Racionāli, Iracionāli skaitļi

Sacensības #2021.04

2021-04-08

Par šo LU NMS atbalstīto pasākumu atbild `kalvis.apsitis@gmail.com`.

Uzdevums 1.1: Sauksim naturālu skaitli n par *derīgu*, ja attēlā dotās izteiksmes vērtība arī ir naturāls skaitlis:

$$\sqrt{n^2 + 85n + 2021}$$

Atrast visu derīgo skaitļu summu.
Jautājums: Ierakstīt naturālu skaitli – visu derīgo n summu.

Atbilde. 172
Pareizinām izteiksmi zem saknes ar 4, lai būtu vieglāk (bez dalīšanas ar 2) atdalīt pilno kvadrātu. $\sqrt{n^2 + 85n + 2021}$ ir vesels skaitlis tad un tikai tad, ja $\sqrt{4n^2 + 340n + 8084}$ ir vesels skaitlis jeb $4n^2 + 340n + 8084$ ir pilns kvadrāts k^2. Pārrakstām:

$$4n^2 + 340n + 8084 = k^2,$$
$$(2n + 85)^2 - 85^2 + 8084 = k^2,$$
$$(2n + 85)^2 + 859 = k^2,$$

Ievērosim, ka $(2n + 85)^2 < k^2$ un arī $2n + 85 < k$. Atņemam no lielākā pilnā kvadrāta mazāko un dalām reizinātājos:

$$k^2 - (2n + 85)^2 = 859,$$
$$(k - (2n + 85))(k + (2n + 85)) = 859.$$

Tā kā 859 ir pirmskaitlis, to var izteikt naturālu skaitļu reizinājumā tikai vienā veidā:

$$\begin{cases} k - (2n + 85) = 1, \\ k + (2n + 85) = 859. \end{cases}$$

Reizinātāju 1 un 859 secību mainīt nevar, jo $k - (2n + 85)$ ir mazāks par $k + (2n + 85)$. Atņemam vienādojumus vienu no otra:

$$(2n + 85) = \frac{859 - 1}{2} = 429.$$

Tāpēc $2n = 344$ un $n = 172$.
Var arī pārbaudīt, ja $n = 172$:

$$\sqrt{n^2 + 85n + 2021} = \sqrt{172^2 + 85 \cdot 172 + 2021} = 215.$$

Uzdevums 1.2: Atrast naturālu skaitli n, kuram izpildās vienādība:

$$\lfloor \log_2 1 \rfloor + \lfloor \log_2 2 \rfloor + \lfloor \log_2 3 \rfloor + \ldots + \lfloor \log_2 n \rfloor = 1898.$$

(Formulā ar $\lfloor x \rfloor$ apzīmēta skaitļa x veselā daļa.)
Jautājums: Ierakstīt naturālu skaitli n, kas apmierina vienādojumu.

Atbilde. 300

Aprēķinām dažu pirmo naturālo skaitļu logaritmu veselās daļas:

$$
\begin{aligned}
&\lfloor \log_2 1 \rfloor = 0,\\
&\lfloor \log_2 2 \rfloor = \lfloor \log_2 3 \rfloor = 1,\\
&\lfloor \log_2 4 \rfloor = \ldots \lfloor \log_2 7 \rfloor = 2,\\
&\lfloor \log_2 8 \rfloor = \ldots \lfloor \log_2 15 \rfloor = 3,\\
&\lfloor \log_2 16 \rfloor = \ldots \lfloor \log_2 31 \rfloor = 3,\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

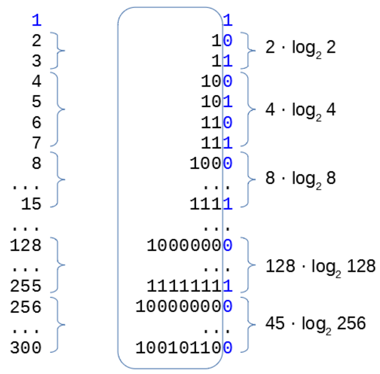
Nulltajā rindā ir viens skaitlis (un logaritma veselā daļa ir 0);
pirmajā rindā ir divi skaitļi, tā beidzas ar 3 (un logaritmu veselā daļa ir 1);
otrajā rindā ir četri skaitļi, tā beidzas ar 7 (un logaritmu veselā daļa ir 2);
j-tajā rindā ir 2^j skaitļi, tā beidzas ar $2^{j+1}-1$ (un logaritmu veselā daļa ir j);
Atrodam, cik daudzas šādas veselas rindas ir jāsummē, lai nepārsniegtu 1898. Citiem, vārdiem, atrodam maksimālo k, kuram

$$\sum_{j=1}^{k} j \cdot 2^j \leq 1898.$$

Šāda vērtība ir $k = 7$, jo

$$2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + \ldots = 128 \cdot 7 = 1538.$$

Skaitli 1538 iegūstam sasummējot $\lfloor \log_2 1 \rfloor + \ldots + \lfloor \log_2 255 \rfloor$.
Atlikusī summa ir $(1898 - 1538) = 360$; to var iegūt kā $45 \cdot 8$, jo, sākot ar 256, logaritmu veselās daļas ir 8. Tātad jāpieskaita līdz $255 + 45 = 300$, kas arī ir atbilde.
Piezīme. Šis uzdevums ar logaritmu (ar bāzi 2) apakšējām veselajām daļām izsaka summu, kuru var ieraudzīt rakstot skaitļu bināros pierakstus. Jebkuram skaitlim n, lielums $\lfloor \log_2 n \rfloor$ vienāds ar ciparu skaitu skaitļa n binārajā pierakstā (mīnus 1). Tāpēc uzdevumā atrastā summa faktiski parāda, cik ciparu ir uzrakstīts, ja raksta pēc kārtas visu skaitļu bināros pierakstus (no 1 līdz $300_{10} = 100101100_2$ (neieskaitot vienu ciparu katrā no skaitļiem) kā redzams Attēlā 1. Noapaļotā taisnstūrīša iekšpusē būs tieši 1898 cipari 0 vai 1. (Pieņemam, ka ikviena skaitļa binārā pieraksta pēdējo ciparu neieskaitām; tāpēc tas nokrāsots zils un ir ārpus taisnstūrīša.)



Attēls 1: Skaitļu no 1 līdz 300 binārie pieraksti.

Uzdevums 1.3: Cik daudzi no pirmajiem 100 naturālajiem skaitļiem $(1, \ldots, 100)$ ir izsakāmi ar izteiksmi:

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 6x \rfloor + \lfloor 8x \rfloor.$$

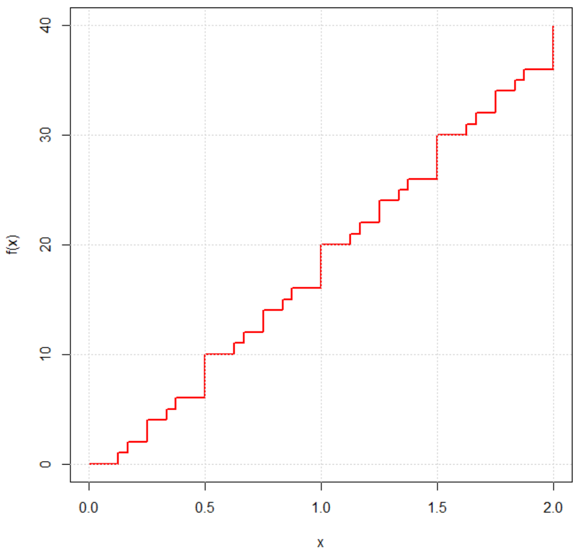
Šeit x var būt jebkurš reāls skaitlis.
Jautājums: Ierakstīt skaitļu skaitu.

Atbilde. 60

Apzīmējam izteiksmi ar funkciju $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (funkcija ar reāliem argumentiem un reālām vērtībām). Ja reālais mainīgais x nepārtraukti palielinās no vērtības $x = 0$ līdz vērtībai $x = 5$, tad $f(x)$ vērtība pieaug no $f(0) = 0$ līdz $f(5)$ jeb

$$\lfloor 2 \cdot 5 \rfloor + \ldots + \lfloor 8 \cdot 5 = 10 + 20 + 30 + 40 = 100.$$

Ja aizstāj x ar $x + 0.5$, tad visi saskaitāmie $f(x)$ pieaug attiecīgi par $1, 2, 3, 4$ (to veselo daļu summa pieaug par $1 + 2 + 3 + 4 = 10$) un tāpēc $f(x + 0.5) = f(x) + 10$. Funkcijas $f(x)$ grafiks nav periodisks (jo vērtības pēc perioda neatgriežas agrākajās vietās), bet šis grafiks ir *simetrisks* pret paralēlajām pārnesēm par vektoru $(0.5, 10)$. Tāpēc pietiek izpētīt, cik daudzas vērtības $f(x)$ pieņem pusatvērtā intervālā $(0; 0.5]$ (un paļauties uz to, ka tās vēlāk atkārtosies. Sk. Attēlu 2.



Attēls 2: Funkcijas $f(x) = \lfloor 2x \rfloor + \ldots + \lfloor 8x \rfloor$ grafiks.

Iegūstam šādas vērtības dažādiem $x \in (0; 0.5]$:

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{8}\right) = 1 \\ f\left(\frac{1}{6}\right) = 2 \\ f\left(\frac{1}{4}\right) = 4 \\ f\left(\frac{2}{6}\right) = 5 \\ f\left(\frac{3}{8}\right) = 6 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 10 \end{cases}$$

Lai pārliecinātos, ka citu vērtību nav, varam vai nu rīkoties ar pilno pārlasi: aplūkot visus 12 skaitļus formā $\frac{k}{24}$, kur $k = 1, 2, \ldots, 12$ (saucējs 24 ir skaitļu $2, 4, 6, 8$ mazākais kopīgais dalāmais;

tātad tikai šādām vērtībām $k/24$ ir iespējams, ka $2x$, $4x$, $6x$ vai $8x$ sasniedz veselu vērtību (un tātad mainās izteiksmes $f(x)$ vērtība.
Varam arī ievērot, ka pie $x = 1/4$ funkcija $f(x)$ "palecas" par divām vienībām (nav iespējama vērtība $f(x) = 3$, jo tai pārlec pāri). Savukārt pie $x = 1/2$ funkcija $f(x)$ "palecas" par četrām vienībām (nav iespējamas vērtības $7, 8, 9$). Atlikušās 6 vērtības no kopas $\{1, 2, 3, 5, 6, 10\}$ ir iespējamas pie $x \in (0; 0.5]$.
Pie x, kas pieder nākamajiem intervāliem $(0.5; 1]$, vai $(1; 1.5]$ utt. šis pats ritms atkārtojas. $f(x)$ grafika simetriskās pārbīdes nodrošina, ka katrā nogrieznī $[1; 10]$, $[11; 20]$, utt. no 10 veselajām vērtībām var dabūt tieši 6. Tātad no garākā nogriežņa $[1; 100]$ var dabūt 60 vērtības.

Uzdevums 1.4: Dots pozitīvs skaitlis a, kam $\{a^1\} = \{a^2\}$ un $2 < a^2 < 3$. Atrast izteiksmes $a^{12} - 144a^{-1}$ vērtību.
Jautājums: Ierakstīt izteiksmes vērtību kā naturālu skaitli `N` vai racionālu daļu `P/Q`.

Atbilde. 233

Tā kā $a^2 \in (2; 3)$, var secināt arī, ka $a \in (1; 2)$ un $a^{-1} \in (0; 1)$.
Tāpēc daļveida daļa $\{a^{-1}\} = a^{-1}$ (sakrīt ar pašu skaitli), bet $\{a^2\} = a^2 - 2$.
Pārrakstām vienādojumu $\{a^1\} = \{a^2\}$; tad pareizinām abas puses ar a un pārveidojam par kubisku vienādojumu:

$$a^1 = a^2 - 2.$$
$$1 = a^3 - 2a.$$
$$a^3 - 2a - 1 = 0.$$

Pēdējā vienādojuma risināšanai varam izmantot to, ka vienu sakni ($a = -1$) var uzminēt. Tāpēc polinomu $a^3 - 2a - 1$ var izdalīt ar $(a - (-1)) = a + 1$.
Var pārbaudīt šādu algebrisku identitāti:

$$a^3 - 2a - 1 = (a + 1)(a^2 - a - 1).$$

(Var vai nu atvērt iekavas, vai arī dalīt polinomus vienu ar otru.)
Sakne $a = -1$ neapmierina uzdevuma nosacījumus, tāpēc jārisina kvadrātvienādojums $a^2 - a - 1 = 0$.

$$a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Vienīgā sakne, kas apmierina nosacījumus ir $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618034$. Tad $a^2 \approx 2.618034$, bet $a^{-1} \approx 0.618034$.
Aprēķinām izteiksmi $a^{12} - 144a^{-1}$:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{12} - \frac{144}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} =$$

$$= \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right)^{6} - \frac{288}{1+\sqrt{5}} =$$

$$= \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right)^{6} - \frac{288(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} =$$

$$= \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^6 - \frac{288(1-\sqrt{5})}{1-5} =$$

$$= \frac{3^6 + C_6^1 3^5\sqrt{5} + C_6^2 3^4(\sqrt{5})^2 + C_6^3 3^3(\sqrt{5})^3 + C_6^4 3^2(\sqrt{5})^4 + C_6^5 3(\sqrt{5})^5 + (\sqrt{5})^6}{64} + 72(1-\sqrt{5}) =$$

$$= \frac{3^6 + 6\cdot 3^5\sqrt{5} + 15\cdot 3^4(\sqrt{5})^2 + 20\cdot 3^3(\sqrt{5})^3 + 15\cdot 3^2(\sqrt{5})^4 + 6\cdot 3(\sqrt{5})^5 + (\sqrt{5})^6}{64} + 72(1-\sqrt{5}) =$$

$$= \frac{729 + 1458\sqrt{5} + 1215(\sqrt{5})^2 + 540(\sqrt{5})^3 + 135(\sqrt{5})^4 + 18(\sqrt{5})^5 + (\sqrt{5})}{64} + 72(1-\sqrt{5}) =$$

$$= \frac{729 + 1458\sqrt{5} + 6075 + 2700\sqrt{5} + 3375 + 450\sqrt{5} + 125}{64} + 72(1-\sqrt{5}) =$$

$$= \frac{(729 + 6075 + 3375 + 125) + (1458 + 2700 + 450)\sqrt{5}}{64} + 72(1-\sqrt{5}) =$$

$$= 161 + 72\sqrt{5} + 72(1-\sqrt{5}) = 161 + 72\sqrt{5} + 72(1-\sqrt{5}) =$$

$$= (161 + 72) + (72\sqrt{5} - 72\sqrt{5}) = 233.$$

Piezīme. Ievērosim, ka 233 ir Fibonači virknes loceklis: $F_{13} = 233$. Fibonači virknes locekļus var aprēķināt ar izteiksmi, kurā arī ietilpst $\sqrt{5}$, tāpēc šāds iznākums nav sagadīšanās. Sk. `https://bit.ly/3sSq9Cw`.

Uzdevums 1.5: Atrast mazāko naturālo skaitli k, pie kura vienādojumam

$$\left\lfloor \frac{2021}{n} \right\rfloor = k$$

nav atrisinājuma veselos skaitļos.
Jautājums: Ierakstīt atbildē naturālu skaitli k ar šo īpašību.

Atbilde. 46

Virkne $a_n = \frac{2021}{n}$ ir dilstoša; turklāt tā dilst arvien lēnāk (un lieliem n tuvojas vērtībai 0). Pieņemsim, ka n ir lielākā no tām n vērtībām, kurai $\lfloor a_n \rfloor - \lfloor a_{n+1} \rfloor \geq 2$ (veselās daļas atšķiras vismaz par 2. Jeb Lai vērtības $\lfloor 2021/n \rfloor$ "pārlēktu" pāri kādam veselam skaitlim, ir nepieciešams, lai divas pēc kārtas sekojošas virknes a_n vērtības atšķirtos vairāk nekā par 1 (jo citādi arī to veselās daļas atšķirsies ne vairāk kā par 1 vai neatšķirsies nemaz).
Uzrakstām šo kā nevienādību, kas jāizpilda mainīgajam n:

$$\frac{2021}{n} - \frac{2021}{n+1} > 1.$$

Pārveidojam to par kvadrātisku nevienādību:

$$2021\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2021 \cdot \frac{1}{n(n+1)} > 1,$$

$$2021 > n^2 + n,$$

$$n^2 + n - 2021 < 0.$$

Šim kvadrātvienādojumam ir viena pozitīva un viena negatīva sakne. Tā kā n ir naturāls, tad tam jābūt mazākam par pozitīvo sakni:

$$n < \frac{-1+\sqrt{1+4\cdot 2021}}{2} = \frac{-1+\sqrt{8085}}{2} \approx 44.45831.$$

Tāpēc lielākā n vērtība, kurai $\lfloor a_n \rfloor - \lfloor a_{n+1} \rfloor \geq 2$ būs $n \leq 44$.
Ievietojam $2021/n$ vērtības 43, 44, 45, 46, 47:

$$\begin{cases} \frac{2021}{43} = 47.00000 \\ \frac{2021}{44} = 45.93182 \\ \frac{2021}{45} = 44.91111 \\ \frac{2021}{46} = 43.93478 \\ \frac{2021}{47} = 43.00000 \end{cases}$$

Iegūstam, ka pie $k = 46$ vienādojumam $\left\lfloor \frac{2021}{n} \right\rfloor = k$ nav atrisinājuma veselos skaitļos. Savukārt visas k vērtības, kuras ir vēl mazākas, tiks sasniegtas, jo dalījumi $2021/n$ (pie $n \geq 45$) samazinās par lielumiem, kas jau mazāki nekā 1, t.i. šo lielumu veselās daļas neizlaidīs vairs nevienu k vērtību.

Uzdevums 1.6: Dots, ka $\log_6 a + \log_6 b + \log_6 c = 6$, kur naturāli skaitļi a, b, c veido augošu ģeometrisku progresiju un $b - a$ ir vesela skaitļa kvadrāts. Atrast a, b, c.
Jautājums: Ierakstīt atbildē $a + b + c$ vērtību.

Atbilde. `111`
Ja ģeometriskās progresijas kvocients ir q, tad $b = aq$ un $c = aq^2$. Ievietojam šīs vērtības logaritmu summā:

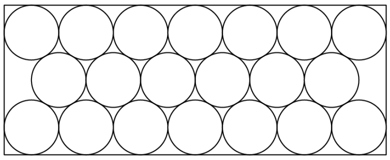
$$\log_6 a + \log_6 b + \log_6 c = \log_6 a + \log_6 aq + \log_6 aq^2 = \log_6 a^3q^3 = 3\log_6 aq = 6.$$

Tāpēc $\log_6 aq = 2$ jeb $\log_6 b = 2$. Iegūstam, ka vidējais ģeometriskās progresijas loceklis $b = 6^2 = 36$.
Sadalām 36 pirmreizinātājos: $36 = 2^2 \cdot 3^2$. Tāpēc arī skaitlim a jāsatur tie paši pirmreizinātāji 2 un 3. (Ja skaitlī a būtu vēl cits pirmreizinātājs $p \neq 2$ un $p \neq 3$, tad c vairs nebūtu vesels, jo saturētu pirmskaitli p saucējā un nebūtu ar ko to noīsināt.)
Vienīgie skaitļi ar pirmreizinātājiem 2 un 3, kuri nepārsniedz b ir sekojoši:

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 32.$$

Tie arī ir vienīgie skaitļa a kandidāti (jo progresija a, b, c ir augoša). Vienīgās a vērtības no šī saraksta, kurām $b - a = 36 - a$ ir pilns kvadrāts ir $a_1 = 27$ un $a_2 = 32$.
Vērtība 32 neder, jo tad $c = b \cdot (b/a) = 36 \cdot (36/32) = 40.5$ nav naturāls.
Vērtība 27 der, jo $c = b \cdot (b/a) = 36 \cdot (36/27) = 48$.
Aprēķinām atbildi: $a + b + c = 27 + 36 + 48 = 111$.

Uzdevums 1.7: Attēlā 3 redzami 20 kongruenti aplīši trīs rindās, kuriem no ārpuses pieskaras taisnstūris. Taisnstūra garākās malas attiecība pret īsāko ir uzdota ar formulu $\frac{\sqrt{a}-b}{2}$, kur a, b ir naturāli skaitļi. Atrast skaitļus a, b.



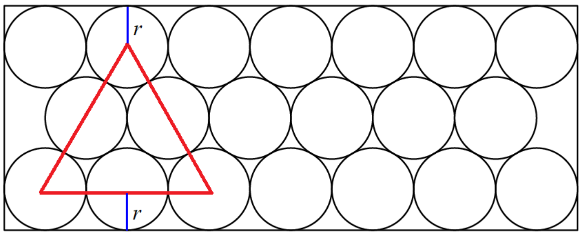
Attēls 3: Aplīši ievilkti taisnstūrī.

Jautājums: Ierakstīt abus skaitļus a, b (divi naturāli skaitļi, kurus atdala komats).

Atbilde. `147,7`

Apzīmēsim viena aplīša rādiusu ar r un izteiksim tiem apvilktā taisnstūra garāko malu a un īsāko malu b. Attēlā 4 redzams, ka $a = 14r$. Savukārt īsākā mala $b = 4r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2r$, jo tā vienāda ar vienu augstumu, kas novilkts vienādmalu trijstūrī ar malas garumu $2r$ (sarkanā krāsā) un vēl arī diviem rādiusiem (zilā krāsā). Iegūstam šādu garākās un īsākās malas attiecību:

$$\frac{14r}{4r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2r} = \frac{7}{\sqrt{3}+1} = \frac{7(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{147}-7}{2}.$$



Attēls 4: Aplīši ievilkti taisnstūrī.

Uzdevums 1.8: Uzrakstīt dotās izteiksmes vērtību kā racionālu skaitli p/q:

$$\frac{2}{\log_4 2000^6} + \frac{3}{\log_5 2000^6}.$$

Jautājums: Ierakstīt racionālu daļu `P/Q`.

Atbilde. `1/6`

Pārrakstām doto izteiksmi E, izmantojot dažas logaritmu īpašības (kāpinātāju var iznest pirms logaritma, $\log_a b = 1/(\log_b a)$ u.c.).

$$
\begin{aligned}
E =& \frac{2}{\log_4 2000^6} + \frac{3}{\log_5 2000^6} = \\
=& \frac{2}{6\log_4 2000} + \frac{3}{6\log_5 2000} = \\
=& \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\log_4 2000} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\log_5 2000} = \\
=& \frac{1}{3}\log_{2000} 4 + \frac{1}{2}\log_{2000} 5 = \\
=& \frac{1}{6}\left(2\log_{2000} 4 + 3\log_{2000} 5\right) = \\
=& \frac{1}{6}\left(\log_{2000} 4^2 + \log_{2000} 5^3\right) = \\
=& \frac{1}{6}\log_{2000}\left(4^2\cdot 5^3\right) = \\
=& \frac{1}{6}\log_{2000} 2000 = \frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

Uzdevums 1.9: Virknē

$$1000, x, 1000 - x, \ldots$$

pirmie divi locekļi ir $a_0 = 1000$ un $a_1 = x$, bet katru nākamo a_n iegūst atņemot iepriekšējo no tam iepriekšējā: $a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$. Virknes pēdējais loceklis ir pirmais negatīvais skaitlis, kas parādās šajā procesā. Kura naturāla x vērtība rada visgarāko virkni?
Jautājums: Ierakstīt veselu nenegatīvu skaitli – to x vērtību, kas dod visgarāko virkni.

Atbilde. `618`

Ieviešam jaunu virkni $b_n = a_n/1000$, kur dalām visus virknes locekļus ar 1000.

$$1, x/1000, 1 - x/1000, \ldots$$

Virknē b_n pirmie locekļi ir $b_0 = 1$, $b_1 = t$, bet tālākie apmierina līdzīgu sakarību kā iepriekš: $b_n = b_{n-2} - b_{n-1}$, jo visas starpības un visi locekļi ir 1000 reizes mazāki nekā virknē a_n.
Apzīmēsim $x/1000$ ar jaunu mainīgo t (mums zināms, ka t ir skaitlis, kura decimālpierakstā ir tieši trīs cipari aiz komata) un izrakstīsim pirmos virknes b_n locekļus (katru nākamo iegūst, izmantojot rekurenci $b_n = b_{n-2} - b_{n-1}$):

$$1,\ t,\ 1-t,\ 2t-1,\ 2-3t,\ 5t-3,\ 5-8t,\ 13t-8,\ 13-21t,\ 34t-21,\ \ldots \tag{1}$$

Apzīmēsim Fibonači skaitļu virkni (to definē šādi: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$):

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_4 = 3,\ F_5 = 5,\ \ldots$$

Risinām vairākas nevienādību sistēmas mainīgajam t, lai nodrošinātu, ka iespējami daudzi virknes (1) locekļi ir nenegatīvi:

$$\left\{\begin{array}{l} t \geq 0 \\ 1 - t \geq 0 \end{array}\right. \quad\rightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} t \geq 0 \\ t \leq 1 \end{array}\right. \quad\rightarrow\quad t \in [0; 1]$$

$$\begin{cases} 2t-1 \geq 0 \\ 2-3t \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t \geq 1/2 \\ t \leq 3/2 \end{cases} \rightarrow t \in \left[\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right]$$

$$\begin{cases} 5t-3 \geq 0 \\ 5-8t \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t \geq 3/5 \\ t \leq 5/8 \end{cases} \rightarrow t \in \left[\frac{3}{5}; \frac{5}{8}\right]$$

$$\begin{cases} F_{2n+1}t - F_{2n} \geq 0 \\ F_{2n+1} - F_{2n+2}t \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t \geq F_{2n}/F_{2n+1} \\ t \leq F_{2n+1}/F_{2n+2} \end{cases} \rightarrow t \in \left[\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}; \frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}}\right]$$

Izrakstām tabulā šo intervālu galapunktus, kuriem pieder skaitlis t (līdzkamēr atrodam pirmo pretrunu).

n	F_{2n}	F_{2n+1}	F_{2n+2}	$[F_{2n}/F_{2n+1}; F_{2n+1}/F_{2n+2}]$
0	0	1	1	$[0.000000; 1.000000]$
1	1	2	3	$[0.500000; 0.666667]$
2	3	5	8	$[0.600000; 0.625000]$
3	8	13	21	$[0.615385; 0.619048]$
4	21	34	55	$[0.617647; 0.618182]$
5	55	89	144	$[0.617978; 0.618056]$
6	144	233	377	$[0.618026; 0.618037]$

Starp tām t vērtībām, kas izsakāmas kā $x/1000$ veselam x (decimālpierakstā tieši 3 cipari aiz komata) vislielākajam skaitam intervālu pieder skaitlis $t = 0.618$. Pirmā nevienādība, kura **neizpildās**, ir $t \geq 0.618026 = F_{12}/F_{13}$. Tāpēc neizpildās arī $F_{13}t - F_{12} \geq 0$; tātad virknē b_n (un arī a_n) pirmie 13 locekļi (no nulltā līdz divpadsmitajam) ir nenegatīvi, bet jau četrpadsmitais loceklis b_{13} (un arī $a_{13} = 1000 \cdot b_{13}$) ir negatīvs.

Ievietojot $x = 618$ iegūstam šādu virkni:

$$1000, 618, 382, 236, 146, 90, 56, 34, 22, 12, 10, 2, 8, -6.$$

Uzdevums 1.10: Reāls skaitlis r apmierina attēlā doto vienādību.

$$\left\lfloor r + \frac{19}{100} \right\rfloor + \left\lfloor r + \frac{20}{100} \right\rfloor + \left\lfloor r + \frac{19}{100} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor r + \frac{91}{100} \right\rfloor = 546.$$

Atrast $\lfloor 100r \rfloor$.

Jautājums: Ierakstīt $\lfloor 100r \rfloor$ vērtību.

Atbilde. 743

Izteiksmē ir $91 - 19 + 1 = 73$ saskaitāmie, jebkuri divi no tiem atšķiras ne vairāk kā par 1. Noskaidrosim, cik un kādus saskaitāmos izvēlēties, lai to summa būtu 546. Dalot 546 ar 73 (ar atlikumu) iegūsim:

$$546 = 7 \cdot 73 + 35.$$

Tādēļ 546 var iegūt, saskaitot 38 septiņniekus un 35 astoņniekus.

$19 + 38 = 57$ ir mazākais no daļu skaitītājiem n, kam $\left\lfloor r + \frac{n}{100} \right\rfloor$ vienāds ar 8. Atrisinām vienādojumu:

$$r + \frac{57}{100} = 8.$$

Pieskaitot mazākas daļas nekā $57/100$, veselajai daļai būs jānoapaļojas uz leju – uz vērtību 7. Iegūstam $r = 8 - 0.57 = 7.43$. Tāpēc $100r = 743$.

Piezīme. Kā r vērtības der arī visi citi skaitļi intervālā $r \in [7.43; 7.44)$, jo tiem visas veselās daļas noapaļosies precīzi tāpat. Bet lielākām r vērtībām, pareizais skaits ar "septiņniekiem" un "astoņniekiem" 73 saskaitāmo summā tiks izjaukts, tās neder. Tāpēc noteikti jāizpildās $\lfloor 100r \rfloor = 743$.

(Vēl divi uzdevumi par racionāliem/iracionāliem skaitļiem, kuru nebija sākotnējā testā.)

Uzdevums 1.11: Atrast, cik ir sakārtotu naturālu skaitļu pāru (a, b), kuriem

$$\log_a b + 6 \log_b a = 5,$$

un $a, b < 2021$.
Jautājums: Ierakstīt veselu nenegatīvu skaitli: atrisinājumu (a, b) skaitu.

Atbilde. 54

Apzīmējam $\log_a b = t$. Ievērosim arī, ka

$$\log_b a = \frac{\log_2 a}{\log_2 b} = \left(\frac{\log_2 b}{\log_2 a}\right)^{-1} = (\log_a b)^{-1} = \frac{1}{t}.$$

Tātad, samainot logaritmā bāzi un logaritmējamo skaitli, rodas apgrieztais skaitlis (t pārtop par $1/t$). Ievietojam vienādojumā un pārveidojam:

$$t + \frac{6}{t} = 5.$$

$$t^2 + 6 = 5t.$$

$$t^2 - 5t + 6 = 0.$$

Tātad $t = 2$ vai $t = 3$. Iegūstam, ka $\log_a b$ ir vai nu 2 vai 3. Tāpēc $b = a^2$ vai $b = a^3$. Skaitlis $a = 1$ nevar būt logaritma bāze; tāpēc atliek saskaitīt, cik ir pilnu kvadrātu un pilnu kubu, kuri mazāki par 2021. Pilnie kvadrāti iespējami pie $a = 2, \ldots, 44$. Iegūstam atrisinājumus formā (a, a^2)

$$(2; 4),\ (3; 9),\ (4; 16),\ \ldots,\ (44; 1936).$$

Pilnie kubi iespējami pie $a = 2, 3, \ldots, 12$. Iegūstam atrisinājumus formā (a, a^3)

$$(2; 8),\ (3; 27),\ (4; 64),\ \ldots,\ (12; 1728).$$

Šo atrisinājumu pavisam ir $43 + 11 = 54$.
Piezīme. Dažas b vērtības (piemēram $2^6 = 64$ vai $3^6 = 729$) var būt gan pilni kvadrāti, gan pilni kubi; bet tad tās piedalās divos dažādos atrisinājumos; piemēram $(a; b) = (8; 64)$ un arī $(a; b) = (4; 64)$. Un tās jāieskaita abas reizes, kā arī esam darījuši.

Uzdevums 1.12: Atrast $(x + 1)^{48}$, kur

$$x = \frac{4}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt[4]{5}+1)(\sqrt[8]{5}+1)(\sqrt[16]{5}+1)}.$$

Jautājums: Ierakstīt vērtību kā naturālu skaitli `N` vai racionālu daļu `P/Q`.

Atbilde. `125`

Reizinām izteiksmes skaitītāju un saucēju ar $(\sqrt[16]{5}-1)$, lai vairākkārt izmantotu kvadrātu starpības formulu:

$$
\begin{aligned}
x =& \frac{4(\sqrt[16]{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt[4]{5}+1)(\sqrt[8]{5}+1)(\sqrt[16]{5}+1)(\sqrt[16]{5}-1)} = \\
=& \frac{4(\sqrt[16]{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt[4]{5}+1)(\sqrt[8]{5}+1)(\sqrt[8]{5}-1)} = \\
=& \frac{4(\sqrt[16]{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt[4]{5}+1)(\sqrt[4]{5}-1)} = \\
=& \frac{4(\sqrt[16]{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \\
=& \frac{4(\sqrt[16]{5}-1)}{5-1} = \sqrt[16]{5}-1.
\end{aligned}
$$

Tāpēc $x+1=\sqrt[16]{5}$ un $(x+1)^{48}=5^3=125$.