Matemātika II

Padziļinātā kursa programmas paraugs vispārējai vidējai izglītībai

Valsts izglītības satura centrs | ESF projekts Nr.8.3.1.1/16/I/002
Kompetenču pieeja mācību saturā

SKOLA 2030

Matemātika II

Padziļinātā kursa programmas paraugs vispārējai vidējai izglītībai

Padziļinātā kursa programmas paraugs ir izstrādāts Eiropas Sociālā fonda projektā "Kompetenču pieeja mācību saturā" (turpmāk – Projekts).

Mācību satura izstrādi pirmsskolas, pamatizglītības un vispārējās vidējās izglītības pakāpē Projektā vadīja **Dace Namsone** un **Zane Oliņa**.

Padziļinātā kursa programmas parauga izstrādi un sagatavošanu publicēšanai Projektā vadīja **Jānis Vilciņš** un **Pāvels Pestovs**.

Padziļinātā kursa programmas paraugu izstrādāja **Aivars Ančupāns, Maruta Avotiņa** un **Maija Balode**.

Padziļinātā kursa programmas paraugu izvērtēja ārējie eksperti: mācību satura recenzente **Baiba Āboltiņa** un zinātniskā recenzente **Dace Kūma**.

Projekts izsaka pateicību visām Latvijas izglītības iestādēm, kas piedalījās mācību satura aprobācijā.

ISBN **978-9934-24-008-9**

© Valsts izglītības satura centrs | ESF projekts Nr.8.3.1.1/16/I/002 Kompetenču pieeja mācību saturā.

Saturs

Ievads

Kursa programmas struktūra

Matemātika II padziļinātā kursa programmas (turpmāk – programma) paraugs ir veidots, lai palīdzētu skolotājiem īstenot Ministru kabineta 2019. gada 3. septembra noteikumos Nr. 416 "Noteikumi par valsts vispārējās vidējās izglītības standartu un vispārējās vidējās izglītības programmu paraugiem" (turpmāk – standarts) noteiktos plānotos skolēnam sasniedzamos rezultātus matemātikas mācību jomā augstākajā mācību satura apguves līmenī.

Programmā iekļauti:

- kursa mērķis un uzdevumi;
- mācību saturs;
- mācību sasniegumu vērtēšanas formas un metodiskie paņēmieni;
- ieteikumi mācību darba organizācijai;
- mācību satura apguves norise;
- vērtēšanas uzdevumu piemēri.

Mācību satura apguvei izmantojamo mācību līdzekļu un resursu apkopojošs uzskaitījums pievienots 5. pielikumā. Mācību saturs programmā ir veidots atbilstoši standartā noteiktajiem matemātikas mācību jomas plānotajiem skolēnam sasniedzamajiem rezultātiem augstākajā mācību satura apguves līmenī.

Programma veidota, paredzot, ka kursa apguvei vidējās izglītības pakāpē tiks atvēlētas 280 mācību stundas. Taču skolai ir iespējams mainīt mācību stundu skaitu kursā, to nesamazinot vairāk par 15 %. Ieteikumus mācību darba organizācijai skatīt programmas sadaļā "Ieteikumi mācību darba organizācijai". Programmas paraugam ir ieteikuma raksturs. Skolotāji var izmantot šo programmu vai arī izstrādāt savu programmu.

Mācību satura un pieejas akcenti

Vispārējās vidējās izglītības satura īstenošanas mērķis ir lietpratīgs skolēns, kurš apzinās savas personiskās spējas un intereses mērķtiecīgai personiskās un profesionālās nākotnes veidošanai, kurš ciena sevi un citus, padziļina zināšanas, izpratni, prasmes un turpina nostiprināt vērtības un tikumus atbilstoši saviem nākotnes mērķiem, atbildīgi, inovatīvi un produktīvi darbojas paša, ģimenes, labklājīgas un ilgtspējīgas Latvijas valsts un pasaules veidošanā.

Vidējās izglītības pakāpes loma ir dot iespēju jauniešiem mācīties, iedziļinoties atbilstoši viņu interesēm un nākotnes mērķiem, padziļinot un vispārinot pamatizglītībā apgūto (10./11. klase) un mācoties dziļāk, šaurākā mācību jomu lokā (11./12. klase).

Mācību jomā plānotos rezultātus augstākajā mācību satura apguves līmenī skolēns apgūst padziļinātajā kursā. Tā mērķis ir sniegt zināšanas, izpratni un veidot prasmes, apzināti, atbildīgi, radoši un patstāvīgi pārraugot savu izziņas darbību, risinot problēmas nepazīstamās, sarežģītās situācijās, veidojot dziļu konceptuālu izpratni mācību jomā, saskatot starpdisciplināras likumsakarības un mācoties patstāvīgi plānot, īstenot, uzraudzīt un izvērtēt produkta radīšanas procesu.

Matemātika II kursa mācību satura apguvē, skolēns paplašinās un padziļinās Matemātika I kursa apgūtās zināšanas, vispārinot un pierādot agrāk iegūtos rezultātus, plānojot un veicot izpēti jaunās situācijās, risinot kompleksas problēmas katra temata ietvaros, veidojot konceptuālu izpratni par būtiskākajiem jēdzieniem, par saistību starp atsevišķām matemātikas apakšnozarēm, padziļinot izpratni par matemātisko stingrību un matemātisko modelēšanu.

Mērķis un uzdevumi

Matemātika II kursa apguves mērķis un uzdevumi skolēnam ir:

1) analizēt matemātiskos modeļus, formulēt un pierādīt vispārinājumus, veidot matemātisko modeli, izvērtēt un pamatoti izvēlēties paņēmienus, risinot problēmas sarežģītās, jaunās situācijās;
2) skaidrot un pamatot algebras, matemātiskās analīzes, planimetrijas, analītiskās ģeometrijas, stereometrijas, trigonometrijas, varbūtību teorijas un statistikas matemātiskos modeļus un lietot tos padziļinātos matemātiskos un citu mācību jomu kontekstos;
3) korekti definēt galvenos matemātikas jēdzienus, precīzi raksturot idejas un kopsakarības, aprakstīt eksistences nosacījumus un izņēmuma gadījumus.

Mācību saturs

Vidējās izglītības pakāpē mācību saturs ir izstrādāts, fokusējoties uz skolēnam būtiskāko, lai veidotos lietpratība (kompetence) kā komplekss skolēna mācīšanās rezultāts ilgākā periodā. Mācību saturs ir organizēts saskaņā ar mācību satura būtiskākajiem pamatjēdzieniem jeb lielajām idejām, kas skolēnam jāapgūst, lai veidotos vienota izpratne par apkārtējo pasauli un sevi tajā. Lielās idejas veido obligātā mācību satura strukturālo ietvaru. Tām atbilstoši aprakstītas prasības mācību satura apguvei jeb plānotie skolēnam sasniedzamie rezultāti, pabeidzot noteiktu izglītības pakāpi.

Matemātikas mācību jomas lielās idejas, par kurām skolēns veido izpratni arī padziļinātajā kursā:

- matemātikas valodu izmanto saziņai un zinātniskai jēdzienu, ideju, problēmu risinājumu aprakstīšanai;
- risināt problēmu matemātikai raksturīgi nozīmē saskatīt struktūras, sistēmas, sakarības, veidot vispārinājumus un tos pierādīt;
- skaitļus izmanto konkrētu, arī praktisku uzdevumu atrisināšanai; katrai darbībai ar skaitļiem ir noteikta jēga, un to izpildei ir noteikti likumi/algoritmi;
- sakarības starp lielumiem apraksta algebriskie modeļi un funkcijas; izmantojot šos modeļus problēmu risināšanai, tos pārveido, nodrošinot ekvivalenci;
- datus par objektiem, situācijām, notikumiem, procesiem var matemātiski apstrādāt, analizēt, lai pieņemtu pamatotus lēmumus;
- figūru īpašību, novietojuma, to raksturojošo lielumu izpēte ļauj risināt konkrētas, arī praktiskas, problēmas, formulēt vispārīgus secinājumus par objektiem, telpu, formu.

Matemātika II kursa mācību satura īss apraksts[1] atbilstoši katrai lielajai idejai:

- lasa, analizē daļēji pazīstamu matemātiska satura tekstu, patstāvīgi meklē trūkstošo informāciju uzziņu avotos, mērķtiecīgi pāriet no viena matemātikai raksturīga informācijas attēlošanas veida uz citu, veido izvērstu tekstu zinātniskā valodā;
- lieto pierādījumu no pretējā jaunās situācijās, matemātiskās indukcijas principu. Izmanto induktīvu un deduktīvu spriešanu, formulējot un pierādot likumsakarības matemātiskos objektos, risinot kompleksas matemātiskas problēmas, lietojot matemātiku citu mācību

[1] Aprakstā nav iekļauts kursa Matemātika I saturs.

jomu kontekstos jaunās situācijās. Veic situācijas matemātisko modelēšanu, izmantojot dotus vai iegūtus datus;

- lieto skaitli *e*, definē naturāllogaritmu, pierāda un lieto *n*-tās pakāpes sakņu, pakāpju ar racionālu kāpinātāju un logaritmu īpašības, sakarības starp pagrieziena leņķa sinusu, kosinusu, tangensu un kotangensu. Veido priekšstatu par kompleksajiem skaitļiem[2];
- skaidro vai definē viennozīmīgu atbilstību un inverso funkciju, virknes robežu, funkcijas robežu un nepārtrauktību, funkcijas atvasinājumu, primitīvo funkciju, nenoteikto un noteikto integrāli. Lieto funkcijas atvasinājumu un integrāli matemātikas un citu mācību jomu kontekstos. Pierāda virkņu vispārīgā locekļa, visu elementu summas formulas. Pamato un lieto saīsināto reizināšanas formulu vispārinājumus, polinoma dalīšanu ar binomu, pārveido algebriskas daļas, ja to skaitītājā vai saucējā ir izteiksmes ar vispārīgā veidā uzdotām pakāpēm, izsaka algebrisku daļu kā divu daļu summu. Pierāda un lieto sakarības starp dažādu argumentu trigonometriskām izteiksmēm. Definē logaritmisko funkciju, pakāpes funkciju (kāpinātājs – racionāls skaitlis), inversās trigonometriskās funkcijas. Atrisina logaritmisku vienādojumu, nevienādību, trigonometrisku vienādojumu vispārīgā veidā, atrisina augstāko kārtu vienādojumus, jauktas vienādojumu sistēmas, dažāda veida vienkāršus vienādojumus un nevienādības ar parametru;
- pierāda kombinatorikas formulas, lieto tās, sastādot vienādojumu, nevienādību, pierāda un lieto Ņūtona binomu. Skaidro un lieto pilnās varbūtības formulu. Nosaka diskrēta mainīga lieluma varbūtības sadalījumu, aprēķina diskrēta mainīga lieluma sagaidāmo vērtību un standartnovirzi. Skaidro biežāk lietotos sadalījumus, lieto Bernulli formulu. Skaidro saistību starp binomiālo sadalījumu un normālo sadalījumu. Pamatoti izvēlas lielumus datu raksturošanai. Izmanto regresijas vienādojumu, lai analizētu divu mainīgo lielumu saistību;
- lieto kolineārus vektorus, komplanārus vektorus, vektoru izteikšanu ar citiem vektoriem plaknē un telpā. Lieto vektoru skalāro reizinājumu. Pierāda, lieto sakarību starp taisni un tai perpendikulāru vektoru, formulu attāluma no punkta līdz taisnei noteikšanai. Nosaka dažādu analītiski uzdotu sakarību punktu ģeometrisko vietu un otrādi. Lieto koordinātu metodi, nosakot plaknes figūru un telpisku ķermeņu nezināmos lielumus, pierādot to savstarpējo novietojumu vai īpašības. Skaidro stereometriju kā aksiomātisku sistēmu. Veido un pamato daudzskaldņu šķēlumu ar plakni. Nosaka un pamato slīpas prizmas un dažādu rotācijas ķermeņa virsmas laukumu un tilpumu, pamato telpisku ķermeņu kombinācijas, formulē sakarības starp telpisko ķermeņu lielumiem.

Standartā plānotie skolēnam sasniedzamie rezultāti mācību jomā un no tiem atvasinātie sasniedzamie rezultāti padziļinātā kursa programmā ir kompleksi – galarezultāts veidojas darbībā, kura ietver gan mācību jomas zināšanas, izpratni un prasmes, gan caurviju prasmes, gan vērtībās balstītus ieradumus. Katra kursa skolotāja viens no uzdevumiem ir tos attīstīt.

Caurviju prasmju apguve un izmantošana ikdienā ir nozīmīgs priekšnoteikums dziļākas izpratnes veidošanai kursā. Vingrinoties izmantot caurviju prasmes kursam specifiskos veidos un situācijās, skolēns vienlaikus ir ieguvis vispārīgas prasmes, kuras varēs izmantot visu dzīvi. Standartā plānotie skolēnam sasniedzamie rezultāti caurviju prasmēs, beidzot vispārējās vidējās izglītības pakāpi, iekļauti programmas 3. pielikumā.

Matemātika II kursā īpaši attīsta tādas caurviju prasmes kā:

- **kritiskā domāšana un problēmrisināšana** – risina kompleksas problēmas, skaidro un pamato savu darbību katrā no soļiem, apzināti izvēlas un raksturo problēmas atrisināšanai vai matemātisku objektu definēšanai nepieciešamās zināšanas, prasmes un paņēmienus, kritiski izvērtē to piemērotību, raksturo teksta mērķi un kritiski izvērtē satura atbilstību tam, saskata un formulē jautājumus, kas prasa tālāku izpēti, diskutē par matemātikas satura jautājumiem, kas nav viennozīmīgi skaidrojami;
- **pašvadīta mācīšanās** – lasa daļēji pazīstama satura izvērstu matemātiska satura tekstu un trūkstošo informāciju noskaidro uzziņu avotos, apzināti izvēlas sev vai situācijai noderīgu attēlošanas veidu vai risināšanas paņēmienu, vērtē un raksturo savu matemātisko kompetenci un formulē sev nozīmīgus mācīšanās mērķus, veido sev noderīgus strukturētus satura pārskatus/kopsavilkumus, izvēlas un formulē pētāmo jautājumu patstāvīgam izpētes darbam, plāno izpētes darba gaitu un uzrauga savu darbību un pieņem lēmumus katrā no soļiem.

[2] Kursa Matemātika II ietvaros (4. temats) plānots veidot sākotnējo priekšstatu par kompleksajiem skaitļiem un to lietojumu. Detalizētāku saturu iespējams īstenot specializētajā kursā "Kompleksie skaitļi”.

Mācību sasniegumu vērtēšanas formas un metodiskie paņēmieni

Sasniedzamo rezultātu veidi, vērtēšanas formas un metodiskie paņēmieni

Programmas ietvaros paredzēti četru veidu plānotie skolēnam sasniedzamie rezultāti: zināšanas un izpratne, prasmes, vērtībās balstīti ieradumi un zināšanu, izpratnes, prasmju un ieradumu kombinācijas. Katram sasniedzamo rezultātu veidam ir norādītas būtiskas sasniedzamo rezultātu grupas, kuras apkopo standartā noteikto mācību saturu.

Zināšanu un izpratnes apguve attiecas uz standartā plānotajiem skolēnam sasniedzamajiem rezultātiem, kuri parasti sākas ar darbības vārdiem "skaidro", "pamato" u. c. Plānoto skolēnam sasniedzamo rezultātu apguvi skolēns parāda, piemēram, skaidrojot jēdzienus, algoritmus, piedaloties sarunās un diskusijās.

Prasmju grupas atspoguļo būtiskas priekšmeta specifiskās prasmes, domāšanas un caurviju prasmes. Prasmju apguvi skolēns demonstrē darbībā, piemēram, modelē, aprēķina, analītiski spriež, lieto priekšmeta specifisko valodu.

Ieradumus, kas balstīti vērtībās, skolēns demonstrē darbībā; tos vērtē, novērojot skolēna darbību ilgākā laikposmā, īpaši situācijās, kuras ietver izvēles iespējas.

Zināšanu, izpratnes, prasmju un ieradumu kombinācijas, kuras ir raksturīgas un būtiskas šī kursa mācību satura apguvē, skolēns demonstrē darbībā, jaunajās, to skaitā reālajās dzīves situācijās, risinot problēmas. Katra padziļinātā kursa ietvaros ir norādītas raksturīgas problēmas, piemēram, pētniecība, mākslinieciskā jaunrade, kurās skolēns definē problēmu vai iespēju, formulē un izvēlas risinājumu, plāno un rīkojas, pārbauda un izvērtē risinājumu.

Skolotājs atbilstoši sasniedzamajam rezultātam izvēlas uzdevumu un vērtēšanas formu (mutiski, rakstiski, praktiski vai kombinēti). Būtiska uzdevumu daļa ir vērtēšanas kritēriji, saskaņā ar kuriem iespējams izvērtēt snieguma kvalitāti. Ja skolēns var demonstrēt sniegumu dažādās kvalitātes gradācijās, tad ir svarīgi veidot snieguma aprakstu attiecībā pret būtiskiem kritērijiem. Kritēriju izstrādē un vērtēšanā var iesaistīt skolēnus, lai pilnveidotu viņu pašvadītas mācīšanās prasmes.

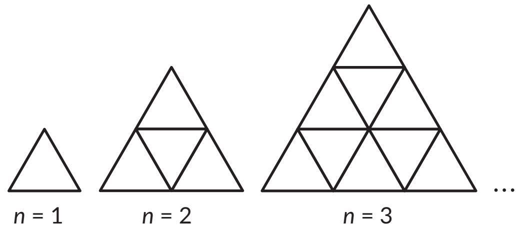
Kursa vērtēšanas saturs

Matemātika II kursa detalizēts sasniedzamo rezultātu grupu uzskaitījums ir apkopots tabulā. Programmas ietvaros atbilstoši sasniedzamo rezultātu grupām ir izstrādāti uzdevumu piemēri ar vērtēšanas kritērijiem. Atsevišķi uzdevumi ietver vairākas sasniedzamo rezultātu grupas. Šo uzdevumu mērķis ir atspoguļot zināšanas un izpratni, prasmes, ieradumus un zināšanu, izpratnes, prasmju un ieradumu kombinācijas, kurus skolēns ir apguvis kursa ietvaros.

Šajā tabulā ir iekļauti uzdevumu piemēri, kuri ilustrē katrai sasniedzamo rezultātu grupai tipiskus uzdevumus vai skaidrojums par sasniedzamo rezultātu grupas vērtēšanu. Daļa no šiem uzdevumiem kopā ar vērtēšanas kritērijiem iekļauti 4. pielikumā.

Sasniedzamo rezultātu veids	Sasniedzamo rezultātu grupa	Vērtēšanas uzdevumu piemēri vai skaidrojums
Zināšanas un izpratne	Skaidro jēdzienu, simbolu nozīmi.	1. Paskaidro teorētiski un ilustrē ar piemēru diskrēta gadījuma lieluma varbūtību sadalījumu. 2. Paskaidro doto lielumu nozīmi un eksistenci iespējami precīzi: a) $\arcsin\frac{3}{4}$; b) $\arcsin 1{,}2$. Vērtēšanas kritērijus skatīt 4. pielikuma 1. uzdevumā.
	Skaidro algoritmus, formulas, paņēmienus un to lietojumu.	Paskaidro līklīnijas trapeces laukuma aprēķināšanu atkarībā no tā, kā koordinātu plaknē novietots grafiks funkcijai, kas to norobežo.
Prasmju grupa	Lieto matemātikas simbolisko valodu.	Prasme tiek vērtēta kopumā kāda apjomīgāka darba ietvaros, piemēram, patstāvīgajā izpētes darbā "Matemātiskā modelēšana". Vērtēšanas kritērijus skatīt 4. pielikuma 5. uzdevumā.
	Informācijas pratība: iegūst datus, pārveido to attēlošanas veidu un raksturo tos, t. sk. izmantojot varbūtību un statistiskos lielumus.	Apkopo datus par savas skolas pēdējo 4–5 gadu rezultātiem matemātikas centralizētajā eksāmenā. Izvēlies un lieto statistiskos lielumus, lai formulētu nozīmīgus, ar datiem pamatotus secinājumus.
	Lieto algoritmus, formulas, paņēmienus.	1. Izpēti funkcijas īpašības un uzzīmē tās grafiku: a) $y = x^4 - x^2$; b) $y = \frac{x}{4 - x^2}$. 2. Farmācijas firma ir izstrādājusi jaunu diagnostikas testu, kas 90 % gadījumu uzrāda pozitīvu rezultātu pacientam, kurš ir inficēts ar noteiktu slimību. Nosaki varbūtību, ka, diagnosticējot piecus inficētus pacientus, tiks atklāti tieši četri.
	Lieto analītiskās domāšanas prasmes.	1. Salīdzini $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{2}{3}}$ nenegatīvām *a* vērtībām. 2. Uzraksti formulu bezgalīgai virknei, kas ir augoša un katrs virknes loceklis ir mazāks nekā 3. 3. Izskati divu vienādojumu dotos atrisinājumus un raksturo kopīgo un atšķirīgo lietotajos paņēmienos. $\sqrt{x-3} = x - 5$; $x^{\lg x} = 100x$

Sasniedzamo rezultātu veids	Sasniedzamo rezultātu grupa	Vērtēšanas uzdevumu piemēri vai skaidrojums
Prasmju grupa	Pierāda vispārīga apgalvojuma patiesumu.	1. Pierādi, ka $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2,\ n\in\mathbb{N}$. 2. Nosaki un pierādi virknes $a_n=\dfrac{n+2}{n+3}\ (n\in\mathbb{N})$ monotonitāti. 3. Pierādi lodes tilpuma formulu, izmantojot noteikto integrāli.
	Pašvadīta mācīšanās: plāno, uzrauga, izvērtē savu matemātisko darbību.	1. Lasi dotos pierādījumus, lietojot matemātiskās indukcijas principu (MIP). Īsi raksturo kopīgo un atšķirīgo ar līdz šim lietotajiem pierādīšanas paņēmieniem, formulē jautājumus par neskaidro MIP lietojumā. 2. Raksturo savu pieeju/stratēģiju, lai veidotu idejas un formulētu pieņēmumu par rekurenti uzdotas virknes vispārīgā locekļa formulu.
Ieradumi	Personiski iesaistās matemātiskajā darbībā.	Ieradums tiek vērtēts patstāvīgajā izpētes darbā "Matemātiskā modelēšana". Vērtēšanas kritērijus skatīt 4. pielikuma 5. uzdevumā.
Zināšanu, izpratnes, prasmju un ieradumu kombinācijas	Veido zināšanu pārnesumu vai saista izpratni par satura elementiem jaunā situācijā un atrisina kompleksu problēmu.	1. Medicīnā reakciju $R(x)$ uz zāļu devu x izsaka funkcija $R(x)=Ax^2(B-x)$, kur $A>0, B>0$ un to skaitliskā vērtība atkarīga no zālēm. Ķermeņa jutību $S(x)$ pret devu x definē kā $R'(x)$. Pieņemot, ka ar cilvēka dzīvību saistāma tikai pozitīva reakcija, nosaki: a) funkcijas $R(x)$ definīcijas kopu; b) kādām x vērtībām $R(x)$ ir lielākā vērtība, un kāda tā ir; c) kādām x vērtībām ir maksimālā jutība. Vērtēšanas kritērijus skatīt 4. pielikuma 3 uzdevumā. 2. Hiperbolas $y=\dfrac{2}{x}$ brīvi izraudzītā punktā novilkta pieskare, kas koordinātu asis krusto punktos A un B. Pierādi, ka trijstūra AOB laukums nav atkarīgs no pieskaršanās punkta izvēles (O – koordinātu sākumpunkts).

Sasniedzamo rezultātu veids	Sasniedzamo rezultātu grupa	Vērtēšanas uzdevumu piemēri vai skaidrojums
Zināšanu, izpratnes, prasmju un ieradumu kombinācijas	Pēta, formulē, vispārina un pierāda sakarības starp lielumiem, likumsakarības matemātiskos objektos.	1. Figūras tiek veidotas no vienāda garuma nogriežņiem pēc noteiktas likumsakarības (sk. attēlu). Ar $s(n)$ apzīmē vienādo nogriežņu skaitu, kas izmantoti n vērtībai atbilstošās figūras izveidei, piemēram, $s(1)=3$; $s(2)=9$. Izvēlies uzdevumu a) un b) risināšanas secību. a) Nosaki $s(10)$, parādi risinājumu. b) Uzraksti formulu $s(n)$ aprēķināšanai, paskaidro, kā to ieguvi. Pierādi, ka formula patiesa visiem naturāliem n.  Vērtēšanas kritērijus skatīt 4. pielikuma 2. uzdevumā. 2. Izpēti, formulē un pierādi izteiksmju $a^2-1; a^3-1; a^4-1; a^5-1; \ldots; a^n-1$ sadalīšanu reizinātājos, ja $n \geq 2; n \in \mathbb{N}$.
	Matemātiski modelē situāciju ar funkciju, izvērtē un lieto matemātisko modeli.	Tabulā doti dati par pārdoto viedtālruņu skaitu pasaulē no 2008. līdz 2012. gadam (avots: http://seekingalpha.com). (tabula zemāk) a) Atrodi datus par laiku no 2013. līdz 2019. gadam (norādi informācijas avotu). b) Izmanto atbilstošus digitālos rīkus un attēlo datus grafiski, nosaki funkciju un tās formulu, kas iespējami precīzi apraksta pārdoto viedtālruņu skaita pieaugumu no 2008. līdz 2019. gadam. d) Formulē secinājumus, pamato ar datiem. Izvērtē iespējas pamatoti prognozēt.

Gads	2008	2009	2010	2011	2012
Skaits (miljoni)	1,7	3,8	8,8	18,6	35,3

Kursa apguves prasības

Programmā piedāvāts piemērs Matemātika II kursa beigšanas prasībām, kurā ir norādīti uzdevumi ar attiecīgo īpatsvaru kursa vērtējumā. Norādītais īpatsvars ir saistīts ar sasniedzamo rezultātu nozīmīgumu un mācību laiku, kas ir paredzēts to apguvei.

1. Skolēns sekmīgi veic visus plānotos summatīvās vērtēšanas pārbaudes darbus par katrā tematā apgūto, kuros skolēnam ir iespēja demonstrēt savas zināšanas, izpratni, prasmes un sniegumu to kompleksā lietojumā.
2. Skolēns sekmīgi veic patstāvīgo izpētes darbu “Matemātiskā modelēšana” (uzdevuma formulējumu skolēnam sk. 4. pielikuma 5. uzdevumā).

Ieteikums kursa gala vērtējuma struktūrai:

Prasības skolēnam kursa apguvei	Īpatsvars kursa vērtējumā (%)
Summatīvie vērtēšanas darbi katrā tematā	90
Patstāvīgs izpētes darbs “Matemātiskā modelēšana”	10

Ieteikumi mācību darba organizācijai

Satura starpdisciplinaritāte

Ievērojot skolēnu izvēlētos padziļinātos kursus, ieteikums mācību satura plānošanai izmantot starpdisciplināras saites, konsultēties un plānot darbu kopā ar kolēģi, kas māca citas mācību jomas padziļināto kursu. Starpdisciplināra satura piemēri uzskaitīti šajā tabulā:

Matemātika II kursa temats	Satura jautājums	Saistība ar citām mācību jomām
2. Varbūtība un statistika II	Diskrēta gadījuma lieluma varbūtības sadalījums.	Reālu datu (raksturo sociālās zinātnes, ekonomiku, bioloģiju) relatīvā biežuma (skaitlisko vērtību summa ir 1) sadalījumi.
	Diskrēta gadījuma lieluma sagaidāmā vērtība un standartnovirze.	Pamatota ienākumu un risku prognozēšana situācijās ar ekonomikas kontekstu.
3. Virknes un eksponentfunkcija	Eksponentfunkcijas lietojums reālu procesu aprakstīšanai.	Reāli procesi, sakarības starp lielumiem situācijās ar fizikas, ekonomikas, bioloģijas vai sociālo zinātņu kontekstu.
4. Pakāpes funkcija un logaritmiskā funkcija	Logaritmu, darbību ar logaritmiem lietojums.	Lielumu definīcijas, pieraksts vai formulas lielumu noteikšanai fizikā, astronomijā, ķīmijā, ģeogrāfijā, mūzikā, psiholoģijā.
	Sakarības attēlošana koordinātu sistēmā ar asīm x, lgy.	Sakarības starp lielumiem situācijās ar fizikas, bioloģijas vai citu mācību jomu kontekstu, kuru attēlošanai, raksturošanai praksē lieto logaritmiskās asis.
5. Daļveida funkcija un algebriskie pārveidojumi	Daļveida funkcijas lietojums reālu procesu aprakstīšanai.	Reāli procesi, sakarības starp lielumiem situācijās ar ekonomikas, fizikas vai citu mācību jomu kontekstu.
6. Atvasinājums un tā lietojums	Atvasinājuma fizikālā nozīme un tās lietojums.	Taisnvirziena kustības momentānais ātrums un paātrinājums, atdzišanas ātrums, mikroorganismu daudzuma izmaiņas ātrums u. tml.
7. Integrālis un tā lietojums	Nenoteiktā un noteiktā integrāļa lietojums.	Taisnvirziena kustības ceļš un ātrums, mehāniskais darbs (integrālis no funkcijas, kas apraksta spēku, kas pielikts, lai pārvietotu ķermeni).

Matemātika II kursa temats	Satura jautājums	Saistība ar citām mācību jomām
8. Trigonometrija II	Ciklisku/periodisku procesu matemātiskā modelēšana.	Reāli dati, kas raksturo cikliskus, periodiskus procesus situācijās ar ģeogrāfijas, astronomijas, bioloģijas vai citu mācību jomu kontekstiem
9. Analītiskā ģeometrija II	Vektoru un taisnes vienādojuma lietojums reālos kontekstos.	Taisnvirziena kustības aprakstīšana matemātiski.
10. Planimetrija II	Planimetrijas zināšanu lietojums citu mācību jomu kontekstos.	Nezināmo lielumu noteikšana situācijās, kas saistītas ar navigāciju (uz ūdens, uz zemes vai gaisā), ģeodēziskiem mērījumiem.

Stundu sadalījums/grafiks

Ievērojot tematā sasniedzamos rezultātus un patstāvīgajam izpētes darbam atvēlēto laiku, ieteicams šāds stundu skaita sadalījums pa tematiem. Piedāvātajam sadalījumam ir ieteikuma raksturs, skolotājs plāno stundu skaitu tematam, ievērojot savu pieredzi, skolēnu mācīšanās vajadzības.

Temats	1.	2	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	Patstāvīgais izpētes darbs
Stundu skaits	15–17	22–24	19–21	23–25	25–27	46–48	26–28	27–29	21–23	17–19	19–21	8–10

Matemātika II kursam paredzētais stundu skaits nedēļā (vismaz 8) nosaka blokstundu izmantošanu un tam atbilstošu mācīšanās plānošanu, piemēram, vienu no stundām atvēlot konkrētas kompleksas problēmas risināšanai, bet otru – dažādo risinājumu un iespējamo paņēmienu apspriešanai, vai arī pirmo stundu no "stundu pāra" plānot jaunu zināšanu konstruēšanai jeb patstāvīgai teorētiskā materiāla izpētei, bet otru stundu – iegūtās informācijas izvērtēšanai, daudzveidīgai prasmju vingrināšanai un lietošanai.

Dažādas mācību darba organizācijas formas un metodiskie ieteikumi

Ieteicams plānot atsevišķu attālinātas mācīšanās formu izmantošanu ar uzdevumu, ka skolēni patstāvīgi plāno un īsteno jaunas informācijas, t. sk. teorētisku zināšanu, ieguvi, izvērtēšanu, apkopošanu un prezentēšanu, pilnveidojot savas pašvadītas mācīšanās prasmes.

Kursa Matemātika II ietvaros katrs skolēns izstrādā patstāvīgu izpētes darbu "Matemātiskā modelēšana". Šī uzdevuma formulēšanu, vienošanos par vērtēšanas kritērijiem un izstrādes termiņiem ieteikums plānot pēc 8. temata "Trigonometrija II". Līdz tam 2. tematā skolēni iegūst zināšanas par regresijas taisni, plašākā nozīmē – priekšstatu par regresijas vienādojumu kā sakarības starp diviem mainīgiem lielumiem matemātisko modeli. Vēl vismaz divos tematos (3. un 8.) skolēni ir ieguvuši pieredzi reālu situāciju matemātiskajā modelēšanā skolotāja vadītā mācību procesā. Ir iegūta gan pietiekama pieredze, gan nepieciešamās zināšanas patstāvīga izpētes darba veikšanai, kam plānotas 8–12 mācību stundas (no 280). Ieteikums kopā ar skolēniem vienoties par šo stundu sadalījumu laikā, piemēram, vai tas ir kompakts process 1–1,5 nedēļas laikā, vai arī tās ir noteiktas nedēļas dienas ilgākā laikā posmā.

Sadarbībā ar skolas vadību būtiski plānot iespēju atsevišķas matemātikas stundas organizēt datorklasē, lai īstenotu plānoto skolēnam sasniedzamo rezultātu apguvi, kas saistīti ar informācijas pratību, darbu ar datiem, funkciju un telpisko ķermeņu īpašību izpēti, matemātisko modelēšanu u. tml.

Sākotnējo izpratni par jauniem, konceptuāli nozīmīgiem jēdzieniem, paņēmieniem, piemēram, matemātiskās indukcijas principu, diskrēta mainīga lieluma varbūtības sadalījumu un tā sagaidāmā vērtību, regresijas taisni, funkcijas robežu, līklīnijas trapeces laukumu, skolēni gūst darbībā, saistot jauno ar jau zināmo, patstāvīgi veicot izpēti, formulējot idejas un pieņēmumus.

Lai palīdzētu skolotājiem un skolēniem mērķtiecīgi plānot mācīšanos, noteiktas trīs sasniedzamo rezultātu grupas, kurām atbilstošu problēmu atrisināšana apliecina augstāko matemātiskās kompetences līmeni kursa noslēgumā – matemātikas lietojums jaunā situācijā, likumsakarību pētīšana un matemātiskā modelēšana (sk. tabulu "Vērtēšanas saturs Matemātika II kursā"). Saturs plānots tā, ka katrā tematā 1–2 no sasniedzamajiem rezultātiem atbilst kādai no šīm grupām. Katru no šiem sasniedzamajiem rezultātiem ilustrē atbilstoši uzdevumu piemēri (sk. izvērsto kursa saturu).

Mācību satura apguves norise

Kursa satura pārskats

Lai veidotu pārskatāmu un saturiski pēctecīgu saistību starp kursiem Matemātika I un Matemātika II, to saturs organizēts moduļos, piemēram, modulī “Analītiskā ģeometrija II” iekļauts saturs, kas pēctecīgi turpina moduļa “Analītiskā ģeometrija I” saturu, to papildinot un padziļinot.

Divi no kursa Matemātika II moduļiem – “Matemātiskā indukcija” un “Matemātiskās analīzes elementi” – nav tieši saistīti ar kādu moduli vai tematu no Matemātika I kursa.

Matemātika I kursa satura moduļi:

Analītiskā ģeometrija I	**Varbūtība un statistika I**	**Algebra I**	**Trigonometrija I**	**Algebra I**	**Ģeometrija I**

Matemātika II kursa satura moduļi:

Matemātiskā indukcija	**Varbūtība un statistika II**	**Algebra II**	**Matemātiskās analīzes elementi**	**Trigonometrija II**	**Analītiskā ģeometrija II**	**Ģeometrija II**

Matemātika II kursa satura organizēšana tematos

Matemātika II kursa trīs moduļi sadalīti 2–3 tematos, ko pamato gan satura apjoms, gan nepieciešamība nošķirt saturu, kas veidojas ap kādu būtisku konceptuālu jēdzienu.

Šī kursa saturs ir strukturēts šādos tematos:

		Algebra II			**Matemātiskās analīzes elementi**				**Ģeometrija II**	
1. Matemātiskā indukcija	2. Varbūtība un statistika II	3. Virknes un eksponentfunkcija	4. Pakāpes funkcija un logaritmiskā funkcija	5. Daļveida funkcija un algebriskie pārveidojumi	6. Atvasinājums un tā lietojums	7. Integrālis un tā lietojums	8. Trigonometrija II	9. Analītiskā ģeometrija II	10. Planimetrija	11. Stereometrija

Moduļu/tematu secības skaidrojums

Iepriekšējās zināšanas, kas nepieciešamas, lai apgūtu aktuālo saturu, piemēram, modulī "Algebra II" apgūst zināšanas, kas nepieciešamas moduļa "Matemātiskās analīzes elementi" apguvei; modulī "Varbūtība un statistika II" apgūst regresijas taisni, kas turpmāk palīdz pilnveidot izpratni un veidot pieredzi matemātiskajā modelēšanā, izmantojot eksponentfunkciju, daļveida funkciju, trigonometriskās funkcijas.

Iespējami plašs apgūto zināšanu lietojums turpmākā satura apguvē, piemēram, temats "Matemātiskā indukcija" ir plānots kā pirmais, lai apgūto pierādīšanas paņēmienu sistemātiski lietotu turpmākajā kursā; modulī "Matemātiskās analīzes elementi" apgūtās zināšanas lieto trigonometrijas un ģeometrijas kontekstos.

Saturiski ciešāk saistītu moduļu apguve plānota iespējami kompakti, lai nesadrumstalotu satura apguvi, palīdzētu skolēniem veidot saistību starp matemātikas apakšnozarēm, piemēram, secīgi plānots apgūt moduļus "Algebra II" un "Matemātiskās analīzes elementi" vai "Analītiskā ģeometrija II" un "Ģeometrija II".

Kompleksu matemātiska satura problēmu risināšana katra temata ietvaros veicina zināšanu noturīgumu un mazina nepieciešamību plānot atsevišķu satura jautājumu mehānisku atkārtošanu mācību gada beigās, piemēram, temata "Stereometrija" ietvaros plānoti uzdevumi, kuru atrisināšanai nepieciešams saistīt stereometrijas un matemātiskās analīzes zināšanas.

Šādai moduļu un tematu secībai ir ieteikuma raksturs, iespējams arī citāds moduļu vai tematu secības plānojums.

Patstāvīgs izpētes darbs "Matemātiskā modelēšana"

Uzsākot kursu, skolēni ir informēti par patstāvīgo izpētes darbu, tā statusu un nozīmi, izliekot gala vērtējumu kursā (sk. "Kursa apguves prasības").

Plānotie mācību laika resursi izpētes darba izstrādei ir 8–12 mācību stundas, sagaidāmais apjoms: 4–6 formāta A4 lapas.

Skolēns patstāvīgi formulē sev nozīmīgu vai saistošu izpētes jautājumu, plāno, veido un uzlabo situācijas matemātisko modeli, izstrādā tā atrisinājumu, formulē secinājumus, izvērtē iegūtos rezultātus, salīdzina ar informāciju citos avotos u. tml.

Skolotājs plāno izpētes darba izstrādi, ievērojot mācību procesa plānojumu kopumā un skolēnu individuālās iespējas un vajadzības.

Patstāvīgās izpētes darba "Matemātiskā modelēšana" ieteicamie vērtēšanas kritēriji iekļauti 4. pielikuma 5. uzdevumā.

Ja skolēns obligāti noteikto Projekta darba izstrādi kādā no padziļinātajiem kursiem izvēlas veikt matemātikā (kursa Matemātika II ietvaros), tad izpētes darbs "Matemātiskā modelēšana" vienlaikus var būt daļa no skolēna Projekta darba, kura ietvaros skolēns paplašina un padziļina izvēlēto tēmu, ievērojot Projekta darbam izvirzītos nosacījumus.

Nākamajā sadaļā izklāstīts izvērsts kursa saturs, katru tematu aprakstot pēc turpmāk norādītā temata ietvara struktūras parauga.

Programmā lietoto kodu skaidrojums pievienots 1. pielikumā.

Temata ietvara struktūras paraugs

1. Temata numurs un nosaukums	2. Temata numurs un nosaukums	3. Temata numurs un nosaukums	4. Temata numurs un nosaukums	5. Temata numurs un nosaukums

Temata apguvei ieteicamais laiks

Temata apguves mērķis – tematā plānoto skolēnam sasniedzamo rezultātu kopums un apguves pamatojums.

Temata izpētes jautājumi – dažādu veidu jautājumu piemēri, kas atspoguļo mācību satura dziļumu un plašumu.
Šī sadaļa ietver jautājumu piemērus, kas:

- aktualizē nepieciešamās zināšanas un veido dziļāku konceptuālu izpratni par temata saturu/jēdzieniem;
- rosina diskusiju par tematu, ir apskatāmi no vairākiem aspektiem un nav viennozīmīgi atbildami.

Sasniedzamais rezultāts	Uzdevumu piemēri
Skolēna spēja koordinēti lietot zināšanas, prasmes un ieradumus jaunās, neierastās situācijās. Iekavās norādīts kods no standarta attiecīgās mācību jomas plānoto skolēnam sasniedzamo rezultātu tabulas.	Sasniedzmos rezultātus raksturojoši uzdevumu piemēri

Temata apguves norise

Temata vienuma nosaukums	Tematā plānoto skolēnam sasniedzamo rezultātu apguvei nepieciešamās skolēna darbības un uzdevumu piemēri

Matemātika II kursa programmā katra temata ietvaram ir pievienotas arī sadaļas:

- **jēdzieni** – uzskaitīti tie jēdzieni, kurus apgūst vai par kuriem nozīmīgi paplašina izpratni konkrētajā tematā;
- **simboli un pieņemtie apzīmējumi** – uzskaitīti tie, kurus iepazīs vai lietos jaunā situācijā konkrētajā tematā;
- **sasniedzamais rezultāts un uzdevumu piemēri** – formulēti kompleksi skolēnam sasniedzamie rezultāti temata noslēgumā un uzdevumu piemēri, kuru atrisināšana apliecina sagaidāmo matemātiskās kompetences līmeni;
- **temata apguves norise** – aprakstošs mācību procesa plānojums satura blokos, no kuriem katrs raksturots ar skolēna darbībām, kas nozīmīgas rezultāta sasniegšanai, un ar uzdevumu piemēriem, kas izmantojami konkrēto skolēna darbību īstenošanai. Uzdevumu piemēri ilustrē sasniedzamajam rezultātam atbilstošu saturu, tā sarežģītības pakāpi un kognitīvo līmeni, bet kopumā tie neveido temata apguvei pietiekamu uzdevumu kopu. Lielāks skaits piemēru iekļauts tematos, kuros ir jauns saturs, piemēram, "Varbūtība un statistika II", "Atvasinājums un tā lietojums", "Integrālis un tā lietojums".

Izvērsts kursa saturs

1. Matemātiskā indukcija	2. Varbūtība un statistika II	Algebra II			Matemātiskās analīzes elementi		8. Trigonometrija II	9. Analītiskā ģeometrija II	Ģeometrija II	
		3. Virknes un eksponentfunkcija	4. Pakāpes funkcija un logaritmiskā funkcija	5. Daļveida funkcija un algebriskie pārveidojumi	6. Atvasinājums un tā lietojums	7. Integrālis un tā lietojums			10. Planimetrija	11. Stereometrija

1. Matemātiskā indukcija

Temata apguvei ieteicamais laiks: 15–17 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: apgūt un lietot matemātiskās indukcijas principu (MIP), lietot kombinatorikas formulas situācijas, aprakstot ar vienādojumu vai nevienādību, jaunās situācijās pētīt, formulēt un pierādīt likumsakarības matemātiskos objektos.

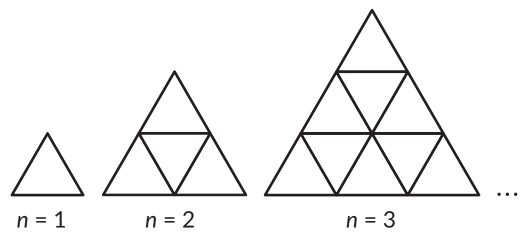
Temata izpētes jautājumi

Kā pierādīt, ka katru naudas daudzumu, kas lielāks nekā 8 centi, var samaksāt ar 2 un 5 centu monētām?

Kādas likumsakarības saskatāmas Paskāla trijstūrī (saistītas ar algebru, kombinatoriku, skaitļu teoriju, fraktāļu ģeometriju u. c.)?

Kā noteikt izteiksmes $(a+b)^n$ izvirzījumu katram naturālam n?

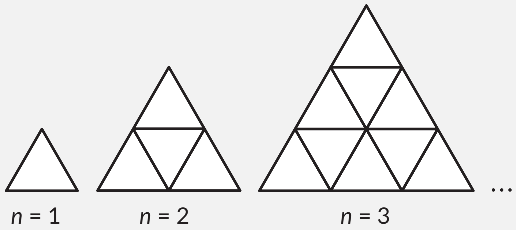
Sasniedzamie rezultāti

Sasniedzamais rezultāts	Uzdevumu piemēri
Skaidro ar MIP saistītos jēdzienus, simbolisko pierakstu, pierādīšanas gaitu un lieto MIP. (M.A.2.3.4.; M.A.5.1.1.)	1. Dota skaitļu virkne 1; 2; 4; 8; ..., kuras katrs nākamais loceklis ir divas reizes lielāks nekā iepriekšējais. Jāpierāda, ka katru divu pēc kārtas ņemtu virknes locekļu summa dalās ar 3. Vispirms apraksti risinājumu vārdiski, tad to pieraksti, lietojot simbolisko valodu. 2. Pierādi formulu permutāciju skaita noteikšanai, lietojot MIP. 3. Pierādi, ka $\left(4^n - 1\right)$ dalās ar 3, ja *n* naturāls skaitlis.
Lieto kombinatorikas formulas, situāciju aprakstot ar vienādojumu vai nevienādību naturālo skaitļu kopā. (M.2.1.1.; M.A.5.1.3.)	Plaknē novilka 6 paralēlas taisnes un pēc tam vēl novilka savā starpā paralēlas taisnes, kuras krusto sākumā novilktās, izveidojot 150 paralelogramus. Nosaki to taišņu skaitu, kas krusto 6 paralēlās taisnes.
Lieto Ņūtona binomu matemātiskos kontekstos. (M.A.2.1.2.; M.A.5.1.2.)	1. Nosaki iracionālo skaitļu skaitu binoma $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^{12}$ izvirzījumā. 2. Pierādi, ka $11^{10} - 1$ dalās ar 100.
Formulē likumsakarības Paskāla trijstūrī; atsevišķas no tām pierāda. (M.A.2.1.2.; M.A.2.3.1.; M.A.2.3.4.; M.A.5.1.2.)	Par slīpni sauksim jebkuru skaitļu novietojumu Paskāla trijstūrī, kas paralēls vieninieku novietojumam. Veic izpēti un konkrētos piemēros apraksti likumsakarību, kas ļauj noteikt "jebkuras slīpnes visu, sākot no 1, pēc kārtas galīgā skaitā ņemtu skaitļu summu". Formulē vispārinājumu.
Pēta, formulē un pierāda likumsakarības "figūru virknēs", vispārīgi uzdotās algebriskās izteiksmēs. (M.A.2.1.2.; M.A.2.3.4.)	Figūras tiek veidotas no vienāda garuma nogriežņiem pēc noteiktas likumsakarības (sk. attēlu). Ar $s(n)$ apzīmē vienādo nogriežņu skaitu, kas izmantoti *n* vērtībai atbilstošās figūras izveidei, piemēram, $s(1) = 3$; $s(2) = 9$. Izvēlies secību uzdevumu a) un b) risināšanai. a) Nosaki $s(10)$, parādi risinājumu. b) Uzraksti formulu $s(n)$ aprēķināšanai, paskaidro, kā to ieguvi. Pierādi, ka formula patiesa visiem naturāliem *n*. 
Jēdzieni: matemātiskās indukcijas princips, indukcijas bāze, induktīvais solis, Paskāla trijstūris, Ņūtona binoms, Ņūtona binoma izvirzījums.	
Simboli un pieņemtie apzīmējumi: $\sum$; $\vdots$.	

Temata apguves norise

Temata vienuma nosaukums	Skolēna darbības un uzdevumu piemēri
Pieredzes un zināšanu apzināšana, izvērtēšana	Apzina, apkopo līdzšinējo pierādīšanas pieredzi un paņēmienus. Atrod, nosauc piemērus formulām, apgalvojumiem, kuru patiesums nav stingri pierādīts. Secina par tipisku pazīmi – satur norādi “visām naturālām vērtībām”.
Ideja par MIP	Risina 3–4 uzdevumus ar vienkāršu matemātisku kontekstu, kas ļauj patstāvīgi nonākt pie idejas par MIP.
	Piemēri. 1. Pierādi, ka katru naudas daudzumu, kas lielāks nekā 8 centi, var samaksāt ar 2 un 5 centu monētām. 2. Pierādi, ka katru kvadrātu var sagriezt n ($n > 5$) kvadrātos.
Izpratnes par MIP veidošana, daudzveidīga vingrināšanās	Lasa pierādījumu, kurā izmantots MIP, komentē, jautā par neskaidro, saskata un raksturo galvenos soļus vai idejas.
	Piemērs. Lasi dotos pierādījumus, lietojot MIP. Īsi raksturo atšķirīgo no līdz šim lietotajiem pierādīšanas paņēmieniem, formulē jautājumus par neskaidro.
	Skaidro indukcijas bāzi, indukcijas soli (soļus), kā lietot simbolisko pierakstu. Izsaka idejas, atrod informāciju, kā vizuāli interpretēt pierādīšanas procesu ar MIP.
	Piemērs. Dota skaitļu virkne 1; 2; 4; 8; ..., kuras katrs nākamais loceklis ir divas reizes lielāks nekā iepriekšējais. Jāpierāda, ka katru divu pēc kārtas ņemtu virknes locekļu summa dalās ar 3. Vispirms apraksti risinājumu vārdiski, tad pieraksti, lietojot simbolisko valodu.
	Lieto MIP, pierādot identitātes, nevienādības, dalāmību.
	Piemēri. 1. Pierādi, ka $\left(4^n - 1\right)$ dalās ar 3, ja n naturāls skaitlis. 2. Pierādi nevienādību $2^n < n!$, ja $n \geq 4$.

Temata vienuma nosaukums	Skolēna darbības un uzdevumu piemēri
Kombinatorikas zināšanu un prasmju sistematizēšana, padziļināšana	Lieto MIP, pierādot galīgas kopas visu iespējamo apakškopu skaitu (2^n, ja kopas elementu skaits ir n), formulu permutāciju skaita aprēķināšanai. Pierāda kombināciju skaita īpašību $C_n^{n-k}=C_n^k$ ar interpretāciju metodi un $C_{n+1}^k=C_n^{k-1}+C_n^k$, izmantojot algebriskos pārveidojumus. Lieto kombināciju skaita īpašības. Modelē situāciju ar vienādojumu, nevienādību, lietojot kombinatorikas formulas. Piemēri. 1. Futbola turnīrā katra komanda sacentās ar katru vienu reizi. Kopā turnīrā tika aizvadītas 78 spēles. Cik komandu piedalījās turnīrā? 2. Plaknē novilka 6 paralēlas taisnes un pēc tam vēl novilka savā starpā paralēlas taisnes, kuras krustoja sākumā novilktās, izveidojot 150 paralelogramus. Nosaki to taišņu skaitu, kas krusto 6 dotās paralēlās taisnes.
Likumsakarību pētīšana Paskāla trijstūrī	Pastāsta, ko jau zina par Paskāla trijstūri, likumsakarībām tajā. Interpretē skaitļus Paskāla trijstūrī, izmantojot kombināciju skaitu, tā īpašības. Atrod uzziņu avotos un apkopo informāciju par likumsakarībām Paskāla trijstūrī. Atsevišķas atrastās vai izpētes rezultātā saskatītās likumsakarības pierāda, izvēloties paņēmienu. Piemēri. 1. Par slīpni sauksim jebkuru skaitļu novietojumu Paskāla trijstūrī, kas paralēls vieninieku novietojumam. Veic izpēti un apraksti likumsakarību, kas ļauj noteikt "jebkuras slīpnes visu, sākot no 1, pēc kārtas galīgā skaitā ņemtu skaitļu summu". Formulē vispārinājumu un pierādi tā patiesumu. 2. Veic izpēti un apraksti likumsakarību, kas pastāv starp skaitļiem, ko iegūst, Paskāla trijstūra vienā rindā novietotos skaitļus pierakstot kā vienu skaitli, piemēram, trešās rindas skaitļi veido četrciparu skaitli 1331, bet piektās rindas skaitļi veido skaitli 15101051. Izvērtē iespējas pierādīt formulēto likumsakarību.
Ņūtona binoma formulēšana un lietojums	Pēta pakāpju $(a+b)^n$ izvirzījumus. Formulē Ņūtona binoma formulu. Lieto Ņūtona binomu matemātiskos kontekstos – pierāda nevienādības, nosaka izvirzījuma locekļus ar noteiktām īpašībām, pierāda konkrēta izvirzījuma īpašības, sakarības starp tā locekļiem. Piemēri. 1. Uzraksti Ņūtona binoma izvirzījumu, ja $a=1$ un pieraksti rezultātu, lietojot summas simbolu Σ. 2. Aprēķini binoma $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^8$ izvirzījuma piekto saskaitāmo. 3. Nosaki iracionālo skaitļu skaitu binoma $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^{12}$ izvirzījumā. 4. Pierādi, ka $11^{10}-1$ dalās ar 100.

Temata vienuma nosaukums	Skolēna darbības un uzdevumu piemēri
Likumsakarību matemātiskos objektos pētīšana, formulēšana un pierādīšana	Pēta, formulē un pierāda likumsakarības vispārīgi uzdotās algebriskās izteiksmēs. Pēta, formulē, apraksta algebriski un pierāda likumsakarības "figūru virknēs", sakarības starp kārtas numuru un figūras lielumiem. Piemēri. 1. Dota izteiksme $(a+1)^n+(a-1)^n$, kur $n\in\mathbb{N}$. Izpēti, vai pastāv sakarība starp n un no nulles atšķirīgo locekļu skaitu, ja izteiksme ar atbilstošo n pārveidota par polinomu normālformā. Pamato savus spriedumus. 2. Figūras tiek veidotas no vienāda garuma nogriežņiem (sk. attēlu) pēc noteiktas likumsakarības. Ar $s(n)$ apzīmē vienādo nogriežņu skaitu, kas izmantoti n vērtībai atbilstošās figūras izveidei, piemēram, $s(1)=3$; $s(2)=9$. Izvēlies secību uzdevumu a) un b) risināšanai. a) Nosaki $s(10)$, parādi risinājumu. b) Uzraksti formulu $s(n)$ aprēķināšanai, paskaidro, kā to ieguvi. Pierādi, ka formula patiesa visiem naturāliem n.  Komentārs skolotājam. Viens no veidiem sakarības formulas noteikšanai – attēlo sakarību grafiski, izsaka pieņēmumu, ka sakarība ir kvadrātfunkcija, izveido un atrisina trīs lineāru vienādojumu sistēmu kvadrātfunkcijas formulas iegūšanai.

<table>
<tr><td rowspan="2">1. Matemātiskā indukcija</td><td rowspan="2">2. Varbūtība un statistika II</td><td colspan="3">Algebra II</td><td colspan="2">Matemātiskās analīzes elementi</td><td rowspan="2">8. Trigonometrija II</td><td rowspan="2">9. Analītiskā ģeometrija II</td><td colspan="2">Ģeometrija II</td></tr>
<tr><td>3. Virknes un eksponentfunkcija</td><td>4. Pakāpes funkcija un logaritmiskā funkcija</td><td>5. Daļveida funkcija un algebriskie pārveidojumi</td><td>6. Atvasinājums un tā lietojums</td><td>7. Integrālis un tā lietojums</td><td>10. Planimetrija</td><td>11. Stereometrija</td></tr>
</table>

2. Varbūtība un statistika II

Temata apguvei ieteicamais laiks: 22–24 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: sistematizēt zināšanas par notikumu varbūtību; raksturot datus, izmantojot gadījuma lieluma (diskrēta vai nepārtraukta) varbūtību sadalījumu, sagaidāmo vērtību un standartnovirzi, veidojot izpratni par varbūtību teorijas un statistikas saistību.

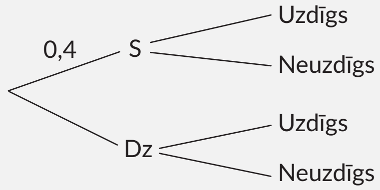
Temata izpētes jautājumi

Kas ir diskrēts gadījuma lielums un tā varbūtību sadalījums?
Kā gadījuma lielumu varbūtību sadalījumus izmanto risku, peļņas u. tml. prognozēšanai?
Vai varbūtība drīzāk raksturo kārtību vai nejaušību?

Sasniedzamie rezultāti

Sasniedzamais rezultāts	Uzdevumu piemēri
Lieto varbūtību teorijas teorēmas, pilnās varbūtības formulu, izpratni par nosacīto varbūtību. (M.A.5.2.1.; M.A.5.2.2.)	Viduslaiku loka šāvēju sacensībās piedalās 15 dalībnieki, no kuriem10 ir profesionāļi, trīs ir amatieri, bet pārējie ir iesācēji. Varbūtība, ka šāvējs trāpīs mērķī, attiecīgi ir 90 %, 60 % un 10 %. a) Aprēķini varbūtību, ka nejauši izvēlēts dalībnieks trāpīs mērķī. b) Nosaki varbūtību, ka šāvējs ir iesācējs, ja bulta ir trāpījusi mērķī.
Konkrētos piemēros skaidro un nosaka diskrēta gadījuma lieluma varbūtību sadalījumu, aprēķina nezināmos lielumus. (M.A.5.2.3.)	Apdrošināšanas sabiedrība (AS) piedāvā iegādāties 20000 eiro vērta safīra gredzena apdrošināšanas polisi. Līgums paredz: 1) ja gredzens tiek nozagts, AS apmaksā gredzena vērtību pilnībā; 2) ja tas tiek nozaudēts, AS īpašniekam maksās 8000 eiro. Iepriekšējā pieredze AS ļauj pieņemt, ka zādzības varbūtība ir 0,0025, bet nozaudēšanas varbūtība ir 0,03. a) Nosaki varbūtību, ka AS polises pircējam neko nemaksā. b) Aprēķini polises cenu, ja AS to noteikusi tādu, ka AS peļņas sagaidāmā vērtība ir 100 eiro par polisi.
Saskata, raksturo binomiālo sadalījumu, lieto Bernulli formulu, binomiāla sadalījuma sagaidāmās vērtības aprēķināšanas formulu. (M.A.5.2.4.)	Farmācijas firma ir sertificējusi un ieviesusi praksē jaunu diagnostikas testu, ar kuru, diagnosticējot inficētu pacientu, 90 % gadījumu testa rezultāts ir pozitīvs. Nosaki varbūtību, ka ar šo testu tiks atklāti 4 no 5 inficētiem pacientiem.
Saskata, raksturo normālsadalījumu, lieto vidējo vērtību, standartnovirzi un vienas, divu un trīs standartnoviržu likumu datu raksturošanai. (M.A.5.3.1.)	Noteiktas putnu sugas svars (masa) atbilst normālsadalījumam ar vidējo vērtību 0,8 kg un standartnovirzi 0,12 kg. Izmanto programmu *GeoGebra* un nosaki varbūtību, ka nejauši izvēlēta sugas putna svars (masa) ir no 0,74 kg līdz 0,95 kg.
Formulē pētāmo sakarību, veic izpēti, pamatoti izvēlas statistiskas lielumus datu raksturošanai, formulē pamatotus secinājumus. (M.A.5.3.3.; M.A.5.3.4.)	Izvēlies mainīgus lielumus, par kuriem tev ir iespēja iegūt datus, lai izpētītu un raksturotu saistību starp tiem. Pēti jautājumu, kas tev interesants, personiski nozīmīgs. Secinājumu formulēšanai un pamatošanai izvēlies tos attēlošanas veidus, vidējos un izkliedes mērus, kas parāda datiem raksturīgo. Datu apstrādei, statistisko lielumu noteikšanai izmanto IT iespējas. Izskati iespēju izmantot lietojumprogrammu *Tracker* (https://physlets.org/tracker/), lai iegūtu datus par kāda filmēta objekta kustību.
Jēdzieni: diskrēts (nepārtraukts) gadījuma lielums, diskrēta gadījuma lieluma varbūtību sadalījums, diskrēta gadījuma lieluma sagaidāmā vērtība, vienmērīgs sadalījums, Bernulli sadalījums, binomiālais sadalījums, normālsadalījums, Bernulli formula, variācijas koeficients.	
Simboli un pieņemtie apzīmējumi: $P(X=x_i)$; $\mu=E(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i$; $P(a<X<b)$; σ.	

Temata apguves norise

Temata vienuma nosaukums	Skolēna darbības un uzdevumu piemēri
Notikumu apvienojuma varbūtība	Aprēķina varbūtību $P(A \cup B)$, pamato, vai notikumi *A* un *B* ir nesavienojami/savienojami, skaidro formulas izvēli un izvēlēto paņēmienu risināšanai, piemēram, izmantojot darbību ar kopām vizuālo attēlojumu.
	Piemēri. 1. Aprēķini varbūtību ar spēļu kauliņu uzmest skaitli, kas dalās ar 2 vai dalās ar 5. 2. Aprēķini varbūtību uzmest vismaz vienu sešnieku, ja tiek mesti divi spēļu kauliņi (ar sešām skaldnēm).
	Situāciju aprakstā doto informāciju par notikumu biežumu apkopo iespējamību (krustenisko datu) tabulās, veido un aizpilda atbilstošu varbūtību tabulu, skaidro un pamato, kā veikt pašpārbaudi, saskaitot varbūtības "pa rindām un kolonnām".
	Piemērs. 100 ģimenes jūlijā vai augustā rezervēja biļetes ceļojumu aģentūrās, lai brīvdienās dotos uz Lietuvu, Igauniju vai Somiju. Augustā ceļojums rezervēts 59 ģimenēm. 19 no 35 ģimenēm, kas dodas uz Lietuvu, biļetes rezervēja jūlijā. 30 ģimenes rezervēja biļetes ceļojumam uz Somiju. Augustā biļetes ceļojumam uz Igauniju rezervēja 20 ģimenes. a) Apkopo informāciju biežuma tabulā. b) Nosaki, cik ģimenes ir rezervējušas biļetes, lai jūlijā dotos uz Somiju? c) Nosaki varbūtību, ka nejauši izvēlēta ģimene rezervējusi biļetes ceļojumam uz Igauniju jūlijā.
Pilnās varbūtības formula	Izmanto konkrētu piemēru, lai skaidrotu pilnās varbūtības formulu, ja pilnās nesavienojamo notikumu kopas elementu skaits ir 3, formulē vispārinājumu. Lieto pilnās varbūtības formulu. Pamato, vai notikumi veido pilnu nesavienojamu notikumu kopu, lieto varbūtību reizināšanas formulu neatkarīgiem notikumiem un atkarīgiem notikumiem. Aprēķina nosacīto varbūtību, izmantojot formulu $P(A\|B)=\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Ievēro un skaidro atšķirību starp $P(A\|B)$ un $P(B\|A)$. Risinājuma veidošanai un skaidrošanai izmanto izvēļu koku/diagrammu.
	Piemēri. 1. Sēklu paciņā ir 40 % sarkano sēklu un 60 % dzelteno sēklu. Varbūtība, ka sarkanā sēkla uzdīgs, ir 0,9, bet dzeltenā – 0,8. Nejauši izvēlas sēklu no paciņas. a) Aizpildi diagrammu, ierakstot trūkstošās varbūtības. b) Aprēķini varbūtību, ka izvēlētā sēkla ir sarkana un tā uzdīgs. c) Aprēķini varbūtību, ka izvēlētā sēkla izdīgs. d) Zinot, ka sēkla ir uzdīgusi, aprēķini varbūtību, ka tā ir sarkana.  2. Viduslaiku loka šāvēju sacensībās piedalās 15 dalībnieki, no kuriem 10 ir profesionāļi, 3 – amatieri, bet pārējie – iesācēji. Varbūtība, ka šāvējs trāpīs mērķī, attiecīgi ir 90 %, 60 % un 10%. a) Aprēķini varbūtību, ka nejauši izvēlēts dalībnieks trāpīs mērķī. b) Nosaki varbūtību, ka šāvējs ir iesācējs, ja bulta ir trāpījusi mērķī.

<table>
<tr><th>Temata vienuma nosaukums</th><th>Skolēna darbības un uzdevumu piemēri</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Varbūtību sadalījums</td><td>Risina uzdevumu, kas ļauj nonākt pie idejas par varbūtību sadalījumu, izmantojot zināšanas par biežumu, relatīvo biežumu un tā skaitlisko vērtību summu (1), izpratni par pilnu nesavienojamu notikumu kopu un šo notikumu varbūtību summu (1).

Secina par relatīvā biežuma summas ģeometrisko interpretāciju, ja histogrammas intervāla garums ir viena vienība.</td></tr>
<tr><td>Piemēri.
1. Mārketinga izpētes nolūkos tika aptaujātas 25 ģimenes par piena patēriņu (litros, noapaļojot līdz veseliem) vienas nedēļas laikā.
<table>
<tr><td>Piena patēriņš (litri)</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Biežums</td><td>2</td><td>5</td><td>9</td><td>5</td><td>3</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Relatīvais biežums</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Varbūtība</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
a) Aprēķini un attēlo tabulā piena patēriņa relatīvo biežumu. b) Attēlo tabulā X varbūtību sadalījumu, ja X ir piena litru skaits (līdz tuvākajam litram), ko ģimene patērē noteiktā nedēļā. c) Attēlo X varbūtību sadalījumu kā histogrammu ar vienu vienību platiem stabiņiem bez atstarpēm un to augstumu – relatīvo biežumu.
2. Apkopo datus par laiku, ko katrs tavas klases skolēns pavada no mājām līdz skolai un attēlo tos biežuma histogrammā. Aprēķini un attēlo histogrammā lielumu relatīvo biežumu. Savieto biežuma un relatīvā biežuma histogrammas un formulē secinājumus.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Diskrēta gadījuma lieluma varbūtību sadalījums</td><td>Iegūst informāciju uzziņu literatūrā un skaidro šādus jēdzienus: diskrēts gadījuma lielums, diskrēta gadījuma lieluma vērtības un iespējamo vērtību kopa, diskrēta gadījuma lieluma varbūtību sadalījums. Raksturo varbūtību sadalījuma attēlošanu tabulā un lietoto simboliku.

Izsaka domas, vai ir saskatāma analoģija starp diskrēta gadījuma lieluma varbūtību sadalījumu un funkciju.</td></tr>
<tr><td>Piemērs. Kārlim basketbola treniņš ir divas dienas nedēļā. 90 % gadījumu viņš apmeklē abus treniņus, 8 % gadījumu – vienu treniņu, bet 2 % gadījumu viņš neapmeklē nevienu treniņu. Raksturo lielumus un pieraksti tos, lietojot pieņemtos apzīmējumus X, x_i, p_i.</td></tr>
<tr><td>Piemēros ar praktisku vai matemātisku kontekstu skaidro, nosaka diskrēta gadījuma lieluma (iespējamo vērtību skaits ir galīgs) varbūtību sadalījumu, korekti lieto pieņemtos apzīmējumus.</td></tr>
<tr><td>Piemērs.
1. Paskaidro teorētiski un ar piemēru ilustrē diskrēta gadījuma lieluma varbūtību sadalījumu.
2. Urnā ir 6 baltas un 3 melnas bumbiņas. Vienu bumbiņu izņem un nosaka tās krāsu, pēc kā bumbiņu ievieto atpakaļ urnā. To atkārto 3 reizes. Nosaki varbūtību sadalījumu gadījuma lielumam X, kur X – melno bumbiņu skaits. Varbūtību sadalījumu attēlo tabulā un grafiski.</td></tr>
</table>

Temata vienuma nosaukums	Skolēna darbības un uzdevumu piemēri
	Nosaka nezināmo varbūtību $p_i = P(X = x_i)$, izmantojot sadalījuma pārējo varbūtību skaitliskās vērtības un to summu. Izsaka pieņēmumu par gadījuma lieluma varbūtību sadalījumu, piemēram, par īpašumā esošo transporta līdzekļu skaitu Latvijas iedzīvotājiem, iegūst datus un novērtē pieņēmuma atbilstību, izmantojot iegūtos datus.
Diskrēta gadījuma lieluma sagaidāmā vērtība	Aprēķina svērto aritmētisko vidējo. Konkrētos piemēros (uzdevumā “par 6 baltām un 3 melnām bumbiņām” u. tml.) izsaka idejas par diskrēta gadījuma lieluma vidējo vērtību, izmantojot varbūtību sadalījumu.
	Atrod informāciju un definē diskrēta gadījuma lieluma sagaidāmo vērtību. Saskata kopīgo diskrēta mainīga lieluma sagaidāmajai vērtībai ar svērto aritmētisko vidējo. Spriež induktīvi, veic ekvivalentus pārveidojumus, iegūst sagaidāmās vērtības aprēķināšanas formulu $E(x) = \sum_i x_i p_i$.
	Lieto diskrēta gadījuma lieluma sagaidāmās vērtības aprēķināšanas formulu praktiskos kontekstos par kvalitātes kontroli u. tml. Piemērs. Pārtikas preču veikals praksē ir noteicis, ka 95 % tomātu kastu nav bojātu tomātu, 2 % kastu ir 1 bojāts tomāts, 2 % kastu ir 2 bojāti tomāti un 1 % kastu ir 3 bojāti tomāti. Aprēķini sagaidāmo vērtību bojātu tomātu skaitam nejauši izvēlētā kastē.
	Vingrinās lietot sagaidāmās vērtības aprēķināšanas formulu ar nezināmo jebkurā pozīcijā. Piemēri. 1. Gaidstāves pasažieru* skaits, kas saņem vietu ikdienas reisā no Bostonas uz Ņujorku, ir gadījuma lielums X, kura varbūtību sadalījums dots tabulā. Nosaki sagaidāmo vērtību. Raksturo, vai un kā iegūtos rezultātus var izmantot aviosabiedrība, lai pamatoti plānotu savu darbību. * Pasažieri, kas iegādājušies biļetes, bet tiem jāgaida uz citu lidojumu, jo plānotajā lidojumā lidot gribētāju ir vairāk nekā vietu skaits lidmašīnā. 2. Tabulā dota informācija par diskrēta gadījuma lieluma X vērtībām un to varbūtību. Nosaki: a) k vērtību; b) gadījuma lieluma X sagaidāmo vērtību.

Tabula 1. piemēram:

$X = x_i$	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,30	0,25	0,20	0,15	0,05	0,05

Tabula 2. piemēram:

$X = x_i$	2	4	6
$P(X = x_i)$	0,4	k	$3k$

<table>
<tr><th>Temata vienuma nosaukums</th><th>Skolēna darbības un uzdevumu piemēri</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Diskrēta gadījuma lieluma sagaidāmā vērtība</td><td>3. Apdrošināšanas sabiedrība (AS) piedāvā iegādāties 20000 eiro vērta safīra gredzena apdrošināšanas polisi. Līgums paredz: 1) ja gredzens tiek nozagts, AS samaksā gredzena vērtību pilnībā; 2) ja tas tiek nozaudēts, AS īpašniekam maksās 8000 eiro. Iepriekšējā pieredze AS ļauj pieņemt, ka zādzības varbūtība ir 0,0025, bet nozaudēšanas varbūtība ir 0,03.
a) Nosaki varbūtību, ka AS polises pircējam neko nemaksā.
b) Aprēķini polises cenu, ja AS to noteikusi tādu, ka tās peļņas sagaidāmā vērtība ir 100 eiro par polisi.</td></tr>
<tr><td>Atrod diskrēta gadījuma lieluma varbūtību sadalījuma standartnovirzes aprēķināšanas formulu uzziņu avotos un lieto to uzdevumos ar reālu kontekstu. Skaidro iegūto rezultātu lietojumu praksē, lai plānotu, prognozētu saimniecisko darbību u. tml.</td></tr>
<tr><td>Piemērs. Laiks ar precizitāti līdz veselai minūtei (X), kas nepieciešams pilsētas autobusam visa maršruta veikšanai, ir parādīts varbūtību sadalījumā.
<table>
<tr><td>$X = x_i$</td><td>42</td><td>43</td><td>44</td><td>45</td><td>46</td><td>47</td></tr>
<tr><td>$P(X = x_i)$</td><td>0,10</td><td>0,2</td><td>0,3</td><td>0,25</td><td>0,09</td><td>0,06</td></tr>
</table>
a) Aprēķini X sagaidāmo vērtību $E(X)$ un standartnovirzi σ.
b) Nosaki laika intervālu, kādā autobuss parasti veic maršrutu $(E(X) \pm \sigma)$.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Binomiālais sadalījums</td><td>Konkrētos piemēros skaidro, kas ir neatkarīgi mēģinājumi. Risina 1–2 uzdevumus ar mērķi izvirzīt pieņēmumu par to, kā aprēķināt varbūtību tam, ka sērijā no n neatkarīgiem mēģinājumiem notikums A īstenojies m reižu (n – m reižu nav īstenojies).
Aplūkotajos piemēros varbūtību sadalījumu attēlo grafiski (taisnstūru platums ir 1 vienība). Saskata un raksturo kopīgo un atšķirīgo grafiskajos attēlos. Iegūst informāciju par sadalījuma nosaukuma izcelsmi (saistība ar Ņūtona binomu).
Piemērs. Distancē biatlonistam jāveic 3 šāvieni. Zināms, ka biatlonists trāpa mērķī ar varbūtību p (varbūtība netrāpīt ir $q = 1 - p$). Kāda varbūtība, ka trāpīs x_i šāvienos (iespējamās x_i vērtības ir 0, 1, 2 un 3)?</td></tr>
<tr><td>Formulē vispārinājumu – Bernulli formulu $P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. Lieto binomiālo sadalījumu un Bernulli formulu.</td></tr>
<tr><td>Piemēri.
1. Farmācijas firma ir atklājusi jaunu diagnostikas testu, kas 90 % gadījumu uzrāda pozitīvu rezultātu pacientam, kurš ir inficēts ar noteiktu slimību. Nosaki varbūtību, ka, diagnosticējot piecus inficētus pacientus, tiks atklāti četri.
2. Bioloģijas pārbaudes darbs sastāv no septiņiem jautājumiem ar pieciem atbilžu variantiem, no kuriem tikai viens ir pareizs. Lai pārbaudes darbs tiktu ieskaitīts, nepieciešamas vismaz četras pareizas atbildes. Anna nezina pareizo atbildi nevienam jautājumam, tāpēc atbildi katram jautājumam viņa izvēlas nejauši.
a) Nosaki varbūtību, ka Anna pareizi atbildēs uz četriem jautājumiem.
b) Nosaki varbūtību, ka Anna nokārtos bioloģijas pārbaudes darbu.</td></tr>
</table>

Temata vienuma nosaukums	Skolēna darbības un uzdevumu piemēri
Binomiālais sadalījums	Nosauc diskrēta gadījuma lielumu piemērus, kuru varbūtību sadalījums atbilst binomiālajam sadalījumam, nepieciešamo informāciju atrod uzziņu avotos. Spriež induktīvi, konkrētam vērtību skaitam nosaka un pamato sagaidāmās vērtības aprēķināšanas formulu binomiālam varbūtību sadalījumam, ja vērtību skaits ir 3. Formulē vispārinājumu $E(x)=np$, salīdzina ar informāciju uzziņu avotos.
	Piemērs. Pierādi – ja binomiālam varbūtību sadalījumam vērtību skaits ir 3, tad sagaidāmo vērtību aprēķina ar formulu $E(x)=3p$, kur p – labvēlīga notikuma iestāšanās varbūtība.
	Lieto binomiāla sadalījuma sagaidāmās vērtības aprēķināšanas formulu.
	Piemēri. 1. Spēles apraksts: “Katrā gājienā monēta tiek mesta 10 reizes. Ja cipars uzkrīt 4 reizes vai mazāk, spēlētājs *A* iegūst 2 punktus. Ja cipars parādās vairāk nekā 4 reizes, spēlētājs *B* iegūst 1 punktu.” Izmanto varbūtību sadalījumu, lai prognozētu uzvarētāju spēlē. 2. Zināms, ka 75 % no visiem pirkumiem noteiktā veikalā tiek veikti ar kredītkarti. Tiek apskatīti 10 nejauši izvēlēti pirkumi. Aprēķini: a) varbūtību, ka tieši septiņi pirkumi no izvēlētajiem 10 ir veikti ar kredītkarti; b) sagaidāmo vērtību pirkumu skaitam (no izvēlētajiem 10), kas veikti ar kredītkarti.
Citi varbūtību sadalījumi	Iegūst informāciju, veido priekšstatu par citiem diskrētiem varbūtību sadalījumiem – vienmērīgais, Bernulli, Puasona, hiperģeometriskais. Iegūst informāciju par Puasona un hiperģeometriskā sadalījuma lietojumu dažādās jomās.
Normālais sadalījums	Ar piemēriem ilustrē, atšķir un salīdzina nepārtrauktus gadījuma lielumus (tipiski raksturo dabas parādības, radības un procesus) no diskrētiem gadījuma lielumiem, raksturo atšķirības to grafiskajā attēlojumā (histogramma un līkne).
	Skaidro saistību starp binomiālo sadalījumu diskrētiem gadījuma lielumiem un normālo sadalījumu nepārtrauktiem gadījuma lielumiem. Dotai histogrammai piemeklē normālo sadalījumu (Gausa līkni), kas tai atbilst vislabāk, izmantojot IT rīkus (piemēram, aplikācija *GeoGebra*).

Temata vienuma nosaukums	Skolēna darbības un uzdevumu piemēri
Normālais sadalījums	Piemērs. Doti dati par preču iepakojuma masu (kg). Ievadi datus programmas *GeoGebra* izklājumlapā, izvēlies viena mainīgā analīzi, konstruē histogrammu, izvērtē, vai sadalījums atbilst normālsadalījumam. Atbilstības gadījumā attēlo normālsadalījuma līkni (izvēles “normalizēt”, “normālsadalījuma līkne”).

67,9	68,5	68,8	69,3	71,2	71,2	71,2	71,2	73,2	73,2	75,6
63,2	63,9	64,1	64,6	65,5	65,5	65,5	66,3	66,6	67,1	67,7
59,6	60,2	60,8	61,1	61,4	61,4	61,7	61,9	62,2	62,4	62,5
58,4	58,5	58,6	58,6	58,7	58,7	58,7	58,9	59,3	59,4	59,5
56,3	56,7	56,8	56,8	56,8	57,2	57,2	57,3	57,7	57,8	57,9
53,2	53,9	54	54,3	54,6	54,8	55,3	55,3	55,4	55,9	56
46,9	47,2	48,1	48,5	49,6	49,8	50,6	51,2	51,8	52,7	53,2

	Atpazīst normālsadalījuma līkni (zvana veida, simetriska pret virsotni) un skicē Gausa līkni, zinot vidējo vērtību un standartnovirzi. Raksturo dotus vai grafiski attēlotus normālsadalījuma datus, izmantojot vidējo vērtību, standartnovirzi un vienas, divu un trīs standartnoviržu likumu. Izmanto IT, piemēram, programmu *GeoGebra*, lai noteiktu normāli sadalīta nepārtraukta gadījuma lieluma varbūtību pie dotajām vidējām un standartnovirzes vērtībām.
	Piemēri. 1. Automātiskais kafijas automāts ir iestatīts kafijas izsniegšanai krūzēs. Var uzskatīt, ka kafijas daudzums, ko mašīna izmanto kafijas pagatavošanai katrā krūzē, atbilst normālsadalījumam ar vidējo vērtību 330 ml un standartnovirzi 6 ml. Izmanto programmu *GeoGebra* un nosaki varbūtību, ka vienas kafijas krūzes pagatavošanai izlietotais kafijas daudzums pārsniedz 327 ml. 2. Noteiktas putnu sugas svars (masa) atbilst normālsadalījuma ar vidējo vērtību 0,8 kg un standartnovirzi 0,12 kg. Izmanto programmu *GeoGebra* un nosaki varbūtību, ka nejauši izvēlēta sugas putna svars (masa) ir no 0,74 kg līdz 0,95 kg.

Temata vienuma nosaukums	Skolēna darbības un uzdevumu piemēri
Statistisko lielumu pamatota izvēle	Uzziņu literatūrā iegūst informāciju par variācijas koeficientu un to izmanto, lai noteiktu, kā vidējais aritmētiskais raksturo pētāmo datu kopu. Raksturo, salīdzina, konkrētajā gadījumā pamato vidējās vērtības un standartnovirzes vai mediānas un starpkvartiļu amplitūdas izmantošanu datu aprakstīšanai.
	Piemērs. Apkopo datus par savas skolas pēdējo 4–5 gadu rezultātiem matemātikas eksāmenā. Apraksti datus, izmantojot gan vidējās vērtības un standartnovirzes, gan mediānu un starpkvartiļu amplitūdu. Kurš lielumu pāris ļauj precīzāk raksturot datus?
	Iegūst un apkopo datus par diviem lielumiem, kas raksturo vienu objektu, piemēram, grāmatas cena un lappušu skaits, cilvēka auguma garums un svars. Attēlo datus grafiski, izmantojot IT, raksturo saistību starp lielumiem. Nosaka grafiskā attēlojuma punktu, kura koordinātas ir lielumu vidējās vērtības. Izsaka idejas un manuāli skicē taisni, kas iet caur šo punktu un visprecīzāk raksturo saistību starp lielumiem, uzraksta taisnes vienādojumu; pēc tam iegūst taisnes vienādojumu, izmantojot IT (izklājlapu sadaļā vai *GeoGebra*), iepazīst nosaukumus: regresijas taisne, regresijas līkne. Konkrētos piemēros lieto regresijas taisnes vienādojumu, lai pamatoti prognozētu lielumus.
	Piemērs. Nosaki regresijas taisnes vienādojumu, izmantojot dotos datus par klases skolēnu auguma garumu un svaru.
Datos balstīts pētījums	Piemērs. Izvēlies mainīgus lielumus, par kuriem tev ir iespēja iegūt datus ar mērķi izpētīt un raksturot saistību starp tiem. Pēti jautājumu, kas tev interesants, personiski nozīmīgs. Secinājumu formulēšanai un pamatošanai izvēlies tos attēlošanas veidus, vidējos un izkliedes mērus, kas parāda datiem raksturīgo. Datu apstrādei, statistisko lielumu noteikšanai izmanto IT iespējas. Izskati iespēju izmantot lietojumprogrammu *Tracker* (https://physlets.org/tracker/), lai iegūtu datus par kāda filmēta objekta kustību.

1. Matemātiskā indukcija	2. Varbūtība un statistika II	Algebra II			Matemātiskās analīzes elementi		8. Trigonometrija II	9. Analītiskā ģeometrija II	Ģeometrija II	
		3. Virknes un eksponentfunkcija	4. Pakāpes funkcija un logaritmiskā funkcija	5. Daļveida funkcija un algebriskie pārveidojumi	6. Atvasinājums un tā lietojums	7. Integrālis un tā lietojums			10. Planimetrija	11. Stereometrija

3. Virknes un eksponentfunkcija

Temata apguvei ieteicamais laiks: 19–21 mācību stunda.

Temata apguves mērķis: paplašināt zināšanas par virknēm, veidot izpratni par virknes robežu un skaitli *e*, padziļināt izpratni par matemātisko modelēšanu un eksponentfunkciju kā reālu procesu matemātisko modeli.

Temata izpētes jautājumi

Kā iegūst, definē skaitli *e*?
Vai bezgalīgi daudz saskaitāmo summa var būt galīgs skaitlis?
Vai eksistē reāli eksponenciāli procesi, kuros kāds lielums pieaug/samazinās neierobežoti?

Sasniedzamie rezultāti

Sasniedzamais rezultāts	Uzdevumu piemēri
Lieto MIP, pierādot aritmētiskās un ģeometriskās progresijas formulas, īpašības, rekurenti uzdotas virknes vispārīgā locekļa formulu, skaitļu virknes visu locekļu summu. (M.A.4.1.1.)	1. Pierādi, ka $1\cdot4+2\cdot7+3\cdot10+\ldots+n(3n+1)=n(n+1)^2$, $n\in\mathbb{N}$. 2. Izveido un pierādi virknes (a_n) vispārīgā locekļa formulu, ja dots, ka $a_1=1$ un $a_{n+1}=2a_n+3$, $n\in\mathbb{N}$.
Skaidro, nosaka virknes robežu, skaidro skaitļa *e* iegūšanu, pierāda un lieto virknes īpašības; zina un lieto bezgalīgi dilstošas ģeometriskās progresijas summas formulu. (M.A.4.1.2.; M.A.4.1.3.; M.A.3.1.1.)	1. Nosaki un pierādi virknes $x_n=\dfrac{n+2}{n+3}$ $(n\in\mathbb{N})$ monotonitāti. 2. Riņķī, kura rādiuss ir *R*, ievilkts kvadrāts; kvadrātā ievilkts riņķis, šai riņķī ievilkts kvadrāts utt. Noteikt visu riņķu laukumu summu un visu kvadrātu laukumu summu.
Zina, pierāda un lieto *n*-tās pakāpes sakņu, pakāpju ar racionālu kāpinātāju īpašības. (M.A.3.2.1.)	Izteiksmi uzraksti kā pakāpi vai pakāpju summu: a) $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}$; b) $\dfrac{x^2-x}{x-\sqrt{x}}$.
Analizē situāciju, formulē secinājumus, nosaka nezināmos lielumus, ja situāciju apraksta eksponentfunkcija. (M.A.2.1.1.)	Tvertnē ir 10 000 litru šķidruma. Laika momentā $t=0$ minūtes tiek atvērts krāns un šķidrums tek ārā no tvertnes. Šķidruma tilpumu *V* litri, kas paliek tvertnē pēc *t* minūtēm apraksta formula $V(t)=10000\cdot0{,}933^t$. a) Nosaki *V* vērtību pēc sešām minūtēm. b) Nosaki ar precizitāti līdz pilnām sekundēm, pēc cik ilga laika tvertnē palikušais šķidrums būs vienāds ar pusi no sākotnējā tilpuma. c) Tiek uzskatīts, ka tvertne ir tukša, ja 98 % šķidruma ir iztecējis. Aprēķini, pēc cik ilga laika tvertne būs tukša.
Veido situācijas matemātisko modeli, izmantojot dotus datus, formulē secinājumus. (M.A.2.2.1.)	Tabulā doti dati par pārdoto viedtālruņu skaitu pasaulē no 2008. līdz 2012. gadam (avots http://seekingalpha.com). Gads: 2008 – 1,7; 2009 – 3,8; 2010 – 8,8; 2011 – 18,6; 2012 – 35,3 (Skaits (miljoni)) a) Atrodi datus par laiku no 2013. līdz 2019. gadam (norādi informācijas avotu). b) Izmanto atbilstošus digitālos rīkus un attēlo datus grafiski, nosaki funkciju un tās formulu, kas iespējami precīzi apraksta pārdoto viedtālruņu skaita pieaugumu no 2008. līdz 2019. gadam. d) Formulē secinājumus, pamato ar datiem. Izvērtē iespējas pamatoti prognozēt.

Gads	2008	2009	2010	2011	2012
Skaits (miljoni)	1,7	3,8	8,8	18,6	35,3

Jēdzieni: virknes robeža, ierobežota virkne, monotonitāte, monotona virkne, skaitlis *e*, naturāllogaritms, bezgalīgi dilstoša ģeometriskā progresija.

Simboli un pieņemtie apzīmējumi: $lim_{n\to\infty}a_n$; *e*; lnx.

Temata apguves norise

Satura bloks	Skolēnu darbības un uzdevumu piemēri
Skaitļu virknes	Apzina, apkopo jau zināmo par skaitļu virknēm un to simbolisko pierakstu.
	Pierāda aritmētiskās progresijas un ģeometriskās progresijas n-tā locekļa, pirmo n locekļu summas formulas un īpašības, lietojot MIP.
	Lieto MIP, lai pierādītu dažādu virkņu pirmo n locekļu summu (summas izteiksme dota).
	Piemēri. 1. Pierādi, ka $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$, $n\in\mathbb{N}$. 2. Pierādi, ka $1\cdot4+2\cdot7+3\cdot10+\ldots+n(3n+1)=n(n+1)^2$, $n\in\mathbb{N}$.
	Salīdzina virkņu uzdošanas veidus, to izmantošanu, secina par nepieciešamību rekurenti uzdotai virknei noteikt un pierādīt vispārīgā locekļa formulu. Pierāda vispārīgā locekļa formulu rekurenti uzdotu virknei.
	Piemērs. Pierādi, ka virknes (a_n), kur $a_1=1$ un $a_{n+1}=a_n+8n$ vispārīgā locekļa formula ir $a_n=(2n-1)^2$, $n\in\mathbb{N}$.
	Spriež induktīvi, īsteno noteiktas stratēģijas pieņēmuma formulēšanai, formulē un pierāda ar MIP pieņēmumu par rekurenti uzdotas virknes vispārīgā locekļa formulu.
	Piemēri. 1. Izveido un pierādi virknes (a_n) vispārīgā locekļa formulu, ja dots, ka $a_1=1$ un $a_{n+1}=2a_n+3$, $n\in\mathbb{N}$. 2. Raksturo savu pieeju/stratēģiju, lai formulētu pieņēmumu par rekurenti uzdotas virknes vispārīgā locekļa formulu.

Satura bloks	Skolēnu darbības un uzdevumu piemēri
Virknes monotonitāte un robeža	Izsaka savas domas par jēdziena “virknes robeža” nozīmi, ilustrē ar piemēru. Nosaka robežu aprakstoši uzdotām skaitļu virknēm, izmantojot zināšanas par reālajiem skaitļiem.
	Piemēri. 1. Nosaki robežu virknei 0,3; 0,33; 0,333; 0,3333; … 2. Nosaki robežu virknei 2,16; 2,166; 2,1666; …
	Sprież, attēlo grafiski ar digitāliem rīkiem un formulē pieņēmumu par robežu monotonām virknēm, ja tās uzdotas ar vispārīgā locekļa formulu. Formulē vispārinājumus, piemēram, ja $0<a<1$ un $n\to\infty$, tad $a^n\to 0$. Lieto apzīmējumus *lim* vai $\to$.
	Piemēri. 1. $a_n=(0{,}1)^n$, kur $n\in\mathbb{N}$. 2. $a_n=\frac{6}{n}$, kur $n\in\mathbb{N}$. 3. $a_n=1+\frac{1}{n}$, kur $n\in\mathbb{N}$.
	Veido skaitļu virknes atbilstoši dotajiem nosacījumiem. Pierāda virknes monotonitāti algebriski vai lietojot MIP.
	Piemēri. 1. Uzraksti formulu bezgalīgai virknei, kas ir augoša un katrs virknes loceklis ir mazāks nekā 3. 2. Nosaki un pierādi, vai virkne $a_n=\frac{n+2}{n+3}$ ir augoša vai dilstoša $(n\in\mathbb{N})$. 3. Uzraksti formulu dilstošai ģeometriskai progresijai.
Bezgalīgi dilstoša ģeometriskā progresija	Definē bezgalīgi dilstošu ģeometrisko progresiju. Izsaka pieņēmumu par virknes $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ visu locekļu summu $(n\in\mathbb{N})$, ar IT nosakot summas skaitlisko vērtību konkrētām n vērtībām. Uzziņu avotos atrod informāciju par virknes b_n visu locekļu summu. Skaidro formulas vizuālo interpretāciju/pierādījumu.
	Lieto bezgalīgi dilstošas ģeometriskās progresijas summas formulu nezināmā lieluma aprēķināšanai ģeometriskos kontekstos.
	Piemērs. Riņķī, kura rādiuss ir *R*, ievilkts kvadrāts; kvadrātā ievilkts riņķis, šai riņķī ievilkts kvadrāts utt. Nosaki visu riņķu laukumu summu un visu kvadrātu laukumu summu.

Satura bloks	Skolēnu darbības un uzdevumu piemēri
Reālo skaitļu pieraksta formas	Nosaka skaitļu piederību dažādām reālo skaitļu kopas apakškopām. Apzina un apkopo reālo skaitļu dažādas pieraksta formas.
	Pierāda *n*-tās pakāpes sakņu, pakāpju ar racionālu kāpinātāju īpašības. Lieto pierādītās sakarības un algebriskos pārveidojumus vispārīgi uzdotu izteiksmju pārveidošanai (situācijās, kas aktuālas turpmākajā kursā).
	Piemēri. 1. Izteiksmi $\sqrt{0{,}5^x}\cdot\sqrt[3]{4^x}$ izsaki kā divnieka pakāpi. 2. Izteiksmes $a-2\sqrt{a}\sqrt{b}+b; a-x$ sadali reizinātājos; ja iespējams, tad ar dažādiem paņēmieniem. 3. Izteiksmi uzraksti kā pakāpi vai pakāpju summu: a) $\frac{\sqrt[3]{x}}{x}$; b) $\frac{x^2-x}{x-\sqrt{x}}$.
Skaitlis *e* un eksponentfunkcija	Uzziņu literatūrā iegūst un dalās ar informāciju par iracionālu skaitli *e* un tā noteikšanu.
	Veic aprēķinus, lietojot izklājlapas, un raksturo skaitli *e* kā virknes $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ robežu, ja $n\to+\infty$. Definē naturāllogaritmu, vingrinās noteikt tā precīzo vai aptuveno vērtību, t. sk. ar digitāliem rīkiem.
	Iegūst informāciju par konkrētām eksponentfunkcijām kā reālu procesu matemātiskajiem modeļiem. Secina, ka, modelējot reālus procesus, eksponentfunkciju bieži pieraksta ar bāzi *e*. Meklē informāciju, lai iegūtu tam skaidrojumu. Pierāda, ka šādu bāzes pāreju var veikt vienmēr.
	Nosaka nezināmos lielumus, izmantojot eksponentfunkciju kā situācijas matemātisko modeli, formulē un pamato spriedumus, aprēķinos izmanto kalkulatoru, skaidro precizitāti, ar kādu veicami aprēķini.
	Piemēri. 1. Iekārtas vērtību *N* (EUR) apraksta funkcija $N(t)=500\cdot0{,}6^t$, kur *t* – iekārtas ekspluatācijas laiks (gados). Aprēķini jaunas iekārtas (nav bijusi ekspluatācijā) vērtību. 2. Sakarību starp aizvadīto laiku *t* (stundās), kopš pacients lietojis pirmo zāļu devu, un zāļu daudzumu (miligramos) $M(t)$ pacienta asinsritē modelē funkcija $M(t)=20\cdot e^{-0{,}8t}$. Pēc cik ilga laika zāļu daudzums pacienta asinsritē būs 1 mg? 3. Tvertnē ir 10 000 litru šķidruma. Laika momentā $t=0$ minūtes tiek atvērts krāns un šķidrums tek ārā no tvertnes. Šķidruma tilpumu *V* litri, kas paliek tvertnē pēc *t* minūtēm apraksta formula $V(t)=10000\cdot0{,}933^t$. a) Nosaki *V* vērtību pēc 6 minūtēm. b) Nosaki ar precizitāti līdz pilnām sekundēm, pēc cik ilga laika tvertnē palikušais šķidrums būs vienāds ar pusi no sākotnējā tilpuma. c) Tiek uzskatīts, ka tvertne ir tukša, ja 98 % šķidruma ir iztecējis. Aprēķini, pēc cik ilga laika tvertne būs tukša.

<table>
<tr><th>Satura bloks</th><th>Skolēnu darbības un uzdevumu piemēri</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Skaitlis e un eksponentfunkcija</td><td>Izmanto uzdevuma tekstā/situācijas aprakstā doto informāciju un uzraksta eksponentfunkcijas formulu.</td></tr>
<tr><td>Piemērs. Viedtālrunis, kurš jauns maksā 600 EUR, katru gadu zaudē 25 % no savas vērtības. Apraksti viedtālruņa vērtību kā funkciju $V(t)$, kur t gadu skaits kopš pirkuma.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Matemātiskā modelēšana</td><td>Diskutē par jautājumu “Vai eksistē reāli eksponenciāli procesi, kuros kāds lielums pieaug/samazinās neierobežoti?”.</td></tr>
<tr><td>Izsaka idejas par reāliem procesiem, sakarībām starp lielumiem, kuru matemātiskais modelis varētu būt eksponentfunkcija. Iegūst, t. sk. izmantojot brīvi pieejamos interneta resursus, un apkopo datus (lielumu skaitliskās vērtības) par kādu skolotāja ieteiktu vai kopīgi izvēlētu reālu procesu. Attēlo iegūtos datus koordinātu plaknē un izmanto piemērotas lietotnes, lai noteiktu formulas funkcijām, kas tuvināti, bet iespējami precīzi aprakstītu sakarību starp lielumiem. Secina par iespējām izmantot izklājlapās iebūvētos rīkus, lai noteiktu funkciju, kura ir sakarības visprecīzākais matemātiskais modelis. Izvērtē iespējas izmantot iegūto funkciju, lai formulētu pamatotas prognozes, raksturo citu faktoru iespējamo ietekmi.</td></tr>
<tr><td>Piemērs. Tabulā doti dati par pārdoto viedtālruņu skaitu pasaulē no 2008. līdz 2012. gadam (avots http://seekingalpha.com).
<table>
<tr><td>Gads</td><td>2008</td><td>2009</td><td>2010</td><td>2011</td><td>2012</td></tr>
<tr><td>Skaits (miljoni)</td><td>1,7</td><td>3,8</td><td>8,8</td><td>18,6</td><td>35,3</td></tr>
</table>
a) Atrodi datus par laiku no 2013. līdz 2019. gadam (norādi informācijas avotu).
b) Izmanto atbilstošus digitālos rīkus un attēlo datus grafiski, nosaki funkciju un tās formulu, kas iespējami precīzi apraksta pārdoto viedtālruņu skaita pieaugumu laikā no 2008. līdz 2019. gadam.
c) Formulē secinājumus, pamato ar datiem. Izvērtē iespējas pamatoti prognozēt.</td></tr>
</table>

1. Matemātiskā indukcija	2. Varbūtība un statis-tika II	Algebra II			Matemātiskās analīzes elementi		8. Trigono-metrija II	9. Analītiskā ģeometrija II	Ģeometrija II	
		3. Virknes un eksponent-funkcija	4. Pakāpes funkcija un logaritmiskā funkcija	5. Daļveida funkcija un algebriskie pārveidojumi	6. Atvasinā-jums un tā lietojums	7. Integrālis un tā lieto-jums			10. Plani-metrija	11. Stereo-metrija

4. Pakāpes funkcija un logaritmiskā funkcija

Temata apguvei ieteicamais laiks: 23–25 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: veidot izpratni par inverso funkciju, definēt pakāpes funkciju un logaritmisko funkciju, pētīt un lietot to īpašības kompleksu problēmu atrisināšanai.

Temata izpētes jautājumi

Kas ir dotajai funkcijai inversā funkcija, un kā to noteikt?
Kā mainās pakāpes funkcijas $y = x^n$ īpašības atkarībā no racionālā kāpinātāja n vērtībām?
Vai logaritmu lietojums dažādās jomās (akustika, astronomija u. tml.) atvieglo vai sarežģī darbu ar skaitlisko informāciju?

Sasniedzamie rezultāti

<table>
<tr><th>Sasniedzamais rezultāts</th><th>Uzdevumu piemēri</th></tr>
<tr><td>Skaidro, kas ir viennozīmīga atbilstība, inversā funkcija, lieto zināšanas par inverso funkciju matemātiskos kontekstos. (M.A.4.2.2.; M.A.2.1.2.)</td><td>1. Nosauc piemērus funkcijām, kas ir/nav viennozīmīga atbilstība; definē viennozīmīgu atbilstību.
2. Pierādi, ka funkcijai $y=x^2-2x$ intervālā [0; 3] neeksistē inversā funkcija, bet intervālā [−2; 0] eksistē inversā funkcija.</td></tr>
<tr><td>Lieto pakāpes funkcijas ($f(x)=x^n; n\in\mathbb{Q}$) īpašības matemātiskos kontekstos. (M.A.4.2.3.)</td><td>Salīdzini $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{2}{3}}$ nenegatīvām *a* vērtībām.</td></tr>
<tr><td>Zina, kas ir logaritms; lieto logaritma definīciju, logaritmu īpašības, logaritmiskās funkcijas īpašības matemātikas un citu jomu kontekstos. (M.A.3.2.1.; M.A.4.2.4.; M.A.4.4.4.)</td><td>1. Izsaki $\log_2 20$, ja $\lg 2=a$.
2. Atrisini nevienādību $\log_2(3-x)<-1$.
3. Izmanto izklājlapas un attēlo tabulā doto sakarību koordinātu plaknē:
a) ar asīm x, y; b) ar asīm $x, \lg y$. Salīdzini iespējas nolasīt informāciju no grafikiem, lai raksturotu sakarību starp lielumiem.
<table><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>y</td><td>10</td><td>100</td><td>1000</td><td>10 000</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Skaidro, atrisina logaritmisku vienādojumu, lietojot logaritma definīciju, īpašības, vienādojumu atrisināšanas vispārīgos paņēmienus. (M.A.4.5.1.; M.A.4.5.3.; M.A.2.1.3.; M.A.4.5.6.)</td><td>1. Atrisini vienādojumu $\log_3(3^x-6)=x-1$, raksturo lietotās zināšanas.
2. Izskati divu vienādojumu dotos atrisinājumus un raksturo kopīgo un atšķirīgo lietotajos paņēmienos. $\sqrt{x-3}=x-5$; $x^{\lg x}=100x$</td></tr>
<tr><td>Analizē situāciju, formulē secinājumus, nosaka nezināmos lielumus, ja situāciju apraksta logaritmiskā funkcija. (M.A.2.1.1.; M.A.4.2.4.)</td><td>Skaņai ar intensitāti $I\left(\frac{W}{m^2}\right)$ skaļumu *L* (mēra decibelos) var aprakstīt kā funkciju $L(I)=10\lg\frac{I}{I_0}$, kur $I_0=10^{-12}\left(\frac{W}{m^2}\right)$ ir tikko dzirdamas skaņas intensitāte. Kā izmainās skaņas skaļums ierakstu studijā, ja mūziķis skaņas intensitāti dubulto?</td></tr>
<tr><td>Pēta, formulē un pamato sakarības algebriskos modeļos, lietojot pakāpes funkcijas īpašības. (M.A.2.1.2.; M.A.4.2.3.)</td><td>Izpēti, nosaki un pamato vienādojuma $x^n=nx$ sakņu skaitu atkarībā no parametra *n* vērtības, ja *n* ir vesels, no nulles atšķirīgs skaitlis.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Jēdzieni: viennozīmīga atbilstība, inversā funkcija, pakāpes funkcija ar racionālu kāpinātāju, iracionāls vienādojums, logaritmiskā funkcija, logaritmisks vienādojums/nevienādība, funkcijas robeža, asimptota.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Simboli un pieņemtie apzīmējumi: $f^{-1}(x)$; $\lim\limits_{x\to a} f(x)$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.</td></tr>
</table>

Temata apguves norise

Temata vienuma nosaukums	Skolēna darbības un uzdevumu piemēri
Inversā funkcija	Iegūst informāciju uzziņu avotos, skaidro jēdzienu “viennozīmīga atbilstība”, nosauc pazīstamas funkcijas, kas ir vai nav viennozīmīga atbilstība.
	Definē inverso funkciju un nosaka lineāras funkcijas inverso funkciju, secina par funkcijas un tai inversās funkcijas novietojumu koordinātu plaknē.
	Skaidro un pamato inversās funkcijas eksistenci kvadrātfunkcijai, skaidro, kā sašaurināt dotās kvadrātfunkcijas definīcijas kopu, lai iegūtu viennozīmīgu atbilstību. Piemērs. Pierādi, ka funkcijai $y=x^2-2x$ intervālā [0; 3] neeksistē inversā funkcija, bet intervālā [−2; 0] eksistē inversā funkcija.
	Lieto zināšanas par inverso funkciju matemātiskos kontekstos. Piemērs. Ar kādām parametru *a* un *b* vērtībām funkcija $y=ax+b$ sakrīt ar savu inverso funkciju?
	Apkopo pieredzi, iegūst informāciju uzziņu avotos un salīdzina inverso funkciju lietojumu matemātikā un citās jomās, piemēram, ekonomikā un fizikā.
Pakāpes funkcija	Pēta, formulē īpašības pakāpes funkcijai $f(x)=x^n$, ja kāpinātājs ir vesels skaitlis; raksturo to grafiku novietojumu koordinātu plaknē atkarībā no kāpinātāja vērtības, formulē vispārinājumus. Iepazīst un lieto jēdzienus “funkcijas robeža” un “asimptota”.
	Nosaka funkciju $y=x^3$, $y=x^4$ inversās funkcijas, izsaka tās kā pakāpes funkcijas ar racionālu kāpinātāju $y=x^{\frac{1}{3}}$, $y=x^{\frac{1}{4}}$. Pēta un formulē īpašības pakāpes funkcijai $y=x^n$, ja kāpinātājs ir racionāls skaitlis, pamato savus spriedumus.
	Lieto zināšanas par pakāpju funkcijas īpašībām matemātiskos kontekstos. Piemēri. 1. Salīdzini $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{2}{3}}$ nenegatīvām *a* vērtībām. 2. Atrisini vienādojumu $\sqrt[3]{x}=x$. 3. Nosaki un pamato vienādojuma $x^{-2}=4-x^2$ sakņu skaitu.
	Lieto zināšanas par pakāpju funkcijas īpašībām, lai atrisinātu kompleksu matemātisku problēmu. Piemērs. Nosaki un pamato vienādojuma $x^n=nx$ sakņu skaitu atkarībā no parametra *n* vērtības, ja *n* ir vesels, no nulles atšķirīgs skaitlis.

<table>
<tr><th>Temata vienuma nosaukums</th><th>Skolēna darbības un uzdevumu piemēri</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Logaritma īpašības</td><td>Apkopo jau zināmo par logaritmiem. Pierāda logaritmu īpašības, izmantojot pakāpes īpašības un logaritma definīciju. Pamato bāzes pārejas formulu un lieto to logaritma vērtības noteikšanai ar kalkulatoru, t. sk. izmantojot naturāllogaritmu un decimāllogaritmu.</td></tr>
<tr><td>Lieto logaritmu īpašības matemātiskos un citu jomu kontekstos.</td></tr>
<tr><td>Piemēri.
1. Izsaki $\log_2 20$, ja $\lg 2 = a$. Pastāsti, kā nonāci pie atrisinājuma.
2. Skaņai, kuras intensitāte ir $I\left(\frac{W}{m^2}\right)$, skaņas skaļumu L (mēra decibelos) var aprakstīt kā funkciju $L(I) = 10\lg\frac{I}{I_0}$, kur $I_0 = 10^{-12}\left(\frac{W}{m^2}\right)$ ir tikko dzirdamas skaņas intensitāte. Kā izmainījās skaņas skaļums, ja mūziķis ierakstu studijā skaņas intensitāti dubultoja?</td></tr>
<tr><td>Uzziņu avotos atrod informāciju par logaritmu lietojumu dažādās jomās. Diskutē par jautājumu “Vai logaritmu lietojums dažādās jomās (akustika, astronomija, ģeogrāfija u. tml.) atvieglo vai sarežģī darbu ar skaitlisko informāciju?”.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Situācijas izpēte</td><td>Konkrētos piemēros pēta un raksturo logaritmiskās skalas izmantošanas iespējas un priekšrocības, ja grafiski attēlo sakarības, kas mainās ļoti strauji vai ļoti lēni.</td></tr>
<tr><td>Piemērs. Uzdevumu a) un b) izpildei izmanto izklājlapas.
a) Attēlo tabulā doto sakarību koordinātu plaknē ar asīm x, y.
b) Attēlo tabulā doto sakarību koordinātu plaknē ar asīm x, lgy.
c) Salīdzini iespējas nolasīt informāciju no grafikiem, raksturot sakarību starp lielumiem.
<table><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>y</td><td>10</td><td>100</td><td>1000</td><td>10000</td></tr></table></td></tr>
<tr><td rowspan="4">Logaritmiskā funkcija</td><td>Definē logaritmisko funkciju $y = \log_a x$, t. sk. ar bāzi e, kā eksponentfunkcijas inverso funkciju, zīmē tās grafiku, t. sk. izmantojot digitālos rīkus, nosaka un pamato īpašības, asimptotu un funkcijas robežu.</td></tr>
<tr><td>Skaidro un pamato funkcijas $y = c \cdot \log_a(ax + b) + d$ īpašības, raksturīgos lielumus, tās grafika novietojumu koordinātu plaknē.</td></tr>
<tr><td>Piemērs. Nosaki funkcijas $y = \log_3(x+3) - 4$ krustpunktus ar asīm un uzskicē tās grafiku.</td></tr>
<tr><td>Lieto logaritmiskās funkcijas un tās grafika īpašības un formulē spriedumus matemātiskos kontekstos.</td></tr>
</table>

Temata vienuma nosaukums	Skolēna darbības un uzdevumu piemēri
Logaritmiskā funkcija	Piemēri. 1. Nosaki divu blakusesošu veselu skaitļu intervālu, kuram pieder skaitlis ln10. 2. Nosaki funkcijas $y=\log_{0,5}(2x-5)$ lielāko un mazāko vērtību intervālā [4; 5]. 3. Nosaki vienādojuma $1-x=\|\log_3 x\|$ sakņu skaitu. 4. Atrisini nevienādību $\log_2(x+4)<0$.
Logaritmiskie vienādojumi un nevienādības	Raksturo savas zināšanas par vienādojumu atrisināšanu, par to atrisināšanas vispārīgajiem paņēmieniem. Risina vienādojumu jaunā situācijā.
	Piemēri. Atrisini vienādojumu: a) $\log_2(1-3x)=4$; b) $\log_{x-2}9=2$; c) $\log_2 \lg x=0$.
	Formulē un pamato algoritmus logaritmisku vienādojumu atrisināšanai, izmantojot logaritma definīciju. Secina, kādās situācijās definīcijas kopas nosacījums izpildās vienmēr, kādās situācijās jāaplūko papildu nosacījumi jeb jāveido ar doto vienādojumu ekvivalenta sistēma. Vingrinās algoritmu lietojumā.
	Konkrētos piemēros spriež un secina, ka logaritmu īpašību lietojums nenodrošina pārveidojumu ekvivalenci, dažkārt definīcijas kopa var sašaurināties vai paplašināties.
	Piemērs. Atrisini vienādojumu $2\log_2(x-3)^2=4$.
	Konkrētos piemēros spriež un secina par vispārīgo paņēmienu lietojumu.
	Piemēri. Atrisini vienādojumu un raksturo lietotās zināšanas: a) $\log_3^2 x+2\log_3(9x)=3$; b) $\log_2 x=\frac{2}{x}$; c) $\log_3(3^x-6)=x-1$; d) $(x^2-4)\log_3(1-3x-x^2)=0$
	Vingrinās lietot logaritmu īpašības un vienādojumu risināšanas vispārīgos paņēmienus logaritmisku vienādojumu atrisināšanai. Skaidro pārveidojumu ekvivalenci.
	Lasa un analizē dotus vienādojumu (iracionāls un logaritmisks) atrisinājumus jaunā situācijā, izvērtē pārveidojumu (abas vienādojuma puses kāpina kvadrātā, abas vienādojuma puses logaritmē) ekvivalenci, raksturo kopīgo un atšķirīgo tajos. Lieto neekvivalentus pārveidojumus iracionālu un logaritmisku vienādojumu atrisināšanai.

Temata vienuma nosaukums	Skolēna darbības un uzdevumu piemēri
Logaritmiskie vienādojumi un nevienādības	Piemēri. 1. Izskati divu vienādojumu dotos atrisinājumus un raksturo kopīgo un atšķirīgo lietotajos paņēmienos. $\sqrt{x-3}=x-5$; $x^{\lg x}=100x$. 2. Atrisini vienādojumu: a) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}=x$; b) $x^{2+\log_2 x}=8$.
	Skaidro risinājumu un risina vienkāršus logaritmiskos vienādojumus ar parametru.
	Piemērs. $\log_2(x-3)=\log_2 a$.
	Spriež induktīvi un deduktīvi, risina vienkāršu logaritmisku nevienādību, izvēloties sev piemērotu pieeju/paņēmienu; pamato spriedumus, izmantojot logaritmiskās funkcijas īpašības. Formulē algoritmus un vingrinās to lietojumā.
	Piemēri. 1. $\log_2 x<3$. 2. $\log_{\frac{1}{3}} x>-1$.

		Algebra II			Matemātiskās analīzes elementi				Ģeometrija II	
1. Matemātiskā indukcija	2. Varbūtība un statis-tika II	3. Virknes un eksponent-funkcija	4. Pakāpes funkcija un logaritmiskā funkcija	5. Daļveida funkcija un algebriskie pārveidojumi	6. Atvasinā-jums un tā lietojums	7. Integrālis un tā lieto-jums	8. Trigono-metrija II	9. Analītiskā ģeometrija II	10. Plani-metrija	11. Stereo-metrija

5. Daļveida funkcija un algebriskie pārveidojumi

Temata apguvei ieteicamais laiks: 25–27 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: pilnveidot turpmākā satura apguvei nepieciešamās algebrisko pārveidojumu prasmes, lietot daļveida funkciju un daļveida racionālus vienādojumus praktiskos kontekstos, pētīt un pierādīt likumsakarības viena argumenta polinomos, veidot sākotnējo priekšstatu par kompleksajiem skaitļiem.

Temata izpētes jautājumi

Vai eksistē algoritms polinoma dalījumam ar polinomu?
Kā daļveida funkcijas formulas pierakstīšana citādi palīdz noteikt funkcijas un tās grafika īpašības?
Vai reālie skaitļi ir “reālāki” par kompleksajiem skaitļiem?

Sasniedzamie rezultāti

Sasniedzamais rezultāts	Uzdevumu piemēri
Skaidro, formulē un lieto algoritmu daļveida funkcijas grafika uzzīmēšanai, aprakstoši skaidro un nosaka daļveida funkcijas robežas, grafika asimptotas. (M.A.2.1.2.; M.A.4.3.1.)	1. Apraksti algoritmu daļveida funkcijas $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ grafika uzzīmēšanai. 2. Nosaki funkcijas $y=\frac{2x-1}{x+2}$ grafika asimptotas un funkcijas robežas, uzzīmē funkcijas grafiku.
Nosaka nezināmos lielumus, ja situāciju apraksta daļveida funkcija; veido un lieto daļveida funkciju praktiskos, citu jomu kontekstos. (M.A.2.2.1.)	Lielā maisīšanas tvertnē sākotnēji ir 200 *l* ūdens, kurā samaisīti 40 kg cukura. Atverot pieplūdes krānu, vienas minūtes laikā tvertnē ieplūst 15 *l* ūdens, vienlaicīgi katras minūtes laikā maisījumam tiek pievienoti 2 kg cukura. a) Uzraksti formulu funkcijai $c(t)$, kur $c\left(\frac{kg}{l}\right)$ – cukura koncentrācija un t – laiks minūtēs; b) izmanto IT un uzzīmē funkcijas $c(t)$ grafiku, ja $t\in[0;\,10]$, lai iespējami uzskatāmi parādītu cukura koncentrācijas izmaiņu laikā; c) raksturo koncentrācijas izmaiņu.
Lieto daļveida racionālu vienādojumu, daļveida racionālu nevienādību situāciju uzdevumu atrisināšanai. (M.A.2.1.1.; M.A.2.2.1.; M.A.4.5.5.)	Tūrists devās no kalnu ciemata A uz kalnu ciematu B un atgriezās atpakaļ ciematā A pa to pašu maršrutu. Maršruts sastāv no vairākiem ceļa posmiem, kas ved kalnup, un vairākiem posmiem, kas ved lejup (līdzenu ceļa posmu nav). Turpceļā tūrists pavadīja 4 h, bet atpakaļceļā – 5 h. Visus ceļa posmus, kas ved kalnup, tūrists veica ar nemainīgu ātrumu 3 km/h. Visus ceļa posmus, kas ved lejup, tūrists veica ar nemainīgu ātrumu 6 km/h. Aprēķini tūrista veikto ceļu.
Skaidro algebriskos pārveidojumus, polinoma (viena argumenta) dalīšanu ar binomu, lieto tos kompleksu matemātiska satura problēmu atrisināšanai. (M.A.4.4.1.; M.A.4.4.2.; M.A.4.4.3.; M.A.4.5.4.; M.A.4.5.6.; M.A.2.1.3.)	1. Izvēlies veidu un paskaidro algoritmu polinoma dalīšanai ar binomu. 2. Sadali reizinātājos izteiksmi $a^{2n+1}-2a^{n+1}+a$. 3. Nosaki visus tos x (x – vesels skaitlis), ar kuriem izteiksmes $\frac{6x-8}{x^2-3x+2}-\frac{4}{x-2}$ vērtība ir vesels skaitlis. 4. Atrisini vienādojumu $2x^4-5x^3+5x^2-2=0$.
Pēta, formulē un pierāda likumsakarības un sakarības starp lielumiem polinomos. (M.A.2.1.1.; M.A.2.1.2.; M.A.2.3.1.; M.A.2.3.4.)	1. Izpēti, formulē un pierādi izteiksmju a^2-1; a^3-1; a^4-1; a^5-1; …; a^n-1 sadalīšanu reizinātājos, ja $n\geq 2$; $n\in\mathbb{N}$. 2. Veic izpēti un formulē pieņēmumu par sakarībām starp reducēta trešās pakāpes vienādojuma $x^3+px^2+qx+r=0$ koeficientiem un saknēm. Pamato pieņēmuma patiesumu.
Iegūst, apkopo informāciju un veido, prezentē informatīvu materiālu par kompleksiem skaitļiem un to lietojumu zinātnē, citās jomās. (M.A.1.1.1.; M.A.1.1.2.)	Atrodi un apkopo informāciju par kompleksu skaitļu lietojumu, izvēloties vienu no dotajiem kontekstiem (elektriskā strāva, satelītu navigācija, informācijas pārraide) vai izvēloties kādu citu kontekstu. Norādi atsauces par informācijas avotiem.
Jēdzieni: asimptota, funkcijas robeža, vienpusējās robežas, polinoma sakne, nenoteikto koeficientu metode, kompleksie skaitļi, imaginārie skaitļi, komplekso skaitļu plakne.	
Simboli un pieņemtie apzīmējumi: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$; $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$; $\mathbb{C}$; $a+bi$.	

Temata apguves norise

Temata vienuma nosaukums	Skolēna darbības un uzdevumu piemēri
Daļveida funkcijas $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ grafiks	Spriež, izsaka idejas, kā izmantot zināšanas par funkcijas $y=\dfrac{m}{cx+d}+n$ grafika uzzīmēšanu, lai formulētu algoritmu funkcijas $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ grafika uzzīmēšanai. Secina par nepieciešamību atdalīt veselo no daļas un formulē algoritmu.
	Nosaka daļveida funkcijas īpašības, raksturīgos lielumus analītiski un no grafika. Zīmē daļveida funkcijas grafiku. Uzraksta funkcijas formulu, ievērojot doto informāciju par funkciju vai tās grafiku.
	Piemērs. Uzraksti formulu daļveida funkcijai, kuras grafiks *Ox* asi krusto punktā $(-1;\ 0)$, *Oy* krusto punktā $(0;\ 1)$ un grafika vertikālā asimptota ir $x=3$.
	Lieto zināšanas par daļveida funkciju un tās īpašībām matemātiskos kontekstos. Iepazīst un lieto vienpusējās robežas, raksturojot daļveida funkciju.
	Piemēri. 1. Nosaki funkcijas $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ grafika asimptotas un funkcijas robežas, uzzīmē funkcijas grafiku. 2. Nosaki funkcijas $y=\dfrac{x+3}{x-5}$ inverso funkciju. 3. Nosaki funkcijas $y=\left\|\dfrac{2x}{x-2}\right\|$ mazāko vērtību, augšanas un dilšanas intervālus.
Daļveida funkcijas, daļveida racionālu vienādojumu lietojums	Sakarību starp lielumiem praktiskos, citu jomu vai matemātikas kontekstos apraksta kā daļveida funkciju, skicē tās grafiku, izmanto iegūto funkciju, lai noteiktu nezināmos lielumus, formulētu pamatotus spriedumus.
	Piemēri. 1. Lielā maisīšanas tvertnē sākotnēji ir 200 *l* ūdens, kurā samaisīti 40 kg cukura. Atverot pieplūdes krānu, vienas minūtes laikā tvertnē ieplūst 15 *l* ūdens, vienlaicīgi katras minūtes laikā maisījumam pievieno 2 kg cukura. a) Uzraksti formulu funkcijai $c(t)$, kur $c\left(\frac{kg}{l}\right)$ – cukura koncentrācija un *t* – laiks minūtēs; b) izmanto IT un uzzīmē funkcijas $c(t)$ grafiku, ja $t\in[0;\ 10]$, vienības uz asīm izvēloties tā, lai iespējami uzskatāmi parādītu cukura koncentrācijas izmaiņu laikā. 2. Regulāras trijstūra prizmas sānu virsmas laukums ir *a*. Pamato, ka, prizmas pamata šķautnes garumu palielinot *k* reizes, prizmas augstuma garums samazinās *k* reizes.

Temata vienuma nosaukums	Skolēna darbības un uzdevumu piemēri
	Pārbauda, vai un cik precīzi sakarību starp lielumiem (dati ir doti) apraksta daļveida funkcija. Attēlo dotos datus koordinātu plaknē un izmanto IT, lai noteiktu formulu funkcijai, kas tuvināti, bet iespējami precīzi aprakstītu sakarību starp lielumiem. Formulē secinājumus.
	Risina situāciju uzdevumus, izmantojot daļveida izteiksmes, daļveida vienādojumu (nevienādību, jauktu sistēmu, kas satur daļveida vienādojumu) vai daļveida funkciju.
	Piemērs. Tūrists devās no kalnu ciemata A uz kalnu ciematu B un atgriezās atpakaļ ciematā A pa to pašu maršrutu. Maršruts sastāv no vairākiem ceļa posmiem, kas ved kalnup, un vairākiem posmiem, kas ved lejup (līdzenu ceļa posmu nav). Turpceļā tūrists pavadīja 4 h, bet atpakaļceļā – 5 h. Visus ceļa posmus, kas ved kalnup, tūrists veica ar nemainīgu ātrumu 3 km/h. Visus ceļa posmus, kas ved lejup, tūrists veica ar nemainīgu ātrumu 6 km/h. Aprēķini tūrista veikto ceļu.
Sadalīšana reizinātājos	Sadala reizinātājos algebrisku izteiksmi, lietojot jau apgūtos paņēmienus. Veido savu prasmju apkopojumu. Sadala reizinātājos algebriskas izteiksmes, kombinējot vairākus paņēmienus, saskatot to lietojumu jaunās situācijās, t.sk. ar vispārīgi uzdotām pakāpēm.
	Piemēri. Sadali reizinātājos izteiksmi: a) a^4+a^2+1; b) $6x^2-xa-a^2$; c) a^3+3a^2-4; d) $x^{4n}-1$; e) $a^{2n+1}-2a^{n+1}+a$.
	Pēta, formulē un pamato izteiksmju a^n-b^n un $a^{2n+1}+b^{2n+1}$ sadalīšanu reizinātājos visiem $n \in \mathbb{N}$.
	Piemērs. Izpēti, formulē un pierādi izteiksmju a^2-1; a^3-1; a^4-1; …; a^n-1 sadalīšanu reizinātājos, ja $n \geq 2$; $n \in \mathbb{N}$.
Algebrisko daļu pārveidojumi	Raksturo esošo pieredzi darbību izpildei ar racionālām daļām. Izpilda darbības ar algebriskām daļām, kuru saucējā un skaitītājā ir dažādu pakāpju polinomi vai izteiksmes ar vispārīgā veidā uzdotām pakāpēm.
	Piemēri. 1. $\dfrac{x^n}{x^{2n}-y^{2n}} \cdot \dfrac{x^n+y^n}{x^{2n}}$. 2. $\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{x}{x^3-1}$.
	Spriež, kā dotu daļu izteikt kā divu daļu summu, pastāsta par lietoto stratēģiju atrisināšanai.
	Piemērs. Izsaki daļu $\dfrac{10x}{x^2-x-6}$ kā divu daļu summu.

Temata vienuma nosaukums	Skolēna darbības un uzdevumu piemēri
	Formulē algoritmu. Lieto nenoteikto koeficientu metodi.
	Piemērs. Nosaki visus tos x (x – vesels skaitlis), ar kuriem izteiksmes $\frac{6x-8}{x^2-3x+2}-\frac{4}{x-2}$ vērtība ir vesels skaitlis.
Polinomu dalīšana ar polinomu	Definē viena argumenta polinomu. Vingrinās lietot simbolisko pierakstu, lai pierakstītu polinomu, tā vērtības, formulētu apgalvojumus. Apzina savas zināšanas par darbībām ar polinomiem, secina, ka nav zināms vispārīgs algoritms polinoma izdalīšanai ar kādu citu polinomu. Izmanto jau zināmo, lai konkrētos piemēros polinomu izdalītu ar polinomu (izpratnes veidošanai var piedāvāt atsevišķus piemērus, kuros dalītājs ir otrās un augstākas kārtas polinoms, bet plānotais sasniedzamais rezutāts ir prasme polinomu izdalīt ar binomu) izvēloties piemērotu attēlošanas veidu. Secina par izdalīšanu ar atlikumu vai bez tā.
	Piemēri. 1. $(6x-4):(3x-2)$ 2. $(4x+6):(x+1)$ 3. $(x^2-x-6):(x+2)$ 4. $(x^4-1):(x-1)$ 5. $(x^5+1):(x+1)$.
	Konkrētos piemēros secina par zināšanu nepietiekamību. Sadarbojas, lai formulētu vispārīgu algoritmu polinoma dalīšanai ar binomu, vienojas par izpētes stratēģiju. Pārbauda algoritmu, izmantojot uzziņu avotus. Formulē Bezū teorēmu.
	Piemērs. Izdali polinomu x^3-5x^2+4 ar binomu $x-2$.
	Lieto polinoma dalīšanu ar binomu, Bezū teorēmu dažādos matemātiskos kontekstos.
	Piemēri. 1. Sadali reizinātājos $x^3-7x^2+16x-12$. 2. Saīsini daļu $\frac{3x^4-4x^3+1}{x^3-3x-2}$. 3. Aprēķini, ar kādu k vērtību polinoms $4x^3-6x+k$ dalās ar binomu $x+3$ bez atlikuma. 4. Atrisini vienādojumu $2x^4-5x^3+5x^2-2=0$.
	Pēta, formulē un pamato sakarības starp lielumiem augstāko kārtu vienādojumos, algebriskās daļveida izteiksmēs un polinomos, formulē vispārīgus apgalvojumus un pierāda to patiesumu, t. sk. lietojot MIP.
	Piemērs. Veic izpēti un formulē pieņēmumu par sakarībām starp reducēta trešās pakāpes vienādojuma $x^3+px^2+qx+r=0$ koeficientiem un saknēm.
Priekšstats par komplekso skaitļu kopu	Uzziņu avotos iegūst un apkopo informāciju par kompleksajiem skaitļiem, to vēsturi, attēlojumu koordinātu plaknē un lietojumu zinātnē dažādās jomās. Diskutē par jautājumu “Vai reālie skaitļi ir “reālāki” par kompleksajiem skaitļiem?”.

1. Matemātiskā indukcija	2. Varbūtība un statistika II	Algebra II			Matemātiskās analīzes elementi		8. Trigonometrija II	9. Analītiskā ģeometrija II	Ģeometrija II	
		3. Virknes un eksponentfunkcija	4. Pakāpes funkcija un logaritmiskā funkcija	5. Daļveida funkcija un algebriskie pārveidojumi	6. Atvasinājums un tā lietojums	7. Integrālis un tā lietojums			10. Planimetrija	11. Stereometrija

6. Atvasinājums un tā lietojums

Temata apguvei ieteicamais laiks: 46–48 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: veidot izpratni par funkcijas atvasinājumu, tā fizikālo un ģeometrisko interpretāciju, lai pētītu un pamatotu funkciju īpašības, risinātu ekstrēmu vai optimizācijas uzdevumus, lietotu atvasinājumu fizikas un citu mācību jomu kontekstos.

Temata izpētes jautājumi

Ko rāda funkcijas atvasinājums, ja funkcija apraksta reālu procesu?
Kā funkcijas atvasinājumu lieto funkcijas īpašību noteikšanai un pamatošanai?
Kāda veida reālu procesu izpētei var izmantot funkcijas atvasinājumu?

Sasniedzamie rezultāti

Sasniedzamais rezultāts	Uzdevumu piemēri
Skaidro, nosaka funkcijas robežu un nepārtrauktību, zina un lieto atvasinājuma definīciju un svarīgākās atvasināšanas formulas, skaidro tā fizikālo nozīmi, ģeometrisko interpretāciju. (M.A.4.3.1.; M.A.4.3.2.; M.A.1.2.5.; M.A.2.3.4.; M.A.4.3.3.)	1. Pamato, ka: a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x^2}=\infty$; b) $\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{-4}{x-1}=-\infty$; c) $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{-4}{x-1}=+\infty$. 2. Ar piemēru ilustrē situāciju: funkcija punktā x_0 ir definēta, bet x_0 ir funkcijas pārtraukuma punkts, jo vienpusējās robežas $(x\to x_0+0;\ x\to x_0-0)$ nav vienādas. 3. Nosaki funkcijas $f(x)=x^2$ atvasinājumu, izmantojot definīciju. 4. Pierādi, ka funkcijām $y=\lvert x\rvert$, $y=\sqrt[3]{x}$ punktā $x_0=0$ atvasinājums neeksistē. 5. Dots kustības vienādojums $s(t)=3t^3-2t^2+5$, kas apraksta ceļu atkarībā no laika. Nosaki ātrumu un paātrinājumu laika momentos $t=1$, $t=2$.
Skaidro algoritmus funkcijas pētīšanai, pēta polinomiālas funkcijas un daļveida funkcijas īpašības, lietojot funkcijas atvasinājumu. (M.A.4.3.3.; M.A.4.3.4.; M.A.4.3.5.)	1. Izvēlies veidu un paskaidro algoritmu monotonitātes intervālu noteikšanai. 2. Nosaki un pamato ekstrēmus funkcijai $f(x)=x^3-4x^2+5x-1$. 3. Nosaki funkcijas $y=x^3-3x^2+9$ vislielāko un vismazāko vērtību intervālā [1; 3]. 4. Izpēti funkcijas: a) $y=x^4-x^2$; b) $y=\frac{x}{4-x^2}$ īpašības un uzzīmē tās grafiku.
Lieto funkcijas atvasinājumu ekstrēmu, optimizācijas uzdevumos, uzdevumos par kustību. (M.A.2.1.1.; M.A.4.3.3.; M.A.4.3.4.; M.A.4.3.5.)	1. No kvadrātveida kartona loksnes, kuras malas garums ir 60 cm, jāizgatavo kārba bez vāka. Kārbu veido, izgriežot loksnes stūros vienādus kvadrātus un uzliecot kartona malas uz augšu. Nosaki, kādam jābūt izgriezto kvadrātu malas garumam, lai iegūtu kārbu ar vislielāko tilpumu. 2. Vertikāli augšup sviests ķermenis pārvietojas pēc likuma $s(t)=4+8t-5t^2$ (m), kas apraksta ķermeņa attālumu no zemes atkarībā no laika. Nosaki ķermeņa kustības ātrumu tajā momentā, kad tas saskaras ar zemi.
Lieto funkcijas atvasinājumu citu jomu kontekstos jaunā situācijā, savietojot doto informāciju par kontekstu ar matemātikas zināšanām. (M.A.2.1.1.; M.A.4.3.3.; M.A.4.3.5.)	Medicīnā reakciju $R(x)$ uz zāļu devu x izsaka funkcija $R(x)=Ax^2(B-x)$, kur $A>0$, $B>0$ un to skaitliskā vērtība konkrētā gadījumā atkarīga no zālēm. Ķermeņa jutību x pret devu x definē kā $R'(x)$. Pieņemot, ka ar cilvēka (ārstējamā) dzīvību saistāma tikai pozitīva reakcija, nosaki: a) Funkcijas $R(x)$ definīcijas kopu. b) Kādām x vērtībām $R(x)$ ir lielākā vērtība un kāda tā ir? c) Kādām x vērtībām ir maksimālā jutība?
Jēdzieni: nenoteiktība, vienpusējā robeža, funkcijas nepārtrauktība, pārtraukuma punkts, funkcijas atvasinājums, funkcijas grafika pieskare, maksimuma/minimuma punkts, ekstrēma punkts, ekstrēms, pārliekuma punkts, kritiskais punkts, funkcijas monotonitāte, grafika izliekums/ieliekums.	
Simboli un pieņemtie apzīmējumi: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; Δx; Δy; dx; dy; $f'(x_0)$; $f'(x)$; $f''(x)$; y'; y''.	

Temata apguves norise

Temata vienuma nosaukums	Skolēna darbības un uzdevumu piemēri
Funkcijas robeža	Apzina zināmo par funkcijām, spriež un nosauc piemērus funkcijām $f(x)$, ievērojot nosacījumu, ja $x \to a$, tad $f(x) \to +\infty$ vai $f(x) \to -\infty$. Secina, ka argumenta tiekšanās uz kādu skaitli var būt divējāda. Konkrētos piemēros aprakstoši skaidro vienpusējās robežas, to simbolisko apzīmējumu. Uzziņu literatūrā iegūst definīciju funkcijas robežai, ja tā ir bezgalība, un skaidro to, izmantojot konkrētu pazīstamu funkciju, tās īpašības un grafika novietojumu koordinātu plaknē.
	Piemērs. Nosaki un pamato robežas funkcijai $y = 2 + \frac{4}{x-3}$, pieraksti rezultātu, izmantojot pieņemtos apzīmējumus.
	Zīmē funkcijas $y = \frac{x^2-1}{x-1}$ grafiku, pamatojot savus spriedumus. Spriežot vai veicot aprēķinus, raksturo funkcijas vērtību, argumenta vērtībai arvien tuvojoties skaitlim 1. Secina, ka $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$. Uzziņu literatūrā iegūst funkcijas robežas definīciju un izmanto to, lai pierādītu iegūto rezultātu. Skaidro saviem vārdiem funkcijas robežas definīciju.
	Zīmē intervālos dažādi definētas funkcijas grafiku, piemēram, $y = \begin{cases} 2^x, & x \geq 1 \\ x, & x < 1 \end{cases}$, un nosaka funkcijas vienpusējās robežas ($x \to 1+0$ un $x \to 1-0$). Pamato funkcijas robežu, izmantojot definīciju, funkcijas un tās grafika īpašības.
	Piemēri. Pamato, ka a) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{x}{3}+1\right) = 2$; b) $\lim\limits_{x\to 1+0} \frac{-4}{x-1} = -\infty$; c) $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{-4}{x-1} = +\infty$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{x^2} = \infty$
	Aprēķina robežas, izmantojot uzziņu literatūrā atrastās teorēmas par robežām un novēršot nenoteiktības ∞/∞ un 0/0.
	Piemēri. Nosaki robežu, novēršot nenoteiktību: a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2-x}{x^2+x}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x+1}$; c) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$.
	Secina par biežāk sastopamām situācijām, kad funkcijas izturēšanos raksturo robeža: a) arguments tiecas uz $+\infty$ vai $-\infty$, b) arguments tiecas uz definīcijas (kopas) intervāla galapunktu, kurā funkcija nav definēta. Veido funkcijas grafika skici, izmantojot robežas.
	Piemērs. Uzskicē funkcijas $y = 2^{\frac{1}{x-2}}$ grafiku, nosakot funkcijas robežas.

Temata vienuma nosaukums	Skolēna darbības un uzdevumu piemēri
Funkcijas nepārtrauktība	Skaidro funkcijas nepārtrauktību, pamato, ka funkcija ir nepārtraukta punktā, izmantojot definīciju. Definē funkcijas nepārtrauktību intervālā. Skaidro, kas ir pārtraukta funkcija, pārtraukuma punkti. Uzziņu literatūrā iegūst informāciju par pārtraukuma punktu veidiem. Konkrētos piemēros pēta un nosaka funkciju pārtraukuma punktus. Piemērs. Uzskicē funkcijas grafiku un nosaki pārtraukuma punktus: a) $y=\frac{\lvert x\rvert}{x}$; b) $y=\begin{cases} x+3, & x\geq 2 \\ 1-x, & x<2 \end{cases}$.
Funkcijas atvasinājuma definīcija	Salīdzina funkcijas vērtības izmaiņas straujumu divām lineārām funkcijām, lineārai un kvadrātfunkcijai, formulē secinājumus. Pēta konkrētas vienkāršas funkcijas, piemēram, $y=2x^2$ funkcijas izmaiņas ātrumu punktā x_0 – izmantojot izklājlapu iespējas, nosaka attiecības $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ vērtības, ar noteiktu soli samazinot Δx skaitlisko vērtību, formulē secinājumus. Definē atvasinājumu punktā kā funkcijas pieauguma un argumenta pieauguma attiecības robežu šajā punktā, kad argumenta pieaugums tiecas uz nulli. Vārdiski skaidro, ko raksturo funkcijas atvasinājums punktā (funkcijas izmaiņas ātrumu punktā). Nosaka vienkāršu funkciju atvasinājumu, izmantojot definīciju, formulē vispārīgus secinājumus. Piemēri. 1. Nosaki funkcijas $f(x)=x^2$ atvasinājumu, izmantojot definīciju. 2. Aprēķini $f'(2)$, ja $f(x)=x^3$.
Atvasinājuma fizikālā nozīme	Skaidro lielumus formulā $h=\frac{gt^2}{2}$. Nosaka krišanas momentāno ātrumu kādā laika momentā kā vidējā ātruma laika intervālā robežu, kad $\Delta t \to 0$. Iegūst krišanas momentānā ātruma formulu $v=gt$. Lasa informāciju par fizikāliem lielumiem (taisnvirziena kustības paātrinājums, strāvas stiprums), ko iegūst, atvasinot citu fizikālu lielumu, kas izteikts kā funkcija atkarībā no laika, un pastāsta citiem par iegūto informāciju. Formulē vispārinājumu par atvasinājuma fizikālo nozīmi – ja funkcija apraksta kādu procesu, tad funkcijas atvasinājums ir procesa norises ātrums.

Temata vienuma nosaukums	Skolēna darbības un uzdevumu piemēri
Atvasinājuma ģeometriskā interpretācija	Izsaka un uzklausa idejas, kā definēt funkcijas grafika pieskari, salīdzina ar informāciju uzziņu literatūrā. Skaidro funkcijas atvasinājuma punktā x_0 ģeometrisko interpretāciju (punktā x_0 novilktās pieskares virziena koeficients). Uzraksta funkcijas grafika pieskares vienādojumu vispārīgā veidā ($y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$). Lieto atvasinājuma punktā ģeometrisko interpretāciju matemātiskos kontekstos.
	Piemēri. 1. Uzraksti vienādojumu pieskarei, kas novilkta funkcijas $y=x^2$ grafika punktā, kura abscisa ir 1; uzzīmē pieskari. 2. Nosaki funkcijas $y=x^2$ grafika punktu, kurā vilktā pieskare ar *Ox* ass pozitīvo virzienu veido 45° leņķi.
Atvasinājuma eksistence	Iegūst informāciju par atvasinājuma eksistences nepieciešamo nosacījumu (ja funkcijai punktā eksistē atvasinājums, tad funkcija šajā punktā ir nepārtraukta). Ar jau aplūkotajiem funkciju piemēriem ilustrē, ka funkcijas nepārtrauktība nav atvasinājuma eksistences pietiekamais nosacījums.
	Piemērs. Pierādi, ka funkcijām $y=\|x\|$, $y=\sqrt[3]{x}$ punktā $x_0=0$ atvasinājums neeksistē.
	Analizē dotu funkcijas grafiku, nosakot un pamatojot, kuros attēlotās funkcijas definīcijas kopas punktos atvasinājums neeksistē.
Atvasināšanas likumu un formulu lietojums	Uzziņu literatūrā noskaidro un lieto funkciju atvasināšanas likumus un formulas. Atsevišķus no tiem pierāda, izmantojot atvasinājuma definīciju.
	Piemēri. 1. Pierādi, ka konstantas funkcijas atvasinājums ir nulle. 2. Pierādi funkciju reizinājuma atvasinājuma formulu, izmantojot atvasinājuma definīciju. 3. Pierādi pakāpes funkcijas atvasināšanas formulu $(x^n)'=nx^{n-1}$, izmantojot MIP.
	Lieto atvasināšanas likumu un formulas matemātiskos un fizikas (dots kustības vienādojums) kontekstos.
	Piemēri. 1. Nosaki atvasinājumu funkcijai $f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$ un aprēķini $f'(1)$. 2. Dots kustības vienādojums $s(t)=3t^3-2t^2+5$, kas apraksta ceļu atkarībā no laika. Nosaki ātrumu un paātrinājumu laika momentos $t=1$, $t=2$. 3. Nosaki leņķi, ko ar *Ox* ass pozitīvo virzienu veido pieskare, kas novilkta funkcijas $f(x)=e^x$ grafikam punktā, kuru abscisa ir a) 0; b) 1.

Temata vienuma nosaukums	Skolēna darbības un uzdevumu piemēri
	Pēta funkciju, piemēram, $(ax+b)^2$, $(ax+b)^3$ un $(ax+b)^4$, atvasinājumus un izvirza pieņēmumu par saliktas funkcijas atvasināšanas likumu. Lasa un skaidro pierādījumu, izmantojot uzziņu literatūru. Vingrinās saliktu funkciju atvasināšanā.
	Piemērs. Atvasini funkciju $f(x)=(2x+1)^3$ divējādi – lietojot saliktas funkcijas atvasināšanas kārtulu un pārveidojot par pakāpju summu.
Atvasinājuma lietojums funkciju pētīšanā	Pēta konkrētas funkcijas augšanas un dilšanas intervālus un funkcijas atvasinājumu zīmi (0, pozitīvs, negatīvs) un izvirza pieņēmumu par funkcijas monotonitātes saistību ar tās atvasinājumu. Formulē, lieto algoritmu monotonitātes intervālu noteikšanai.
	Piemēri. Nosaki monotonitātes intervālus funkcijai: a) $f(x)=x^3-4x^2+5x-1$; b) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$.
	Definē maksimuma un minimuma punktus, kritiskos punktus. Skaidro un lieto ekstrēma eksistences nepieciešamo un pietiekamo nosacījumu. Formulē un lieto algoritmu funkcijas maksimuma un minumuma punktu noteikšanai.
	Piemēri. Nosaki un pamato ekstrēmus funkcijai: a) $f(x)=x^3-4x^2+5x-1$; b) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$.
	Skaidro nosacījumus funkcijas izliekumam un ieliekumam, pietiekamo nosacījumu pārliekuma punkta eksistencei, izmantojot atvasinājuma punktā ģeometrisko interpretāciju. Formulē un lieto algoritmus funkcijas grafika izliekuma un ieliekuma intervālu noteikšanai, pārliekuma punkta atrašanai.
	Piemērs. Nosaki un pamato ekstrēmus funkcijas izliekuma un ieliekuma intervālus, grafika pārliekuma punktus: a) $f(x)=x^3-4x^2+5x-1$; b) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$.
	Pēta funkciju īpašības, izmantojot pirmo, otro atvasinājumu (otro atvasinājumu tikai polinomiem), skicē funkciju grafikus papildus vēl izmantojot grafika horizontālās un vertikālās asimptotas, funkcijas robežas.
	Piemērs. Izpēti funkcijas īpašības un uzzīmē tās grafiku: a) $y=x^4-x^2$; b) $y=\dfrac{x}{4-x^2}$.

Temata vienuma nosaukums	Skolēna darbības un uzdevumu piemēri
Atvasinājuma lietojums matemātikas un citu jomu kontekstos	Formulē un lieto algoritmu funkcijas vislielākās/vismazākās vērtības noteikšanai slēgtā intervālā.
	Piemērs. Nosaki funkcijas $y=x^3-3x^2+9$ vislielāko un vismazāko vērtību intervālā [1; 3].
	Lieto funkcijas atvasinājumu, risinot ekstrēmu uzdevumus.
	Piemēri. 1. No kvadrātveida kartona loksnes, kuras malas garums ir 60 cm, jāizgatavo kārba bez vāka. Kārbu veido, izgriežot loksnes stūros vienādus kvadrātus un uzliecot kartona malas uz augšu. Nosaki, kādam jābūt izgriezto kvadrātu malas garumam, lai iegūtu kārbu ar vislielāko tilpumu. 2. Regulāras trijstūra prizmas tilpums ir *V*. Kādam jābūt pamata malas garumam, lai prizmas pilnas virsmas laukums būtu vismazākais?
	Lieto funkcijas atvasinājumu, risinot uzdevumus par kustību.
	Piemērs. Vertikāli augšup sviests ķermenis pārvietojas pēc likuma $s(t)=4+8t-5t^2$ (m), kas apraksta ķermeņa attālumu no zemes atkarībā no laika. Nosaki ķermeņa kustības ātrumu tajā momentā, kad tas saskaras ar zemi.
	Lieto funkcijas atvasinājumu situācijās, kuru aprakstā papildus dota nepieciešamā informācija par to, ko izsaka pētāmā funkcija vai tās atvasinājums dažādos kontekstos, saista zināšanas par funkcijas atvasinājumu ar doto informāciju
	Piemērs. Medicīnā reakciju $R(x)$ uz zāļu devu x izsaka funkcija $R(x)=Ax^2(B-x)$, kur $A>0$, $B>0$ un to skaitliskā vērtība atkarīga no zālēm. Ķermeņa jutību $S(x)$ pret devu x definē kā $R'(x)$. Pieņemot, ka ar cilvēka dzīvību saistāma tikai pozitīva reakcija, nosaki: a) funkcijas $R(x)$ definīcijas kopu; b) kādām x vērtībām $R(x)$ ir lielākā vērtība un kāda tā ir? c) kādām x vērtībām ir maksimālā jutība?

1. Matemātiskā indukcija	2. Varbūtība un statistika II	Algebra II			Matemātiskās analīzes elementi		8. Trigonometrija II	9. Analītiskā ģeometrija II	Ģeometrija II	
		3. Virknes un eksponentfunkcija	4. Pakāpes funkcija un logaritmiskā funkcija	5. Daļveida funkcija un algebriskie pārveidojumi	6. Atvasinājums un tā lietojums	7. Integrālis un tā lietojums			10. Planimetrija	11. Stereometrija

7. Integrālis un tā lietojums

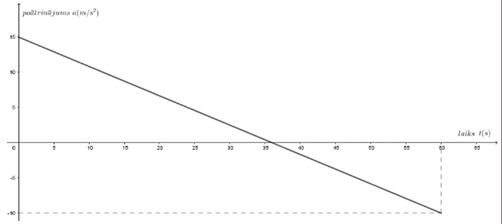
Temata apguvei ieteicamais laiks: 26–28 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: veidot izpratni par integrēšanu kā atvasināšanas apgriezto darbību, par noteiktā integrāļa ģeometrisko interpretāciju un lietojumu fizikas kontekstos.

Temata izpētes jautājumi

Vai eksistē atvasināšanai apgrieztā darbība un, ja eksistē, kā to veikt?
Kādas papildu iespējas plaknes figūras laukuma aprēķināšanai dod noteiktais integrālis?
Kā latīņu valodas vārda *integer* nozīme (‘vienots, vesels’) ļauj skaidrot integrēšanas nozīmi/jēgu?

Sasniedzamie rezultāti

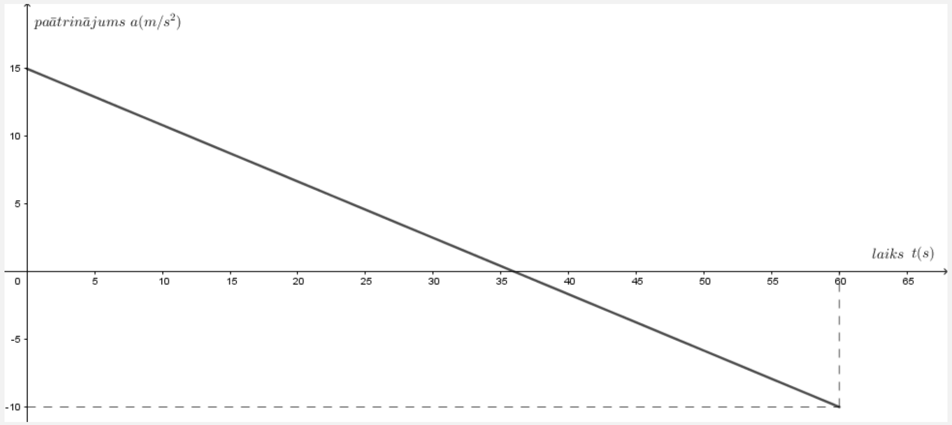
Sasniedzamais rezultāts	Uzdevumu piemēri
Skaidro, lieto nenoteikto integrāli, tā īpašības un integrēšanas formulas, zina formulu integrālim no pakāpes funkcijas. (M.A.4.3.6.)	1. Paskaidro, kas ir dotās funkcijas primitīvā funkcija; nosaki divas dažādas funkcijas $f(x)=3+2x$ primitīvās funkcijas. 2. Integrē $\int(2x+1)^2\,dx$ divējādi – pārejot/nepārejot uz citas funkcijas diferenciāli. 3. Integrē $\int\frac{2+x+x^2}{x^3}dx$.
Risina kompleksu matemātisku problēmu, saistot algebras un matemātiskās analīzes zināšanas. (M.A.1.2.4.; M.A.4.3.7.)	Nosaki integrāļus, izmantojot jau apgūto par algebriskajiem pārveidojumiem: a) $\int\frac{x+4}{x^2-x-2}dx$; b) $\int\frac{x+1}{x+2}dx$; c) $\int\frac{x^3-3x+2}{x+2}dx$.
Skaidro līklīnijas trapeces laukuma aprēķināšanu, lieto noteikto integrāli, lieto Ņūtona-Leibnica formulu plaknes figūras laukuma un rotācijas ķermeņa tilpuma aprēķināšanai. (M.A.1.2.5.; M.A.4.3.7.)	1. Paskaidro līklīnijas trapeces laukuma aprēķināšanu atkarībā no tā, kā koordinātu plaknē novietots grafiks funkcijai, kas to norobežo. 2. Aprēķini laukumu figūrai, ko ierobežo līnijas $y=\frac{4}{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=e$. 3. Aprēķini tilpumu ķermenim, kas rodas, funkcijas $y=\sin x$ grafikam rotējot ap *x* asi intervālā [0; 1].
Skaidro, lieto noteikto integrāli taisnvirziena kustībā noietā ceļa, ātruma noteikšanai. (M.A.1.2.5.; M.A.4.3.7.)	Aprēķini ceļu, ko veic ķermenis no 2. līdz 8. sekundei, skaitot no kustības sākuma, ja taisnvirziena kustības ātrums mainās pēc likuma $v(t)=3t^2+2t$ (m/s).
Atrisina kompleksu problēmu, lietojot atvasinājumu vai integrāli. (M.A.1.2.5.; M.A.4.3.7.)	Reaktīvā lidmašīna pārvietojas horizontāli pa taisnu ceļu vienu minūti, sākot ar laiku $t=0$ (mēra sekundēs). Paātrinājuma *a* (m/s²) grafiks (sk. zīmējumu) ir taisne. a) Uzraksti izteiksmi, kas apraksta reaktīvās lidmašīnas paātrinājumu atkarībā no *t* šajā laikā. b) Nosaki lidmašīnas maksimālo ātrumu nākamās minūtes laikā, zinot, ka laika momentā $t=0$ tās ātrums ir 125 m/s. c) Zināms, ka reaktīvā lidmašīna pārvar skaņas barjeru, lidojot ar ātrumu 295 m/s. Nosaki, cik ilgi tā pārvietojas ar ātrumu, kas pārsniedz skaņas ātrumu. 
Jēdzieni: primitīvā funkcija, nenoteiktais integrālis, diferenciālis, noteiktais integrālis, Ņūtona-Leibnica formula, līklīnijas trapece.	
Simboli un pieņemtie apzīmējumi: $\int f(x)dx$; $\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x$; $\int_a^b f(x)dx$	

Temata apguves norise

Satura bloks	Skolēnu darbības un uzdevumu piemēri
Primitīvā funkcija	Konkrētos piemēros spriež par atvasināšanai apgriezto darbību – noteikt/uzrakstīt funkciju, kuras atvasinājums ir dotā funkcija, pārbauda iegūto rezultātu.
	Piemērs. Nosaki funkciju, kuras atvasinājums ir funkcija $y = 4x$, un pārbaudi pieņēmuma patiesumu.
	Definē dotās funkcijas primitīvo funkciju un vingrinās to noteikt un pamatot.
	Piemēri. Nosaki funkcijas $f(x)$ primitīvo funkciju, ja a) $f(x) = 3 + 2x$; b) $f(x) = x^3$; c) $f(x) = e^{2x}$.
	Secina, ka dotai funkcijai eksistē bezgalīgi daudz primitīvo funkciju, izsaka idejas, kā matemātiski aprakstīt dotās funkcijas visu primitīvo funkciju kopu.
Nenoteiktais integrālis	Definē nenoteikto integrāli kā visu primitīvo funkciju kopu, integrēšanu kā primitīvo funkciju kopas atrašanu. Mācās pierakstīt un lasīt nenoteiktā integrāļa simbolisko pierakstu, noskaidro katra simbola nozīmi.
	Piemēri. Integrē a) $\int 3dx$; b) $\int 3x^2dx$; c) $\int x^2dx$; d) $\int 4x^2dx$.
	Iegūst informāciju mācību literatūrā, skaidro nenoteiktā integrāļa īpašības un dažas no tām pierāda (nenoteiktā integrāļa atvasinājums ir zemintegrāļa funkcija, konstantu reizinātāju var iznest pirms integrāļa zīmes, vairāku funkciju algebriskas summas nenoteiktais integrālis ir vienāds ar atsevišķo saskaitāmo funkciju integrāļu summu).
	Piemērs. Pierādi formulu $\int A \cdot f(x)dx = A \cdot \int f(x)dx$.
	Iegūst integrēšanas pamatformulas un dažas no tām pierāda, izmantojot atvasināšanu. Vingrinās integrēt funkcijas, kuru integrēšana reducējas uz pakāpes funkcijas integrēšanu un formulu $\int \frac{1}{x}dx = \ln\|x\| + C$.
	Piemēri. 1. Pierādi formulas a) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, ja $n \neq -1$; b) $\int \frac{1}{x}dx = \ln\|x\| + C$. 2. Integrē $\int \frac{2 + x + x^2}{x^3}dx$.

Satura bloks	Skolēnu darbības un uzdevumu piemēri
Izpratne par pāreju uz citas funkcijas diferenciāli	Skaidro, ar piemēriem ilustrē nenoteiktā integrāļa īpašību $\int dF(x)=F(x)+C$.
	Izpētes ceļā formulē pieņēmumus par sakarībām starp integrāļiem, ja funkciju diferenciāļi atšķiras par saskaitāmo C, kur C – reāls skaitlis, vai ar konstantu reizinātāju.
	Piemēri. 1. Integrē $\int dx$; $\int d(x+3)$;$\int d(x+6)$ un formulē secinājumu. 2. Integrē $\int dx$; $\int d(2x)$; $\int d(4x)$ un izsaki pieņēmumu par sakarību starp $\int dx$ un $\int d(cx)$.
	Izmantojot sakarību $dy=y'dx$ pierāda sakarības $dx=d(x+c)$, $dx=\frac{1}{k}d(kx)$ un formulē vispārinājumu $dx=\frac{1}{k}d(kx\pm c)$. Vingrinās vienkāršās situācijās izmantot šīs sakarības, skaidro veiktos pārbaudījumus, izskata iespējas lietot dažādus paņēmienus.
	Piemēri. 1. Integrē $\int (x+4)^3 d(x+4)$. 2. Integrē $\int (2x+1)^2 dx$ divējādi – zemintegrāļa izteiksmi pārveidojot par polinomu un pārejot uz citas funkcijas diferenciāli. 3. Integrē $\int \frac{dx}{x+4}$.
Daļveida racionālu funkciju integrēšana	Sprież, saskata nenoteikto koeficientu metodes lietojumu un integrē funkciju, kas pierakstīta kā īsta racionāla daļa. Vingrinās šādu funkciju integrēšanā, skaidro savu darbību.
	Piemērs. Integrē $\int \frac{x+4}{x^2-x-2}dx$, izsakot zemintegrāļa izteiksmi saskaitāmajos ar nenoteikto koeficientu metodi.
	Lieto polinomu dalīšanu (veselā atdalīšanu no daļas) un integrē funkciju, kas pierakstīta kā neīsta racionāla daļa.
	Piemēri. Integrē a) $\int \frac{x+1}{x+2}dx$; b) $\int \frac{x^3-3x+2}{x+2}dx$.

Satura bloks	Skolēnu darbības un uzdevumu piemēri
Līklīnijas trapeces laukums	Izsaka idejas, kā tuvināti varētu noskaidrot laukumu līklīnijas trapecei, ko ierobežo funkcijas $y=f(x)$ grafiks, *Ox* ass un taisnes $x=a$ un $x=b$; kā jārīkojas, lai iegūtu arvien precīzāku tuvinājumu. Secina par iespējām figūras laukumu tuvināti izteikt kā "daudzu" taisnstūru laukumu (ar malu garumiem Δx un $f(x_i)$) summu un par to, ka taisnstūru skaita palielināšana dod arvien precīzāku laukuma skaitlisko vērtību. Formulē sakarības $S_{ab} \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$, $S_{ab} = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$. Salīdzina formulētās idejas ar informāciju uzziņu literatūrā.
Noteiktais integrālis	Definē noteikto integrāli, t. sk. izmantojot uzziņu literatūru, skaidro simbolisko pierakstu. Iegūst informāciju uzziņu literatūrā un skaidro noteiktā integrāļa īpašības, ģeometrisko interpretāciju, Ņūtona-Leibnica formulu. Vienkāršās situācijās vingrinās to lietot.
	Piemērs. Aprēķini, izmantojot Ņūtona-Leibnica formulu a) $\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$; b) $\int_0^2 (x^2-2x+3)dx$.
Plaknes figūras laukuma aprēķināšana	Izmanto uzziņu literatūrā iegūto informāciju un skaidro plaknes figūras laukuma aprēķināšanu, lietojot noteikto integrāli, vispārīgi raksturo biežāk sastopamos gadījumus, vizuāli interpretē tos, izvērtē iespējas izmantot jau zināmo par plaknes figūras laukuma aprēķināšanu. Skaidro risinājumu dažādās situācijās: a) līklīnijas trapeci norobežo nenegatīva funkcija; b) līklīnijas trapeci norobežo nepozitīva funkcija; c) funkcija maina zīmi; d) figūru ierobežo divu funkciju grafiki.
	Piemēri. Aprēķini laukumu figūrai, ko ierobežo līnijas: a) $y=\frac{4}{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=e$; b) $y=0$, $y=x^2-4$; c) $y=0$, $y=\cos x$, $x=0$, $x=\frac{3\pi}{2}$; d) $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$.
Telpisku ķermeņu tilpuma aprēķināšana	Izmanto attēlu vai simulāciju, lai skaidrotu telpiska ķermeņa tilpuma tuvināto vērtību kā "daudzu" cilindru tilpumu summu jeb noteikto integrāli $V=\int_a^b S(x)dx$, kur $S(x)$ ir laukums šķēlumam, kas veidojas, telpisko ķermeni šķeļot ar *Ox* asij perpendikulāru plakni. Sprież induktīvi un deduktīvi, veido skici, plāno tilpuma aprēķināšanu ķermeņiem, kas rodas, līnijai/funkcijas $y=f(x)$ grafikam slēgtā intervālā rotējot ap *Ox* asi, skaidro formulas lietošanu.
	Piemēri. 1. Aprēķini tilpumu ķermenim, kas rodas, funkcijas grafikam rotējot ap *Ox* asi dotajā intervālā: a) $y=\sqrt{x}$, [0; 3]; b) $y=x^2$, [0;3]; c) $y=\sin x$, [0;1]. 2. Pamato formulu $V=\pi\int_a^b y^2dx$, ja funkcija rotē ap *Ox* asi intervālā [*a*; *b*]. 3. Pierādi konusa tilpuma aprēķināšanas formulu.
	Patstāvīgi secina par rotācijas ķermeņa tilpuma izteikšanu kā citu ķermeņu tilpumu starpību.
	Piemērs. Aprēķini tilpumu rotācijas ķermenim, kas rodas, rotējot ap *Ox* asi figūrai, ko ierobežo līnijas $y=x^2$, $y=x$.

Satura bloks	Skolēnu darbības un uzdevumu piemēri
Nenoteiktā un noteiktā integrāļa lietojums matemātikas un fizikas kontekstos	Lieto nenoteikto un noteikto integrāli, lai izteiktu vai aprēķinātu lielumus, kas raksturo kustību.
	Piemēri. 1. Aprēķini taisnvirziena kustības ātrumu laika momentā $t=1$, ja paātrinājums mainās pēc likuma $a(t)=18t-4$. 2. Aprēķini ceļu, ko veic ķermenis no 2. līdz 8. sekundei, skaitot no kustības sākuma, ja taisnvirziena kustības ātrums mainās pēc likuma $v(t)=3t^2+2t$ (m/s).
	Risina kompleksu problēmu ar praktisku, fizikas vai kādas citas mācību jomas un matemātikas kontekstu, lietojot zināšanas par atvasinājumu vai integrāli, izvērtē, kādu papildu informāciju nepieciešams iegūt.
	Piemērs. Reaktīvā lidmašīna pārvietojas horizontāli pa taisnu ceļu vienu minūti, sākot ar laiku $t=0$ (mēra sekundēs). Paātrinājuma a (m/s^2) grafiks (sk. zīmējumu) ir taisne. a) Uzraksti izteiksmi, kas apraksta reaktīvās lidmašīnas paātrinājumu atkarībā no t šajā laikā. b) Nosaki lidmašīnas maksimālo ātrumu nākamās minūtes laikā, zinot, ka laika momentā $t=0$ tās ātrums ir 125 m/s. c) Zināms, ka reaktīvā lidmašīna pārvar skaņas barjeru, lidojot ar ātrumu 295 m/s. Nosaki, cik ilgi tā pārvietojas ar ātrumu, kas pārsniedz skaņas ātrumu. 

1. Matemātiskā indukcija	2. Varbūtība un statis-tika II	Algebra II			Matemātiskās analīzes elementi		8. Trigono-metrija II	9. Analītiskā ģeometrija II	Ģeometrija II	
		3. Virknes un eksponent-funkcija	4. Pakāpes funkcija un logaritmiskā funkcija	5. Daļveida funkcija un algebriskie pārveidojumi	6. Atvasinā-jums un tā lietojums	7. Integrālis un tā lieto-jums			10. Plani-metrija	11. Stereo-metrija

8. Trigonometrija II

Temata apguvei ieteicamais laiks: 27–29 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: definēt tangensa un kotangensa funkcijas, pētīt, lietot trigonometrisko funkciju īpašības trigonometrisko izteiksmju pārveidošanai un periodisku procesu matemātiskai modelēšanai, definēt inversās trigonometriskās funkcijas, skaidrot trigonometrisko vienādojumu atrisināšanu vispārīgā veidā.

Temata izpētes jautājumi

Kā noteikt un pierakstīt trigonometriska vienādojuma visas saknes?
Kā saistīt trigonometrijas zināšanas ar citu matemātikas apakšnozaru zināšanām?
Vai reālu procesu/sakarību matemātiskie modeļi ir precīzi vai tuvināti?

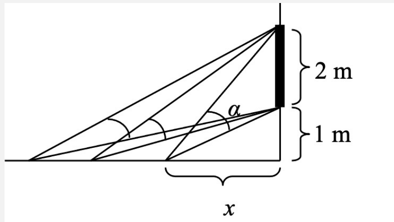
Sasniedzamie rezultāti

Sasniedzamais rezultāts	Uzdevumu piemēri
Pierāda sakarību starp leņķa lielumu grādos un radiānos, zina un lieto sakarības starp viena argumenta trigonometriskajām izteiksmēm. (M.A.4.4.5.; M.A.4.4.6.; M.A.4.4.7.)	1. Salīdzini un augošā secībā sakārto izteiksmes $\sin\alpha, \cos\alpha, \mathrm{tg}\alpha, \mathrm{ctg}\alpha$, ja $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right)$, pamato spriedumus. 2. Pierādi identitāti $\frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} \cdot \frac{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}{\mathrm{ctg}^2\alpha} = \mathrm{tg}^2\alpha$. 3. Nosaki izteiksmes $\cos 2\alpha$ vērtību, ja $\mathrm{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$ un $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.
Pēta, analītiski un grafiski nosaka, lieto tangensa un kotangensa funkciju īpašības, to grafiku transformācijas. (M.A.4.2.1.; M.A.4.2.4.; M.A.4.2.5.)	1. Pierādi, ka funkcijas $y = \mathrm{tg}x$ un $y = \mathrm{ctg}x$ ir nepāra un periodiskas, izmantojot definīcijas, jau zināmo par sinusa un kosinusa funkcijām. Nosaki perioda skaitlisko vērtību. 2. Izpēti, pamato funkcijas $y = \mathrm{tg}x$ īpašības, izmantojot funkcijas atvasinājumu, uzskicē funkciju grafiku.
Pēta, pamato, lieto inverso trigonometrisko funkciju īpašības; skaidro, veido trigonometriska vienādojuma atrisinājumu vispārīgā veidā. (M.A.4.5.2.; M.A.1.2.1; M.A.1.2.4.)	1. Nosaki un pamato funkcijas $y = \mathrm{arctg}x$ vērtību apgabalu; paskaidro vienādojuma $\mathrm{tg}x = a$ atrisināšanu vispārīgā veidā. 2. Atrisini vienādojumu: a) $2\sin x - \cos x - \sin 2x + 1 = 0$; b) $\cos 4x = 5\sin 2x + 3$; c) $\frac{2\cos 2x - 1}{2\sin x - 1} = 0$; d) $3\sin x - 2\cos x = 0$; e) $\sin x = a - 1$; ($a \in \mathbb{R}$). 3. Pierādi, ka vienādojumam $\sin^2 x \cdot \cos x = 1$ nav sakņu.
Risina kompleksu matemātisku problēmu, saistot trigonometrijas un citu matemātikas apakšnozaru zināšanas. (M.A.1.2.4.; M.A.2.1.1.; M.A.2.3.1.; M.A.4.4.5.)	1. Aprēķini $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$, ja $\sin\alpha + \cos\alpha = c$. 2. Pierādi vienādību $\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos((2n-1)x) = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}$, kur n naturāls skaitlis un $\sin x \neq 0$. 3. Nosaki un pamato argumenta vērtības, ar kurām funkcijai $y = \sin^2 x - 2\sin x + 5$ ir lielākā vērtība.
Apraksta ciklisku/periodisku procesu (doti vai iegūti dati) ar funkciju, izvērtē matemātisko modeli, formulē secinājumus. (M.A.2.2.1.)	Uzdevuma piemēru skatīt temata apguves norises aprakstā.
Jēdzieni: pagrieziena leņķa tangenss/kotangenss, ark sinuss/kosinuss/tangenss/kotangenss.	
Simboli un pieņemtie apzīmējumi: $\arcsin a$; $\arccos a$; $\mathrm{arctg}a$; $\mathrm{arcctg}a$	

Temata apguves norise

Temata vienuma nosaukums	Skolēna darbības un uzdevumu piemēri
Pagrieziena leņķa tangenss un kotangenss	Vienības riņķī definē pagrieziena leņķa tangensu un kotangensu. Raksturo dota pagrieziena leņķa tangensu vai kotangensu (zīme, novietojums kvadrantā, aptuvenā vērtība u. tml.). Nosaka nosacījumiem atbilstošu pagrieziena leņķi, aprēķina trigonometriskas izteiksmes skaitlisko vērtību, salīdzina trigonometriskas izteiksmes, formulē un pamato spriedumus matemātikas kontekstos.
	Piemēri. 1. Prognozē un salīdzini starpību tg88° – tg50°, tg89° – tg88° aptuvenās vērtības. Pārbaudi savas prognozes atbilstību un formulē secinājumus. 2. Nosaki vienu 3. kvadranta leņķi α, par kuru zināms, ka $2 < \text{tg}\alpha < 3$. Pārbaudi iegūto rezultātu. 3. Salīdzini un sakārto augošā secībā izteiksmes $\sin\alpha, \cos\alpha, \text{tg}\alpha, \text{ctg}\alpha$, ja $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right)$, pamato savus spriedumus. 4. Atrisini nevienādību $\text{tg}x > 0$ intervālā $(-2\pi; 2\pi)$.
Tangensa un kotangensa funkcijas	Pierāda sakarību starp grādiem un radiāniem. Izsaka idejas par to, kāpēc, definējot trigonometriskās funkcijas, arguments jāizsaka radiānos, kamēr, pierakstot un pārveidojot izteiksmes vai risinot vienādojumus, korekti ir izmantot arī grādus.
	Definē funkcijas $y = \text{tg}x$ un $y = \text{ctg}x$, nosaka un pamato to īpašības, raksturīgos lielumus, izmantojot vienības riņķi. Pēta un pierāda funkciju $y = \text{tg}x$ un $y = \text{ctg}x$ īpašības, izmantojot funkcijas atvasinājumu (izmanto funkciju dalījuma atvasināšanas formulu vai tangensa atvasinājuma formulas), zināšanas par funkcijas robežu un tās noteikšanu, izmanto iegūtos rezultātus, lai skicētu un raksturotu funkciju grafikus, nosaka asimptotas. Lieto funkcijas $y = \text{tg}x$ un $y = \text{ctg}x$ īpašības. Pēta trigonometrisko funkciju grafiku transformācijas.
	Piemēri. 1. Pierādi, ka funkcijas $y = \text{tg}x$ un $y = \text{ctg}x$ ir nepāra un periodiskas, izmantojot definīcijas, jau zināmo par sinusa un kosinusa funkcijām. Nosaki perioda skaitlisko vērtību. 2. Izpēti un pamato funkciju $y = \text{tg}x$ un $y = \text{ctg}x$ monotonitātes intervālus, kritiskos un ekstrēma punktus, grafika izliekumu, ieliekumu un pārliekuma punktus, izmantojot funkcijas atvasinājumu; uzskicē funkciju grafiku. 3. Nosaki zīmi izteiksmei $\frac{20\pi}{3}$. 4. Pierādi identitāti $\text{tg}(3\pi + x) \cdot \cos(2\pi - x) = \sin x$. 5. Nosaki un pamato vienādojuma $\text{tg}x = \text{ctg}x$ sakņu skaitu intervālā $(-\pi; \pi)$, izmantojot grafisko paņēmienu.

Temata vienuma nosaukums	Skolēna darbības un uzdevumu piemēri
Trigonometriskās sakarības, kompleksas matemātiskas problēmas	Pēta, formulē, pierāda un lieto sakarības starp viena un tā paša argumenta trigonometriskajām izteiksmēm, t. sk. redukcijas formulas. Veido un formulē stratēģiju, kā droši un iespējami ātri iegūt kādu no redukcijas formulām, ja tas nepieciešams.
	Piemēri. 1. Nosaki izteiksmes $\operatorname{ctg} x$ vērtību, ja a) $\operatorname{tg} x = \frac{2}{3}$; b) $\operatorname{tg} x = a$. 2. Nosaki izteiksmes $\cos x$ vērtību, ja $\operatorname{tg} x = 2$ un x ir 3. kvadranta leņķis. 3. Pierādi, ka $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ un nosaki x pieļaujamās vērtības. Izpēti, formulē un pierādi analogu sakarību starp sinusu un kotangensu. 4. Vienkāršo izteiksmi $(\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha)\operatorname{ctg}^2\alpha$. 5. Pierādi identitāti $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} \cdot \frac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha$.
	Risina kompleksu problēmu, kuras atrisināšanai nepieciešams saistīt trigonometrijas un algebras zināšanas un prasmes.
	Piemērs. Aprēķini $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$, ja $\sin\alpha + \cos\alpha = c$.
	Veido argumentu summas formulas pierādījumu, izmantojot planimetrijas zināšanas un prasmes.
	Piemērs. Izpēti, formulē un pamato izteiksmes $\sin(\alpha+\beta)$ izteikšanu ar leņķu α un β trigonometriskajām funkcijām, izmantojot planimetrijas zināšanas (skolotājs pēc saviem ieskatiem var konkretizēt, piemēram, sakarības taisnleņķa trijstūrī, laukuma īpašības un aprēķināšana).
	Pierāda un lieto citas argumenta summas formulas un divkārša argumenta formulas, izmantojot iegūto rezultātu. Uzziņu literatūrā atrod un lieto situācijai atbilstošu trigonometrisko sakarību (formulu).
	Piemēri. 1. Nosaki izteiksmes $\cos 2\alpha$ vērtību, ja $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$ un α ir 2. kvadranta leņķis. 2. Pierādi identitāti $\frac{1+\sin 2x - \cos 2x}{1+\sin 2x + \cos 2x} = \operatorname{tg} x$.
	Lieto MIP, lai pierādītu trigonometrisku identitāti.
	Piemērs. Pierādi vienādību $\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos((2n-1)x) = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}$, kur n naturāls skaitlis un $\sin x \neq 0$.

Temata vienuma nosaukums	Skolēna darbības un uzdevumu piemēri
Inversās trigonometriskās funkcijas	Veido situācijas matemātisko modeli, kas ilustrē nepieciešamību definēt inverso trigonometrisko funkciju.
	Piemērs. Leņķis α mainās atkarībā no attāluma x (sk. zīmējumu). Uzraksti funkcijas $\alpha(x)$ analītisko izteiksmi, lai noteiktu to attālumu x, kuram atbilst lielākā iespējamā α vērtība. 
	Nosaka funkcijas $y = \text{tg}x$ inverso funkciju, skicē inversās funkcijas grafiku, izmantojot zināšanas par savstarpēji inversu funkciju novietojumu koordinātu plaknē, izmanto IT pašpārbaudei. Nosaka funkcijas $y = \text{arctg}x$ definīcijas kopu, vērtību kopu, īpašības, asimptotas. Lieto iegūtās zināšanas un skaidro trigonometriska vienādojuma atrisināšanu vispārīgā veidā.
	Piemēri. 1. Nosaki un pamato funkcijas $y = \text{arctg}x$ vērtību apgabalu. 2. Atrisini vienādojumu $\text{tg}2x = 3$, pieraksti vispārīgā veidā vienādojuma visas saknes.
	Definē sinusa, kosinusa un kotangensa funkciju inversās funkcijas, secina par to grafika novietojumu koordinātu plaknē, īpašībām, skaidro trigonometrisko vienādojumu ($\sin x = a$, $\cos x = a$, $\text{ctg}x = a$) atrisināšanu vispārīgā veidā, formulē sev piemērotus un iespējami efektīvus algoritmus vienādojuma atrisināšanai un atbildes pierakstīšanai.
	Piemēri. 1. Uzzīmē funkciju $y = \arcsin x$ un $y = \arccos x$ grafikus, izmantojot digitālos rīkus, secini par to vērtību apgabalu. 2. Formulē vienādojuma $\sin x = a$ atrisināšanas algoritmu vispārīgā veidā.

Temata vienuma nosaukums	Skolēna darbības un uzdevumu piemēri
Trigonometriskie vienādojumi	Vingrinās trigonometrisko vienādojumu risināšanā, izvēloties piemērotu paņēmienu. Lieto vienādojumu vispārīgos atrisināšanas paņēmienus. Lieto trigonometriskos vienādojumus, vienkāršas trigonometriskās nevienādības matemātiskos kontekstos.
	Piemēri. 1. Atrisini vienādojumu $\sin(\pi - x) = \sin 2x$, raksturo savu izvēlēto paņēmienu un citus iespējamos paņēmienus. 2. Atrisini vienādojumu: a) $2\sin x - \cos x - \sin 2x + 1 = 0$; b) $\cos 4x = 5\sin 2x + 3$; c) $\frac{2\cos 2x - 1}{2\sin x - 1} = 0$. 3. Nosaki funkcijas $y = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ nulles, intervālus, kuros funkcijas vērtība ir pozitīva. 4. Nosaki un pamato tās argumenta vērtības, ar kurām funkcijai $y = \sin^2 x - 2\sin x + 5$ ir lielākā vērtība; risini divējādi – neizmantojot funkcijas atvasinājumu, izmantojot funkcijas atvasinājumu.
	Pārrunā un apkopo pieredzi ekvivalentu un neekvivalentu pārveidojumu lietošanā vienādojumu atrisināšanai; izvēlas paņēmienu trigonometriska vienādojuma atrisināšanai.
	Piemēri. 1. Atrisini vienādojumu: a) $3\sin x - 2\cos x = 0$; b) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$. 2. Pierādi, ka vienādojumam $\sin^2 x \cdot \cos x = 1$ nav sakņu.

Temata vienuma nosaukums	Skolēna darbības un uzdevumu piemēri
Matemātiskā modelēšana	Izsaka idejas par reāliem procesiem, sakarībām starp lielumiem, kuru matemātiskais modelis varētu būt kāda no trigonometriskajām funkcijām. Iegūst patstāvīgi, t. sk. izmantojot brīvi pieejamos interneta resursus, un apkopo datus (lielumu skaitliskās vērtības) par kādu reālu procesu. Attēlo iegūtos datus koordinātu plaknē un izmanto piemērotas lietotnes, lai noteiktu formulu funkcijai, kas tuvināti, bet iespējami precīzi aprakstītu sakarību starp lielumiem. Formulē secinājumus, raksturo iegūto rezultātu precizitāti, cik pamatotas prognozes iespējams formulēt.

Piemērs. Fandī (*Fundy*) līcī ir vislielākā vidējā ūdens līmeņa maiņa Jaunskotijā, Kanādā. Tabulā doti paredzamie dati 2019. gada 21. augustam atbilstoši Atlantijas standartlaikam (AST), augstumi (h) mērīti *Burntcoat Head* parkā.

Laiks	00.00	01.00	02.00	03.00	04.00	05.00	06.00	07.00	08.00	09.00	10.00	11.00
h (m)	2,6	4,8	7,6	10,1	12,1	13,1	12,5	10,5	7,9	5,5	3,4	2,2,
Laiks	12.00	13.00	14.00	15.00	16.00	17.00	18.00	19.00	20.00	21.00	22.00	23.00
h (m)	2,3	4,0	6,7	9,3	11,5	12,9	12,9	11,2	8,7	6,2	4,0	2,5

a) Programmā *Graph* atliec dotos datus koordinātu sistēmā, kur uz abscisu ass ir diennakts laiks, bet uz ordinātu ass – ūdens līmeņa augstums (h). Uzraksti savus novērojumus par punktu novietojumu.

b) Izmantojot zināšanas par funkcijām un to grafikiem, izveido funkciju, kas apraksta funkcionālo sakarību starp attēlotajiem lielumiem. Paskaidro mainīgos (neatkarīgais, atkarīgais) un skaitliskos parametrus, kas ietekmēs funkcijas izteiksmi. Vai izvēlētai funkcijai ir kādi ierobežojumi? Paskaidro katra parametra iegūšanu.

c) Uzzīmē iegūtās funkcijas grafiku vienā koordinātu sistēmā ar atliktajiem punktiem. Vai funkcijas grafiks labi apraksta atliktos punktus?

d) Maini funkcijas izteiksmi, lai tā labāk aprakstītu dotos datus. Paskaidro, ko tu ņem vērā un ko dari.

e) Saprātīgi zvejnieki jūrā ies bēguma laikā. Izmantojot modeli, nosaki, kurā diennakts laikā saprātīgiem zvejniekiem būtu jāiet jūrā 2019. gada 21. augustā.

f) Tabulā doti dati 2019. gada 22. augustam atbilstoši Atlantijas standartlaikam (AST). Vai iegūtā funkcija labi apraksta arī šos datus? Kāpēc? Ja nepieciešams, veic pārveidojumus funkcijas izteiksmē. Paskaidro, ko un kāpēc dari.

Laiks	00.00	01.00	02.00	03.00	04.00	05.00	06.00	07.00	08.00	09.00	10.00	11.00
h (m)	2,1	3,2	5,7	8,4	10,7	12,4	12,9	11,8	9,6	7,1	4,8	3,0
Laiks	12.00	13.00	14.00	15.00	16.00	17.00	18.00	19.00	20.00	21.00	22.00	23.00
H (m)	2,2	2,8	4,8	7,6	10,0	11,9	13,0	12,5	10,6	8,1	5,6	3,6

g) Kāpēc rodas atšķirības ūdens līmeņa augstumam? Veido skaidrojumu, iegūstot papildu informāciju. Norādi informācijas avotus.

1. Matemātiskā indukcija	2. Varbūtība un statis-tika II	Algebra II			Matemātiskās analīzes elementi		8. Trigono-metrija II	9. Analītiskā ģeometrija II	Ģeometrija II	
		3. Virknes un eksponent-funkcija	4. Pakāpes funkcija un logaritmiskā funkcija	5. Daļveida funkcija un algebriskie pārveidojumi	6. Atvasinā-jums un tā lietojums	7. Integrālis un tā lieto-jums			10. Plani-metrija	11. Stereo-metrija

9. Analītiskā ģeometrija II

Temata apguvei ieteicamais laiks: 21–23 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: paplašināt zināšanas par vektoru un koordinātu metodes lietojumu, padziļināt izpratni par saistību starp dažādām matemātikas apakšnozarēm, nosakot un pamatojot figūru īpašības un to savstarpējo novietojumu, analizējot un matemātiski aprakstot fizikālus procesus (kustība, mehāniskais darbs).

Temata izpētes jautājumi
Vai eksistē formula attāluma noteikšanai no kāda punkta līdz patvaļīgai taisnei koordinātu plaknē?
Kāda veida problēmu risināšanai lieto vektoru skalāro reizinājumu?
Vai jebkuru līniju koordinātu plaknē var aprakstīt ar vienādojumu, un otrādi – jebkuru vienādojumu ar diviem mainīgajiem var attēlot kā līniju?

Sasniedzamie rezultāti

Sasniedzamais rezultāts	Uzdevumu piemēri
Lieto vektorus ģeometriskā formā, pamatojot plaknes figūru, telpisku ķermeņu veidu, īpašības, nezināmos lielumus. (M.A.6.1.1.; M.A.6.2.1.)	1. Punkts *O* ir trijstūra *ABC* mediānu krustpunkts. Pierādi, ka $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$. 2. Pierādi, ka $2\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}$, kur nogrieznis *EF* savieno tetraedra *ABCD* šķautņu *AC* un *BD* viduspunktus.
Lieto vektorus koordinātu formā, pamatojot plaknes figūru, telpisku ķermeņu veidu, īpašības, nezināmos lielumus. (M.A.6.1.1.; M.A.6.2.1.)	1. Nosaki un pamato četrstūra *ABCD* veidu, ja $A(0;2;-1)$, $B(-2;-1;0)$; $C(0;-3;4)$; $D(1;1;1)$. 2. Vienādmalu trijstūra *ABC* divas virsotnes ir $A(1;0)$ un $B(2;\sqrt{3})$. Aprēķini virsotnes *C* koordinātas. 3. Izsaki vektoru $\vec{c}=(4;3;1)$ kā vektoru $\vec{a}=(2;3;-1)$ un $\vec{b}=(2;4;-2)$ lineāru kombināciju.
Lieto divu vektoru skalāro reizinājumu, lai noteiktu un pierādītu plaknes figūru, telpisku ķermeņu īpašības, savstarpējo novietojumu, nezināmos lielumus. (M.A.1.2.1.; M.A.6.2.2.)	1. Pierādi, ka punkti $A(-1;0;2)$, $B(1;-3;8)$; $C(-2;3;6)$; $D(-4;6;0)$ atrodas vienā plaknē un taisnes *AC* un *BD* ir perpendikulāras. 2. Aprēķini spēka $\vec{F}(6;-2;1)$ veikto darbu, ja materiāls punkts šī spēka iedarbības rezultātā pārvietojas pa taisni no punkta $K(3;4;-2)$ līdz punktam $K(4;-2;-3)$. Zināms, ka, materiālo punktu spēka $\vec{F}$ iedarbības rezultātā pārvietojot par $\vec{s}$, tiek veikts mehāniskais darbs *A* un $A=\vec{F}\cdot\vec{s}$.
Lieto līniju vienādojumus, koordinātu metodi ģeometrijas kontekstos. (M.A.6.1.1.; M.A.6.2.2.; M.A.6.2.3.)	1. Uzraksti vienādojumu taisnei, kuras katrs punkts atrodas vienādā attālumā no punktiem $C(4;2)$ un $D(6;7)$. 2. Aprēķini attālumu starp taisnēm $3x-4y+20=0$ un $3x-4y-4=0$. 3. Nosaki, kādām *a* un *b* vērtībām punkts $M(4;a;b)$ atrodas uz taisnes, kas iet caur punktiem $A(2;1;1)$ un $A(3;-2;3)$.
Risina kompleksu matemātisku problēmu, saistot izpratni par satura elementiem jaunā situācijā. (M.A.1.2.3.; M.A.1.2.4.; M.A.2.1.1.)	1. Uzdevumu "Tankkuģa *Aristides* ceļš" skatīt temata apguves norises aprakstā. 2. Nosaki un attēlo koordinātu plaknē nevienādības $5xy-x^2-6y^2>0$ visu atrisinājumu kopu. 3. Hiperbolas $y=\frac{2}{x}$ brīvi izraudzītā punktā novilkta pieskare, kas koordinātu asis krusto punktos *A* un *B*. Pierādi, ka trijstūra *AOB* laukums nav atkarīgs no pieskaršanās punkta izvēles (*O* – koordinātu sākumpunkts).
Jēdzieni: kolineāri vektori, komplanāri vektori, bāzes vektori, vektoru lineāra kombinācija plaknē (telpā), vektoru skalārais reizinājums.	
Simboli un pieņemtie apzīmējumi: $\vec{a}\cdot\vec{b}$; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$; $pr_{l}\vec{a}$	

Temata apguves norise

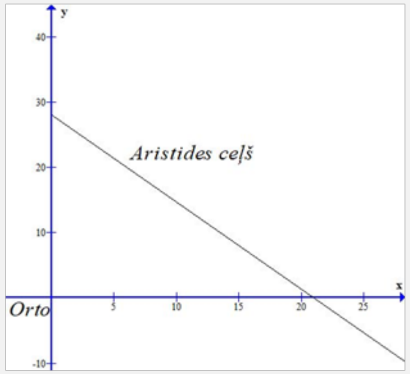
Temata vienuma nosaukums	Skolēna darbības un uzdevumu piemēri
Vektori ģeometriskā formā plaknē un telpā	Veido zināšanu apkopojumu par darbībām ar vektoriem ģeometriskā formā, sistematizē un padziļina tās.
	Piemēri. 1. Sadarbojaties grupā un pierādiet īpašības darbībām ar vektoriem ģeometriskā formā: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$, $(k+m)\vec{a}=k\vec{a}+m\vec{a}$, $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$. 2. Pierādi, ka $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}$, kur *ABCD* ir četrstūra piramīdas *SABCD* pamats un *O* ir pamata diagonāļu krustpunkts. 3. Izpēti un formulē pieņēmumu par sakarību starp vektoriem $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SO}$ regulārā trijstūra piramīdā *SABC*, kur *O* ir pamata mediānu krustpunkts. Pierādi formulētā pieņēmuma patiesumu.
	Pierāda pietiekamo un nepieciešamo nosacījumu tam, ka divi no nulles atšķirīgi vektori ir kolineāri. Pierāda, ka jebkuru vektoru plaknē var vienā vienīgā veidā izteikt ar diviem dotiem nekolineāriem vektoriem. Definē komplanārus vektorus un to pazīmi. Pierāda, ka jebkuru vektoru var izteikt kā trīs nekomplanāru vektoru lineāru kombināciju. Nosaka un pamato, vai vektori atrodas vienā plaknē. Lieto vektoru izteikšanu ar dotajiem vektoriem plaknē un telpā.
	Piemēri. 1. Pierādi, ka vektori $\vec{m}$, $\vec{n}$ un $\vec{p}$ atrodas vienā plaknē, ja $\vec{m}=\vec{a}+2\vec{b}-6\vec{c}$, $\vec{n}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{p}=2\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}$. 2. Pierādi, ka $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{PC}$, kur punkts *P* atrodas paralelograma *ABCD* iekšpusē. 3. Pierādi, ka $2\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}$, kur nogrieznis *EF* savieno tetraedra *ABCD* šķautņu *AC* un *BD* viduspunktus.
Vektora koordinātas	Skaidro un lieto koordinātu telpu zīmējumu veidošanai – attēlo punktus un vektorus, ja dotas to koordinātas. Pamato, ka vektora koordinātas viennozīmīgi raksturo vektoru plaknē vai telpā, vispārīgi skaidrojot un raksturojot saistību starp vektoru izteikšanu kā citu vektoru lineāru kombināciju, bāzes vektoriem un vektora koordinātām. Pierāda, ka vektoru summas vektora koordinātas vienādas ar doto vektoru atbilstošo koordinātu summu.
	Piemērs. Izsaki vektoru $\vec{c}=(4;\,3;1)$ kā vektoru $\vec{a}=(2;\,3;-1)$ un $\vec{b}=(2;\,4;-2)$ lineāru kombināciju.
	Lieto vektorus koordinātu formā, lai pierādītu plaknes figūru vai telpisku ķermeņu īpašības, noteiktu to veidu vai nezināmos lielumus.
	Piemēri. 1. Nosaki un pamato, vai punkti $A(1;4;7)$, $B(-2;-1;-3)$, $C(2;5;9)$ atrodas uz vienas taisnes. 2. Nosaki un pamato četrstūra *ABCD* veidu, ja $A(0;2;-1)$, $B(-2;-1;0)$, $C(0;-3;4)$, $D(1;1;1)$.

Temata vienuma nosaukums	Skolēna darbības un uzdevumu piemēri
Vektoru skalārais reizinājums	Definē leņķi starp vektoriem. Nosaka leņķi starp vektoriem, izmantojot zināšanas par plaknes figūrām, to īpašībām un savstarpējo novietojumu telpā.
	Piemērs. Dots kubs $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Nosaki leņķi starp vektoriem: a) $\overrightarrow{DA_1}$ un $\overrightarrow{DC_1}$; b) $\overrightarrow{DA_1}$ un $\overrightarrow{DC}$; c) $\overrightarrow{DB_1}$ un $\overrightarrow{DB}$.
	Definē divu vektoru skalāro reizinājumu un vingrinās lietot definīciju. Pierāda, ka divu no nulles atšķirīgu vektoru skalārais reizinājums ir nulle tad un tikai tad, ja šie vektori ir perpendikulāri, formulē secinājumus par skalāro kvadrātu. Skaidro, kā skalārais kvadrāts ļauj izmantot vektorus ģeometrijas uzdevumu risināšanā. Skaidro un iespēju robežās pierāda vektoru skalārā reizinājuma īpašības. Lieto vektoru skalārā reizinājuma definīciju un īpašības, lai noteiktu un pierādītu plaknes figūru un telpisku ķermeņu īpašības, nezināmos lielumus, raksturotu savstarpējo novietojumu.
	Piemēri. 1. Tetraedra *SABC* šķautnes garums ir *a*. Punkti *K*, *L* ir attiecīgi šķautņu *SB* un *CB* viduspunkti. Aprēķini: a) $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CS}$; b) $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{SC}$; c) $\overrightarrow{KL}\cdot\overrightarrow{CS}$; d) $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{LK}$; e) $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{KL}$. 2. Zināms, ka vektors $\vec{a}+\vec{b}$ ir perpendikulārs vektoram $\vec{a}-\vec{b}$. Ko var secināt par vektoriem $\vec{a}$ un $\vec{b}$? 3. Aprēķini leņķi starp vienības vektoriem $\vec{i}$ un $\vec{j}$, ja vektori $\vec{a}$ un $\vec{b}$ ir savstarpēji perpendikulāri un a) $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}$ un $\vec{b}=5\vec{i}+4\vec{j}$; b) $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$ un $\vec{b}=8\vec{i}+7\vec{j}$. 4. Regulāras trijstūra prizmas $ABCA_1B_1C_1$ pamata šķautnes garums ir 2*a*, bet sānu šķautnes garums ir *a*. Aprēķini leņķi starp taisnēm AB_1 un BC_1.
	Pierāda, ka divu vektoru skalārais reizinājums ir vienāds ar doto vektoru atbilstošo koordinātu reizinājumu summu. Lieto iegūto sakarību, lai noteiktu un pierādītu plaknes figūru un telpisku ķermeņu īpašības, nezināmos lielumus, raksturotu savstarpējo novietojumu.
	Piemēri. 1. Nosaki *k* vērtību, lai vektori $\vec{a}=(k;2;-8)$ un $\vec{b}=(k;k;6)$ būtu perpendikulāri. 2. Pierādi, ka punkti $A(-1;0;2)$, $B(1;-3;8)$, $C(-2;3;6)$, $D(-4;6;0)$ atrodas vienā plaknē un taisnes *AC* un *BD* ir perpendikulāras.

Temata vienuma nosaukums	Skolēna darbības un uzdevumu piemēri
Līnijas vienādojums	Vispārīgi raksturo taišņu savstarpējo novietojumu (krustiskas, paralēlas, sakrītošas), ja doti to vienādojumi. Pierāda, ka vienādojums taisnei, kas tiek vilkta caur punktu $(x_0;y_0)$ perpendikulāri vektoram $(A;B)$, ir izsakāms formā $Ax+By+C=0$ un šāda taisne ir tikai viena. Skaidro, kā izmantot zināšanas par leņķa starp vektoriem aprēķināšanu, lai aprēķinātu leņķi starp divām taisnēm, ja doti to vienādojumi. Lieto saistību starp taisni un tai perpendikulāru vektoru.
	Piemēri. 1. Dotas trijstūra *ABC* virsotņu koordinātas $A(-3;-1)$, $B(2;7)$, $C(5;4)$. Nosaki vienādojumu taisnei, kas vilkta caur virsotni *C* perpendikulāri malai *AB*. 2. Pierādi formulu attālumam no dotā punkta līdz taisnei plaknē. 3. Aprēķini attālumu starp taisnēm $3x-4y+20=0$ un $3x-4y-4=0$. 4. Pierādi, ka vienādojums taisnei, kas koordinātu asis krusto punktos $A(a;0)$ un $B(0;b)$, ir izsakāms formā $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.
	Pēta, skaidro un pamato analītiski uzdotu sakarību punktu ģeometrisko vietu koordinātu plaknē, izmantojot jau zināmo un formulējot pamatotus spriedumus (punktu ģeometriskā vieta veidojas no taisnēm vai taišņu nogriežņiem). Sprież un pamato analītisko izteiksmi vai izteiksmes pēc līniju attēlojumiem koordinātu planē (taisne, figūra, kas sastāv no taisnēm vai taišņu nogriežņiem).
	Piemēri. 1. Nosaki un pamato to punktu ģeometrisko vietu, kas uzdota ar sakarību: a) $x^2-y^2=0$; b) $\lvert x\rvert-\lvert y\rvert=3$. 2. Attēlo koordinātu plaknē vienādojuma ar diviem mainīgajiem visu atrisinājumu kopu a) $(x-3)(y+2)=0$, $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert=4$.
	Atrod uzziņu literatūrā informāciju par otrās kārtas līniju vispārīgo veidu un raksturo jau pazīstamas otrās kārtas līnijas, piemēram, $(x-2)^2+y^2=9$, $y-2x^2=3$, $xy=4$. Iegūst informāciju par elipses vispārīgo vienādojumu.

<table>
<tr><th>Temata vienuma nosaukums</th><th>Skolēna darbības un uzdevumu piemēri</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Vektoru un koordinātu metodes lietojums praktiskos, citu jomu kontekstos</td><td>Lieto zināšanas analītiskajā ģeometrijā praktiskos kontekstos, piemēram, objektu navigācija uz ūdens vai gaisā.</td></tr>
<tr><td>

Piemērs (lieto vektorus un koordinātu metodi praktiskos vai citu jomu kontekstos).



Garuma vienība ir 1 km. Vektors $(1;\ 0)$ norāda pārvietojumu uz austrumiem, bet vektors $(0;\ 1)$ – uz ziemeļiem.

Zīmējumā parādīts naftas tankkuģa *Aristides* ceļš attiecībā pret Orto ostu, kas atrodas punktā $(0;\ 0)$. Pārvietošanās laikā tankkuģa *Aristides* koordinātas nosaka sākuma stāvokļa koordinātas $(0;\ 28)$ un pārvietojuma vektors $\vec{a}=(6;-8)$ stundas laikā. Laiks ir stundu skaits pēc pulksten 12.00.

a) Nosaki tankkuģa *Aristides* atrašanās vietas koordinātas pulksten 13.00.

b) Uzraksti tannkuģa *Aristides* ceļa vienādojumu formā $Ax+By=C$.

Zināms, ka kravas kuģis *Boadicea* ir nekustīgs punktā ar koordinātēm $(18;\ 4)$.

Ar aprēķiniem parādi, ka abi kuģi sadursies, ja netiks mainīti nosacījumi, un nosaki sadursmes laiku. Lai izvairītos no sadursmes, kravas kuģis *Boadicea* pulksten 13.00 sāk pārvietoties par vektoru $\vec{b}=(15;12)$ stundas laikā.

c) Nosaki attālumu starp abiem kuģiem pulksten 15.00.

</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Kompleksas matemātiska konteksta problēmas</td><td>Risina kompleksu problēmu, kuras atrisināšanai nepieciešams saistīt analītiskās ģeometrijas un matemātiskās analīzes elementus.</td></tr>
<tr><td>

Piemēri.

1. Taisne, kas vilkta caur punktu $M(2;\ 3)$ krusto koordinātu asis punktos $A(a;\ 0)$ un $B(0;\ b)$, kur $a>0$, $b>0$. Izpēti un pamato, vai eksistē trijstūris *ABO* (*O* – koordinātu sākumpunkts) ar lielāko iespējamo laukumu vai ar mazāko iespējamo laukumu.
2. Hiperbolas $y=\dfrac{2}{x}$ brīvi izraudzītā punktā novilkta pieskare, kas koordinātu asis krusto punktos *A* un *B*. Pierādi, ka trijstūra *AOB* laukums nav atkarīgs no pieskaršanās punkta izvēles (*O* – koordinātu sākumpunkts).

</td></tr>
<tr><td>Risina kompleksu problēmu, kuras atrisināšanai nepieciešams saistīt analītiskās ģeometrijas un algebras elementus.</td></tr>
<tr><td>Piemērs. Nosaki un attēlo koordinātu plaknē nevienādības $5xy-x^2-6y^2>0$ visu atrisinājumu kopu.</td></tr>
</table>

1. Matemātiskā indukcija	2. Varbūtība un statis-tika II	Algebra II			Matemātiskās analīzes elementi		8. Trigono-metrija II	9. Analītiskā ģeometrija II	Ģeometrija II	
		3. Virknes un eksponent-funkcija	4. Pakāpes funkcija un logaritmiskā funkcija	5. Daļveida funkcija un algebriskie pārveidojumi	6. Atvasinā-jums un tā lietojums	7. Integrālis un tā lieto-jums			10. Plani-metrija	11. Stereo-metrija

10. Planimetrija

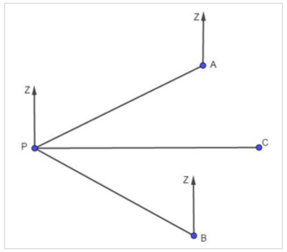
Temata apguvei ieteicamais laiks: 17–19 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: sistematizēt, paplašināt zināšanas planimetrijā, pilnveidot pierādīšanas prasmes un lietot tās jaunās situācijās.

Temata izpētes jautājumi

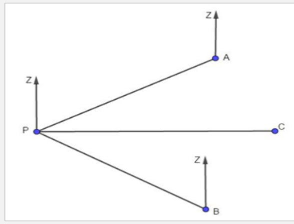
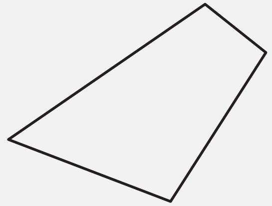
Kā planimetrijas zināšanas izmanto navigācijā, mērniecībā?
Kādas sakarības ir starp leņķiem un nogriežņiem, kas saistīti ar riņķa līniju?
Kā nogriezni ar cirkuli sadalīt divos nogriežņos, ievērojot t.s. zelta griezuma proporciju?

Sasniedzamie rezultāti

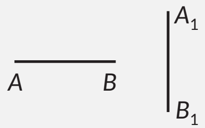
Sasniedzamais rezultāts	Uzdevumu piemēri
Lieto planimetrijas zināšanas praktiskos kontekstos (navigācija, mērniecība u. tml.); izmanto doto informāciju vai atrod trūkstošo. (M.A.1.1.1.; M.A.2.1.1.)	No laivu piestātnes *P* laiva *A* ir 9,31 km attālumā ar azimutu 64°, bet laiva *B* ir 9,02 km attālumā ar azimutu 119° (sk. attēlu). Piestātnē saņēma zvanu ar lūgumu pēc palīdzības no laivas *C*, kas ir 11,13 km attālumā no piestātnes ar azimutu 90°. Kura no laivām – *A* vai *B* – ir tuvāk laivai *C*? Pa kādu azimutu jādodas tuvākajai laivai, lai tā sniegtu palīdzību laivai *C*? 
Pierāda un lieto sakarības starp lielumiem, kas saistīti ar riņķi. (M.A.6.1.1.; M.A.2.3.2.; M.A.2.3.3.)	1. Sekantes *SE* un *SF* krusto riņķi attiecīgi punktos E_1 un F_1. Izpēti, formulē un pierādi sakarību starp $\sphericalangle ESF$, $\overset{\frown}{EF}$ un $\overset{\frown}{E_1F_1}$. 2. Dots apgalvojums: ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju tad un tikai tad, ja četrstūra pretējo leņķu lielumu summa ir 180°. Formulē un pierādi tiešo un apgriezto apgalvojumu.
Pierāda un lieto sakarības starp lielumiem trijstūros, četrstūros, ievilktos, apvilktos regulāros daudzstūros. (M.A.6.1.1.; M.A.2.3.2.; M.A.2.3.3.)	1. Pierādi, ka taisnleņķa trijstūra augstums, kas novilkts pret hipotenūzu, ir vidējais proporcionālais starp katešu projekcijām uz hipotenūzas. 2. Aprēķini regulāra trijstūra laukumu, ja trijstūrī ievilktās riņķa līnijas rādiuss ir *r*.
Lieto ģeometriskos pārveidojumus un to īpašības. (M.A.6.1.2.)	1. Pierādi, ka hordas, kas balstās uz vienādiem lokiem, ir vienāda garuma. 2. Attēlo taisni $y=-2x+3$ paralēlā pārnesē un uzraksti iegūtās taisnes vienādojumu, ja paralēlās pārneses vektors ir $\vec{p}=(1;-2)$.
Risina kompleksu matemātisku problēmu, saistot satura elementus jaunā situācijā. (M.A.1.2.3.; M.A.1.2.4.; M.A.2.1.1.)	1. Doti punkti $A(0;2;3)$; $B(\sqrt{15};5;4)$; $C(0;6;6)$. Pamato, ka trijstūris *ABC* ir vienādsānu, aprēķini tā laukumu un augstuma *BK* garumu. 2. Pierādi apgalvojumu: ja plaknē novilkts galīgs skaits taišņu, tad plakni var iekrāsot divās krāsās tā, lai divi plaknes apgabali ar kopīgu malu būtu iekrāsoti atšķirīgās krāsās (apgabali, kuriem ir kopīga tikai viena virsotne, var būt iekrāsoti vienā krāsā). 3. Vienādsānu trijstūra pamata malas garums ir 2*a* un garums augstumam pret pamatu ir 2*a*. Trijstūrī ievilkts taisnstūris *ABCD* tā, ka mala *AD* atrodas uz trijstūra pamata malas, bet virsotnes *B* un *C* – uz trijstūra sānu malām. Nosaki un pamato lielāko iespējamo taisnstūra *ABCD* laukumu.

Jēdzieni: ievilkts leņķis, centra leņķis, horda, sekante, hordas-pieskares leņķis, leņķis starp sekantēm, vidējais ģeometriskais.

Temata apguves norise

Temata vienuma nosaukums	Skolēna darbības un uzdevumu piemēri
Planimetrijas zināšanu lietojums praktiskos kontekstos	Lieto planimetrijas zināšanas praktiskos kontekstos, kas saistīti ar navigāciju, mērniecību. Piemēri. 1. No laivu piestātnes laiva *A* ir 9,31 km attālumā ar azimutu 64°, bet laiva *B* ir 9,02 km attālumā ar azimutu 119° (sk. attēlu). Piestātnē saņēma zvanu ar lūgumu pēc palīdzības no laivas *C*, kas ir 11,13 km attālumā no piestātnes ar azimutu 90°. Kura no laivām – *A* vai *B* – ir tuvāk laivai *C*? Pa kādu azimutu jādodas tuvākajai laivai, lai tā sniegtu palīdzību laivai *C*?  2. Tēvs diviem dēliem mantojumā atstāja zemes gabalu, kuram ir izliekta četrstūra forma (sk. zīmējumu). Tas jāsadala tā, lai katrs no dēliem iegūtu tieši pusi no visas zemes gabala platības (katram dēlam piešķirtā zeme var sastāvēt no vairākām daļām, arī no tādām, kuras nesaskaras viena ar otru). a) Attēlo zīmējumā un īsi paskaidro, kā var sadalīt zemes gabalu atbilstoši nosacījumiem. b) Pamato, ka izveidotajā sadalījumā katrs no dēliem iegūs tieši pusi no visas zemes gabala platības. 
Ar riņķa līniju saistīti leņķi un nogriežņi	Definē centra leņķi un ievilktu leņķi. Skaidro jēdzienus un saistību starp tiem: riņķa līnijas garums, pilns leņķis, riņķa līnijas loks, riņķa līnijas loka garums, riņķa līnijas loka leņķiskais lielums, centra leņķis, centra leņķa lielums, ievilkts leņķis. Pēta, formulē un pierāda sakarības starp leņķiem, kas saistīti ar riņķa līniju. Piemēri. 1. Dots, ka *AB* ir diametrs, *O* – riņķa centrs un *C* – punkts uz riņķa līnijas. Pierādi, ka a) $\sphericalangle ABC = \frac{1}{2}\sphericalangle AOC$; b) uzdevumā a) pierādītais apgalvojums – ievilkta leņķa lielums ir puse no centra leņķa lieluma, ja tie abi balstās uz vienu un to pašu riņķa līnijas loku – ir patiess arī tad, ja riņķa centrs atrodas ievilktā leņķa iekšpusē vai ārpusē. 2. Izmanto 1. uzdevumā pierādīto un formulē secinājums par ievilkto leņķu $\sphericalangle AB_1C$, $\sphericalangle AB_2C$, $\sphericalangle AB_3C$, ... lielumiem, ja *A*, *C*, B_1, B_2, B_3, ... ir punkti uz vienas riņķa līnijas. Salīdzini ar citu formulētajiem secinājumiem, ja nepieciešams, precizē rezultātus. 3. Par trijstūri *ABC* zināms, ka $\sphericalangle A = \alpha$ un $BC = a$. Aprēķini ap trijstūri *ABC* apvilktās riņķa līnijas rādiusu.

Temata vienuma nosaukums	Skolēna darbības un uzdevumu piemēri
Ar riņķa līniju saistīti leņķi un nogriežņi	Definē hordu, sekanti. Pēta, formulē un pierāda sakarības starp leņķiem, ja tie saistīti ar riņķa pieskari, hordu vai sekanti.
	Piemēri. 1. Dots, ka hordas *AB* un *CD* krustojas punktā *P*. Pierādi, ka $\sphericalangle CPB = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{CB} + \overset{\smile}{AD})$. 2. Sekantes *SE* un *SF* krusto riņķi attiecīgi punktos E_1 un F_1. Izpēti, formulē un pierādi sakarību starp $\sphericalangle ESF$, $\overset{\smile}{EF}$ un $\overset{\smile}{E_1F_1}$. 3. Dots apgalvojums: ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju tad un tikai tad, ja četrstūra pretējo leņķu lielumu summa ir 180°. a) Formulē tiešo un apgriezto apgalvojumu. b) Pierādi apgalvojumu patiesumu. Komentārs. Izskati iespēju izmantot arī pierādījumu no pretējā.
	Lieto trijstūru līdzību un jau pierādītās figūru īpašības jaunās situācijās, lai pierādītu sakarības starp nogriežņiem, kas saistīti ar riņķa līniju.
	Piemēri. 1. Dots, ka hordas *AB* un *CD* krustojas punktā *P*. Pierādi, ka $AP \cdot PB = CP \cdot PD$. 2. Pierādi apgalvojumu: ja četrstūris ir apvilkts ap riņķi, tad tā pretējo malu summas ir vienāda garuma.
Sakarības starp nogriežņiem un leņķiem trijstūrī	Pierāda Pitagora teorēmu, kosinusu teorēmu, lietojot vektorus. Pēta, formulē un pierāda sakarības starp nogriežņiem un leņķiem trijstūrī.
	Piemēri. 1. Vai eksistē taisnleņķa trijstūris, kura hipotenūzas garums ir 5 cm, bet garums augstumam, kas novilkts pret hipotenūzu, ir: a) 2 cm, b) 3 cm? Ja trijstūris eksistē, uzzīmē to un pamato tā atbilstību dotajiem nosacījumiem. Ja trijstūris neeksistē, pamato to. 2. Pierādi, ka taisnleņķa trijstūra augstums, kas novilkts pret hipotenūzu, ir vidējais proporcionālais starp katešu projekcijām uz hipotenūzas. 3. Atrodi informāciju un veido apkopojumu par formulām/sakarībām, kas ļauj aprēķināt garumu patvaļīga trijstūra raksturīgajiem nogriežņiem (augstums, mediāna, bisektrise). Veido vai atrodi un skaidro citiem pierādījumu vienai no formulām, uzklausi citu veidotos pierādījumus.
	Pierāda un lieto sakarības starp raksturīgajiem nogriežņiem regulārā trijstūrī, kvadrātā, regulārā sešstūrī, regulārā *n*-stūrī.
	Piemēri. 1. Aprēķini regulāra trijstūra laukumu, ja trijstūrī ievilktās riņķa līnijas rādiuss ir *r*. 2. Ap kvadrātu apvilkta riņķa laukums ir *S*. Aprēķini kvadrātā ievilkta riņķa laukumu. 3. Pierādi ap regulāru *n*-stūri apvilktās riņķa līnijas rādiusa aprēķināšanas formulu $R = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180°}{n}}$.

Temata vienuma nosaukums	Skolēna darbības un uzdevumu piemēri
Sakarības starp nogriežņiem un leņķiem trijstūrī	Pierāda un lieto plaknes figūru laukuma aprēķināšanas formulas, lieto laukuma īpašības, plaknes figūru īpašības. Piemēri. 1. Pierādi trijstūra laukuma aprēķināšanas formulu $S = r \cdot p$, kur r – ievilktās riņķa līnijas rādiuss, p – pusperimetrs. 2. Pierādi paralelograma laukuma aprēķināšanas formulu $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha$, kur d_1, d_2 – paralelograma diagonāles un α – leņķis starp tām.
Ģeometriskie pārveidojumi	Meklē informāciju uzziņu literatūrā un veido kopsavilkumu par ģeometriskajiem pārveidojumiem un to īpašībām. Skaidro ģeometriskos pārveidojumus (paralēlā pārnese, pagrieziens, aksiālā simetrija, centrālā simetrija, homotētija) kā funkcijas, kuru definīcijas kopa ir plaknes punkti. Veido ģeometrisko pārveidojumu īpašību apkopojumu, izmantojot uzziņu literatūru. Lieto ģeometriskos pārveidojumus, t. sk. plaknes figūru īpašību pierādīšanai, nezināmo lielumu noteikšanai. Piemēri. 1. Raksturo funkciju $y = f(\lvert x \rvert)$ un $y = \lvert f(x) \rvert$ grafikus kā funkcijas $y = f(x)$ grafika ģeometriskos pārveidojumus. 2. Attēlo taisni $y = -2x + 3$ paralēlā pārnesē un uzraksti iegūtās taisnes vienādojumu, ja paralēlās pārneses vektors ir $\vec{p} = (1; -2)$. 3. Koordinātu plaknē doti punkti $A(1;\ 2)$ un $B(4;\ 5)$. Konstruē punktu K tā, lai lauztās līnijas AKB garums būtu vismazākais, ja K atrodas a) uz taisnes $x = 0$; b) uz taisnes $y = x$. 4. Vienādsānu taisnleņķa trijstūra katete ir 4 cm. Attēlo to pagriezienā par 45° ap taisnā leņķa virsotni un aprēķini abu trijstūru kopīgās daļas laukumu. 5. Taisnstūrī *ABCD* ievilkts taisnstūris *EBFO* tā, ka abiem taisnstūriem ir kopīgs leņķis *B*, bet virsotne *O* ir taisnstūra *ABCD* diagonāļu krustpunkts. Pierādi, ka abi taisnstūri ir homotētiski, un nosaki homotētijas koeficientu. 6. Kā ar ģeometriskajiem pārveidojumiem (varbūt vairākiem), nelietojot pagriezienu, nogriezni *AB* iespējams attēlot par nogriezni A_1B_1 (sk. attēlu)?  7. Pierādi, ka hordas, kas balstās uz vienādiem lokiem, ir vienāda garuma.

Temata vienuma nosaukums	Skolēna darbības un uzdevumu piemēri
Kompleksas matemātikas problēmas	Veido un pamato konstrukcijas gaitu jaunā situācijā.
	Piemērs. Veic izpēti un apraksti, kā ar cirkuli un lineālu bez skalas dotu nogriezni *AB* sadalīt divos nogriežņos, ievērojot t.s. zelta griezuma proporciju, t. i. konstruēt tādu nogriežņa *AB* punktu *C*, ka $AB : AC = AC : CB$.
	Risina uzdevumu, kura atrisināšanai nepieciešams saistīt planimetriju un kombinatoriku. Lieto MIP, lai pierādītu vispārīga apgalvojuma patiesumu planimetrijā.
	Piemēri. 1. Izliektā a) astoņstūrī, b) *n*- stūrī novilktas visas diagonāles. Cik krustpunktu veidojas, ja zināms, ka katrā krustpunktā krustojas tieši divas diagonāles? 2. Pierādi apgalvojumu: ja plaknē novilkts galīgs skaits taišņu, tad plakni var iekrāsot divās krāsās tā, lai divi plaknes apgabali ar kopīgu malu būtu iekrāsoti atšķirīgās krāsās (apgabali, kuriem ir kopīga tikai viena virsotne, var būt iekrāsoti vienā krāsā).
	Risina uzdevumu, kura atrisināšanai nepieciešams saistīt planimetriju un matemātisko analīzi.
	Piemēri. 1. Izliekta četrstūra diagonāļu garumu summa ir *a*. Nosaki lielāko iespējamo šī četrstūra laukumu. 2. Vienādsānu trijstūra pamata malas garums ir 2*a* un garums augstumam pret pamatu – 2*a*. Trijstūrī ievilkts taisnstūris *ABCD* tā, ka mala *AD* atrodas uz trijstūra pamata malas, bet virsotnes *B* un *C* uz trijstūra sānu malām. Nosaki un pamato lielāko iespējamo taisnstūra *ABCD* laukumu.

1. Matemātiskā indukcija	2. Varbūtība un statis-tika II	Algebra II			Matemātiskās analīzes elementi		8. Trigono-metrija II	9. Analītiskā ģeometrija II	Ģeometrija II	
		3. Virknes un eksponent-funkcija	4. Pakāpes funkcija un logaritmiskā funkcija	5. Daļveida funkcija un algebriskie pārveidojumi	6. Atvasinā-jums un tā lietojums	7. Integrālis un tā lieto-jums			10. Plani-metrija	11. Stereo-metrija

11. Stereometrija

Temata apguvei ieteicamais laiks: 19–21 mācību stunda.

Temata apguves mērķis: padziļināt izpratni par aksiomātisku sistēmu un attēlu veidošanu, izmantojot paralēlo projicēšanu, pētīt telpisko ķermeņu un to kombināciju īpašības, eksistenci, raksturīgos lielumus un sakarības starp tiem. Veidot priekšstatu par "citādu" ģeometriju eksistenci.

Temata izpētes jautājumi
Kā pierādīt telpisku ķermeņu tilpuma formulas, izmantojot noteikto integrāli?
Kā konstruēt un pamatot daudzskaldņa šķēlumu ar plakni?
Vai ģeometrijā apgūtās sakarības un teorēmas ir patiesas, ja "ļoti lielas" figūras iztēlojas uz sfēras?

Sasniedzamie rezultāti

Sasniedzamais rezultāts	Uzdevumu piemēri
Raksturo un pamato taišņu un plakņu savstarpējo novietojumu telpā, lieto pierādījumu no pretējā. (M.A.6.3.1.; M.A.2.3.2.; M.A.2.3.3.)	1. Pierādi apgalvojumu: ja taisnes *AB* un *CD* krustojas, tad taisnes *AC* un *BD* atrodas vienā plaknē. 2. Daudzstūra divas malas ir paralēlas plaknei. Vai var apgalvot, ka daudzstūra visas malas ir paralēlas plaknei, ja: a) dotās malas ir blakusmalas, b) dotās malas nav blakusmalas? 3. Aprēķini leņķi starp kuba blakus skaldņu diagonālēm, kuras nekrustojas.
Skaidro, veido daudzskaldņu šķēlumu ar plakni, izmantojot paralēlo un centrālo projicēšanu, pamato konstrukcijas gaitu. (M.A.6.3.2.; M.A.6.3.3.)	1. Zināms, ka a) tetraedru, b) regulāru trijstūra prizmu šķeļ ar plakni. Nosaki, kādas plaknes figūras var veidoties šķēlumā, un pamato, ka citu iespēju nav. 2. Dots kubs $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Konstruē un pamato kuba šķēlumu ar plakni *KLM*, ja punkti *K*, *L* un *M* atrodas attiecīgi uz šķautnēm AB, BB_1, A_1D_1.
Pēta, formulē, pierāda un lieto telpisku ķermeņu un to kombināciju īpašības, nosaka raksturīgos lielumus un sakarības starp tiem. (M.A.6.3.4.; M.A.6.3.5.; M.A.6.3.6.; M.A.6.3.7.)	1. Paralēlskaldņa pamats ir kvadrāts. Viena no augšējā pamata virsotnēm atrodas vienādā attālumā no visām četrām apakšējā pamata virsotnēm. Pamata malas garums ir *a*, bet sānu šķautnes agrums ir *b*. Aprēķini paralēlskaldņa pilnas virsmas laukumu. 2. Vienādsānu trijstūris, kura leņķis starp sānu malām ir α, rotē ap taisni, kas iet caur virsotni un ir paralēla trijstūra pamatam. Aprēķini rotācijas ķermeņa pilnu virsmu, ja trijstūra augstums pret pamatu ir *h*. 3. Formulē sakarības starp abu ķermeņu lielumiem, ja zināms, ka cilindrs ievilkts konusā tā, ka cilindra apakšējais pamats atrodas uz konusa pamata.
Risina kompleksu problēmu, saistot satura elementus jaunā situācijā. (M.A.2.3.1.; M.A.2.1.1.)	1. Lodē ar rādiusu *R* ievelc cilindru ar lielāko tilpumu. 2. Nosaki un pamato taisnstūra paralēlskaldņa sānu virsmas laukuma mazāko iespējamo skaitlisko vērtību, ja zināms, ka taisnstūra paralēlskaldņa pamata perimetrs ir 20 dm un tilpums ir 80 dm^3. 3. Leņķi, kurus veido taisnstūra paralēlskaldņa diagonāle ar skaldnēm, kuras iziet no vienas virsotnes, ir α, β, γ. Pierādi, ka $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$.
Jēdzieni: aksiomātiska sistēma, slīpa prizma, normālšķēlums, paralēlskaldnis.	

Temata apguves norise

Temata vienuma nosaukums	Skolēna darbības un uzdevumu piemēri
Taišņu un plakņu savstarpējais novietojums	Lasa aksiomas, kas raksturo punktu, taišņu un plakņu savstarpējo novietojumu telpā (piederības aksiomas), un skaidro tās, formulē secinājumus no tām. Pierāda, izmantojot piederības aksiomas un jau pierādītās teorēmas. Skaidro, kas ir aksiomātiska sistēma un kā tā "strādā". Argumentēti diskutē par "citām ģeometrijām".
	Piemēri. 1. Pierādi teorēmu: caur divām krustiskām taisnēm var novilkt vienu vienīgu plakni. 2. Dots, ka taisne *c* krusto divas krustiskas taisnes *a* un *b*, bet neiet caur to krustpunktu. Pierādi, ka taisne *c* atrodas vienā plaknē ar taisnēm *a* un *b*. 3. Dots, ka taisnes *AB* un *CD* krustojas. Pierādi, ka taisnes *AC* un *BD* atrodas vienā plaknē. 4. Sameklē un apkopo informāciju par to, kādi elementi veido aksiomātisku sistēmu. 5. Sameklē, apkopo un prezentē informāciju par Eiklīda ģeometrijas aksiomām un 5. postulāta (aksiomas) problēmu. 6. Veido piemērus un pamatojumus diskusijas jautājumam: Vai visas ģeometrijā apgūtās sakarības un teorēmas ir patiesas, ja "ļoti lielas" figūras iztēlojas uz sfēras?
	Pēta, formulē un pamato punktu, taišņu un plakņu savstarpējo novietojumu telpā atbilstoši dotajiem nosacījumiem. Pierāda atsevišķas teorēmas, kas raksturo taišņu un plakņu savstarpējo novietojumu telpā. Pierāda triju perpendikulu teorēmu. Nosaka leņķi starp šķērsām taisnēm.
	Piemēri. 1. Telpā pieci punkti izvietoti tā, ka veidojas daudzskaldnis. Izpēti, kādi daudzskaldņi var veidoties. Pamato skaldņu skaitu un to, kāda veida daudzstūri ir skaldnes katrā no gadījumiem. 2. Dots kubs $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Nosaki leņķi starp taisnēm B_1D un AD_1.
Figūras attēlošana ar paralēlās projicēšanas metodi	Konstruē figūru attēlus ar paralēlās projicēšanas metodi, lietojot paralēlās projicēšanas īpašības, zināšanas par trijstūra un riņķa līnijas attēliem paralēlā projicēšanā. Izmanto informāciju mācību literatūrā.
	Piemērs. Konstruē ar paralēlās projicēšanas metodi: a) vienādsānu trijstūri, kurā novilkta mediāna pret pamata malu, ja dots riņķa attēls; b) ap riņķi apvilktu kvadrātu, ja dots riņķa un vienas malas attēls; c) riņķa līnijā ievilktu regulāru trijstūri, ja dots riņķa attēls.

Temata vienuma nosaukums	Skolēna darbības un uzdevumu piemēri
Daudzskaldņu šķēlums ar plakni	Pēta, formulē un pamato, kādas plaknes figūras var veidoties, telpisku ķermeni šķeļot ar plakni.
	Piemērs. Zināms, ka a) tetraedru, b) regulāru trijstūra prizmu šķeļ ar plakni. Izpēti, kādas plaknes figūras var veidoties šķēlumā, un pamato, ka nav citu iespēju.
	Konkrētos piemēros, ja nepieciešams – skolotāja vadīti, veido prizmas vai piramīdas šķēlumu ar plakni. Patstāvīgi formulē algoritmu šķēluma veidošanai – pēdu metodi. Lieto pēdu metodi šķēlumu konstruēšanai.
	Piemērs. Dots kubs $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Konstruēt kuba šķēlumu ar plakni *KLM*, ja punkti *K*, *L* un *M* atrodas attiecīgi uz šķautnēm *AB*, BB_1, A_1D_1.
Sakarības starp lielumiem telpiskos ķermeņos un to kombinācijās	Pēta, algebriski modelē un pamato sakarības starp lielumiem telpiskos ķermeņos, nosaka un pamato lielumu iespējamās vērtības.
	Piemēri. 1. Regulāras četrstūra prizmas diagonāle veido leņķi α ar prizmas sānu skaldni. a) Nosaki un pamato, vai eksistē regulāra četrstūra prizma, kurai $\alpha = 60°$? b) Nosaki un pamato leņķa α iespējamās vērtības. 2. Regulāras trijstūra piramīdas divplakņu kakta leņķis starp sānu skaldnēm ir α. Nosaki un pamato pieļaujamās α vērtības.
	Definē slīpu prizmu, skaidro un pamato prizmas eksistenci, atbilstoši nosacījumiem. Skaidro virsmas laukuma aprēķināšanu. Lieto slīpas prizmas sānu virsmas aprēķināšanas formulu. Pierāda slīpas prizmas tilpuma formulu, izmantojot noteikto integrāli.
	Piemēri. 1. Vai eksistē slīpa trijstūra prizma, kuras: a) viena sānu skaldne ir taisnstūris, bet pārējās – paralelogrami; b) viena sānu skaldne ir perpendikulāra pamata plaknei, bet pārējās divas skaldnes nav perpendikulāras pamata plaknei? 2. Paralēlskaldņa pamats ir kvadrāts. Viena no augšējā pamata virsotnēm atrodas vienādā attālumā no visām četrām apakšējā pamata virsotnēm. Pamata malas garums ir *a*, bet sānu šķautnes agrums ir *b*. Aprēķini paralēlskaldņa pilnas virsmas laukumu. 3. Pierādi slīpas prizmas tilpuma formulu, izmantojot noteikto integrāli. Novieto *Ox* asi perpendikulāri prizmas pamatam. 4. Slīpas trijstūra prizmas sānu skaldnes ir perpendikulāras un to kopējās šķautnes garums ir *a*, bet šo skaldņu laukumi ir *P* un *S*. Aprēķini prizmas tilpumu.

Temata vienuma nosaukums	Skolēna darbības un uzdevumu piemēri
Sakarības starp lielumiem telpiskos ķermeņos un to kombinācijās	Apzina un apkopo zināšanas par rotācijas ķermeņiem, nosauc formulas, kuru pierādījumi nav aplūkoti. Veido rotācijas ķermeņa zīmējumu, ja zināma rotācijas ass un plaknes figūra, kas rotē ap to. Raksturo iegūto rotācijas ķermeņu īpašības. Aprēķina rotācijas ķermeņa nezināmos lielumus, t. sk. izmantojot noteikto integrāli.
	Piemēri. 1. Pierādi nošķelta konusa un lodes tilpuma aprēķināšanas formulas, izmantojot noteikto integrāli. 2. Raksturo, no kādām virsmām sastāv rotācijas ķermeņa virsma, ja tas rodas, rotējot: a) rombam ap diagonāli; b) dažādmalu taisnleņķa trijstūrim ap hipotenūzu; c) trapecei ap garāko pamatu; d) trapecei ap īsāko pamatu; d) riņķa sektoram ap vienu no rādiusiem. 3. Vienādsānu trijstūris, kura leņķis starp sānu malām ir α, rotē ap taisni, kas iet caur virsotni un ir paralēla trijstūra pamatam. Aprēķini rotācijas ķermeņa pilnu virsmu, ja: a) trijstūra augstums pret pamatu ir *h*; b) trijstūra laukums ir *S*.
	Pamato telpisku ķermeņu kombinācijas eksistenci (iespēju ievilkt, apvilkt), formulē un pamato sakarības starp abu ķermeņu lielumiem (prizma un cilindrs, piramīda un konuss, prizma un lode, piramīdā ievilkta lode, konuss un lode, cilindrs un lode, konusā ievilkts cilindrs). Nosaka nezināmos lielumus, izmantojot sakarības starp ķermeņu lielumiem.
	Piemēri. 1. Formulē nosacījumus par taisnas prizmas īpašībām un lielumiem, lai to varētu ievilkt cilindrā. 2. Formulē nosacījumus par trijstūra piramīdas īpašībām un lielumiem, lai ap to varētu apvilkt konusu. 3. Formulē sakarības starp abu ķermeņu lielumiem, ja zināms, ka regulāra trijstūra prizma ievilkta lodē. 4. Formulē sakarības starp abu ķermeņu lielumiem, ja zināms, ka cilindrs ievilkts konusā tā, ka cilindra apakšējais pamats atrodas uz konusa pamata.
Kompleksas matemātiskas problēmas	Risina kompleksu problēmu, kuras atrisināšanai nepieciešams saistīt matemātiskās analīzes un stereometrijas elementus jaunā situācijā.
	Piemēri. 1. Cilindra tilpums ir 64π cm^3. a) Izsaki cilindra pilnas virsmas laukumu kā funkciju $S(R)$, kur *R* – cilindra rādiuss; b) Nosaki un pamato cilindra pilnas virsmas laukuma mazāko vērtību. 2. Nosaki un pamato taisnstūra paralēlskaldņa sānu virsmas laukuma mazāko iespējamo skaitlisko vērtību, ja zināms, ka taisnstūra paralēlskaldņa pamata perimetrs ir 20 dm un tilpums ir 80 dm^3. 3. Lodē ar rādiusu *R* ievelc cilindru ar lielāko tilpumu.
	Risina kompleksu problēmu, kuras atrisināšanai nepieciešams saistīt trigonometrijas un stereometrijas elementus jaunā situācijā.
	Piemērs. Leņķi, kurus veido taisnstūra paralēlskaldņa diagonāle ar skaldnēm, kuras iziet no vienas virsotnes ir α, β, γ. Pierādi, ka $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$.

Pielikumi

1. pielikums

Mācību priekšmetu kursu programmu paraugos lietotie kodi

Atsaucei uz standartu1 mācību priekšmetu kursu programmu paraugos izmantoti šādi plānoto skolēnam sasniedzamo rezultātu (SR) un lielo ideju (Li) kodi. (Standarta pielikumi, kuros lietoti šie kodi, atrodami Skola2030 tīmekļa vietnē.)

SR kodi

Piemērs:

VL.O.2.1.

VL.
Mācību joma (visu mācību jomu apzīmējumus sk. tabulā)

O.
Kursa apguves līmenis (visu kursu apguves līmeņu apzīmējumus sk. tabulā)

2.1.
Mācību jomas SR kārtas numurs standartā

$\boxed{2.1.}$ Izvēlas, atlasa un izmanto informāciju no dažādiem avotiem sava teksta izveidei saskaņā ar konkrētajām vajadzībām un mācību mērķiem.	2.1. Lai daudzpusīgi izzinātu noteiktu problēmu, jautājumu vai tematu un veidotu savu tekstu, mērķtiecīgi izvēlas, kārto, analizē un vērtē informāciju, salīdzinot dažādos avotos publicēto tekstu saturu un tajos izmantotos valodas līdzekļus.	2.1. Pēta valodas un literatūras jautājumu atspoguļojumu plašsaziņas līdzekļos, lai pēc noteiktiem kritērijiem izvērtētu informāciju un veidotu spriedumus par šo ziņu kvalitāti, aktualitāti un izmantojamību savu tekstu izveidei.

Li kodi

Piemērs:

VSK.S.Li.6.

VSK.
Vispārējās vidējās izglītības pakāpe

S.
Mācību joma

Li.6.
Mācību jomas SR kārtas numurs standartā

$\boxed{6.}$ Jebkurš informācijas avots, kas ataino norises sabiedrībā pagātnē un mūsdienās, ir vērtējams kritiski.

Kursu apguves līmeņu apzīmējumi

V	Vispārīgais līmenis
O	Optimālais līmenis
A	Augstākais līmenis

Mācību jomu apzīmējumi

V	Valodu mācību joma	
	VL	Latviešu valoda
	VS	Svešvaloda
K	Kultūras izpratnes un pašizpausmes mākslā mācību joma	
S	Sociālā un pilsoniskā mācību joma	
D	Dabaszinātņu mācību joma	
M	Matemātikas mācību joma	
T	Tehnoloģiju mācību joma	
F	Veselības, drošības un fiziskās aktivitātes mācību joma	

1 Ministru kabineta 2019. gada 3. septembra noteikumi Nr. 416 "Noteikumi par valsts vispārējās vidējās izglītības standartu un vispārējās vidējās izglītības programmu paraugiem".

2. pielikums

Matemātika II kursā plānotie skolēnam sasniedzamie rezultāti

Matemātikas mācību jomas plānotie skolēnam sasniedzamie rezultāti augstākajā mācību satura apguves līmenī

1. Matemātikas valodu izmanto saziņai un zinātniskai jēdzienu, ideju, problēmu risinājumu aprakstīšanai	
1.1. Matemātisks teksts, pieņemtie simboli un apzīmējumi	1.1.1. Lasa daļēji pazīstama satura izvērstu matemātisku tekstu, nepazīstamu jēdzienu, simbolu vai apzīmējumu nozīmi noskaidro papildu avotos vai izmanto izpratni par teksta saturu kopumā, raksturo teksta mērķi un kritiski izvērtē satura atbilstību tam.
	1.1.2. Veido izvērstu matemātisku tekstu zinātniskajā valodā, ņemot vērā auditorijas sastāvu, lai raksturotu, skaidrotu un argumentētu idejas, aprakstītu pētāmo problēmu, pētījuma mērķi un gaitu, pamatotu iegūtos rezultātus un secinājumus.
1.2. Dažādi attēlošanas veidi (reprezentācijas)	1.2.1. Vispārīgi raksturo matemātisko objektu dažādu attēlošanas veidu lietojuma priekšrocības un ierobežojumus matemātisku problēmu risināšanā.
	1.2.2. Raksturo un pamato ekvivalentu un neekvivalentu pārveidojumu lietojumu vienādojumu, nevienādību un to sistēmu atrisināšanai.
	1.2.3. Raksturo iespējas koordinātu plaknē attēlotu līniju/plaknes figūru aprakstīt analītiski un otrādi – vienādojumu ar diviem mainīgajiem attēlot koordinātu plaknē. Veido spriedumus, vienu un to pašu matemātisko modeli attēlojot koordinātu plaknē un pierakstot analītiski.
	1.2.4. Formulē un pamato apgalvojumus, izmantojot saistību starp dažādu matemātikas apakšnozaru apgūtajiem elementiem.
	1.2.5. Skaidro atvasinājumu un integrāli, izmantojot gan to fizikālo, gan ģeometrisko nozīmi.
2. Risināt problēmu matemātikai raksturīgi nozīmē saskatīt struktūras, sistēmas, sakarības, veidot vispārinājumus un tos pierādīt	
2.1. Spriešana (pēc analoģijas, induktīva un deduktīva, lietojot matemātiskās loģikas elementus)	2.1.1. Jaunā, kompleksā situācijā spriež, formulē uz situācijas analīzi vērstus jautājumus, secina gan par iepriekšējo zināšanu, prasmju un paņēmienu lietošanas iespējām, gan to nepietiekamību un formulē, kāda informācija vai kādas jaunas zināšanas nepieciešamas.
	2.1.2. Jaunā situācijā izmanto induktīvu un deduktīvu spriešanu, pierāda formulēto vispārīgo apgalvojumu patiesumu.
	2.1.3. Skaidro, ko nozīmē risināt vienādojumu un nevienādību ar parametru.

2.2. Matemātiskā modelēšana un citi problēmrisināšanas paņēmieni	2.2.1. Formulē pētāmo jautājumu sev nozīmīgā kontekstā un veic visus matemātiskās modelēšanas soļus, lai atrisinātu autentisku problēmu. Izvērtē iegūtos rezultātus un, ja nepieciešams, uzlabo matemātisko modeli.
	2.2.2. Apzina, izvērtē matemātikai raksturīgo problēmrisināšanas paņēmienu (spriežu no beigām, sadalu problēmu daļās, pāreju uz līdzīgu, vienkāršāku problēmu u. tml.) lietojumu, izstrādājot kompleksas problēmas risinājuma plānu.
2.3. Apgalvojumi un to patiesuma pierādīšana	2.3.1. Lieto tiešo pierādījumu, vienā pierādījumā saistot dažādu matemātikas apakšnozaru elementus.
	2.3.2. Jaunās situācijās lieto pierādījumu no pretējā.
	2.3.3. Skaidro jēdzienus *pietiekams nosacījums*, *nepieciešams nosacījums*, lieto izteikuma formu ".. tad un tikai tad ..", formulējot apgalvojumus, pierādot to patiesumu.
	2.3.4. Lieto matemātiskās indukcijas principu, lai pierādītu vispārīgu apgalvojumu patiesumu.
3. Skaitļus izmanto konkrētu, arī praktisku uzdevumu atrisināšanai. Katrai darbībai ar skaitļiem ir noteikta jēga, un to izpildei ir noteikti likumi/algoritmi	
3.1. Skaitļa pieraksts un skaitļu salīdzināšana	3.1.1. Skaidro skaitli e, izmantojot virknes robežu; definē un lieto naturāllogaritmu.
3.2. Darbības ar skaitļiem, to īpašības, algoritmi	3.2.1. Pierāda un lieto n-tās pakāpes sakņu, pakāpju ar racionālu kāpinātāju, logaritmu īpašības, sakarības starp pagrieziena leņķa sinusu, kosinusu, tangensu un kotangensu.
4. Sakarības starp lielumiem apraksta algebriskie modeļi un funkcijas; izmantojot šos modeļus problēmu risināšanai, tos pārveido, nodrošinot ekvivalenci	
4.1. Virknes	4.1.1. Lieto matemātiskās indukcijas principu, pierādot aritmētiskās, ģeometriskās progresijas formulas, rekurenti uzdotas virknes vispārīgā locekļa formulu, galīgas vai bezgalīgas skaitļu virknes visu locekļu summu.
	4.1.2. Nosaka virknes robežu, spriežot, modelējot uz skaitļu ass, izmantojot grafisko attēlu un kritiski izvērtējot tā lietojumu konkrētajā situācijā.
	4.1.3. Veic aprēķinus, lietojot izklājlapas, un formulē pieņēmumu par skaitli e kā virknes $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ robežu, ja $n \to \infty$.

4.2. Reāla argumenta funkcijas	4.2.1. Pierāda jaunu, nezināmu, t. sk. intervālos, dažādi uzdotu funkciju īpašības.
	4.2.2. Skaidro, kas ir dotai funkcijai inversā funkcija, un nosacījumus tās eksistencei; raksturo savstarpēji inversu funkciju grafiku novietojumu koordinātu plaknē; definē logaritmisko funkciju, inversās trigonometriskās funkcijas.
	4.2.3. Raksturo, pamato pakāpes funkcijas $f(x)=x^n$ īpašības, ja kāpinātājs ir racionāls skaitlis.
	4.2.4. Raksturo un pamato funkciju $f(x)=c\log_a(kx+b)$, $f(x)=atg(kx+b)$, $f(x)=actg(kx+b)$ īpašības (definīcijas kopa, vērtību kopa, funkcijas nulles, vienādas zīmes intervāli, lielākā/mazākā vērtība, pāra/nepāra funkcija, periodiskas funkcijas periods), asimptotas un funkcijas robežu.
	4.2.5. Uzzīmē un raksturo funkciju $y=\|f(x)\|$, $y=f(\|x\|)$ īpašības un grafikus, izmantojot zināšanas par funkcijas $y=f(x)$ īpašībām un grafiku.
4.3. Funkcijas atvasinājums, integrālis	4.3.1. Nosaka funkcijas robežu, spriežot, izmantojot funkcijas grafika īpašības; skaidro un vizuāli interpretē funkcijas nepārtrauktību.
	4.3.2. Interpretē atvasinājumu kā veiktā ceļa izmaiņas ātrumu; skaidro funkcijas atvasinājuma punktā ģeometrisko interpretāciju; nosaka vienkāršu funkciju, piemēram, $y=4$, $y=6x$, $y=3x^2$ atvasinājumu, izmantojot definīciju, un formulē vispārīgus secinājumus.
	4.3.3. Atvasina pakāpes funkciju, funkcijas $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$, $f(x)=e^x$ un $f(x)=\ln x$, lieto likumus funkciju summas, reizinājuma un dalījuma atvasināšanai, atvasina saliktu funkciju formā $f(ax+b)$, ja f ir kāda no nosauktajām funkcijām.
	4.3.4. Skaidro nosacījumus atvasinājuma eksistencei punktā, atšķir kritiskos punktus un ekstrēma punktus; skaidro ekstrēmu, funkcijas monotonitāti, pārliekuma punktu, grafika izliekumu un ieliekumu, izmantojot atvasinājuma punktā ģeometrisko interpretāciju.
	4.3.5. Lieto funkcijas atvasinājumu, pētot polinomiālu funkciju un daļveida funkciju īpašības, zīmējot to grafikus, nosakot funkcijas vislielāko/vismazāko vērtību matemātiskos un citu mācību jomu kontekstos.
	4.3.6. Skaidro primitīvās funkcijas atrašanu/integrēšanu kā atvasināšanai pretējo darbību un nosaka nenoteikto integrāli, izmantojot tā īpašības un integrēšanas pamatformulas (atbilstoši iepriekš lietotajām atvasināšanas formulām).
	4.3.7. Aprēķina noteikto integrāli, izmantojot Ņūtona–Leibnica formulu, un to lieto plaknes figūras laukuma un rotācijas ķermeņa tilpuma aprēķināšanai, taisnvirziena kustībā noietā ceļa aprēķināšanai, darba aprēķināšanai u. tml.

4.4. Algebriskas izteiksmes	4.4.1. Sadala izteiksmi reizinātājos, lietojot saīsināto reizināšanas formulu vispārinājumus, polinoma dalīšanu ar binomu (Bezū teorēmu), lai pamatotu identitātes, risinātu vienādojumus un nevienādības.
	4.4.2. Reizina, dala, saskaita un atņem algebriskas daļas, kuru saucējā un skaitītājā ir polinomi vai izteiksmes ar vispārīgā veidā uzdotām pakāpēm.
	4.4.3. Izsaka algebrisku daļu kā divu daļu (saucēji ir lineāras izteiksmes) summu ar nenoteikto koeficientu metodi, piemēram, $\frac{4x-9}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{X-1}+\frac{B}{x-2}$.
	4.4.4. Veic algebriskus pārveidojumus ar saknēm un logaritmiem, lai pamatotu identitātes, pētītu funkciju īpašības un risinātu vienādojumus.
	4.4.5. Pierāda sakarību starp leņķa lielumu grādos un radiānos.
	4.4.6. Pierāda redukcijas formulas un viena argumenta sakarības $tgx \cdot ctgx = 1,\ 1+tg^2x=\frac{1}{cos^2x},\ 1+ctg^2x=\frac{1}{sin^2x}$, lieto tās trigonometrisku izteiksmju vērtības aprēķināšanai, izteiksmju identiskai pārveidošanai, vienādojumu un nevienādību atrisināšanai.
	4.4.7. Pierāda argumenta summas formulas, divkārša argumenta formulas un lieto tās izteiksmju vērtības aprēķināšanai, izteiksmju identiskai pārveidošanai un vienādojumu atrisināšanai.
4.5. Vienādojumi, nevienādības, to sistēmas	4.5.1. Atrisina logaritmisku vienādojumu, kas pārveidojams formā $log_a f(x)=log_a g(x)$, un logaritmisku nevienādību, kas pārveidojama formā $log_a f(x)<log_a g(x)$, lietojot logaritmiskās funkcijas īpašības.
	4.5.2. Skaidro inverso trigonometrisko funkciju lietojumu vienādojumu risināšanā. Atrisina trigonometriskos vienādojumus vispārīgā veidā, lietojot vienības riņķi un sinusa, kosinusa, tangensa un kotangensa funkciju īpašības.
	4.5.3. Lieto neekvivalentus pārveidojumus dažādu vienādojumu risināšanā, piemēram, vienādojuma abas puses kāpina kvadrātā, abas puses izdala ar vienu un to pašu izteiksmi, abas puses logaritmē un raksturo papildu veicamos spriedumus.
	4.5.4. Atrisina augstāko kārtu vienādojumus, lietojot vienādojumu risināšanas metodes (sadalot reizinātājos, substitūciju, grafisko paņēmienu).
	4.5.5. Atrisina jauktas vienādojumu sistēmas, kas var saturēt pirmās, otrās pakāpes vienādojumus, daļveida vienādojumus, eksponentvienādojumus vai logaritmiskus vienādojumus.
	4.5.6. Atrisina dažāda veida vienādojumus, to sistēmas un nevienādības ar parametru.
	4.5.7. Analītiski vai grafiski atrisina vienādojumus un nevienādības, kas satur moduli $\lvert f(x)\rvert = g(x), \lvert f(x)\rvert=\lvert g(x)\rvert, (<, >, \leq, \geq)$.

5. Datus par objektiem, situācijām, notikumiem, procesiem var matemātiski apstrādāt, analizēt, lai pieņemtu pamatotus lēmumus	
5.1. Kopas, darbības ar kopām un kombinatorikas elementi	5.1.1. Pierāda formulas permutāciju, variāciju skaita aprēķināšanai, galīgas kopas (satur *n* elementus) visu iespējamo apakškopu (ieskaitot tukšu kopu) skaitu, kombināciju skaita īpašības.
	5.1.2. Formulē un pamato sakarības Paskāla trijstūrī; lieto Ņūtona binomu, veidojot konkrētus izvirzījumus, lai formulētu spriedumus matemātiskos kontekstos.
	5.1.3. Identiski pārveido izteiksmes, kas satur faktoriālu. Modelē situāciju ar vienādojumu, nevienādību, lietojot formulas variāciju vai kombināciju skaita noteikšanai.
5.2. Varbūtību teorijas elementi	5.2.1. Aprēķina savienojamu notikumu apvienojuma varbūtību, izmantojot darbības ar kopām un to vizuālo attēlojumu.
	5.2.2. Lieto pilnās varbūtības formulu varbūtības aprēķināšanai.
	5.2.3. Praktiska konteksta piemēros skaidro, nosaka, analizē mainīga lieluma (iespējamo vērtību skaits galīgs) varbūtības sadalījumu, aprēķina mainīgā lieluma sagaidāmo vērtību.
	5.2.4. Praktiska konteksta piemēros skaidro vienmērīgo, Bernulli un binomiālo sadalījumu diskrētiem mainīgiem lielumiem, lieto Bernulli formulu varbūtības aprēķināšanai. Skaidro saistību starp binomiālo sadalījumu diskrētiem mainīgiem lielumiem un normālo sadalījumu nepārtrauktiem mainīgiem lielumiem.
5.3. Statistikas elementi	5.3.1. Dotai histogrammai piemeklē normālo sadalījumu (Gausa līkni), kas tai atbilst vislabāk, izmantojot IT rīkus. Raksturo attēlotos datus, izmantojot vidējo vērtību, standartnovirzi un vienas, divu un trīs standartnoviržu likumu.
	5.3.2. Lai aprakstītu datus, pamatoti izvēlas (pamato ar datu simetriskumu un normālo sadalījumu) un aprēķina būtiskākos lielumu pārus: vidējo vērtību un standartnovirzi vai mediānu un starpkvartiļu amplitūdu.
	5.3.3. Izmanto lineāro regresiju, atbilstošus IT rīkus, lai analizētu divu mainīgo lielumu (pazīmju) saistību.
	5.3.4. Izvēlas sev nozīmīgu kontekstu, formulē pētāmo jautājumu, plāno un veic pētījumu/eksperimentu, iegūst datus, izmanto IT rīkus datu apstrādei, analizē datus, formulē datos balstītus secinājumus un pamato savas darbības katrā no soļiem.

6. Figūru īpašību, novietojuma, to raksturojošo lielumu izpēte ļauj risināt konkrētas, arī praktiskas, problēmas, formulēt vispārīgus secinājumus par objektiem, telpu, formu	
6.1. Plaknes figūras	6.1.1. Veido pierādījumu, lietojot apgūtos matemātikas instrumentus – trijstūru līdzību, ģeometriskos pārveidojumus, vektorus, koordinātu metodi –, lai pierādītu pazīstamu plaknes figūru īpašības jaunās situācijās, piemēram, trijstūra mediānu īpašību, trijstūra bisektrises īpašību, krustisku hordu īpašību.
	6.1.2. Skaidro ģeometriskos pārveidojumus kā funkcijas, kuru definīcijas kopa ir plaknes punkti. Lieto ģeometriskos pārveidojumus un to īpašības, lai jaunās situācijās noteiktu plaknes figūru lielumus, pamatotu to īpašības.
6.2. Analītiskā ģeometrija	6.2.1. Nosaka vektora projekciju uz patvaļīgas ass, izsaka vektoru plaknē kā divu vektoru (nav kolineāri) lineāru kombināciju plaknē, kā trīs vektoru (nav komplanāri) lineāru kombināciju telpā. To izmanto, lai skaidrotu, ka vektora koordinātas viennozīmīgi raksturo vektoru.
	6.2.2. Lieto vektoru skalāro reizinājumu un īpašības, lai noteiktu un pierādītu figūru īpašības. Aprēķina vektoru skalāro reizinājumu koordinātu formā, lai noteiktu leņķi starp vektoriem.
	6.2.3. Pamato un lieto formulu attāluma no punkta līdz taisnei noteikšanai. Aprēķina leņķi starp divām taisnēm, izmantojot zināšanas par leņķi starp vektoriem.
	6.2.4. Nosaka analītiski uzdotas sakarības, piemēram, $x^2-y^2=1$, punktu ģeometrisko vietu un otrādi – veido, pārbauda līniju vienādojumus pēc to attēlojumiem koordinātu plaknē.
6.3. Telpiski ķermeņi	6.3.1. Skaidro stereometriju kā vienu no aksiomātiskām sistēmām un veido pierādījumus, izmantojot piederības aksiomas, secinājumus no tām, lietojot tiešo pierādījumu un pierādījumu no pretējā. [..]
	6.3.4. Formulē un pamato plaknes figūru savstarpējo novietojumu telpiskos ķermeņos, t. sk. skaidro, nosaka leņķi starp šķērsām taisnēm; algebriski modelē un pamato sakarības starp lielumiem, nosaka un pamato lielumu iespējamās vērtības.
	6.3.5. Pamato un lieto slīpas prizmas virsmas laukuma un tilpuma aprēķināšanas formulas.
	6.3.6. Veido rotācijas ķermeņa zīmējumu, ja zināma rotācijas ass un plaknes figūra, kas rotē ap to; plāno, pamato un aprēķina rotācijas ķermeņa virsmas laukumu un tilpumu.

3. pielikums

Plānotie skolēnam sasniedzamie rezultāti caurviju prasmēs, beidzot vispārējās vidējās izglītības pakāpi

1. Kritiskā domāšana un problēmrisināšana:

1.1. mērķtiecīgi formulē precīzus jautājumus, lai kritiski analizētu kompleksas situācijas un abstraktas idejas. Izzina kontekstu, to analizē, kritiski izvērtē, kā arī sintezē un interpretē informāciju, lai sasniegtu konkrētu mērķi. Gūst vispusīgu, precīzu informāciju par kompleksiem jautājumiem, izvērtē tās ticamību un analizē, kādēļ atsevišķās situācijās iegūt ticamu informāciju ir grūti;

1.2. kompleksās situācijās spriež no konkrētā uz vispārīgo un no vispārīgā uz konkrēto. Pamana loģiskās argumentācijas kļūdas savos un citu izteikumos, novērš tās. Argumentē, pierādot izteiktā apgalvojuma ticamību un veidojot pamatotus secinājumus;

1.3. nosaka aktuālas vajadzības, precīzi formulē kompleksu problēmu un pamato nepieciešamību to risināt, izvirza mērķi, piedāvā vairākus risinājumus, izvērtē tos attiecībā pret mērķi, izvēlas īstenot labāko;

1.4. kompleksās, neskaidrās situācijās patstāvīgi izstrādā problēmas risinājuma plānu un īsteno to, izvēloties, lietojot un pielāgojot piemērotas problēmrisināšanas stratēģijas, elastīgi reaģē uz neparedzētām pārmaiņām, izvērtē paveikto un gūtos secinājumus izmanto arī citā kontekstā.

2. Jaunrade un uzņēmējspēja:

2.1. interesējas par atklājumiem un inovācijām, proaktīvi meklē jaunas iespējas, kā efektīvi uzlabot savu un citu dzīves kvalitāti, rosina uzlabot esošo situāciju, pieņem nepieredzētus, kompleksus izaicinājumus, saglabā emocionālu līdzsvaru un atvērtību nenoteiktības apstākļos;

2.2. raugoties uz situāciju no dažādiem skatpunktiem, pamana jaunas iespējas, mērķtiecīgi un elastīgi izmanto vai attīsta pats savas ideju radīšanas stratēģijas, lai nonāktu pie jauniem un noderīgiem risinājumiem, efektīvi organizē resursus (cilvēku, zināšanu, kapitāla, infrastruktūras), lai īstenotu savu ieceri, patstāvīgi meklē, izvērtē un atbildīgi izmanto citu idejas, kā arī piedāvā savas, lai iedvesmotu citus;

2.3. gan patstāvīgi, gan grupā attīsta ideju ilgtspējīgā piedāvājumā, kļūdas un grūtības izmanto kā iespēju izaugsmei.

3. Pašvadīta mācīšanās:

3.1. regulāri un atbilstoši savām vajadzībām izvirza īstermiņa un ilgtermiņa mērķus, formulē kritērijus, pēc kuriem izvērtēt, vai mērķis ir sasniegts, plāno mērķa īstenošanas soļus, uzņemas atbildību par savu lomu soļu īstenošanā un mērķu sasniegšanā;

3.2. patstāvīgi un regulāri analizē un reflektē par savas darbības saistību ar emocijām, personiskajām īpašībām un uzvedību, rod veidus, kā attīstīt spējas pārvaldīt savu domāšanu, emocijas un uzvedību;

3.3. patstāvīgi izvēlas, pielāgo un rada savas domāšanas stratēģijas kompleksās situācijās;

3.4. pieņemot atbildīgus lēmumus, vada emocijas sociāli pieņemamā veidā un orientējas uz iespējām, ieguvumiem un pozitīviem risinājumiem;

3.5. patstāvīgi izmanto kritērijus, kas palīdz īstenot darba uzraudzīšanu un pilnveidošanu, izvērtē, apkopo un turpmākā darba procesā mērķtiecīgi izmanto gūto pieredzi.

4. Sadarbība:

4.1. plāno un īsteno personisko un grupas mērķu sasniegšanai nozīmīgu, cieņpilnu verbālu, neverbālu un digitālu komunikāciju;

4.2. piedalās gan viendabīgas, gan neviendabīgas grupas darba procesā, pieņem viedokļu atšķirības, dalībnieku dažādo pieredzi un spējas, prognozē, novērš un risina domstarpības un konfliktus, tostarp digitālā vidē;

4.3. mācību procesā un sabiedriskajā dzīvē apzināti orientējas uz kopīgo labumu un grupai nozīmīgu mērķu sasniegšanu, spēj pārstāvēt savas un respektēt citu intereses, ja grupas un paša vajadzības atšķiras.

5. Pilsoniskā līdzdalība:

5.1. skaidro un pamato savu skatījumu par kopsakarībām gan vietējā, gan globālā mērogā, izvērtē indivīdu, sabiedrības un vides mijiedarbību;

5.2. balstoties savās vērtībās un cienot citu vērtības, izsvērti izvēlas pasākumus un ikdienas situācijas, kurās iesaistīties un iesaistīt citus, cieņpilni pamatojot savu nostāju, prot atteikties, ja pasākums neatbilst vērtībām, un spēj nepakļauties grupas spiedienam, paliekot saistīts ar tiem, kuriem nepiekrīt;

5.3. skaidro savas rīcības sekas un uzņemas par tām atbildību ikdienas situācijās, lokālos un globālos procesos;
5.4. patstāvīgi un kopā ar citiem gūst pieredzi, iesaistoties risinājumu meklēšanā un īstenošanā, kas palīdz uzlabot dzīves kvalitāti.

6. Digitālā pratība:
6.1. lai īstenotu daudzveidīgas ieceres, mērķtiecīgi izvēlas vai pielāgo un efektīvi izmanto atbilstošas digitālās tehnoloģijas;
6.2. analizē digitālās komunikācijas ieguvumus un riskus, atbildīgi uzvedas un komunicē digitālajā vidē atbilstoši savām un citu interesēm;
6.3. kritiski analizē mediju radīto realitāti un informācijas ticamību, uzņemas atbildību rīkoties, lai novērstu nekvalitatīva mediju satura radīto ietekmi, un, radot savu mediju saturu, ievēro privātuma, ētiskos un tiesiskos nosacījumus;
6.4. analizē un novērtē tehnoloģiju lomu dažādos kontekstos, izvērtē veselīgus un drošus tehnoloģiju lietošanas paradumus, ievēro un pielāgo tos savām vajadzībām, reflektē par savu digitālo identitāti un tās atbilstību savām un sabiedrības interesēm.

4. pielikums

Vērtēšanas uzdevumu piemēri

1. uzdevums

Sasniedzamais rezultāts

Skaidro jēdziena *arksinuss*, simbola $\arcsin\alpha$ nozīmi. (M.A.4.2.2.; M.A.4.5.2.)

Uzdevums

Iespējami precīzi paskaidro doto lielumu nozīmi un eksistenci:

a) $\arcsin\frac{3}{4}$, b) $\arcsin 1{,}2$.

Vērtēšanas kritēriji

Punkti	1	2	3	4
Snieguma līmeņa apraksts	a) Zina, ka pierakstīts leņķis. b) Atbildes nav vai tā ir aplama.	a) Zina, ka pierakstīts leņķis, kura sinuss vienāds ar ¾. b) Atbildes nav vai tā ir aplama.	a) Zina, ka pierakstīts leņķis, kura sinuss vienāds ar ¾ un saprot tā vērtību kopu. b) Zina, ka lielums neeksistē, bet nepaskaidro nosacījumu.	a) Zina, ka pierakstīts leņķis, kura sinuss vienāds ar ¾ un saprot tā vērtību kopu. b) Zina, ka lielums neeksistē un paskaidro nosacījumu.

2. uzdevums

Sasniedzamais rezultāts

Pēta, formulē un pierāda sakarību starp lielumiem plaknes figūrās. (M.A.2.1.2.; M.A.2.3.4.)

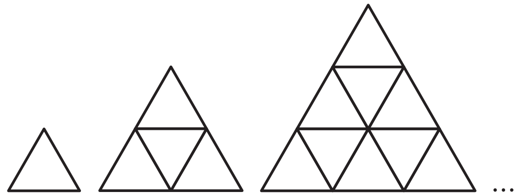
Uzdevums

Figūras tiek veidotas no vienāda garuma nogriežņiem pēc noteiktas likumsakarības (sk. attēlu).

Ar $s(n)$ apzīmē vienādo nogriežņu skaitu, kas izmantoti n vērtībai atbilstošās figūras izveidei, piemēram, $s(1) = 3$; $s(2) = 9$. Izvēlies uzdevumu a) un b) risināšanas secību.

a) Nosaki $s(10)$, parādi risinājumu.

b) Uzraksti formulu $s(n)$ aprēķināšanai, paskaidro, kā to ieguvi. Pierādi, ka formula patiesa visiem naturāliem n.



Vērtēšanas kritēriji

Punkti	1	2	3	4	5
Snieguma līmeņa apraksts	Saskata sakarību konkrētām vērtībām un pareizi nosaka $s(10)$, parādot risinājumu.	Saskata sakarību konkrētām vērtībām un pareizi nosaka $s(10)$, parādot risinājumu. Formulē atsevišķas idejas, kas ir/varētu būt noderīgas formulas ieguvei.	Saskata sakarību konkrētām vērtībām un pareizi nosaka $s(10)$, parādot risinājumu. Uzraksta pareizu formulu, bet skaidrojuma nav vai tas ir neskaidrs, nesaistīts. Izvēlas paņēmienu pierādīšanai, bet to tikai uzsāk vai pieļauj nozīmīgu kļūdu.	Uzraksta pareizu formulu, paskaidro, kā to ieguva, pieļaujot nepilnības. Nosaka vai pārbauda $s(10)$, izmantojot vispārīgo rezultātu. Pierāda formulas patiesumu, pieļaujot nepilnības.	Uzraksta pareizu formulu, precīzi un lakoniski paskaidro, kā to ieguva. Nosaka $s(10)$, izmantojot vispārīgo rezultātu. Pilnīgi un pareizi pierāda formulas patiesumu.

3. uzdevums

Sasniedzamais rezultāts

Lieto atvasinājumu citu mācību jomu kontekstos, saista informāciju par kontekstu ar matemātikas zināšanām. (M.A.2.1.1.; M.A.4.3.3.; M.A.4.3.5.)

Uzdevums

Medicīnā reakciju $R(x)$ uz zāļu devu x izsaka funkcija $R(x)=Ax^2(B-x)$, kur $A>0, B>0$ un to skaitliskā vērtība konkrētā gadījumā atkarīga no zālēm. Ķermeņa jutību $S(x)$pret devu x definē kā $R'(x)$. Pieņemot, ka ar cilvēka (ārstējamā) dzīvību saistāma tikai pozitīva reakcija, noteikt:

a) Funkcijas $R(x)$ definīcijas kopu; b) Kādām x vērtībām $R(x)$ ir lielākā vērtība un kāda tā ir?

c) Kādām x vērtībām ir maksimālā jutība?

Vērtēšanas kritēriji

a) uzdevums

Punkti	0	1	2
Snieguma līmeņa apraksts	Nav risināts. Uzraksta aplamus apgalvojumus, neatbilstošas nevienādības, vienādības.	Pareizi uzraksta nosacījumu, bet risinot kļūdās, definīcijas kopu nenosaka, vai pareizi nosaka definīcijas kopu, bet neparāda risinājumu.	Pareizi nosaka definīcijas kopu, parādot risinājumu.

b) uzdevums

Punkti	0	1	2	3	4
Snieguma līmeņa apraksts	Nav risināts. Veiktās darbības kļūdainas vai nav saprotama to nozīme.	Pareizi veic vismaz vienu risinājuma soli, arī tad, ja starprezultāti līdz tam noteikti kļūdaini.	Īsteno risinājuma plānu, kas ļauj atrisināt uzdevumu, bet kādā no soļiem nozīmīgi kļūdās, nepamato ekstrēma punktus.	Veido kopumā pareizu risinājumu, bet kādā no soļiem pieļauj kļūdu pārveidojumos vai pamatojums ir nepilnīgs, satur neprecizitātes.	Veido pilnīgu un pareizu risinājumu, nosakot abus prasītos lielumus, pamato ekstrēma punktus un to veidu.

c) uzdevums				
Punkti	**0**	**1**	**2**	**3**
Snieguma līmeņa apraksts	Nav risināts. Veiktās darbības kļūdainas.	Pareizi iesāk risinājumu (atvasina vai raksturo parabolu), bet turpmākā risinājuma nav vai tas satur nozīmīgas kļūdas.	Veido kopumā pareizu risinājumu, nosakot un pamatojot prasīto lielumu, bet pieļauj kādu neprecizitāti.	Veido pilnīgi pareizu risinājumu, nosakot un pamatojot prasīto lielumu.

4. uzdevums

Sasniedzamais rezultāts

Risina kompleksu matemātiska satura problēmu, saistot algebras un analītiskās ģeometrijas zināšanas. (M.A.1.2.4.; M.A.2.1.1.)

Uzdevums

Nosaki un attēlo koordinātu plaknē nevienādības $5xy - x^2 - 6y^2 > 0$ visu atrisinājumu kopu.

Vērtēšanas kritēriji

Punkti	1	2	3	4	5
Snieguma līmeņa apraksts	Spriež konkrēti un pareizi nosaka atsevišķus atrisinājumu kopas punktus. Secina, ka atrisinājums ir plaknes apgabals, bet tā robežas nosaka kļūdaini.	Pareizi nosaka un attēlo nevienādības visu atrisinājumu kopu, atliekot un pārbaudot konkrētus skaitļus. Pamatojuma, atrisinājuma vispārīga apraksta nav.	Spriež vispārīgi, līdz galam īsteno atbilstošu risinājuma plānu, bet kādā no soļiem kļūdās. Pieļauj neprecizitātes, aprakstot visu atrisinājumu kopu, pierādot, ka citu iespēju nav.	Pareizi nosaka, attēlo koordinātu plaknē visu atrisinājumu kopu, bet pieļauj neprecizitātes to aprakstot vai nepilnīgi pamato, ka citu iespēju nav.	Pareizi nosaka, attēlo koordinātu plaknē, vispārīgi un korekti apraksta visu atrisinājumu kopu, pierāda, ka citu iespēju nav.

5. uzdevums

Sasniedzamais rezultāts

Formulē pētāmo jautājumu sev nozīmīgā kontekstā un veic matemātiskās modelēšanas visus soļus, lai atrisinātu autentisku problēmu; izvērtē iegūtos rezultātus un, ja nepieciešams, uzlabo matemātisko modeli. (M.A.2.2.1.)

Uzdevums

Patstāvīgs izpētes darbs "Matemātiskā modelēšana".

1. Iepazīsties ar darba izpildes nosacījumiem, sagaidāmo apjomu un vērtēšanas kritērijiem.
2. Saskati un formulē sev interesējošu pētāmo problēmu un raksturo lielumus, saistību, starp kuriem modelēsi matemātiski, izmantojot piemērotu funkciju.
3. Iegūsti un apkopo datus, cita veida informāciju, kas nepieciešama matemātiskā modeļa veidošanai, pētāmās problēmas atrisināšanai.
4. Plāno, veido, pārbaudi un, ja nepieciešams, uzlabo situācijas matemātisko modeli.
5. Apraksti savu darbību visos posmos un iegūtos rezultātus, formulē un pamato secinājumus, raksturo un argumentē izvēles un pieņemtos lēmumus.
6. Veidojot darba aprakstu, korekti lieto matemātikas valodu, tekstu veido strukturētu, saistītu un citiem saprotamu.

Vērtēšanas kritēriji[1]

Kritēriji \ Punkti	1	2	3	4	5	6
Veido pētījuma aprakstu	Apraksts ir saistīts	Apraksts ir saistīts, tajā ir saskatāma struktūra	Apraksts ir saistīts, labi strukturēts	Apraksts ir saistīts, labi strukturēts, lakonisks, pabeigts		
Lieto matemātikas valodu	Daļēji atbilstoši	Lielākoties atbilstoši	Atbilstoši visā darbā			
Iesaistās personiski	Ierobežoti, virspusēji	Daļēji	Nozīmīgi	Izcili		
Pārdomā, izvērtē	Ierobežoti, virspusēji	Jēgpilni, pēc būtības	Kritiski			
Lieto matemātiku	Fragmentāri pareizi, demonstrē ierobežotu izpratni.	Daļēji pareizi, demonstrē daļēju izpratne.	Kopumā pareizi, demonstrē labu izpratni.	Pareizi, atbilst sagaidāmajam, demonstrē labu izpratni.	Pareizi un precīzi, atbilst sagaidāmajam, demonstrē pilnīgu izpratni.	Pareizi, precīzi un akurāti visā darbā, atbilst sagaidāmajam, demonstrē pilnīgu izpratni.

[1] Vērtēšanas kritēriju izstrādē par pamatu izmantota informācija no *Harcet, J., Heinrichs, L., Seiler, P. M., Skoumal, M. T. (2012). IB Mathematics Higher Level Course Book: Oxford IB Diploma Program Illustrated Edition. Oxford University Press.*

5. pielikums

Mācību satura apguvei izmantojamie mācību līdzekļi un resursi

Izmantošanas nolūks	Mācību līdzekļu veids	Mācību līdzekļu nosaukums
Skolēniem darbam (individuālajam/ pāru/grupu darbam, pētījumam ...)	Mācību materiāli	*Skola2030* mācību līdzekļi, ESF projektā “Dabaszinātnes un matemātika” izstrādātie materiāli.
	Darba piederumi, modeļi	Lineāls, cirkulis, plaknes figūru modeļi, telpisku ķermeņu modeļi, kalkulators, planšetes/datori, lietotnes datu ieguvei, notikumu un mainīgu lielumu modelēšanai, statistisko rādītāju, regresijas vienādojumu noteikšanai, datu attēlošanai ar dažāda veida diagrammām, funkciju grafiku zīmēšanai un funkciju īpašību pētīšanai, plaknes un telpisku figūru, telpisku ķermeņu zīmēšanai, transformēšanai, īpašību noteikšanai un pamatošanai, šķēlumu ar plakni konstruēšanai.

DOMAT.
DARĪT.
ZINĀT.

Valsts izglītības satura centra īstenotā projekta "Kompetenču pieeja mācību saturā" mērķis ir izstrādāt, aprobēt un pēctecīgi ieviest Latvijā tādu vispārējās izglītības saturu un pieeju mācīšanai, lai skolēni gūtu dzīvei 21. gadsimtā nepieciešamās zināšanas, prasmes un attieksmes.

Projekts Nr. 8.3.1.1/16/I/002 Kompetenču pieeja mācību saturā

Valsts izglītības satura centrs

NACIONĀLAIS ATTĪSTĪBAS PLĀNS 2020

EIROPAS SAVIENĪBA
Eiropas Sociālais fonds

IEGULDĪJUMS TAVĀ NĀKOTNĒ

© Valsts izglītības satura centrs | ESF projekts Nr.8.3.1.1/16/I/002 Kompetenču pieeja mācību saturā