

# Atlases sacensības komandu olimpiādei "Baltijas ceļš"

2017. gada 23. septembris, Rīga (1. diena)

Risināšanas laiks: 4 stundas un 30 minūtes.

Jautājumus drīkst uzdot pirmo 30 minūšu laikā.

Atļauts izmantot tikai rakstāmpiederumus, lineālu un cirkuli.

**Uzdevums 0.1 (BwTst2017.1):** Pierādīt, ka visiem reāliem  $x > 0$  ir spēkā vienādība

$$\sqrt{\frac{1}{3x+1}} + \sqrt{\frac{x}{x+3}} \geq 1.$$

Kurām  $x$  vērtībām ir spēkā vienādība?

**Uzdevums 0.2 (BwTst2017.2):** Atrast visus reālu skaitļu pārus  $(x, y)$ , kas apmierina vienādojumu

$$\frac{(x+y)(2-\sin(x+y))}{4\sin^2(x+y)} = \frac{xy}{x+y}.$$

**Uzdevums 0.3 (BwTst2017.3):** Atrast visas funkcijas  $f(x) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , kas definētas veseliem skaitļiem, pieņem veselas vērtības un visiem  $x, y \in \mathbb{Z}$  izpildās

$$f(x+y) + f(xy) = f(x)f(y) + 1.$$

**Uzdevums 0.4 (BwTst2017.4):** Polinoma  $P(x) = 2x^3 - 30x^2 + cx$  vērtības pie kādiem trīs pēc kārtas sekojošiem veseliem skaitļiem arī ir attiecīgi trīs pēc kārtas sekojoši veseli skaitļi. Nosakiet šīs vērtības!

**Uzdevums 0.5 (BwTst2017.5):** Burvju astoņstūris ar astoņstūris, kura malas iet pa rūtiņu lapas rūtiņu līnijām un malu garumi ir 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (jebkādā secībā). Kāds ir lielākais iespējamais burvju astoņstūra laukums?

**Uzdevums 0.6 (BwTst2017.6):**  $13 \times 13$  rūtiņu laukuma katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis. Pierādīt, ka var izvēlēties 2 rindas un 4 kolonnas tā, ka to 8 krustpunktos ierakstīto skaitļu summa dalās ar 8.

**Uzdevums 0.7 (BwTst2017.7):** Uz lapas viens aiz otra augošā secībā bez atstarpēm uzrakstīti visi sešciparu naturālie skaitļi no 100000 līdz 999999. Kāda ir lielākā  $k$  vērtība, kurai šajā virknē vismaz divās dažādās vietās iespējams atrast vienu un to pašu  $k$ -ciparu skaitli?

**Uzdevums 0.8 (BwTst2017.8):** Šaha turnīrā piedalījās 2017 šahisti, katrs ar katru izspēlēja tieši vienu šaha partiju. Sauksim šahistu trijotni  $A, B, C$  par principiālu, ja  $A$  uzvarēja  $B$ ,  $B$  uzvarēja  $C$ , bet  $C$  uzvarēja  $A$ . Kāds ir lielākais iespējamais principiālu šahistu trijotņu skaits?

2017. gada 24. septembris, Rīga (2. diena)

**Uzdevums 0.9 (BwTst2017.9):** Vienādsānu trijstūrī  $ABC$ , kurā  $AC = BC$  un  $\angle ABC < 60^\circ$ ,  $I$  un  $O$  ir attiecīgi ievilktais un apvilktais riņķa līniju centri. Trijstūrim  $BIO$  apvilkta riņķa līnija vēlreiz krusto malu  $BC$  punktā  $D$ . Pierādīt, ka

1. taisnes  $AC$  un  $DI$  ir paralēlas,
2. taisnes  $OD$  un  $IB$  ir perpendikulāras.

**Uzdevums 0.10 (BwTst2017.10):** Šaurleņķa trijstūra  $ABC$ , kuram  $AC < AB$ , apvilktais riņķa līnijas rādiuss ir  $R$ , tās loka  $BC$  (kurš nesatur  $A$ ) viduspunkts ir  $S$ . Uz augstuma  $AD$  pagarinājuma atlikts punkts  $T$  tā, ka  $D$  atrodas starp  $A$  un  $T$  un  $AT = 2R$ . Pierādīt, ka  $\angle AST = 90^\circ$ .

**Uzdevums 0.11 (BwTst2017.11):** Uz trijstūra  $ABC$  bisektrises  $AL$  pagarinājuma atlikts punkts  $P$  tā, ka  $PL = AL$ . Pierādīt, ka trijstūra  $PBC$  perimetrs nepārsniedz trijstūra  $ABC$  perimetru.

**Uzdevums 0.12 (BwTst2017.12):** Šaurleņķa trijstūrim  $ABC$  apvilktaļai riņķa līnijai  $\omega$  novilkts diametrs  $AK$ , uz nogriežņa  $BC$  izvēlēts patvaļīgs punkts  $M$ , taisne  $AM$  krusto  $\omega$  punktā  $Q$ . Perpendikula, kas no  $M$  vilkts pret  $AK$ , pamats ir  $D$ , pieskare, kas riņķa līnijai  $\omega$  novilkta caur punktu  $Q$ , krusto taisni  $MD$  punktā  $P$ . Uz  $\omega$  izvēlēts punkts  $L$  (atšķirīgs no  $Q$ ) tā, ka  $PL$  ir  $\omega$  pieskare. Pierādīt, ka punkti  $L$ ,  $M$  un  $K$  atrodas uz vienas taisnes.

**Uzdevums 0.13 (BwTst2017.13):** Pierādīt, ka skaitlis

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$$

ir racionāls visiem naturāliem  $n$ .

**Uzdevums 0.14 (BwTst2017.14):** Vai var atrast trīs naturālus skaitļus  $a, b, c$ , kuru lielākais kopīgais dalītājs ir 1 un kuriem izpildās vienādība

$$ab + bc + ac = (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)?$$

**Uzdevums 0.15 (BwTst2017.15):** Ciparu virkni  $D = d_{n-1}d_{n-2} \dots d_0$  sauksim par stabilu skaitļa nobeigumu, ja jebkuram naturālam skaitlim  $m$ , kas beidzas ar  $D$ , arī jebkura tā naturāla pakāpe  $m^k$  beidzas ar  $D$ . Pierādīt, ka katram naturālam  $n$  ir tieši četri stabili skaitļa nobeigumi, kuru garums ir  $n$ .

**Uzdevums 0.16 (BwTst2017.16):** Virknes  $a_1, a_2, \dots, a_{2016}$  un  $b_1, b_2, \dots, b_{2016}$  katra satur visus naturālos skaitļus no 1 līdz 2016 katru tieši vienu reizi (citiem vārdiem sakot tās abas ir skaitļu  $1, 2, \dots, 2016$  permutācijas). Pierādīt, ka var atrast tādus dažādus indeksus  $i$  un  $j$ , ka  $a_i b_i - a_j b_j$  dalās ar 2017.