

Lietiškie algoritmi – 2. mājas darbs: Atrisinājumi

1.uzdevums: Krāsu plakne YCbCr (max 3 punkti). Koordinātes (Y, Cb, Cr) aprēķina no koordinātēm (R, G, B) atbilstoši sekojošai vektoru algebras sakarībai:

$$\begin{pmatrix} Y \\ Cb \\ Cr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65.48 & 128.55 & 24.97 \\ -37.78 & -74.16 & 111.93 \\ 111.96 & -93.75 & -18.21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{255} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{255} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{255} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix}.$$

Sk. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1002/col.22291>.

Atrast YCbCr koordinātes zemāk minētajām krāsām, kas uzdotas (R, G, B) krāsu plaknē (un noapaļot visas (Y, Cb, Cr) koordinātes līdz tuvākajam veselajam skaitlim).

- (a) Baltai krāsai #FFFFFF jeb $(R, G, B) = (255, 255, 255)$.
- (b) Ciāna krāsai #00FFFF jeb $(R, G, B) = (0, 255, 255)$.
- (c) Magentas krāsai #FF00FF jeb $(R, G, B) = (255, 0, 255)$.
- (d) Dzeltēnai krāsai #FFFF00 jeb $(R, G, B) = (255, 255, 0)$.
- (e) Melnai krāsai #000000 jeb $(R, G, B) = (0, 0, 0)$.

Atrisinājums.

2.uzdevums: Diskrētais kosinusu pārveidojums (max 3 punkti). Dota funkcija $f(x)$, kas definēta argumentiem $x = 0, 1, \dots, N-1$. Par 1-dimensionālu DCT (diskrēto kosinusu pārveidojumu jeb *discrete cosine transform*) sauksim funkciju $F(u)$, kas definēta tām pašām argumenta vērtībām $u = 0, 1, \dots, N-1$ ar šādām vienādībām:

$$F(u) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{x=0}^{N-1} \lambda_u \cdot \cos\left(\frac{\pi u}{N} \left(x + \frac{1}{2}\right)\right) \cdot f(x),$$

kur $u = 0, 1, \dots, N-1$ un $\lambda_u = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (pie $u = 0$) un $\lambda_u = 1$ (pie $u > 0$).

Sk. https://en.wikipedia.org/wiki/Discrete_cosine_transform#DCT-II.

Par inverso diskrēto kosinusu pārveidojumu sauksim atgriešanos no funkcijas $F(u)$ atpakaļ pie funkcijas $f(x)$, ko definē ar šādām vienādībām:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{u=0}^{N-1} \lambda_u \cdot \cos\left(\frac{\pi u}{N} \left(x + \frac{1}{2}\right)\right) \cdot F(u),$$

kur $x = 0, 1, \dots, N-1$ un λ_u definēti tāpat kā agrāk.

- (a) Aprēķināt diskrēto kosinusu pārveidojumu $F(u)$ punktā $u = 3$ funkcijai $f(x) = (N-1) - x$, kur $N = 8$. Atbilde noapaļot līdz 4 cipariem aiz komata.
- (b) Aprēķināt inverso diskrēto kosinusu pārveidojumu $f(x)$ visiem punktiem $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ no funkcijas $F(u)$, kas uzdots ar sekojošām $N = 8$ vērtībām:

$$\begin{aligned} (F(0), F(1), F(2), F(3), F(4), F(5), F(6), F(7)) = \\ = (57.9828, -6.4423, 0, -0.6735, 0, -0.2009, 0, -0.0507). \end{aligned}$$

Atbilde noapaļot līdz 4 cipariem aiz komata.

Atrisinājums.

3.uzdevums: Heminga kodi. Uzrakstām skaitļa $\pi = 3.14159\dots$ pierakstu divnieku skaitīšanas sistēmā un grupējam tā ciparus aiz komata - divas grupas pa 7 un divas grupas pa 15:

$$\pi = 11.\underbrace{0010010\ 0001111}_{7\text{ grupas}}\underbrace{110110101010001\ 000100001011010}_{15\text{ grupas}}\dots_2.$$

Grupējam šī skaitļa ciparus aiz komata grupās pa 7 (un pēc tam arī pa 15), lai iegūtu ziņojumus. Atrast kļūdas (ja tādas ir) atbilstošajos Heminga koda ziņojumos:

- (a) Heminga koda ziņojums 0010010 (7-bitu Heminga kods, bitu secība apgriezti leksikogrāfiska – no x_{111} līdz x_{001}) – atrast kļūdaino pozīciju, ja tāda ir, un uzrakstīt šo 7-bitu kodu bez kļūdām.
- (b) Heminga koda ziņojums 0001111 (7-bitu Heminga kods) – izlabot kļūdas, ja tās ir, un uzrakstīt 4 ziņojuma bitus $x_1x_2x_3x_4$.

- (c) Heminga koda ziņojums 110110101010001 (15-bitu Heminga kods, bitu secība apgriezti leksikogrāfiska – no x_{1111} līdz x_{0001}) – atrast kļūdaino pozīciju, ja tāda ir, un uzrakstīt šo 15-bitu kodu bez kļūdām.
- (d) Heminga koda ziņojums 000100001011010 (15-bitu Heminga kods) – izlabot kļūdas, ja tās ir, un uzrakstīt visus ziņojuma bitus (ziņojumu bitu secība apgriezti leksikogrāfiska $x_{1111} \dots x_{0011}$).

Atrisinājums.

4.uzdevums: Rīda-Solomona kods.

- (a) Izmantojot galīgu lauku $\text{GF}(7)$ kodējam ziņojumus no 7 simbolu alfabēta $\{0, 1, 2, \dots, 6\}$ ar 3 pakāpes polinomiem, pārraidot 7 polinoma vērtības $(f(0), \dots, f(7))$ visos galīgā lauka $\text{GF}(7)$ punktos. Kāds ir maksimālais kļūdu skaits, pie kura iespējams viennozīmīgi atjaunot sākotnējo ziņojumu? Pamatot, kāpēc ir iespējams koriģēt šādu kļūdu skaitu un kāpēc nav iespējams koriģēt lielāku kļūdu skaitu.
- (b) Galīga lauka $\text{GF}(2^3)$ elementus $\{0, 1, t, t+1, t^2, t^2+1, t^2+t, t^2+t+1\}$ apzīmējam attiecīgi ar bitu virknēm $\{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$.
3-pakāpes polinoms $p(x) = 101 \cdot x^3 + 100 \cdot x^2 + 001 \cdot x + 010$ ir domāts, lai pārraidītu ziņojumu virknīti 101.100.001.010. Atrast polinoma vērtību $p(011)$, kur $011 \in \text{GF}(2^3)$.
Piezīme: Faktiski Rīda-Solomona kļūdu labošanas kodā vajadzētu būt visām 8 polinoma vērtībām, bet šajā vingrinājumā pietiek izrēķināt $p(x)$ tikai pie $x = 011$.

Atrisinājums.

5.uzdevums: I-iespēja (atzīmei 10).

- (a) Uzrakstīt grafu kodu ar 9 ziņojuma bitiem x_1, \dots, x_9 un pēc iespējas mazāku skaitu kontrolbitu y_1, \dots, y_k tā, lai kods spētu atjaunot jebkurus 2 pazaudētus ziņojuma bitus x_i .
- (b) Pamatot, ka mazāks kontrolbitu skaits nav iespējams.
- (c) Uzrakstīt grafu kodu ar 9 ziņojuma bitiem x_1, \dots, x_9 un pēc iespējas mazāku skaitu kontrolbitu y_1, \dots, y_k tā, lai kods spētu atjaunot jebkurus 3 pazaudētus ziņojuma bitus x_i .

Atrisinājums.