli. Tie pēc kārtas iekrāso pa vienai rūtiņai tā, lai nekādas divas iekrāsotās rūtiņas neatrastos uz vienas diagonāles. Spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu, zaudē. Kādām N vērtībām pirmajam spēlētājam eksistē uzvaroša stratēģija?

Uzdevums 0.10 (BW.TST.2015.10): Vai tiesa, ka visiem naturāliem n vienmēr iespējams katram no n bērniem iedot pa cepurei, kas nokrāsota vienā no 100 krāsām tā, ka, ja kāda meitene ir pazīstama ar vairāk nekā 2015 zēniem, tad ne visiem šiem zēniem cepures ir vienā krāsā, un, ja kāds zēns ir pazīštams ar vairāk nekā 2015 meitenēm, tad ne visām šīm meitenēm cepures ir vienā krāsā?

Uzdevums 0.11 (BW.TST.2015.11): Par figūru uz rūtiņu lapas sauksim patvaļīgu galīgu saistītu rūtiņu kopu, t.i. tādu rūtiņu kopu, kurai no jebkuras rūtiņas uz jebkuru citu iespējams aiziet, ejot tikai pa šīs figūras rtiņām. Pierādīt, ka katram naturālam n eksistē tāda figūra uz rūtiņu lapas, ka to var sagriezt ``stūrīšos" (1. zīm.) tieši F_n veidos, kur F_n ir n-tais Fibonači skaitlis (Fibonači skaitļu virknē $F_1 = F_2 = 1$ un katram $i \geq 1$ izpildās $F_{i+2} = F_{i+1} + F_i$). Piemēram, 2×3 rūtiņu taisnstūri iespējams sagriezt stūrīšos tieši divos veidos (2. zīm.).



1. zīm.: Stūrītis



2. zīm.: Divi veidi
kā sagriezt 2×3 taisnstūri

Uzdevums 0.12 (BW.TST.2015.12): Reāliem pozitīviem skaitļiem a, b, c izpildās vienādība $abc = 1$. Pierādīt, ka

$$\frac{a^{2014}}{1+2bc} + \frac{b^{2014}}{1+2ac} + \frac{c^{2014}}{1+2ab} \geq \frac{3}{ab+bc+ac}.$$

2015. gada 26. septembris, Rīga (4. diena)

Uzdevums 0.13 (BW.TST.2015.13): Vai eksistē tādi pozitīvi reāli skaitļi a un b, ka $[an+b]$ ir pirmskaitlis visām naturālām n vērtībām. Ar $[x]$ apzīmē skaitļa veselo daļu -- lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz x.

Uzdevums 0.14 (BW.TST.2015.14): Ar $S(a)$ apzīmēsim skaitļa a ciparu summu. Kādām naturālām R vērtībām var atrast tādu naturālu n, ka

$$\frac{S(n^2)}{S(n)} = R?$$

Uzdevums 0.15 (BW.TST.2015.15): Ar $\omega(n)$ apzīmēsim dažādo pirmskaitļu skaitu, ar ko dalās n. Pierādīt, ka ir bezgalīgi daudz tādu naturālu skaitļu n, kuriem $\omega(n) < \omega(n+1) < \omega(n+2)$.

Uzdevums 0.16 (BW.TST.2015.16): Punkti X, Y un Z atrodas uz taisnes k tieši šādā secībā. Uz nogriežņiem XZ, XY, YZ kā diametriem konstruētas riņķa līnijas $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Taisne l, kas iet caur punktu Y, krusto ω_1 punktos A un D, ω_2 punktā B un ω_3 punktā C tā, ka punkti A, B, Y, C, D atrodas uz l tieši šādā secībā. Pierādīt, ka $AB = CD$.