Atlases sacensības komandu olimpiādei ``Baltijas ceļš''

2018. gada 22. septembris, Rīga (1. diena)

Risināšanas laiks: 4 stundas un 30 minūtes.

Jautājumus drīkst uzdot pirmo 30 minūšu laikā.

Atļauts izmantot tikai rakstāmpiederumus, lineālu un cirkuli.

Uzdevums 0.1 (BwTst2018.1): Doti $n \geq 2$ pozitīvi reāli skaitļi $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Kādu vislielāko un vismazāko vērtību var pieņemt izteiksme $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$, ja zināms, ka $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ir tādi nenegatīvi reāli skaitļi, ka $x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = 1$?

Uzdevums 0.2 (BwTst2018.2): Atrast visus reālu skaitļu pārus (x, y), kas apmierina vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} y(x+y)^2 = 2, \\ 8y(x^3 - y^3) = 13. \end{cases}$$

Uzdevums 0.3 (BwTst2018.3): Veselu skaitļu virknē $a_1, a_2, \ldots$ visiem $n \geq 1$ izpildās $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Pierādīt, ka, ja eksistē tāds k, ka $a_k = a_{k+2018}$, tad kāds no šīs virknes locekļiem ir vienāds ar nulli.

Uzdevums 0.4 (BwTst2018.4): Funkcija $f(x)$ definēta reāliem skaitļiem un pieņem reālas vērtības, pie tam visiem reāliem x ir spēkā nevienādība

$$\sqrt{2f(x)} - \sqrt{2f(x) - f(2x)} \geq 2.$$

Pierādīt, ka visiem reāliem x ir spēkā nevienādība

(a) $f(x) \geq 4$.

(b) $f(x) \geq 7$.

Uzdevums 0.5 (BwTst2018.5): Kārlis un Laila spēlē spēli uz galdiņa, kas sastāv no $n \geq 5$ rindā novietotiem laucinjiem. Uz pirmā lauciņa tiek novietots kauliņš un spēlētāji pēc kārtas izdara gājienus, sāk Kārlis. Vienā gājienā var pārvietot kauliņu vienu lauciņu uz priekšu, četrus lauciņus uz priekšu vai divus lauciņus atpakaļ. Jebkuru no šīm darbībām drīkst veikt tikai tādā gadījumā, ja pēc tās izpildes kauliņš joprojām atrdīsies uz kāda no galdiņa lauciņiem. Uzvar tas spēlētājs, kurš pārvieto kauliņu uz pēdējā lauciņa. Noskaidrojiet, kurām n vērtībām katram no spēlētājiem eksistē uzvaroša stratēģija.

Uzdevums 0.6 (BwTst2018.6): Uz rūtiņu lapas pa rūtiņu līnijām uzzīmēts taisnstūris $ABCD$. Visas rūtiņu virsotnes, kas atrodas taisnstūra iekšienē vai uz tā malām, nokrāsotas četrās krāsās tā, ka

- visas virsotnes, kas atrodas uz malas AB, nokrāsotas vai nu 1. vai 2. krāsā,
- visas virsotnes, kas atrodas uz malas BC, nokrāsotas vai nu 2. vai 3. krāsā,
- visas virsotnes, kas atrodas uz malas CD, nokrāsotas vai nu 3. vai 4. krāsā,
- visas virsotnes, kas atrodas uz malas DA, nokrāsotas vai nu 4. vai 1. krāsā,
- nekādas divas blakus virsotnes nav nokrāsotas 1. un 3. vai 2. un 4. krāsā.

Ievērojiet, ka no šiem nosacījumiem izriet, ka virsotne A ir nokrāsota 1. krāsā, utt. Pierādīt, ka var atrast rūtiņu, kurai visas četras virsotnes ir nokrāsotas dažādās krāsās.

Uzdevums 0.7 (BwTst2018.7): Plaknē atlikti $n \geq 3$ punkti, nekādi 3 no kuriem neatrodas uz vienas taisnes. Vai noteikti iespējams uzzīmēt n-stūri, kura virsotnes atrodas dotajos punktos un kura malas nekrustojas?

Uzdevums 0.8 (BwTst2018.8): Dots naturāls skaitlis $n \geq 2$. Lauras klasē ir vairāk nekā $n + 2$ skolēni, un katrs no tiem atrisināja dažus uzdevumus. Ir zināms, ka:

- katriem diviem skolēniem ir tieši viens uzdevums, kuru viņi abi ir atrisinājuši,
- katriem diviem uzdevumiem ir tieši viens skolēns, kurš tos abus ir atrisinājis,
- vienu uzdevumu atrisināja Laura un vēl tieši n citi skolēni.

Cik skolēnu ir Lauras klasē?

2018. gada 23. septembris, Rīga (2. diena)

Uzdevums 0.9 (BwTst2018.9): Šaurleņķa trijstūrim ABC, kuram $AB < AC$, apvilkta riņķa līnija Γ, kuras centrs ir O. Malas AB viduspunkts ir D, uz malas AC atlikts punkts E, tā, ka $BE = CE$. Trijstūrim BDE apvilktā riņķa līnija krusto Γ punktā F (kas nesakrīt ar B). No punkta B pret AO novilkts perpendikuls BK, zināms, ka A un K atrodas dažādās pusēs taisnei BE. Pierādīt, ka taisnes DF un CK krustojas punktā, kas atrodas uz riņķa līnijas Γ.

Uzdevums 0.10 (BwTst2018.10): Platleņķa trijstūrī ABC, kura platais leņķis ir B, novilkti augstumi AD, BE un CF. Punkti T un S ir attiecīgi AD un CF viduspunkti. Punkti M un N ir simetriski punktam T attiecīgi pret taisnēm BE un BD. Pierādīt, ka trijstūrim BMN apvilktā riņķa līnija iet caur punktu S.

Uzdevums 0.11 (BwTst2018.11): Trijstūra ABC leņķi ir $\sphericalangle A = 80^\circ$, $\sphericalangle B = 70^\circ$, $\sphericalangle C = 30^\circ$. No virsotnes A novilkta bisektrise AD, un uz tās (trijstūra iekšienē) atzīmēts punkts P tā, ka $\sphericalangle BPC = 130^\circ$. No punkta P novilkti perpendikuli PX, PY un PZ attiecīgi pret malām BC, AC un AB. Pierādīt, ka

$$AY^3 + BZ^3 + CX^3 = AZ^3 + BX^3 + CY^3.$$

Uzdevums 0.12 (BwTst2018.12): Uz paralelograma $ABCD$ malas BC atzīmēts punkts X, bet uz malas CD -- punkts Y, nogriežņi BY un DX krustojas punktā P. Pierādīt, ka taisne, kas iet caur nogriežņu BD un XY viduspunktiem, ir paralēla taisnei AP (vai sakrīt ar to).

Uzdevums 0.13 (BwTst2018.13): Vai eksistē tāds pirmskaitlis p, ka nevienam pirmskaitlim p skaitlis

$$\sqrt[3]{p^2 + q}$$

nav naturāls?

Uzdevums 0.14 (BwTst2018.14): Par naturālu skaitļu virkni $a_1, a_2, \ldots$ zināms, ka $a_1 = 2$ un visiem $n \geq 1$ skaitlis a_{n+1} ir lielākais pirmskaitlis, ar ko dalās skaitlis $a_1 a_2 \ldots a_n + 1$. Pierādīt, ka neviens no šīs virknes nlocekļiem nav vienāds ne ar 5, ne ar 11.

Uzdevums 0.15 (BwTst2018.15): Vai eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka var atrast vismaz 2018 naturālu skaitļu četriniekus (x, y, z, t), kas apmierina vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x + y + z = n \\ xyz = 2t^3. \end{cases}$$

Uzdevums 0.16 (BwTst2018.16): Sauksim naturālu skaitli par *vienkāršu*, ja tas nedalās ne ar viena pirmskaitļa kvadrātu. Pierādīt, ka ir bezgalīgi daudz tādu n, ka gan n, gan $n + 1$ ir vienkārši skaitļi.