Skaitļu teorija
ATV

Uzdevumu lapa #4

2021-01-27

(Kļūdas labojums). Iepriekšējā uzdevumu lapā nebija līdz galam ierakstīts, ka reizinājums $a_i a_{i+1}$ ir 0 (t.i. blakusesošie koeficienti nevar abi vienlaikus būt atšķirīgi no nulles):

Uzdevums 101.35: Pierādiet, ka jebkuru veselu skaitli n var izteikt formā

$$n = a_0 + a_1 2^1 + \cdots + a_m 2^m,$$

kur $a_i \in \{-1, 0, 1\}$, un $a_i a_{i+1} = 0$ visiem i, $0 \leq i < m$. Uzrakstiet šādā formā skaitli 1985.

Turpmākajos uzdevumos, iespējams, nepieciešams lietot matemātisko indukciju ar induktīvās hipotēzes pastiprināšanu. Tas nozīmē, ka uzdevumā pierādāmo apgalvojumu tīšām pārraksta nedaudz "stiprāku", lai varētu normāli veikt induktīvo pāreju.
Sk. diskusiju `https://bit.ly/3o3OBOA`.

Uzdevums 101.39: Pierādīt, ka jebkuram naturālam skaitlim n eksistē tāds naturāls skaitlis m, kuram

$$\left(\sqrt{2} - 1\right)^n = \sqrt{m} - \sqrt{m-1}.$$

Uzdevums 101.40: Pierādiet, ka eksistē bezgalīgi daudz naturālu skaitļu n, kuriem skaitlis $2^n + 2$ dalās ar n.

Uzdevums 101.41: Pierādiet, ka eksistē bezgalīgi daudz naturālu skaitļu n, kuriem skaitlis $n!$ dalās ar $n^2 + 1$.

Uzdevums 101.42: Dots nepāra pirmskaitlis p un veseli skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$, kuri nedalās ar p. Pierādiet, ka, aizstājot dažus no šiem skaitļiem ar pretējiem, var iegūt $p - 1$ skaitļus, kuru summa dalās ar p.

Uzdevums 101.43: Doti tādi naturāli skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ka $a_k \leq k$, un visu šo n skaitļu summa ir pāra skaitlis. Pierādiet, ka, aizvietojot dažus no tiem ar pretējiem, var iegūt n skaitļus, kuru summa ir 0.

Uzdevums 101.44: Doti veseli skaitļi $a_1 = 1, a_2, \ldots, a_n$, kuriem $a_i \leq a_{i+1} \leq 2a_i$ visiem $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Zināms, ka šo skaitļu summa ir pāra skaitlis. Pierādiet, ka šos skaitļus var sadalīt divās grupās tā, ka skaitļu summas abās grupās ir vienādas.

Uzdevums 101.45: Pierādiet, ka jebkuram naturālam skaitlim s vienādojumam

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_s} = 1$$

eksistē galīgs, lielāks par nulli, atrisinājumu skaits.

Uzdevums 101.46: Kurš no skaitļiem

$$\underbrace{2^{3^{2^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}}_{n \text{ simboli}} \quad \text{un} \quad \underbrace{3^{2^{3^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}}_{n \text{ simboli}}$$

ir lielāks?

Uzdevums 101.47: Pierādiet, ka jebkuram naturālam skaitlim n eksistē naturāls skaitlis, kuru var uzrakstīt kā divu kvadrātu summu tieši n dažādos veidos. (Izteiksmes a^2+b^2 un b^2+a^2 uzskatīsim par vienādām).

Uzdevums 101.48: Dota virkne $a_1 \in \mathbf{N}$, $a_{n+1} = a_n + 2^{a_n}$, ja $n \geq 1$. Pierādiet, ka šajā virknē ir bezgalīgi daudz locekļu, kuri

(a) nedalās ar 3,

(b) dalās ar 3.

Uzdevums 101.49: Kādiem naturāliem skaitļiem n visi skaitļi

$$C_n^2, C_n^2, \ldots, C_n^n$$

ir nepāra skaitļi?

Piezīme. Ar C_n^k apzīmē kombināciju skaitu pa k no n, t.i. $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Uzdevums 101.50: Dota funkcija $f(x,y)$, kura definēta visiem nenegatīviem pozitīviem skaitļiem. Dots, ka visiem nenegatīviem pozitīviem skaitļiem x un y izpildās vienādības

(a) $f(0,y) = y+1$,

(b) $f(x+1,0) = f(x,1)$,

(c) $f(x+1,y+1) = f(x, f(x+1,y))$.

Aprēķināt vērtību $f(4,1980)$.

Uzdevums 101.51: Funkcija $f(x)$ definēta veselām pozitīvām x vērtībām, un tās vērtības arī ir veseli pozitīvi skaitļi. Zināms, ka vienlaikus ir spēkā šādas trīs īpašības:

(1) $f(1) < f(2) < f(3) < \cdots < f(n) < f(n+1) < \cdots$ t.i., funkcija $f(x)$ ir stingri augoša;

(2) $f(985) = 1985$;

(3) ja veseliem pozitīviem skaitļiem m un k lielākais kopīgais dalītājs ir 1, tad $f(m \cdot k) = f(m) \cdot f(k)$.

Aprēķināt

(a) $f(1000)$;

(b) $f(3599)$;

(c) $f(n)$ patvaļīgam pozitīvam n.

Uzdevums 101.52: Ar a_n apzīmējam to dažādo veidu skaitu, kuros n var izsacīt kā tādu saskaitāmo summu, kas nepieņem citas vērtības kā $1; 3; 4$. Pieļaujamas arī summas, kas sastāv no viena saskaitāmā. Veidus, kas atšķiras tikai ar saskaitāmo kārtību, uzskatām par dažādiem. Piemēram, $a_1 = 1$; $a_2 = 1$; $a_3 = 2$; $a_4 = 4$. Pierādīt: ja n – pāra skaitlis, tad a_n ir naturāla skaitļa kvadrāts.