Skaitļu teorija
ATV

Uzdevumu lapa #3

2021-01-20

Uzdevums 101.23: Pierādiet, ka jebkuru naudas summu, kas lielāka par 7 kapeikām var nomaksāt ar 3 un 5 kapeiku monētām.

Uzdevums 101.24: Pierādiet, ka jebkuru naturālu skaitli, kurš lielāks par 11, var izteikt kā divu saliktu skaitļu summu.

Uzdevums 101.25: Pierādīt, ka jebkuru naturālu skaitli k var bezgalīgi daudzos veidos izteikt formā

$$k = 1^2 \pm 2^2 \pm \cdots \pm m^2,$$

kur m ir naturāls skaitlis, un zīmes "$\pm$" izvēlamies patvaļīgi.

Uzdevums 101.26: Atrodiet visus tādus naturālus skaitļus s, kuriem vienādojumam

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_s^2} = 1$$

ir vismaz viens atrisinājums naturālos skaitļos .

Uzdevums 101.27: Pierādiet, ka katram naturālam skaitlim vienādojumam

$$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} + \cdots + \frac{1}{x_s^3} = \frac{1}{x_{s+1}^3}$$

ir bezgalīgi daudz atrisinājumu naturālos skaitļos $x_1, x_2, \ldots, x_{s+1}$.

Uzdevums 101.28: Pierādiet, ka jebkuram naturālam skaitlim m, ja s ir pietiekami liels naturāls skaitlis, vienādojumam

$$\frac{1}{x_1^m} + \frac{1}{x_2^m} + \cdots + \frac{1}{x_s^m} = 1$$

eksistē atrisinājums naturālos skaitļos $x_1, x_2, \ldots, x_s$.

Uzdevums 101.29: Dotas 555 lodes, kuru masas ir $1, 2, \ldots, 555$ grami. Sadaliet tās trijās pēc skaita un masas vienādās grupās.

Uzdevums 101.30: Dotas n lodes, kuru masas ir $1, 2, \ldots, n$ grami. Kādiem naturāliem skaitļiem tās var sadalīt trīs pēc masas vienādās grupās?

Uzdevums 101.31: Dots septiņpadsmitciparu skaitlis A. Skaitlis B ir iegūts no skaitļa A, uzrakstot tā ciparus pretējā secībā. Pierādiet, ka skaitlis $A+B$ satur vismaz vienu pāra ciparu.

Uzdevums 101.32: Kādas vērtības var pieņemt ciparu summa naturālam skaitlim, kas dalās ar 7?

Uzdevums 101.33: Kādas funkcijas $f(t)$ vienlaicīgi apmierina sekojošas īpašības:

(a) $f(t)$ definēta visiem veseliem skaitļiem, un tās vērtības ir veseli skaitļi,

(b) $f(0) = 1$,

(c) katram veselam n ir spēkā $f(f(n)) = n$,

(d) katram veselam n ir spēkā $f(f(n+2)+2) = n$?

Uzdevums 101.34: Dota Fibonači virkne:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1},\ \text{ja } n \geq 2.$$

Pierādiet, ka jebkuru naturālu skaitli var uzrakstīt kā dažu (varbūt viena) atšķirīgu šīs virknes locekļu summu.

Uzdevums 101.35: Pierādiet, ka jebkuru veselu skaitli n var izteikt formā

$$n = a_0 + a_1 2^1 + \cdots + a_m 2^m,$$

kur $a_i \in \{-1, 0, 1\}$, un $a_i a_{i+1}$ visiem i, $0 \leq i < m$. Uzrakstiet šādā formā skaitli 1985.

Uzdevums 101.36: Pierādiet, ka patvaļīgu pozitīvu daļskaitli $\frac{m}{n}$ var izteikt kā dažādu naturālu skaitļu apgriezto lielumu summu.

Uzdevums 101.37: Pierādiet, ka patvaļīgu īstu daļskaitli $\frac{m}{n}$ var izteikt formā

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1 q_2} + \cdots + \frac{1}{q_1 q_2 \cdots q_r}.$$

Šeit $q_1, q_2, \ldots, q_r$ ir naturāli skaitļi, turklāt $q_1 \leq q_2 \leq \cdots \leq q_r$.

Uzdevums 101.38: A ir bezgalīga naturālu skaitļu kopa. Katrs A elements ir ne vairāk kā 1990 dažādu pirmskaitļu reizinājums. Pierādīt, ka eksistē tāds skaitlis p un tāda kopas A bezgalīga apakškopa B, ka katru divu dažādu B elementu lielākais kopīgais dalītājs ir p.