Līdzīgi trijstūri

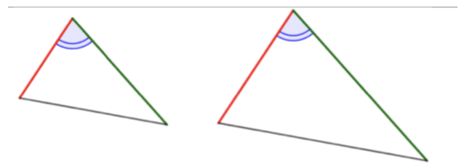
Teorija un piemēri, gatavojoties Novada matemātikas olimpiādei 2025./2026. mācību gadā

Olimpiādes uzdevumu komplektā katrai klašu grupai tiek iekļauts algebras, ģeometrijas, kombinatorikas un skaitļu teorijas uzdevums. Šogad Novada matemātikas olimpiādē ģeometrijas uzdevums 9.-12. klasei būs par tēmu "Līdzīgi trijstūri".

Divus trijstūrus sauc par **līdzīgiem**, ja to atbilstošās malas ir proporcionālas un atbilstošie leņķi ir vienādi.

Ja trijstūris ABC ir līdzīgs trijstūrim $A_1B_1C_1$, tad raksta $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Piezīme. Pierakstot trijstūru līdzību, jāievēro arī burtu secība! Vienādiem leņķiem atbilst vienādi burti!

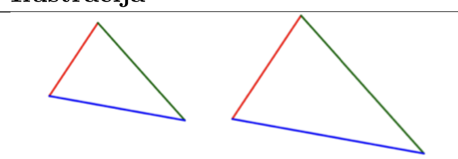
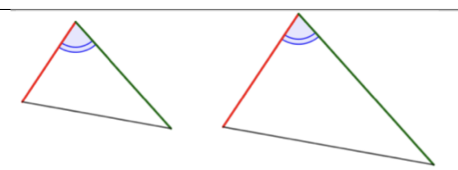
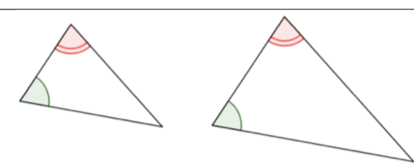


Ja $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, tad

- $\angle A = \angle A_1$;
- $\angle B = \angle B_1$;
- $\angle C = \angle C_1$;
- $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$.

Lai noteiktu, vai trijstūri ir līdzīgi, nav jāzina visu malu garumus vai visu leņķu lielumus, to var izdarīt vienkāršāk, izmantojot trijstūru līdzības pazīmes.

Līdzīgu trijstūru pazīmes

Pazīme	**Ilustrācija**
"**mmm**" – divi trijstūri ir līdzīgi, ja viena trijstūra trīs malas ir attiecīgi proporcionālas ar otra trijstūra trim malām	
"**mlm**" – divi trijstūri ir līdzīgi, ja viena trijstūra divas malas ir proporcionālas otra trijstūra divām malām un leņķi starp tām ir vienādi	
"**ll**" – divi trijstūri ir līdzīgi, ja viena trijstūra divi leņķi ir attiecīgi vienādi ar otra trijstūra diviem leņķiem	

Risinot uzdevumus, kuros lieto trijstūru līdzību, vispirms jāpārliecinās, vai trijstūri ir līdzīgi. Ja līdzība nav dota, tad tā ir jāpierāda - norādot līdzības pazīmi un atbilstošos elementus.

Teorēma. Taisne, kas krusto divas trijstūra malas un ir paralēla trešajai malai, atšķeļ trijstūri, kas ir līdzīgs dotajam trijstūrim.

Līdzības koeficients

Skaitli k, kas ir vienāds ar trijstūru atbilstošo malu attiecību, sauc par trijstūru līdzības koeficientu.

Līdzīgu trijstūru perimetru attiecība ir vienāda ar atbilstošo malu attiecību (līdzības koeficientu k), t. i., ja $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, tad

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{P(ABC)}{P(A_1B_1C_1)} = k$$

Līdzīgu trijstūru laukumu attiecība ir vienāda ar atbilstošo trijstūra malu attiecības kvadrātu (līdzības koeficienta kvadrātu k^2), t. i., ja $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, tad

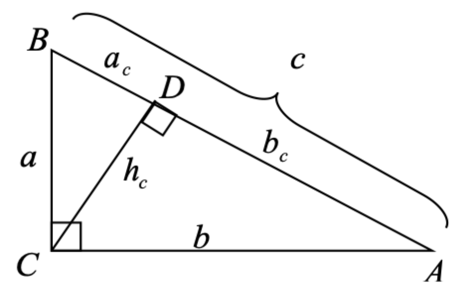
$$\left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = \frac{S(ABC)}{S(A_1B_1C_1)} = k^2.$$

Līdzīgu trijstūru atbilstošo bisektrišu, mediānu, viduslīniju un citu atbilstošo nogriežņu garumu attiecība ir vienāda ar šo trijstūru līdzības koeficientu k.

Taisnleņka trijstūris

Eiklīda teorēma. Taisnleņķa trijstūra katete ir vidējais proporcionālais starp hipotenūzu un šīs katetes projekciju uz hipotenūzas.
Taisnlenka trijstūra augstums, kas novilkts no taisnā leņķa virsotnes, ir vidējais proporcionālais starp katešu projekcijām uz hipotenūzas.

Dots: $\triangle ABC,\ \angle C = 90°$
h_c — augstums, kas novilkts pret hipotenūzu
b_c — malas b projekcija uz malu c
a_c — malas a projekcija uz malu c



Jāpierāda:

$$b = \sqrt{c \cdot b_c}, \quad a = \sqrt{c \cdot a_c}, \quad h = \sqrt{a_c b_c}$$

Pierādījums. Ievērojam, ka $\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle CBD$ pēc pazīmes $\ell\ell$, jo $\angle BCA = \angle CDA = \angle BDC = 90°$ un $\angle BAC = \angle CAD = 90° - \angle ABC = \angle BCD$.
Līdzīgu trijstūru atbilstošās malas ir proporcionālas, tāpēc

$$\tfrac{AD}{AC} = \tfrac{AC}{AB} \quad\Rightarrow\quad \tfrac{b_c}{b} = \tfrac{b}{c} \quad\Rightarrow\quad b = \sqrt{c \cdot b_c}$$

$$\tfrac{BD}{BC} = \tfrac{BC}{AB} \quad\Rightarrow\quad \tfrac{a_c}{a} = \tfrac{a}{c} \quad\Rightarrow\quad a = \sqrt{c \cdot a_c}$$

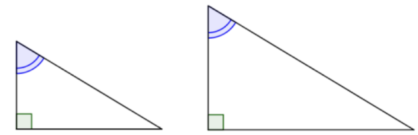
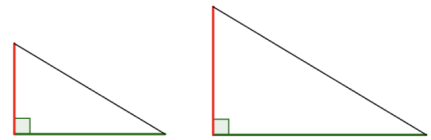
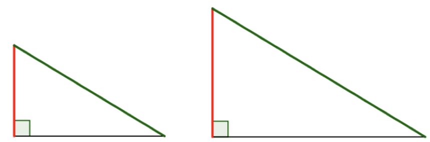
$$\tfrac{AD}{CD} = \tfrac{CD}{BD} \quad\Rightarrow\quad \tfrac{b_c}{h_c} = \tfrac{h_c}{a_c} \quad\Rightarrow\quad h = \sqrt{a_c b_c}$$

Teorēma pierādīta.

Teorēmas pierādījumā tika izmantots fakts, ko dažreiz ir izdevīgi lietot uzdevumu risināšanā:

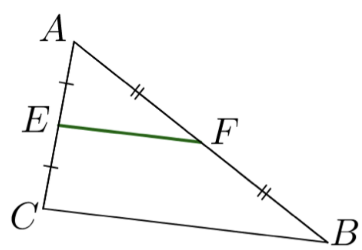
No taisnleņķa trijstūra taisnā leņķa virsotnes novilktais augstums h_c sadala trijstūri divos taisnleņķa trijstūros, kas ir līdzīgi savā starpā un ir līdzīgi dotajam trijstūrim.

Taisnleņķa trijstūru līdzības pazīmes

Pazīme	Ilustrācija
Ja viena taisnleņķa trijstūra šaurais leņķis ir vienāds ar otra taisnleņķa trijstūra šauro leņķi, tad abi trijstūri ir līdzīgi.	
Ja viena taisnleņķa trijstūra katetes ir proporcionālas otra taisnleņķa trijstūra katetēm, tad abi trijstūri ir līdzīgi.	
Ja viena taisnleņķa trijstūra katete un hipotenūza ir proporcionāla otra taisnleņķa trijstūra katetei un hipotenūzai, tad abi trijstūri ir līdzīgi.	

Trijstūra viduslīnija

Nogriezni, kas savieno trijstūra divu malu viduspunktus, sauc par **trijstūra viduslīniju**.



Viduslīnijas īpašības:

- trijstūra viduslīnija ir paralēla vienai no trijstūra malām;
- trijstūra viduslīnijas garums ir vienāds ar pusi no tai paralēlās trijstūra malas garuma;
- trijstūra viduslīnija no dotā trijstūra atšķeļ trijstūri, kas līdzīgs dotajam trijstūrim ar līdzības koeficientu $k = \frac{1}{2}$.

Trijstūra bisektrises īpašība

Teorēma. Trijstūra leņķa bisektrise sadala pretējo malu nogriežņos, kas proporcionāli to attiecīgajām piemalām.

Ja ir dots trijstūris ABC un BD ir leņķa B bisektrise, tad

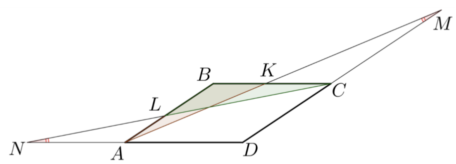
$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}.$$

Šī īpašība var noderēt, meklējot malu attiecības, lai atrastu līdzīgus trijstūrus.

Uzdevumu piemēri

1. Uz paralelograma $ABCD$ malām AB un BC atlikti attiecīgi punkti L un K; taisne AK krusto taisni DC punktā M, taisne CL krusto taisni DA punktā N. Pierādīt, ka $\triangle ABK \sim \triangle CBL$, ja dots, ka $\angle CND = \angle AMD$!

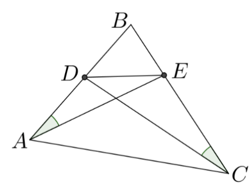
Atrisinājums. Ievēro, ka $\angle CND = \angle BCL$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm AD un BC; līdzīgi iegūst $\angle BAK = \angle AMD$. No dotā tad izriet $\angle BAK = \angle AMD = \angle CND = \angle BCL$. Tātad $\triangle ABK \sim \triangle CBL$ pēc pazīmes $\ell\ell$, jo $\angle ABK$ abos trijstūros ir kopīgs, bet $\angle BCL = \angle BAK$ pēc pierādītā.



1.att.

2. Uz trijstūra ABC malām AB un BC ņemti attiecīgi punkti D un E. Dots, ka $\angle BAE = \angle BCD$. Pierādīt, ka trijstūri ABC un BED ir līdzīgi!

Atrisinājums. Tā kā $\angle ABC$ ir kopīgs un $\angle BAE = \angle BCD$ pēc dotā, trijstūri ABE un CBD ir līdzīgi pēc pazīmes $\ell\ell$. Tātad šo trijstūru atbilstošās malas ir proporcionālas: $\frac{BD}{BE} = \frac{CB}{AB}$. Taču tagad redzam, ka trijstūri ABC un EBD ir līdzīgi pēc pazīmes $m\ell m$, jo leņķis $\angle ABC$ ir abiem trijstūriem kopīgs, bet tam piegulošās malas ir proporcionālas: $\frac{BD}{BC} = \frac{BE}{AB}$.

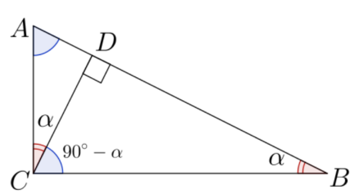


2.att.

3. Vai jebkuru taisnstūri jebkurai naturālai $n (n \geq 2)$ vērtībai var sagriezt n savstarpēji līdzīgos trijstūros?

Atrisinājums. Taisnstūra diagonāle sadala taisnstūri divos vienādos taisnleņķa trijstūros. Pierādīsim, ka patvaļīgu taisnleņķa trijstūri var sagriezt divos trijstūros, kas katrs ir līdzīgs sākotnējam trijstūrim.

Ja taisnais lenķis ir $\angle ACB$ (skat. 3.att.), tad no tā velk perpendikulu CD pret hipotenūzu AB. Trijstūri



3.att.

ABC, ACD un CBD ir līdzīgi pēc pazīmes $\ell\ell$, jo

- $\angle ACB = \angle ADC = \angle CDB = 90°$;
- $\angle CBA = \angle DCA = \angle DBC = \alpha$.

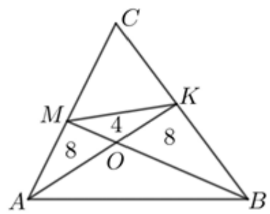
Tas nozīmē, ka, novelkot perpendikulu no taisnā leņka virsotnes, sākotnējais trijstūris tiek sadalīts divos tam līdzīgos trijstūros. Turpinot tādā pat veidā dalīt iegūtos taisnleņka trijstūrus, prasīto taisnstūra sadalījumu var atrast jebkurai naturālai $n (n \geq 2)$ vērtībai.

4. Uz trijstūra ABC malām AC un BC atlikti attiecīgi punkti M un K. Nogriežņi AK un BM krustojas punktā O. Aprēķināt trijstūra ABC laukumu, ja $S_{AMO} = S_{BKO} = 8$ un $S_{KMO} = 4$.

Atrisinājums. Tā kā $S_{AMK} = S_{BMK} = 8 + 4 = 12$ (skat. 4.att.) un mala MK ir kopīga, tad šo trijstūru augstumi, kas novilkti attiecīgi no virsotnēm A un B, ir vienādi. Līdz ar to secinām, ka $MK \| AB$ un $\triangle AOB \sim \triangle KOM$ pēc pazīmes $\ell\ell$.
Ievērojam, ka

$$\frac{8}{4} = \frac{S_{AMO}}{S_{OMK}} = \frac{\frac{1}{2}AO \cdot h_{AO}}{\frac{1}{2}OK \cdot h_{OK}} = \frac{AO}{OK}$$

Tātad $\frac{AB}{MK} = \frac{AO}{OK} = 2$ un $S_{AOB} = 4S_{MOK} = 16$ un $S_{AMKB} = 4 + 2 \cdot 8 + 16 = 36$. Tā kā $AB = 2MK$ un $AB \| MK$, tad $S_{ABC} = 4S_{MCK}$ un iegūstam vienādību $S_{ABC} = 4(S_{ABC} - S_{AMKB})$ jeb $S_{ABC} = 4S_{ABC} - 4 \cdot 36$, no kā aprēķinām, ka $S_{ABC} = 48$.
Piezīme. Var ievērot, ka MK ir trijstūra ABC viduslīnija.



4.att.

5. Dots vienādsānu trijstūris ABC, kuram $AB = AC$ un $\angle BAC < 60°$. Riņķa līnija, kuras centrs ir punktā B un rādiuss BC, krusto trijstūra malas AC un AB attiecigi punktos D (kas nesakrīt ar C) un E. Pierādīt, ka $AD < 2AE$.

Atrisinājums. Trijstūri ABC un BCD ir vienādsānu trijstūri ($AB = AC$ pēc dotā un $BC = BD$ kā rādiusi), turklāt lengki pie pamata abiem trijstūriem ir vienādi ($\angle ACB$ ir kopīgs abiem trijstūriem, skat. 5. att.). Tātad $\triangle BCD \sim \triangle ABC$ pēc pazīmes $\ell\ell$. Līdzīgos trijstūros atbilstošo malu garumi ir proporcionāli, tāpēc

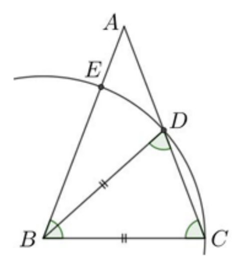
$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{DC} \quad \Rightarrow \quad \frac{AE + EB}{BC} = \frac{BC}{AE + EB - AD}$$
$$(AE + EB)(AE + EB - AD) = BC^2$$

Tā kā $BC = EB$ kā rādiusi, tad

$$AE^2 + 2AE \cdot BC + BC^2 - AD \cdot AE - AD \cdot BC = BC^2$$
$$AE^2 + 2AE \cdot BC = AD(AE + BC)$$
$$2AE(AE + BC) - AE^2 = AD(AE + BC)$$

Dalot abas vienādības puses ar $(AE + BC)$, iegūstam, ka

$$AD = 2AE - \frac{AE^2}{AE + BC} \quad \Rightarrow \quad AD < 2AE.$$



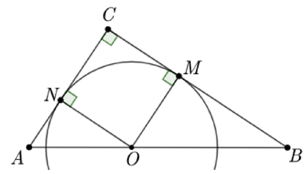
5.att.

6. Uz taisnleņķa trijstūra ACB hipotenūzas AB atlikts punkts O, kas ir centrs riņķa līnijai ar rādiusu 3, kura pieskaras abām katetēm. Aprēķināt trijstūra ACB laukumu, ja $OB = 5$.

Atrisinājums. Punktus, kur riņķa līnijas rādiuss pieskaras katetēm, apzīmēsim ar M un N (skat. 6. att.). Tā kā rādiuss ir perpendikulārs pieskarei, tad trijstūris OMB ir taisnleņķa trijstūris. Pēc Pitagora teorēmas $MB = \sqrt{OB^2 - MO^2} = \sqrt{25-9} = 4$ cm.

Tā kā rādiusi ir perpendikulāri pieskarēm un trijstūris ACB ir taisnleņķa, tad četrstūra $ONCM$ trīs lenķi ir taisni $\angle NCM = \angle CNO = \angle CMO = 90°$. Četrstūra $ONCM$ divas blakusmalas ir vienādas $ON = OM$ kā rādiusi, tāpēc četrstūris $ONCM$ ir kvadrāts un $MC = OM = 3$ cm, $CB = BM + MC = 7$ cm.

Ievērojam, ka $\triangle OMB \sim \triangle ACB$ pēc pazīmes $\ell\ell$, jo $\angle B$ ir kopīgs un $\angle OMB = \angle ACB = 90°$. Tad $\frac{AC}{OM} = \frac{CB}{MB}$, no kā iegūstam, ka $AC = \frac{OM \cdot CB}{MB} = \frac{3 \cdot 7}{4} = 5,25$ cm. Līdz ar to $S_{ACB} = \frac{AC \cdot CB}{2} = 18\frac{3}{8}$ cm^2.

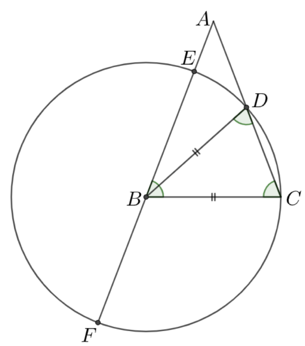


6.att.

7. Dots vienādsānu trijstūris ABC, kuram $AB = AC$ un $\angle BAC < 60°$. Riņķa līnija, kuras centrs ir punktā B un rādiuss BC, krusto trijstūra malas AC un AB attiecīgi punktos D un E. Aprēķināt $\frac{AD}{DC}$, ja $\frac{AE}{EB} = \frac{2}{5}$.

Atrisinājums. Apzīmējam $AE = 2x$ un $EB = BD = BC = 5x$. Tad $AB = AC = 7x$. Trijstūri ABC un BCD ir vienādsānu trijstūri ($AB = AC$ pēc dotā un $BC = BD$ kā rādiusi), turklāt lenți pie pamata abiem trijstūriem ir vienādi ($\angle ACB$ ir kopīgs abiem trijstūriem, skat. 7. att.). Tātad $\triangle BCD \sim \triangle ABC$ pēc pazīmes $\ell\ell$.

Līdzīgos trijstūros atbilstošo malu garumi ir proporcionāli, tāpēc $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{DC}$ un līdz ar to iegūstam, ka $DC = \frac{BC^2}{AB} = \frac{(5x)^2}{7x} = \frac{25x}{7}$. Tātad $AD = 7x - \frac{25x}{7} = \frac{24x}{7}$ un $\frac{AD}{DC} = \frac{24}{25}$.



7.att.