



Matemātika I

**Pamatkursa programmas paraugs
vispārējai vidējai izglītībai**

Valsts izglītības satura centrs | ESF projekts Nr.8.3.1/16/I/002
Kompetenču pieeja mācību saturā

Matemātika I

Pamatkursa programmas paraugs vispārējai vidējai izglītībai

Pamatkursa programmas paraugs ir izstrādāts Eiropas Sociālā fonda projektā "Kompetenču pieeja mācību saturā" (turpmāk – Projekts).

Mācību satura izstrādi pirmsskolas, pamatizglītības un vispārējās vidējās izglītības pakāpē Projektā vadīja **Dace Namsone** un **Zane Oliņa**.

Pamatkursa programmas parauga izstrādi un sagatavošanu publicēšanai Projektā vadīja **Jānis Vilciņš**.

Pamatkursa programmas paraugu izstrādāja **Sanita Balande**, **Ilze France**, **Evija Jaunzeme**,
Sandra Krauze un **Indra Pauliņa**.

Pamatkursa programmas parauga izstrādē piedalījās arī **Gunta Lāce** un **Valdis Zuters**.

Recenzenti **Baiba Āboltiņa** un **Dace Kūma**.

Konsultants **Jānis Mencis**.

Projekts izsaka pateicību visām Latvijas izglītības iestādēm, kas piedalījās mācību satura aprobācijā.

ISBN **978-9934-597-70-1**

Saturs

levads	4
Kursa mērķis un uzdevumi	7
Mācību saturs	8
Mācību sasniegumu vērtēšanas formas un metodiskie paņēmieni	10
Ieteikumi mācību darba organizācijai	13
Mācību satura apguves norise	14
Mācību satura apguves secība	16
Pielikumi	102
1. pielikums. Mācību priekšmetu kursu programmu paraugos lietotie kodi	102
2. pielikums. Plānotie skolēnam sasniedzamie rezultāti vispārējā vidējā izglītības standartā, beidzot optimālā apguves līmenī	103
3. pielikums. Plānotie skolēnam sasniedzamie rezultāti caurviju prasmēs, beidzot vispārējās vidējās izglītības pakāpi	110
4. pielikums. Skolēnam attīstāmie ieradumi Matemātikas mācību jomā vidējās izglītības pakāpē	112
5. pielikums. Matemātika I kursa moduļu/tematu pārskats	113
6. pielikums. Mācību satura apguvei izmantojamo mācību līdzekļu uzskaitījums	114

levads

Kursa programmas struktūra

Matemātika I pamatkursa programmas (turpmāk – programma) paraugs ir veidots, lai palīdzētu skolotājiem īstenot Ministru kabineta 2019. gada 3. septembra noteikumus Nr. 416 "Noteikumi par valsts vispārējās vidējās izglītības standartu un vispārējās vidējās izglītības programmu paraugiem" (turpmāk – standarts) noteiktos plānotos skolēnam sasniedzamos rezultātus matemātikas mācību jomā.

Programmā iekļauti:

- kursta mērķis un uzdevumi;
- mācību saturs;
- mācību sasniegumu vērtēšanas formas un metodiskie panēmieni;
- mācību satura apguves norise;
- ieteikumi mācību darba organizācijai.

Katram programmas tematam piedāvāti gan plānotie skolēnam sasniedzamie rezultāti, gan to apguvei aptuveni paredzētais laiks, izmantojamās mācību metodes un nepieciešamie mācību līdzekļi. Mācību satura apguvei izmantojamo mācību līdzekļu apkopojošs uzskaitījums pievienots 6. pielikumā.

Programmā mācību saturs ir veidots atbilstoši standartā noteiktajiem matemātikas mācību jomas plānotajiem skolēnam sasniedzamajiem rezultātiem, no tiem atvasinot Matemātika I kursā apgūstamos plānotos skolēnam sasniedzamos rezultātus optimālajā mācību satura apguves līmenī.

Mācību satura apguves norisē parādīts, kā pakāpeniski tiek sasnietas standarta prasības zināšanu apgviešana, izpratnes veidošanā, kā arī prasmju un vērtībās balstīti ieradumu attīstīšanā. Ieteicamā mācību satura apguves norise veidota ar detalizētiem tematiem. Katrā tematā ir norādīti plānotie skolēnam sasniedzamie rezultāti, to skaitā – **ziņas** (apraksta nozīmīgākās temata apguves rezultātā iegūtās zināšanas un izpratni par mācību jomas lielajām idejām), **prasmes**, **vērtībās balstīti ieradumi** un **kompleksi sasniedzamie rezultāti** (raksturo skolēna spēju koordinēti lietot zināšanas, prasmes un ieradumus jaunās, neierastās situācijās). Katrā temata ietvarā iekļautas arī nozīmīgākās skolēna darbības, kādas nepieciešamas

šo rezultātu sasniegšanai. Matemātika I kursa programmas tematu pārskats pievienots 5. pielikumā.

Programma veidota, paredzot, ka kursa apguvei vidējās izglītības pakāpē tiks atvēlētas 420 mācību stundas. Taču skolai ir iespējams mainīt (palielināt vai samazināt) mācību stundu skaitu kursā, taču to nesamazinot vairāk par 15%. Ieteikumus mācību darba organizācijai skatīt programmas sadaļā "Ieteikumi mācību darba organizācijai".

Programmas paraugam ir ieteikuma raksturs. Skolotāji var izmantot šo programmu vai arī pēc šī parauga izstrādāt savu programmu. Izmantojot šo programmu, ir jāņem vērā, ka pirmajos trījos gados, uzsākot pilnveidotā mācību saturu un pieejas īstenošanu, skolēnu pieredze var būt atšķirīga. Izvēloties īstenot šo programmu, pārejas periodā ir īpaši svarīgi diagnosticēt skolēnu sagatavotību pilnveidotā mācību saturu apguvei un plānot pakāpenisku pāreju uz citādu skolēnu mācību pieredzi un citādu metodisko paņēmienu izmantošanu, kuri līdz šim īstenotajās mācību programmās, visticamāk, tika iekļauti tikai daļēji. Svarīgi, ka skolotājs iepazīstas ar pamatskolā plānoto mācību saturu.

Sekmīgai šīs programmas uzsākšanai 10. klasē svarīgi, lai skolēniem, mācoties matemātiku pamatskolā, būtu bijusi iespēja

- 1) skaidrot simbolu un pieņemto apzīmējumu lietojumu, jēdzienus, darbības, paņēmienus un matemātikai būtiskas idejas; vārdiski raksturot savu darbību un rezultātus;
- 2) konstruēt zināšanas jeb veidot izpratni par jauniem objektiem un darbībām, spriežot induktīvi, modelējot un saistot ar jau apgūto;
- 3) veikt darbības ar reāliem skaitļiem un pārveidojumus ar algebriskām izteiksmēm, lietojot dažādus paņēmienus un pieraksta veidus, izvēlēties sev piemērotāko;
- 4) lietot dažādus matemātikai raksturīgus problēmrisināšanas paņēmienus, piemēram, "spriežu no beigām", "aplūkoju kaut kādā ziņā īpašu lielumu" un reflektēt par savu domāšanas procesu;
- 5) pakāpeniski veidot izpratni par jēdzienu *funkcija*, vispirms posmā 1.–6. klase mācoties saskatīt un formulēt sakarības starp mainīgiem lielumiem matemātiskos, citu jomu un sadzīviskos kontekstos, tālāk posmā 7.–9. klase lietot lineāru funkciju, kvadrātfunkciju un funkciju $y=k/x$, lai matemātiski raksturotu sakarības starp diviem lielumiem dažādos kontekstos.

Mācību saturu un pieejas akcenti

Vispārējās vidējās izglītībasatura īstenošanas mērķis ir lietpratīgs skolēns, kurš apzinās savas personiskās spējas un intereses mērķtiecīgai personiskās un profesionālās nākotnes veidošanai, kurš cina sevi un *citus*, padziļina zināšanas, izpratni, prasmes un turpina nostiprināt vērtības un tikumus atbilstoši saviem nākotnes mērķiem, atbildīgi, inovatīvi un produktīvi darbojas paša, ģimenes, labklājīgas un ilgspējīgas Latvijas valsts un pasaules veidošanā. Vidējās izglītības pakāpes loma ir dot iespēju jauniešiem mācīties iedziļinoties atbilstoši viņu interesēm un nākotnes mērķiem, padziļinot un vispārinot pamatzglītībā apgūto (10./11. klase), un mācoties dzīlāk, šaurākā mācību jomu lokā (11./12. klase).

Lietpratība jeb kompetence ir individuāla spēja kompleksi lietot zināšanas, prasmes un paust attieksmes, risinot problēmas reālās dzīves mainīgās situācijās. Tā ir spēja adekvāti lietot mācīšanās rezultātu noteiktā kontekstā (izglītības, darba, personiskajā vai sabiedriski politiskajā). Lietpratība jeb kompetence ir kompleksa – tā ietver zināšanas, izpratni, prasmes un ieradumus, kas balstīti vērtībās.

Lai katrā mācību priekšmetā un kursā ikvienam skolēnam nodrošinātu mūsdienīgas lietpratības izglītību, būtiski ikvienam skolotājam neatkarīgi no mācību priekšmeta plānot un vadīt skolēna mācīšanos, izvirzot skaidrus sasniedzamos rezultātus, izvēloties atbilstošus un daudzveidīgus uzdevumus, sniedzot atbalstošu un attīstošu atgriezenisko saiti un iespēju mācīties iedziļinoties – skaidrot darbību gaitu, domāt par mācīšanos un sasniegto rezultātu; veidot fiziski un emocionāli drošu mācību vidi; regulāri sadarboties ar kolēgiem, kopīgi plānojot mācību saturu īstenošanu un sekojot katra skolēna attīstības dinamikai, un veikt nepieciešamos uzlabojumus mācību procesā, nemot vērā katra skolēna individuālās mācīšanās un attīstības vajadzības.

Mācīšanās mērķu sasniegšanai skolotāji izmanto daudzveidīgas mācību organizācijas formas atbilstoši skolēna mācīšanās vajadzībām, tajā skaitā optimālā un augstākā mācību saturu apguves līmeņa rezultātu sasniegšanai nozīmīgu daļu laika mācību procesā atvēlot mērķtiecīgi atbalstītam skolēna patstāvīgajam – pētnieciskajam, sabiedriskajam vai jaunrades darbam. Šajā izglītības pakāpē skolotājiem svarīgi rosināt skolēnus laikus un mērķtiecīgi apzināties savas intereses, turpmāko studiju un profesionālās darbības virzienus un iespējas, piedāvājot daudzveidīgas darbības un karjeras izglītības pieredzi mācību procesā.

Matemātikas mācību jomas apguvē svarīgi nemt vērā šādus mācību saturu un pieejas akcentus:

- Izpratne par matemātikas simboliem, jēdzieniem, darbībām un pārveidojumiem, tai raksturīgiem parādījumiem un nozīmīgām idejām ir nozīmīgs mācīšanās rezultāts. Tradicionāli matemātikas mācīšanā kā primārais tiek izvirzīta prasmju apguve. Lai skolēni saprastu atsevišķo prasmju lietošanas mērķus un jēgu, saskatītu kopsakarības, prasmju apguve jāstiprina ar izpratni par veikto darbību, lietoto simbolu un jēdzienu jēgu/nozīmi. Piemēram, būtiski, ka skolēns var paskaidrot, kas ir pagrieziena leņķa sinuss, un izmanto to, lai formulētu spriedumus, veidotu risinājumu arī jaunās situācijās. Formālās definīcijas reproducēšana ne vienmēr liecina, ka ir izpratne. Skolēns demonstrē izpratni, ja teorētisko skaidrojumu spēj ilustrēt, papildināt ar konkrētiem piemēriem vai lieto zināšanas jaunā situācijā.
- Digitālo rīku efektīva izmantošana. Ir vairāki matemātikas saturu jautājumi, kuru efektīvākai vai dzīlākai apguvei ir nozīmīga digitālo rīku izmantošana. Piemēram,
 - 1) sinusa un kosinusa funkciju un to grafiku īpašību pētišana un formulēšana,
 - 2) liela apjoma datu apstrāde un attēlošana, vidējo lielumu un izkliedes mēru aprēķināšana,
 - 3) telpisku (ģeometrisku) ķermēnu īpašību un savstarpēja novietojuma raksturošana.
- Starpdisciplinārās – apgūto zināšanu lietošana citu mācību jomu un starpdisciplināros kontekstos. Viens no tematiem – “Vektori un kustība” – plānots kā starpdisciplinārs temats (matemātika un fizika). Vēl vienā no tematiem – “Līnijas vienādojums” – iekļauts 5 vai 6 stundu bloks, kurā integrēts matemātikas un fizikas saturs. Citos tematos, kur tas mērķtiecīgi, iespēju robežās atvēlēti nozīmīgi laika resursi apgūto matemātikas prasmju lietojumam citu mācību jomu kontekstos.
- Spēja risināt kompleksus uzdevumus ir mācīšanās rezultāts. Kompleksums vairumā gadījumu nenozīmē arvien sarežģītāku matemātisko kontekstu, bet gan nepieciešamību tā atrisināšanai saistīt vairākas prasmes, pamatoti izvēlēties piemērotu paņēmienu, izmantot modelēšanu, lietot zināšanas jaunās situācijās, t. sk., ja to konteksts ir starpdisciplinārs.

Matemātika I kursa programma veidota atbilstoši optimālajam līmenim formulētajiem sasniedzamajiem rezultātiem. Ievērojot mērķus, kas izvirzīti skolēniem matemātikas apguvei šajā līmenī, mainīti akcenti atsevišķu matemātikas satura jautājumu mācīšanas secībā un pieejā. Piemēram,

- 1) Saturā iekļauti pārveidojumi ar algebriskām daļām, kas līdz šim bija pamatskolas satura jautājums. Saistībā ar algebriskajām daļām saturā iekļauta daļveida funkcijas $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ īpašību noteikšana, grafika uzzīmēšana un lietošana citu mācību jomu, piemēram, ekonomikas kontekstos.
- 2) Saturā iekļautas divas no trigonometriskajām funkcijām – sinusa un kosinusa funkcijas. Mazināts sarežģītu vai niansētu trigonometrisko izteiksmju pārveidojumu apjoms, atvēlētie laika resursi plānoti izpratnes veidošanai par pamatlēdzieniem un idejām, spriedumu formulēšanai un pamatošanai, funkciju īpašību noteikšanai un iegūto zināšanu lietošanai citu jomu kontekstos. Trigonometrisko vienādojumu atrisinājumu skolēni noteiks noteiktā intervālā, jo kursā nav plānots aplūkot inversās trigonometriskās funkcijas.
- 3) Samazināts satura apjoms ģeometrijā, to integrējot trigonometrijas apguvē un aizstājot ar atsevišķu analītiskās ģeometrijas jautājumu apguvi. Kursā plānots apgūt divu veidu līniju – taisnes un riņķa līnijas – analītisko pierakstu; sakārību starp taisni un tai perpendicularu vektoru, kas uzdevumu risināšanā ļauj pāriet no vektoriem uz taisnēm, un otrādi. Skolēns iegūs pieredzi Analītiskās ģeometrijas rīkus lietot planimetrijas un algebras kontekstos.
- 4) Ar varbūtību teorijas elementiem saistītais satus padziļināts, piemēram, lietos darbības ar kopām, lai aprēķinātu notikumu varbūtību, veidos izpratni par nosacīto varbūtību un notikumu neatkarību.
- 5) Statistikas satus gan padziļināts (piemēram, kontekstam izmanto reālas, liela apjoma datu kopas; nošķir saistību starp mainīgiem lielumiem un cēloņsakarību), gan papildināts (piemēram, iekļautas kvartiles un kastu diagramma), ievērojot šīs apakšnozares dinamisko attīstību pēdējās desmitgadēs, darba tirgus un citu zinātņu jomu pieprasījumu, iespējas izmantot digitālos rīkus.
- 6) Atbilstoši standartam, kursa saturā nav iekļauta logaritmiskā funkcija, logaritmiskie vienādojumi un logaritmiskās nevienādības. Logaritma jēdzienu un logaritma īpašības skaitlisku izteiksmju pārveidošanai iepazīs un lietos nezināmā lieluma aprēķināšanai citu jomu kontekstos.

Kursa mērķis un uzdevumi

Kursā skolēni apgūs matemātikas mācību jomas ietvertos sasniedzamos rezultātus optimālajā apguves līmenī. Matemātikas mācību jomas apguves mērķis skolēnam ir – skolēns izprot matemātiku kā zināšanu un prasmju sistēmisku kopumu, kas ļauj kvantitatīvi aprakstīt un izzināt apkārtējo pasauli, lieto apgūtos algoritmus, matemātisko modelēšanu un citus matemātikai raksturīgus paņēmienus dažādos kontekstos, spriež induktīvi un deduktīvi, izmanto tehnoloģiju priekšrocības, veidojot risinājumus un skaidrojot savu darbību un rezultātu, raksturo savai izaugsmei un turpmākajai darbībai nozīmīgo iegūtajā matemātiskās darbības pieredzē.

Matemātika I kursa apguves mērķis un uzdevumi ir dot iespēju skolēnam:

- iegūt daudzveidigu spriešanas, pierādišanas, matemātiskās modelēšanas un citu matemātikai raksturīgu paņēmienu pieredzi, konstruējot jaunas zināšanas un risinot problēmas jaunās situācijās ar vienkāršu matemātisko kontekstu;
- skaidrot algebras, planimetrijas, analītiskās ģeometrijas, stereometrijas, trigonometrijas, varbūtību teorijas un statistikas matemātiskos modeļus un vingrināties to lietošanā, t. sk. citu mācību jomu kontekstos;
- lietot matemātisko valodu, lai raksturotu savu darbību, būtiskākos saturā iekļautos matemātikas jēdzienus un idejas, ar konkrētiem piemēriem ilustrējot un skaidrojot to mijiedarbību.

Mācību saturs

Tāpat kā pamatzglītībā, arī vidējās izglītības pakāpē mācību saturs ir veidots, fokusējoties uz skolēnam būtiskāko, lai veidotos lietpratība (kompetence) kā komplekss skolēna mācīšanās rezultāts ilgākā laika periodā. Mācību saturs ir organizēts saskaņā ar mācību satura būtiskākajiem pamatjēdzieniem jeb lielajām idejām (Li), kas skolēnam jāapgūst, lai veidotos vienota izpratne par apkārtējo pasauli un sevi tajā. Lielās idejas veido obligātā mācību satura strukturālo ietvaru; tām atbilstoši aprakstītas prasības mācību satura apguvei jeb plānotie skolēnam sasniedzamie rezultāti, pabeidzot noteiktu izglītības pakāpi.

Matemātikas mācību jomas saturs ir strukturēts 6 lielajās idejās, kuras tiek kopīgi attīstītas visos matemātikas mācību jomas kursos. Katra lielā ideja ir sadalīta apakšnodalās un satur kompleksus sasniedzamos rezultātus. Sasniedzamie rezultāti formulēti no skolēna pozīcijām, akcentējot likumsakarības un skolēnam nozīmīgus mērķus.

Lielās idejas palīdz skolēnam uztvert apkārtējo pasauli un kopsakarības, ļauj fokusēties uz būtiskāko un, jau no pirmsskolas pēctecīgi attīstot izpratni, skaidri saprast, ko viņš mācās un kur viņam šīs zināšanas un prasmes noderēs. Lielās idejas ir ietvars, kas ļauj gan skolēnam, gan skolotājam pievērst uzmanību galvenajam.

Matemātikas mācību jomas lielās idejas, par kurām skolēns veido izpratni matemātikas mācību priekšmetā.

- Matemātikas valodu izmanto saziņai un zinātniskai jēdzienu, ideju, problēmu risinājumu aprakstīšanai (M.Li.1).
- Risināt problēmu matemātikai raksturīgi nozīmē saskatīt struktūras, sistēmas, sakarības, veidot vispārinājumus un tos pierādīt (M.Li.2).
- Skaitļus izmanto konkrētu, arī praktisku uzdevumu atrisināšanai. Katrai darbībai ar skaitļiem ir noteikta jēga, un to izpildei ir noteikti likumi/algoritmi (M.Li.3).
- Sakarības starp lielumiem apraksta algebriskie modeļi un funkcijas. Izmantojot šos modeļus problēmu risināšanai, tos pārveido, nodrošinot ekvivalenci (M.Li.4).
- Datus par objektiem, situācijām, notikumiem, procesiem var matemātiski apstrādāt, analizēt, lai pieņemtu pamatotus lēmumus. (M.Li.5)
- Figūru īpašību, novietojuma, to raksturojošo lielumu izpēte ļauj risināt konkrētas, arī praktiskas, problēmas, formulēt vispārīgus secinājumus par objektiem, telpu, formu (M.Li.6).

Visu matemātikas mācību jomas lielo ideju formulējumos ir vienojošs aspekts – matemātikas lietojums, kas ietver arī problēmu risināšanu. Pirmās divas idejas raksturo matemātiku kā specifisku izziņas darbības veidu/pieredzi, bet pārējās četras idejas raksturo būtiskākos matemātiskos kontekstus – skaitli un darbības ar tiem, sakarības un algebriski modeļi, dati un varbūtība, figūras un telpa.

Pirmā lielā ideja (par valodu) apvieno plānotos skolēnam sasniedzamos rezultātus, kuru apguve skolēnam ļauj īstāt un veidot matemātisku tekstu, mērķtiecīgi pāriet no viena matemātikai raksturīga informācijas attēlošanas veida uz citu.

Otrā lielā ideja (par domāšanu) apvieno sasniedzamos rezultātus, kuri raksturo 1) skolēna attieksmi pret matemātikai raksturīgu izziņas procesu (es varu izdomāt, spiest/risināt var dažādi, jaunās zināšanas ir saistītas ar jau zināmo, vispārīgi apgalvojumi ir jāpamato u. tml.); 2) daudzveidīgu spriedumu veidošanas, apgalvojumu patiesuma pierādīšanas un problēmrisināšanas pieredzi vairumam skolēnu pieejamā matemātiskajā kontekstā; 3) matemātisko modelēšanu un citu problēmrisināšanas stratēģiju apguvi apzinātā līmenī.

Pārējās četras lielās idejas (3.–6.) apvieno plānotos skolēnam sasniedzamos rezultātus, kas raksturo izpratni un prasmes darbā ar skaitļiem, algebriskiem modeļiem, sakarībām, datiem un figūrām. Izpratnes dimensiju plānoto skolēnam sasniedzamo rezultātu formulējumos raksturo darbības ar vārdiem “skaidro”, “izvēloties sev piemērotāko paņēmienu” u. tml. Plānoto skolēnam sasniedzamo rezultātu formulējumi tipiski satur izteikumus “reālos (praktiskos), citu mācību jomu kontekstos” vai “pazīstamās un jaunās situācijās”, kas raksturo spēju veidot pārnesumu – lietot iegūtās zināšanas autentiskos kontekstos.

Standartā plānotie skolēnam sasniedzamie rezultāti mācību jomā un no tiem atvasinātie sasniedzamie rezultāti programmā ir kompleksi – galarezultāts veidojas darbībā, kura ietver gan vienas vai vairāku mācību jomu zināšanas, izpratni un prasmes, gan caurviju prasmes, gan vērtībās balstītus ieradumus. Katra mācību priekšmeta skolotāja viens no uzdevumiem ir visu to attīstīt.

Caurviju prasmju apguve ir nozīmīgs priekšnoteikums dzīlākas izpratnes veidošanai mācību priekšmetā. Vingrinoties izmantot caurviju prasmes mācību priekšmetam specifiskos veidos un situācijās, skolēns vienlaikus iegūst vispārīgas prasmes, kuras varēs izmantot visu dzīvi. Matemātika ir piemērots konteksts, lai pilnveidotu kritisko domāšanu

un problēmrisināšanu, kā arī pašvadītu mācīšanos. Tādejādi rodas priekšnoteikumi skolēnam nozīmīgu ieradumu veidošanā, piemēram, "Neskaidrās situācijās formulē jautājumus izpratnei, doto informāciju attēlo citādi, izvērtē paņēmienus un instrumentus", "Ik pa laikam izvērtē paveikto, lai saprastu, vai nav nepieciešamas korekcijas, precizējumi".

Kursā plānotie skolēnam sasniedzamie rezultāti saskaņā ar vispārējās vidējās izglītības standartu (Skatīt 9. pielikumu Ministru kabineta 2019. gada 3. septembra noteikumiem Nr. 416.) iekļauti programmas 2. pielikumā.

Standartā plānotie skolēnam sasniedzamie rezultāti caurviju prasmēs vispārējās vidējās izglītības pakāpes noslēgumā iekļauti programmas 3. pielikumā.

Skolēnam attīstāmie ieradumi matemātikas mācību jomā 4. pielikumā.

Mācību sasniegumu vērtēšanas formas un metodiskie paņēmieni

Vērtēšanas pieeja un pamatprincipi

Viens no svarīgākajiem priekšnoteikumiem, īstenojot mūsdienīgu izglītību, kuras rezultāts ir patiesa izpratne, spēja izmantot skolā apgūto neierastās situācijās un lietpratība, ir esošās vērtēšanas prakses pārvērtēšana, atbilstoši saskaņojot vērtēšanas mērķi, formu un saturu.

Vērtēšanas uzsvars mainās no skolēna mācību sasniegumu novērtēšanas uz vērtēšanu, lai uzlabotu mācīšanos. Vērtēšana, lai uzlabotu mācīšanos, ir efektīvas atgriezeniskās saites sniegšana skolēnam, dodot viņam iespēju un laiku uzlabot savu sniegumu atbilstoši plānotajiem skolēnam sasniedzamajiem rezultātiem un vērtēšanas kritērijiem.

Vērtēšana primāri ir neatņemama mācīšanās sastāvdaļa, kas gan skolotājam, gan skolēnam ļauj plānot uzlabojumus mācību procesā. Vērtēšana nav tikai vērtējuma izlikšana, piemēram, atzīmes veidā.

Vērtēšanas uzsvaru maiņa ir svarīga arī skolas līmenī. Klūst nozīmīgi veidot sistēmas, kuras ļauj sekot līdzi katram skolēna izaugsmei un sniegt atbalstu tieši tajā laikā un vietā, kad un kur tas ir nepieciešams.

Vērtēšanai standartā ir noteikti šādi pamatprincipi.

1. Sistēmiska princips – mācību snieguma vērtēšanas pamatā ir sistēma, kuru raksturo regulāru un pamatoitu, noteiktā secībā veidotu darbību kopums.
2. Atklātības un skaidrības princips – pirms mācību snieguma demonstrēšanas skolēnam ir zināmi un saprotami plānotie sasniedzamie rezultāti un viņa mācību snieguma vērtēšanas kritēriji.
3. Metodiskās daudzveidības princips – mācību snieguma vērtēšanai izmanto dažādus vērtēšanas metodiskos paņēmienus.
4. Iekļaujošais princips – mācību snieguma vērtēšana tiek pielāgota ikviemu skolēna dažādajām mācīšanās vajadzībām, piemēram, laika dalījums un ilgums, vide, skolēna snieguma demonstrēšanas veids, piekļuve vērtēšanas darbam.
5. Izaugsmes princips – mācību snieguma vērtēšanā, īpaši mācīšanās posma noslēgumā, tiek ķemta vērā skolēna individuālā mācību snieguma attīstības dinamika.

Vērtēšanas norises laiku mācību procesā un biežumu, saturu, uzdevuma veidu, vērtēšanas formu un metodiskos paņēmienus, vērtēšanas kritērijus, vērtējuma izteikšanas veidu un dokumentēšanu izvēlas atbilstoši vienam no trim vērtēšanas mērķiem – diagnosticējošā, formatīvā vai summatīvā vērtēšana. Informācija par tiem ir apkopota tabulā.

Vērtēšanas aspekti Vērtēšanas veidi	Diagnosticējošā vērtēšana	Formatīvā vērtēšana	Summatīvā vērtēšana
Vērtēšanas mērķi	Noteikt skolēna apgūtās zināšanas, izpratni, prasmes, vērtības balstītus ieradumus un kompleksus sasniedzamos rezultātus (turpmāk – plānotos skolēnam sasniedzamos rezultātus) mācību procesa plānošanai un pilnveidei, piemēram, turpmāko plānoto skolēnam sasniedzamo rezultātu precizēšanai, mācību uzdevumu izvēlei.	Noteikt skolēna apgūtos sasniedzamos rezultātus atgriezeniskās saites sniegšanai skolēnam un skolotājam, lai uzlabotu skolēna sniegumu un plānotu turpmāko mācību procesu. Veicināt skolēna mācību motivāciju attīstīt pašvadītas mācīšanās prasmes, iesaistot viņu vērtēšanas procesā.	Noteikt skolēna apgūtos sasniedzamos rezultātus mācību rezultāta novērtēšanai un dokumentēšanai. Summatīvās vērtēšanas rezultātus var izmantot arī, piemēram, lai uzlabotu skolēna sniegumu, izvērtētu mācību procesā izmantotās metodes, pieņemtu lēmumus par turpmāko darbu.
Norises laiks mācību procesā un biežums	Ieteicams veikt temata, mācību kursora vai mācību gada sākumā.	Veic mācību procesa laikā. Skolotājs to organizē pēc nepieciešamības.	Veic mācīšanās posma (piemēram, temata, vairāku tematu vai temata loģiskās daļas, mācību gada, izglītības posma vai pakāpes) noslēgumā.
Vērtēšanas saturs	Saturu veido iepriekšējā mācīšanās posmā plānotie skolēnam sasniedzamie rezultāti, kuri nepieciešami turpmākā mācību saturā apguvē.	Saturu veido plānotie skolēnam sasniedzamie rezultāti mācīšanās posma laikā.	Saturu veido plānotie skolēnam sasniedzamie rezultāti mācīšanās posma noslēgumā.
Vērtēšanas uzdevumu veidi	Uzdevuma veidu skolotājs izvēlas atbilstoši plānotajam skolēnam sasniedzamajam rezultātam. Tas var būt, piemēram, atbilžu izvēles uzdevums, ūso atbilžu uzdevums, strukturēts uzdevums, esejas tipa uzdevums, uzdevums, kurā skolēns var demonstrēt savu sniegumu darbībā vai izstrādājot produktu.		
Vērtēšanas formas un metodiskie paņēmieni	Mutiski, rakstiski, praktiski vai kombinēti. Novērošana, saruna, aptauja, uzdevumu risināšana, darbs ar tekstu, projekts, diskusija u. tml.		
Vērtēšanas kritēriji, to izveide	Kritēriji nepieciešami vērtēšanas objektivitātes nodrošināšanai. Kritērijus izstrādā skolotājs atbilstoši plānotajam skolēnam sasniedzamajam rezultātam, vērtēšanas formai un metodiskajam paņēmienam. Kritēriju izstrādē un vērtēšanā var iesaistīt skolēnus, lai pilnveidotu skolēna pašvadītas mācīšanās prasmes.		
Vērtējuma izteikšanas veids un dokumentēšana	Vērtējumu izsaka, dokumentē un komunicē atbilstoši mērķauditorijai (piemēram, skolēns, kolēgis, atbalsta personāls, skolas vadība, vecāks), lai mērķtiecīgi atbalstītu skolēna mācīšanos un sekotu līdzī skolēna sniegumam ilgtermiņā. Vērtējumu var izteikt apguves līmenos, procentos, punktos, ieskaitīts/neieskaitīts u. tml.		Vērtējumu vidējās izglītības pakāpē izsaka 10 ballu skalā katrā mācību priekšmeta kursā atbilstoši plānotajiem skolēnam sasniedzamajiem rezultātiem.

Vērtēšanas saturs, kritēriji, formas un metodiskie paņēmieni

Pamatkursā tematu ietvaros paredzēti četru veidu plānotie skolēnam sasniedzamie rezultāti: ziņas, prasmes, vērtībās balstīti ieradumi, komplekss sasniedzamais rezultāts. Plānojot vērtēšanu, skolotājam svarīgi izvēlēties plānotajam skolēnam sasniedzamajam rezultātam atbilstošus kritērijus, metodiskos paņēmienus un uzdevumu vērtēšanas veidu.

Ziņu apguve parāda skolēna izpratni. Tā attiecas uz standartā plānotajiem skolēnam sasniedzamajiem rezultātiem, kuri parasti sākas ar darbības vārdiem "apraksta", "skaidro", "pamato" u. c. Piemēram, ja vidējās izglītības matemātikas standartā viens no sasniedzamajiem rezultātiem optimālajā apguves līmenī ir definēts šādi: "M.O.4.4.3. Algebrisku daļu lasa, uzraksta pēc vārdiskā apraksta, raksturo iespējas to pierakstīt dažādos veidos, skaidro saīsināšanu, paplašināšanu", tad kursa Matemātika I programmā viena no ziņām (temats "Daļveida funkcija, algebriskas daļas") skan šādi: "Daļas pamatīpašību var izmantot algebrisko daļu saīsināšanā un paplašināšanā." Plānoto sasniedzamo rezultātu apguvi skolēns parāda, veicot uzdevumus, piedaloties sarunās u. tml.

Prasmju apguvi skolēns demonstrē darbībā (piemēram, modelē, attēlo, aprēķina); to vērtē, izmantojot snieguma līmeņa aprakstu, piemēram, prasmi "Lieto sinusu un kosinusu teorēmu, lai aprēķinātu trijstūra nezināmos lielumus." skolēni var demonstrēt situācijās ar dažādu dzījumu, piemēram – 1) dota norāde par teorēmas izmantošanu, pazīstama situācija, viens solis; 2) saskata teorēmas lietojumu, pazīstama situācija, 2 vai 3 solji; 3) saskata teorēmas lietojumu un to lieto jaunā situācijā; 4) saskata un lieto teorēmu kā kompleksas vai autentiskas situācijas matemātisko modeli.

Ieradumus, kas balstīti vērtībās, skolēns demonstrē darbībā; tos vērtē, novērojot skolēna darbību ilgākā laika posmā, īpaši situācijās, kuras ietver izvēles iespējas.

Kompleksu sasniedzamo rezultātu apguvi skolēns demonstrē darbībā. Piemēram, tematā "Statistika" viens no kompleksiem sasniedzamajiem rezultātiem ir definēts šādi: "Patstāvīgi pēta divu lielumu saistību, t.sk. korelāciju – izvēlas lielumus, plāno un veic datu ievākšanu, izmanto digitālos rīkus datu apstrādei un attēlošanai, analizē datus un interpretē rezultātus." Kompleksa sasniedzamā rezultāta vērtēšanai izmanto dažadas formas – rakstveida, mutvārdu vai kombinēts pārbaudes darbs, individuāls vai grupas projekts u. c.

Ieteikumi mācību darba organizācijai

1. Starppriekšmetu saikne

Kursa programmā katra konkrētā temata aprakstā ir īsi raksturota starppriekšmetu saikne ar citos mācību priekšmetos apgūto vai tiem aktuālo. Plānojot kursa satura apguvi, jāņem vērā, ka starp kursiem pastāv vairāki starpdisciplinaritātes līmeni, kas izpaužas gan kursu tematos, gan apgūstamajās prasmēs, tai skaitā:

- Zinātniskā valodas stila un zinātniskā teksta izstrādes jautājumi ir aktuāli visu kursu saturā vidējās izglītības pakāpē; latviešu valodas kursā optimālajā mācību satura apguves līmenī tiek attīstīta un pilnveidota izpratne par zinātniskā stila īpatnībām un tā izmantojumu tekstu veidošanā (zinātniska teksta uzbūve, argumentācija, teksta noformēšanas prasības, atsaucu veidošana, zinātniskā stila izteiksmes līdzekļi un gramatiskās īpatnības, iesaiste diskusijā). Kursā Matemātika I tiek attīstītas un pilnveidotas skolēna prasmes lasīt un veidot matemātisku tekstu, tādēļ svarīgi plānot šo prasmju nostiprināšanu saziņā ar latviešu valodas skolotāju.
- Lai skolēns sasniegtu B2 (spēja lietot svešvalodu mācību un profesionālajām vajadzībām) valodas apguves līmeni vismaz vienā svešvalodā vidējās izglītības pakāpē, ne tikai svešvalodu, bet arī visu citu mācību priekšmetu, t. sk. matemātikas skolotāju uzdevums ir dot iespēju skolēniem uzlabot savas svešvalodu zināšanas ar matemātikas mācību satura saistītā kontekstā, piemēram, izmantojot tīmeklī pieejamos mācību resursus svešvalodās.
- Vidējās izglītības pakāpē skolēnam jāspēj izmantot savas pamatizglītībā iegūtās digitālās iemaņas un zināšanas tādā mērā, lai varētu tās brīvi lietot arī citos kursoš; vidējās izglītības pakāpē tehnoloģiju mācību jomas – datorikas, programmēšanas un dizaina un tehnoloģiju – pamatkursos vidējās izglītības pakāpē skolēni turpinās attīstīt prasmes tiešsaistes komunikācijas rīku izmantošanā, liela apjoma tekstu strukturēšanā, liela apjoma datu apstrādei un vizualizācijai, informācijas dizaina risinājumu izstrādē. Kursa Matemātika I skolotājiem ieteicams plānot mērķtiecīgu digitālo prasmju izmantošanu sadarbībā ar tehnoloģiju mācību jomas skolotājiem, piemēram, skolēni programmē telpisku ķermeņu vai funkciju attēlošanu atkarībā no dotiem parametriem. Kursa programmas ietvaros plānoti un aprakstīti digitālo rīku efektīva lietojuma piemēri matemātikas apguvei.

Temats *Vektori un kustība* plānots un veidots kā starpdisciplinārs (matemātika un fizika), bet temats *Līnijas vienādojums* ietver starpdisciplināru sadaļu. Šo tematu apguves norisē aprakstītas skolēnu mācīšanās darbības, ievērojot abu priekšmetu satura saistību un pēctecību. Pārējos tematos ir iekļauti sasniedzamie rezultāti, kas dod iespēju veidot starpdisciplinārus uzdevumus, piemēram, tematā *Dajveida vienādojumi un nevienādības*, ir iespēja veidot saikni ar ekonomikas jautājumu apguvi.

2. Mācību organizācijas formas

Kursa sasniedzamo rezultātu apguvei, skolotājam svarīgi izmantot daudzveidīgas mācību organizācijas formas, t. sk. nozīmīgu daļu laika mācību procesā atvēlot mērķtiecīgi atbalstītam skolēna patstāvīgajam – pētnieciskajam un jaunrades darbam, piemēram, tematā *Statistika* skolēni apgūtās zināšanas lietot apjomīgāka patstāvīgi plānota un īstenota pētījuma ievāros. Ieteikums iespēju robežās izmantot dubultstundas, lai skolēni iegūtu nozīmīgu pieredzi iegūto zināšanu lietošanā.

Mācību satura apguves norise

Mācību satura apguves norise ietver

- 1) katrā mācību gadā apgūstamos tematus;
- 2) tajos plānotos skolēnam sasniedzamos rezultātus;
- 3) apguvei paredzēto laiku;
- 4) nepieciešamās skolēna darbības sasniedzamo rezultātu apguvei;
- 5) tematu apguvei izmantojamos mācību līdzekļus un metodiskos paņēmienus.

Šajā sadaļā ar detalizētu tematu ietvaru palīdzību parādīts, kā pakāpeniski tiek sasniegtas standarta prasības zināšanu apguvē, izpratnes veidošanā, prasmju un vērtībās balstītu ieradumu attīstīšanā.

Lai kursu Matemātika I un Matemātika II satura saistība/pēctecība būtu uzskatāma un palīdzētu plānot satura apguvi, abu kursu saturs iedalīts moduļos, piemēram, attiecīgi Analītiskā ģeometrija I un Analītiskā ģeometrija II. Kursā Matemātika I iekļauti 5 moduļi: Analītiskā ģeometrija I, Varbūtība un statistika I, Algebra I, Trigonometrija I un Ģeometrija I. Moduli Algebra I veido 4 temati, katru no pārējiem moduļiem veido 2 temati. Moduļu un tematu secību kopumā nosaka divi aspekti – 1) matemātikas specifiskā satura saistības un pēctecības ievērošana, 2) citās mācību jomās aktuālu matemātikas zināšanu apguve, piemēram, moduļu Analītiskā ģeometrija I un Varbūtība un statistika I vietu laika plānojumā nosaka to satura saistība ar fiziku un citiem mācību priekšmetiem, kuros skolēni izmanto analītiskās ģeometrijas vai statistikas rīkus.

Temata apguves norise aprakstīta izvērsti, jo dažos tematos, piemēram, "Līnijas vienādojums", "Statistika" ietverti jauni satura jautājumi un tas var palīdzēt skolotājiem plānot mācību procesu.

Tajā pašā laikā vēlreiz jāakcentē, ka mācību iestāde un katrs skolotājs kursa satura secību var plānot citādi un vienā modulī apvienoto tematu vietu plānojumā noteikt pēc saviem ieskatiem – mainīt tematu secību, ievērojot matemātikas satura saistību un pēctecību, to argumentējot ar mācību iestādes mērķiem, ar skolas ietvaros veikto starpdisciplināritātes plānošanu, ar savu skolēnu mācīšanās vajadzībām, savu pieredzi u. tml., piemēram, tematu Kombinatorika un varbūtība ir iespēja plānot un apgūt pēc moduļa Algebra I.

Katra temata ietvaru parāda temata ietvara struktūras paraugs. Programmā lietoto kodu skaidrojums pievienots 1. pielikumā.

Temata ietvara struktūras paraugs

| Temata numurs un nosaukums |
----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------

Temata apguvei ieteicamais laiks

Temata apguves mērķis – tematā plānoto skolēnam sasniedzamo rezultātu kopums un apguves pamatojums.

Sasniedzamie rezultāti

Ziņas	Prasmes
Apraksta nozīmīgākās temata apguves rezultātā iegūtās zināšanas un izpratni par mācību jomas lielajām idejām. Iekavās norādīts kods standarta attiecīgās mācību jomas plānoto skolēnam sasniedzamo rezultātu tabulā, uz kuru lielo ideju attiecas konkrētā ziņa.	Mācību priekšmetam specifiskās un vispārīgās jeb caurviju prasmes, ko skolēns apgūs attiecīgajā tematā.
Komplekss sasniedzamais rezultāts	Ieradumi
Skolēna spēja koordinēti lietot zināšanas, prasmes un ieradumus jaunās, neierastās situācijās. Iekavās norādīts kods no standarta attiecīgās mācību jomas plānoto skolēnam sasniedzamo rezultātu tabulas. Ja tematā tiek sasniegti tabulā minētais plānotais skolēnam sasniedzamais rezultāts pilnībā, pirms koda ieklauta vienādības zīme.	
Jēdzieni – nozīmīgākie jēdzieni, par kuriem skolēns gūs izpratni tieši šajā tematā.	

Temata apguves norise

Temata vienuma nosaukums	Tematā plānoto skolēnam sasniedzamo rezultātu apguvei nepieciešamās skolēna darbības. Tabula veidota, grupējot apgūstamos sasniedzamos rezultātus un katrai sasniedzamo rezultātu grupai jeb temata vienumam piedāvājot nepieciešamās skolēna darbības. Tabulā nav uzskaitītas visas iespējamās skolēna darbības, norādīts uzdevumu skaits, vingrināšanās ilgums vai intensitāte. Galvenā uzmanība pievērsta skolēna darbību veidiem un būtībai.
Temata vienuma nosaukums	
Temata vienuma nosaukums	

Mācību līdzekļi – tieši šī temata apguvei nepieciešamo mācību materiālu un mācību resursu uzskaitījums.

Starppiekšmetu saikne – norāda, kā skolēns apgūs ar attiecīgo tematu saistītus sasniedzamos rezultātus kontekstā ar citiem mācību priekšmetiem.

Metodiskais komentārs

Sadaļas nosaukums	Komentārs
Sadaļas nosaukums	Komentārs

Papildiespējas – papildu idejas un ieteikumi, kā vēl paplašināt un padziļināt skolēna mācīšanās pieredzi attiecīgajā tematā, piemēram, ieteikumi mācību ekskursijām, pētniecības projektiem.

Mācību saturu apguves secība

Kurss Matemātika I

Analītiskā ģeometrija I		Varbūtība un statistika I		Algebra I		Trigonometrija I		Algebra I		Geometrija I	
1. Vektori un kustība	2. Līnijas vienādo- jums	3. Kombi- natorika un varbūtība	4. Statistika	5. Daļveida funkcija, algebriskās daļas	6. Daļveida vienādo- jumi un nevienā- dības	7. Sinusa un kosinusa funkcijas	8. Trigono- metriskās izteiksmes un vienā- dojumi	9. Pakāpe ar racionālu kāpinātāju, ģeomet- riskā pro- gresija	10. Eksponent- funkcija	11. Taisnes un plak- nes telpā, daudz- skaldņi	12. Rotācijas ķermenī, telpisku ķermenē kombinā- cijas

Analītiskā ģeometrija I

1. Vektori un kustība

Ieteicamais laiks temata apguvei: 26 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: veidot izpratni par atšķirību starp skalāriem un vektoriāliem lielumiem. Lietot vektorus ģeometriskā un koordinātu formā, lai analizētu un matemātiski raksturotu fizikālus procesus, noteiktu un pamatoitu figūru īpašības.

Sasniedzamie rezultāti

Ziņas	Prasmes
<ul style="list-style-type: none"> Vektors ir orientēts nogrieznis; to izmanto, lai matemātiski raksturotu lielumus, kuriem ir gan skaitliskā vērtība, gan virziens (piemēram: pārvietojums, momentānais ātrums, spēks). (M.Li.6.; D.Li.3.) Ja vektoriāli lielumi (spēks, pārvietojums, momentānais ātrums u. tml.) darbojas vienā vai pretējos virzienos, tos raksturo kolineāri vektori – atrodas uz vienas taisnes vai uz paralēlām taisnēm; kolineāri vektori ietver arī vienādus vektorus un pretējus vektorus. (M.Li.6.; D.Li.3.) Dažkārt izpratne par fizikālo lielumu (piemēram, pārvietojumu) palīdz saprast darbības ar vektoriem (vektora reizinājums ar skaitli, vektoru summa). (M.Li.2.; M.Li.6.; D.Li.3.) Vektoru summa/starpība un vektora reizinājums ar skaitli ir vektors; no vektora \vec{a} atņemt vektoru \vec{b} nozīmē vektoram \vec{a} pieskaitīt vektoru $-\vec{b}$. Vektoru \vec{a} un $-\vec{a}$ summa ir $\vec{0}$ (nullvektors); nullvektoram nav virziena, tā garums ir 0. (M.Li.6.) Vektoru paralēli pārvietojot, iegūst ar to vienādu vektoru (saka arī – iegūst to pašu vektoru); to izmanto, lai saskaitītu un atņemtu vektorus, modelētu situācijas un formulētu spriedumus. (M.Li.2.; M.Li.6.) Vektora koordinātas iegūst, no tā galapunkta koordinātām atņemot sākumpunkta attiecīgās koordinātas. (M.Li.6.) Vektoru koordinātu plaknē var atlikt no dažādiem sākumpunktiem, bet vektora koordinātas to raksturo viennozīmīgi; vektora koordinātas sauc arī par vektora projekcijām – attiecīgi uz abscisu un ordinātu ass. (M.Li.2.; M.Li.6.; D.Li.3.) Vektora pieraksts koordinātu formā ļauj ērti noteikt vektora garumu jeb moduli (izmantojot Pitagora teorēmu), veikt darbības ar vektoriem – saskaitīt un atņemt divus vektorus, vektoru reizināt ar skaitli. (M.Li.6.) Vektorus gan geometriskā, gan koordinātu formā var izmantot figūru īpašību noteikšanā un pamatošanā. (M.Li.2.; M.Li.6.) Punkta stāvokli telpā var noteikt, izmantojot dažādas koordinātu sistēmas. Dekarta taisnlenķa koordinātu sistēmā katru telpas punktu viennozīmīgi raksturo 3 koordinātas – abscisa (x), ordināta (y) un aplikāta (z). Punktu var izmantot ķermeņa kustības aprakstā, ja ķermeņa izmērus var neievērot. Šādu ķermeņa modeli sauc par masas punktu. (M.Li.1.; M.Li.6.; D.Li.3., D.Li.12.) 	<p>Matemātika</p> <ul style="list-style-type: none"> Nosaka vienādi vai pretēji vērstus vektorus, vienādus vektorus, pretējus vektorus un kolineārus vektorus, ja tie doti geometriskā formā. Reizina vektoru ar skaitli geometriskā formā. Saskaita divus un vairāk vektorus geometriskā formā, izvēloties piemērotāko paņēmienu; skaidro vektoru atņemšanas saistību ar vektoru saskaitīšanu un nosaka divu vektoru starpības vektoru. Lieto darbības ar vektoriem geometriskā formā un darbību ar vektoriem īpašības, lai izteiktu vienu vektoru ar citiem vektoriem. Attēlo zīmējumā un nosaka punkta koordinātas Dekarta taisnlenķa koordinātu sistēmā telpā, ievērojot dotos nosacījumus. Skaidro un nosaka vektora koordinātas plaknē, atliek vektorus koordinātu plaknē, ievērojot dotos nosacījumus. Aprēķina vektora garumu (moduli), saskaita, atņem, reizina ar skaitli vektorus koordinātu formā. Lieto ar vektoriem saistītos jēdzienus un simbolus informācijas un rezultātu nolasīšanai, pierakstīšanai un komentēšanai. <p>Fizika</p> <ul style="list-style-type: none"> Izvērtē masas punkta modela lietošanu dažādu situāciju aprakstam. Aprēķina ātrumu un pārvietojumu (skalāri un vektoriāli). Analizē situācijas, izmantojot trajektorijas, ceļa un pārvietojuma jēdzienus. Salīdzina vidējo ātrumu un momentāno ātrumu.

Komplekss sasniedzamais rezultāts	Ieradumi
<ul style="list-style-type: none"> Spriežot induktīvi, formulē darbību izpildi ar vektoriem ģeometriskā un koordinātu formā, vektora modula aprēķināšanu, darbību ar vektoriem īpašības. (M.O.2.1.2.; M.O.6.2.1.; M.O.6.2.2.) Analizē kustību, izmantojot skalārus (ceļš, vidējais ātrums) un vektoriālus (pārvietojums, momentānais ātrums) lielumus un veicot ar tiem darbībās dažādās formās un izmantojot arī digitālus rīkus. (D.O.3.1.1., M.O..2.1.) Skaidro konkrētos piemēros, kā pāriet no viena vektoru attēlošanas veida uz otru, izvērtē un pamato attēlojumu atbilstību. (M.O.1.2.3.; M.O.2.3.1.) Nosaka figūru veidu, nezināmos lielumus un pamato figūru īpašības, lietojot vektorus ģeometriskā vai koordinātu formā, izvēloties situācijai atbilstošu attēlošanas veidu. (M.O.6.2.1.; M.O.6.2.2.; M.O.1.2.3.) <p>Jēdzieni: skalārs lielums, vektoriāls lielums, vektors, vektora modulis, vektora koordinātas, vektora projekcija, vienādi vērsti un pretēji vērsti vektori, vienādi un pretēji vektori, kolineāri vektori, trajektorija, ceļš, pārvietojums, momentānais ātrums, masas punkts, atskaites sistēma.</p>	<ul style="list-style-type: none"> Ilustrē ar piemēriem vai citādi raksturo skalārus un vektoriālus lielumus, attīstot ieradumu iegūtās zināšanas saistībā ar savu pieredzi. Pārliecinās, vai sapratis savstarpēji saistītu jēdzienu, pieņemto apzīmējumu un simbolu lietojumu matemātikas un fizikas kontekstos.

Temata apguves norise (integrēts temats, skolēnu darbība **fizikas** un **matemātikas** stundās)

Vektori ģeometriskā formā	<p>Raksturo fizikālus lielumus (masa, temperatūra, trajektorija, pārvietojums, ceļš, ātrums, svars, spēks ...), tos grupē pēc dažādām pazīmēm, t. sk. <i>darbības virzieni</i>. Skaidro vektoriālus un skalārus lielumus, ilustrē ar piemēriem.</p> <p>Analizē dažadas situācijas, nosaka ar kādiem fizikāliem lielumiem var aprakstīt doto situāciju un vai masas punkta modeļa lietošana būtiski ietekmē situācijas aprakstu.</p> <p>Konkrētos piemēros raksturo un skaidro kustību, izmantojot momentāno ātrumu, veidojot shemātiskus attēlus un izmantojot jēdzienus (vēl nav stingri definēti) vienādi vērsti un pretēji vērsti vektori, vienādi un pretēji vektori, kolineāri vektori.</p> <p>Definē vektoru, vienādus vektorus, pretējus vektorus, vienādi vērstus un pretēji vērstus vektorus, kolineārus vektorus; ilustrē definīcijas ar zīmējumiem.</p> <p>Vingrinās saskatīt vienādus vektorus, pretējus vektorus, vienādi vērstus un pretēji vērstus vektorus, kolineārus vektorus plaknes figūrās, piemēram, regulārā sešstūri. Pamato vektoru veidu, izmantojot definīcijas, formulētos apgalvojumus pieraksta, lietojot pieņemtos apzīmējumus.</p> <p>Veido zīmējumu atbilstoši dotajiem nosacījumiem par vektoriem un to veidu, piemēram, atlikt plaknē 4 punktus A, B, C un D, lai vektori \overrightarrow{AB} un \overrightarrow{CD} ir kolineāri un vektori \overrightarrow{AC} un \overrightarrow{DB} ir kolineāri, raksturo četrstūri ABCD.</p>
---------------------------	---

Vektori ģeometriskā formā

Veido loģiski saistītu tekstu, lai vienkāršās situācijās noteiktu vai pamatotu patiesumu apgalvojumam par vektoriem, t. sk., izmantojot plaknes figūru un telpisko ķermeņu īpašības, piemēram, pamato, ka jebkuri divi vektori, kas atrodas uz prizmas sānu šķauņēm, ir kolineāri.

Aplūko konkrētus piemērus, sadarbojas pārī un formulē idejas, kā izmantot vektorus divu (vai vairāk) pārvietojumu saskaitīšanai; skaidro, ko izsaka/parāda saskaitīšanas rezultātā iegūtais vektors. Analizē situācijas, ja pārvietojumi notiek uz vienas taisnes vienā vai pretējos virzienos. Formulē idejas un skaidro, ko nozīmē saskaitīt divus ātrumus, kā noteikt virzienu saskaitīšanas rezultātā iegūtajam ātrumam. Izmanto vektorus ātrumu saskaitīšanai, pielietojot arī digitālos rīkus. Skaidro un pieraksta darbību secību.

Aplūko konkrētus piemērus, zīmē un spriež, kā definēt divu vektoru saskaitīšanu jeb, kas ir summas vektors, ja vektori atrodas uz vienas taisnes, ja tie ir kolineāri; apspriež iegūtos rezultātus un formulē pieņēmumu – pirmā vektora sākumpunkts jāsavieno ar otrā vektora galapunktu. Pārbauda iegūto rezultātu, ja vektori, kas tiek saskaitīti, nav kolineāri un pirmā vektora gala punkts sakrīt ar otra vektora sākumpunktu; tad aplūko gadījumu, ja divi vektori brīvi novietoti plaknē; formulē un salīdzina idejas; spriež un pamato, ka vektoru summa nemainās, ja saskaitāmos maina vietām; secina, ka iespējamas divas pieejas (trīsstūra, paralelograma likumi); sadarbojas pārī un pamato, ka abi paņēmieni dod vienu un to pašu rezultātu; formulē algoritmus divu vektoru saskaitīšanai ģeometriskā formā, ja nepieciešams, izmanto animāciju, piemēram, [2].

Vingrinās saskaitīt divus vektorus ģeometriskā formā, izmantojot digitālos rīkus, piemēram, [1].

Skaidro vektora reizināšanu ar skaitli, izmantojot zināšanas par vektoru saskaitīšanu, piemēram, $2 \vec{a} = \vec{a} + \vec{a}$. Aplūko vairākus piemērus, formulē vispārinājumu/algoritmu vektora reizināšanai ar skaitli. Vingrinās lietot kolineāru vektoru īpašību, izmantojot zināšanas par plaknes figūru īpašībām (trīsstūra viduslinijas īpašība, trapeces viduslinijas īpašība u. tml.); nosaka vektoram pretējo vektoru.

Sadarbojas pāros un pēta, kā saskaitīt 3 un vēl vairāk vektorus plaknē, formulē algoritmu un salīdzina to ar citu izveidotajiem. Pēta, secina, ka rezultāts nemainās, mainot saskaitāmo (3 vai 4) secību. Vingrinās noteikt vairāku vektoru summu ģeometriskā formā, t. sk., izmantojot plaknes figūru īpašības.

Lieto vektoru saskaitīšanu un reizināšanu ar skaitli, konkrētos piemēros skaidrojot kustību, saskaitot pārvietojumus un ātrumus. Aprēķina un salīdzina ķermeņa veikto ceļu un pārvietojumu kustībai ar dažādām trajektorijām.

Sadarbojas pāros, spriež un izsaka idejas, ko nozīmē no viena vektora atņemt citu vektoru; pastāsta citiem un uzklausa citu formulētās idejas; ar skolotāja atbalstu izvērtē formulētās idejas; skaidro vektora atņemšanu kā pretējā vektora pieskaitīšanu, atrod uzziņu literatūrā citus algoritmus, vingrinās noteikt vektoru $\vec{a} - \vec{b}$, izvēloties sev piemērotāko paņēmienu, skaidrojot savu darbību. Definē nulles vektoru.

Analizē situāciju un izmanto zināšanas par darbībām ar vektoriem, t. sk. vektoru atņemšanu, lai noteiku nezināmo lielumu (pārvietojums, ātrums).

Spriež, izsaka vektoru ar dotiem vektoriem, lietojot darbības ar vektoriem un darbību īpašības; skaidro risinājumu, lietojot matemātikas valodu, veido pierakstu, lietojot pieņemtos apzīmējumus.

Sadarbojas grupā, lai pierādītu plaknes figūras īpašības, izmantojot zināšanas par vektoriem, piemēram, sadarbojoties pārī pierāda trijstūra viduslinijas vai trapeces viduslinijas īpašību; izmantojot dotu pierādījuma plānu, veido saistītu tekstu un pierāda, ka trijstūra mediānas krustojoties dalās attiecībā 2:1.

Vektori koordinātu formā

Pēta 3 vai 4 vienādu vektoru novietojumu (galapunktu koordinātas ir veseli skaitļi) koordinātu plaknē (var izmantot digitālos rīkus) ar mērķi saskatīt un formulēt sakarību, kas saista vienādu vektoru galapunktu koordinātas; formulē secinājumu un to izmanto, lai definētu vektora koordinātas. Vingrinās no koordinātu sākumpunkta vai kāda cita punkta atlikt vektoru, ja dotas tā koordinātas.

Sadarbojas un spriež, kā koordinātu plaknē dotu vektoru izteikt ar vienības vektoriem, aplūko vairākus piemērus, mēģina formulēt vispārinājumu. Vingrinās noteikt vektora koordinātas, ja tas izteikts ar vienības vektoriem un otrādi. Veic pašpārbaudi, izmantojot digitālos rīkus, piemēram, [3].

Spriež, pēta, kā aprēķināt vektora garumu, ja dotas vektora koordinātas; uzskausa citu idejas, skaidro Pitagora teorēmas izmantošanu; vingrinās lietot vektora garuma aprēķināšanas formulu, t. sk., nosakot attālumu starp diviem punktiem koordinātu plaknē. Izmanto formulu attālumam starp diviem punktiem, lai pamatotu plaknes figūru īpašības koordinātu plaknē, piemēram, pamatotu trijstūra veidu, ja dotas tā virsotnes koordinātas.

Konkrētos piemēros analizē un skaidro lielumus, kas raksturo kustību, izmantojot zināšanas par vektora koordinātām jeb vektora projekcijām, vektora moduli.

Sadarbojas, pēta saistību starp divu vektoru koordinātām un to summas vektora koordinātām, patstāvīgi generējot piemērus, izvērtējot to piemērotību izpētei; formulē pieņēmumu un cenas to pierakstīt, lietojot simbolisko pierakstu; salīdzina savus un citu grupu iegūtos rezultātus, precizē vai papildina.

Izsaka idejas turpmākai izpētei – noskaidrot, kā koordinātu formā noteikt koordinātas divu vektoru starpībai un vektora reizinājumam ar skaitli. Sadarbojas pāri, aplūko vairākus piemērus un formulē secinājumus par to, kā noteikt koordinātas starpības vektoram un vektora reizinājumam ar skaitli.

Vingrinās izpildīt darbības ar vektoriem koordinātu formā.

Lieto darbības ar vektoriem, lai veidotu plaknes figūras atbilstoši nosacījumiem, pamatotu to īpašības, piemēram, nosaka punkta D iespējamās koordinātas, ja dotas punktu A, B un C koordinātas un ABCD ir paralelograms.

Analizē ķermeņa kustības attēlojumu kartē, nosakot ķermeņa trajektoriju, ceļu un pārvietojumu, t. sk., izmantojot animācijas, piemēram, [4]. Ievieš kartē Dekarta taisnleņķa koordinātu sistēmu, kas saskaņota ar kartes mērogu, un aprēķina pārvietojuma vektoru un projekcijas. Pārbauda, ka dažādi ieviestas koordinātu sistēmas (atšķirīgi sākuma punkti un asu vērsums) neietekmē vektora projekciju lielumu, t. sk., izmantojot animācijas, piemēram, [5], [6].

Lasa, skaidro un izvērtē dotos atrisinājumus, kuros lietoti vektori plaknē figūru īpašību noteikšanai vai pamatošanai. Izmanto iegūto pieredzi, lai līdzīgās situācijās noteiktu un pierādītu plaknes figūru īpašības, izvēloties atbilstošāko vektoru attēlošanas veidu (ģeometriskā vai koordinātu formā), piemēram, lai pamatotu koordinātu plaknē dota četrstūra veidu.

Vektori telpā. Telpas koordinātas	<p>Sadarbojas grupā un spriež, kā telpā vienkāršā situācijā izteikt vektoru ar dotajiem vektoriem, piemēram, izteikt vektoru $\overrightarrow{BD_1}$, ja kubā $ABCD_1B_1C_1D_1$ doti vektori $\vec{b} = \overrightarrow{BB_1}$, $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{c} = \overrightarrow{BC}$; salīdzina iegūtos rezultātus, raksturo kopīgo un atšķirīgo, izsakot vektoru plaknē un telpā.</p> <p>Izmanto uzziņu literatūru, lai iegūtu informāciju par Dekarta taisnleņķa koordinātu sistēmā telpā, iepazīst jaunu jēdzienu – aplikāta. Vingrinās atlikt punktu ar dotām koordinātām, parādot palīglīnijas (attēlo raksturīgo taisnstūra paralēlskaldni). Skaidro formulu attālumam starp diviem punktiem telpā, izmantojot sakarības taisnleņķa trijstūri; vingrinās to lietot, piemēram, nosakot attālumu starp divām taisnstūra paralēlskaldņa virsotnēm.</p> <p>Veic izpēti, izvēloties veidu – skicēt uz papīra, izmantot taisnstūra paralēlskaldņa modeli un/vai izmantot animāciju, piemēram, [7], lai skaidrotu vektora koordinātas telpā un vektora izteikšanu ar vienības vektoriem.</p> <p>Lieto sakarību starp galapunktu koordinātām un vektora koordinātām. Pamato taišņu AB un CD paralelitāti telpā, ja zināmas punktu A, B, C un D koordinātas. Izmanto darbības ar vektoriem, kolineārus vektorus un formulu attālumam starp diviem punktiem telpā, lai noteiktu daudzskaldņa veidu un īpašības, piemēram, vai daudzskaldnis $ABC_1B_1C_1$ ir trijstūra prizma (regulāra trijstūra prizma), ja dotas daudzskaldņa virsotņu koordinātas.</p>
--	--

Mācību līdzekļi

Mācību materiāli

Skola2030 mācību līdzeklis

- [1] Geogebra.org. [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://www.geogebra.org/m/ee5nfsq6> (Vektoru summa ģeometriskā formā)
- [2] Geogebra.org. [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://www.geogebra.org/m/Cy8bxaKS> (Vektoru saskaitīšana ar trijstūra un paralelograma likumu)
- [3] Geogebra.org. [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://www.geogebra.org/m/buutBX72> (Vektora izteikšana ar vienības vektoriem)
- [4] Geogebra.org. [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://www.org/m/jsafgdfu> (Ātrumu saskaitīšana (laivas ātrums un straumes ātrums))
- [5] Geogebra.org. [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://www.geogebra.org/m/pdNj3DgD> (Saistība starp kustīgā punkta koordinātu, ātrumu un paātrinājumu)
- [6] PhET™ Interactive Simulations. [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://phet.colorado.edu/en/simulation/moving-man>
(Saistība starp kustīgā punkta koordinātu, ātrumu un paātrinājumu)
- [7] Geogebra.org. [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://www.geogebra.org/m/NEjnDxt2> (Vektora koordinātas telpā)
- [8] DZM materiāli. [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://www.siic.lu.lv/datadir/matematika/registretieskolotaji/171.pdf>

Mācību resursi

Dators, ekrāns, projektors, interneta pieslēgums.

Starppriekšmetu saikne

Integrēts temats (matemātika un fizika).

Metodiskais komentārs

Ieteikums laika plānojumam	Sadalai "Vektori géometriskā formā" plānotas 10 m. s., sadalai "Vektori koordinātu formā" – 10 m. s., sadalai "Vektori telpā. Telpas koordinātas" – 4 m. s. Summatīvajam pārbaudes darbam darbam plānotas 2 m. s. Skolotājs, ievērojot savu pieredzi vai skolēnu vajadzības, laika plānojumu temata ietvaros koriģē pēc saviem ieskatiem.
Par starpdisciplinaritāti	Satura izklāsta secība plānota, ievērojot saturu saistību un pēctecību, lai fizikā netiku dublēta matemātiskā aparāta apguve, un uz matemātikas stundu skolēni nāk ar skaidru mērķi apgūt zināšanas, kas aktuālas fizikā. Iespējama arī pretējā situācija – skolēni vispirms apgūst noteiktas zināšanas un prasmes, kuras pēc kāda briža būs nepieciešamas fizikā, piemēram, izpratne par jēdzienu "vektora projekcija", tā saistība ar matemātikā lietoto jēdzienu "vektora koordinātas". Būtiski, ka fizikas un matemātikas skolotāji saskaņo ne tikai saturu secību, bet arī iespēju robežas vienojas par jēdzienu, apzīmējumu lietojumu.
Digitālo rīku lietojums	Šajā tematā ir iespējams efektīvi izmantot digitālos rīkus – gan lietotni Geogebra, gan citus. Analizējot kustību konkrētos piemēros, pētot darbības ar vektoriem u. tml., digitālie rīki ļauj vairāk uzmanības veltīt spriešanai, palīdz ieraudzīt kopsakarības.
Jauno zināšanu konstruēšana	Izmantojot jau zināmo, skolēns pie vairākiem rezultātiem šī temata ietvaros var nonākt patstāvīgi, t. sk., sadarbojoties mazā grupā, piemēram, ko nozīmē vektoru starpība un vektora reizinājums ar skaitli, izmantojot vektoru summu; kā veikt darbības ar vektoriem koordinātu formā, izmantojot jau zināmo par vektora koordinātām un darbībām géometriskā formā u. tml. (skatīt temata norisi).
Pieejamie materiāli	Ieteikums izmantot jau esošos un pieejamos mācību materiālus par vektoriem, piemēram, [8].

Analitiskā ģeometrija I		Varbūtība un statistika I		Algebra I		Trigonometrija I		Algebra I		Ģeometrija I	
1. Vektori un kustība	2. Līnijas vienādo- jums	3. Kombi- natorika un varbūtība	4. Statistika	5. Daļveida funkcija, algebriskās daļas	6. Daļveida vienādo- jumi un nevienā- dības	7. Sinusa un kosinusa funkcijas	8. Trigono- metriskās izteiksmes un vienā- dojumi	9. Pakāpe ar racionālu kāpinātāju, ģeomet- riskā pro- gresija	10. Eksponent- funkcija	11. Taisnes un plak- nes telpā, daudz- skaldņi	12. Rotācijas ķermenī, telpisku ķermenē kombinā- cijas

Analitiskā ģeometrija I

2. Līnijas vienādojums

Ieteicamais laiks temata apguvei: 34 mācību stundas.

Temata apgoves mērķis: padzīlināt izpratni par saistību starp algebriskiem un ģeometriskiem modeļiem, apgūstot taisnes un riņķa līnijas dažādus attēlošanas veidus, to lietojumu, t. sk. lieto taisnes vienādojumu (lineāru funkciju), lai raksturotu un analizētu kustību.

Sasniedzamie rezultāti

Zinās	Prasmes
<ul style="list-style-type: none"> Attālumu starp diviem punktiem plaknē vai telpā var aprēķināt, ja zināmas to koordinātas. (M.Li.6.) Zinot nogriežņa galapunktu koordinātas var noteikt tā viduspunkta koordinātas. (M.Li.6.) Taisnes virziena koeficients parāda funkcijas pieauguma un argumenta pieauguma attiecību. Paralēlām taisnēm virziena koeficienti ir vienādi. (M.Li.4., M.Li.6.) Aprakstot vienmērīgas kustības koordinātas izmaiņu laikā, taisnes virziena koeficientam ir fizikālā jēga – ātruma skaitliskā vērtība. (M.Li.4., D.Li.3.) Vienādojuma ar diviem mainīgajiem atrisinājumi (skaitļu pāri) koordinātu plaknē attēlojas kā atsevišķu punktu kopums vai līnija; praksē bieži jārisina "pretējais" uzdevums – jānosaka vienādojums, kas apraksta doto līniju. (M.Li.1.) Katru taisni koordinātu plaknē apraksta vienādojums $Ax + By + C = 0$ (A un B vienlaikus nav 0), un otrādi. (M.Li.1.; M.Li.6.) Funkciju var attēlot koordinātu plaknē, bet ne katra koordinātu plaknē attēlotā līnija ir funkcijas grafiks. (M.Li.4.) Taisnes vienādojuma pierakstam ir vairāki veidi un tā izvēli nosaka dotā informācija vai izmantošanas mērķis; pārejai no viena veida uz citu lieto ekvivalentos pārveidojumus. (M.Li.1.; M.Li.4.; M.Li.6.) Katru riņķa līniju koordinātu plaknē apraksta vienādojums $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, kur r. l. centra koordinātas ir $(a; b)$ un rādiuss R, un otrādi – katram šāda veida vienādojumam atbilst riņķa līnija. (M.Li.1.; M.Li.6.) Taisnei $Ax + By + C = 0$ perpendikulāra vektora koordinātas ir $(A; B)$; šī sakarība ļauj taisnes aizstāt ar vektoriem un otrādi. (M.Li.2.; M.Li.6.) 	<ul style="list-style-type: none"> Lieto formulu attālumam starp diviem punktiem plaknē un sakarības starp nogriežņa galapunktu un viduspunkta koordinātām, veicot aprēķinus vai pamatojumus. Nosaka no grafika un analītiski argumenta pieaugumu, funkcijas pieaugumu, taisnes virziena koeficientu, lieto pieņemtos apzīmējumus. Konkrētos piemēros nosaka un pamato, vai grafiski un analītiski uzdota sakarība ir funkcija. Attēlo koordinātu plaknē taisni, ja dots tās vienādojums (dažādi pieraksta veidi). Lieto sakarības starp paralēlu un perpendikulāru taišņu virziena koeficientiem. Lieto digitālos rīkus, lai uzzīmētu taisni un mainītu tās novietojumu koordinātu plaknē atbilstoši dotiem nosacījumiem. Pāriet no viena taisnes uzdošanas veida uz citu, skaidrojot un lietojot ekvivalentus pārveidojumus. Uzraksta un lieto taisnes vienādojumu, ja dots: 1) viena taisnes punkta koordinātas un virziena koeficients; 2) divu taisnes punktu koordinātas; 3) taisnes novietojums koordinātu plaknē, t. sk., ja tā paralēla kādai no asīm. Attēlo riņķa līniju koordinātu plaknē, ja dots tās vienādojums $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$; uzraksta riņķa līnijas vienādojumu, ievērojot dotos nosacījumus vai tās attēlojumu koordinātu plaknē.

Komplekss sasniedzamais rezultāts	Ieradumi
<ul style="list-style-type: none"> • Spriež induktīvi (t. sk., izmantojot digitālos rīkus), deduktīvi un formulē: 1) sakarības starp nogriežņa galapunktu un viduspunkta koordinātām, 2) saistību starp lineāras funkcijas argumenta pieaugumu, funkcijas pieaugumu un virziena koeficientu, 3) sakarības starp paralēlu un perpendikulāru taišņu virzienu koeficientiem, 4) saistību starp taisni $Ax + By + C = 0$ un vektoru $(A; B)$. (M.O.2.1.2.; M.O.6.1.2.; M.O.6.2.3.; M.O.6.2.5.; M.O.6.2.6.) • Nosaka, pamato koordinātu plaknē dotas plaknes figūras veidu, nezināmos lielumus un īpašības. (M.O.1.2.3.; M.O.1.2.4.; M.O.6.1.2.; M.O.6.2.3.; M.O.6.2.4.) • Atrisina situāciju uzdevumus, izveidojot un atrisinot vienādojumu $Ax + By = C$ naturālo skaitļu kopā. (M.O.4.5.7.; M.O.6.2.4.) • Nosaka un raksturo vienādojuma, nevienādības un to sistēmas ar diviem mainīgajiem atrisinājumu, atrisinājumu skaitu vienādojumu sistēmai ar diviem mainīgajiem, lietojot taisnes un riņķa līnijas attēlošanu koordinātu plaknē. (M.O.2.1.2.; M.O.1.2.4.; M.O.4.5.6.; M.O.6.2.7.) • Analizē un raksturo kustības raksturlielumus (koordināta, pārvietojums, ātrums), sakarības starp tiem, izmantojot lineāru funkciju, ar to saistītos jēdzienus un ģeometriskos pārveidojumus (paralēlā pārnese, aksiālā simetrija). (M.O.4.2.2.; M.O.2.2.1.; M.O.6.1.2.; D.O.3.1.1.) 	Raksturo matemātikā un fizikā pieņemto apzīmējumu, apgūto zināšanu saistību un pielieto tās, attīstot ieradumu noskaidrot veicamo darbību nozīmi un kopsakarības.

Jēdzieni: taisnes vienādojums, taisnes virziena koeficients, riņķa līnijas vienādojums, argumenta pieaugums un funkcijas pieaugums.

Temata apguves norise

Attālums starp punktiem. Nogriežņa viduspunkta koordinātas	<p>Patstāvīgi veic izpēti, izmantojot digitālos rīkus (piemēram, [1]) skaidro, kā un ko izprata par attāluma aprēķināšanu starp diviem punktiem koordinātu plaknē un telpā (dotas to koordinātas), vai saskata saistību ar jau zināmo par vektora garuma (moduļa) aprēķināšanu; formulē neskaidro, uzsklausa klasesbiedru ieteikumus. Lieto formulu attālumam starp diviem punktiem, lai noteiktu vai pamatotu nogriežņu garumu vienādību, plaknes figūru īpašības, ja figūras dotas koordinātu plaknē.</p> <p>Sadarbojas pārī, lai noteiktu un pamatotu, kā aprēķināt nogriežņa viduspunkta koordinātas, ja zināmas tā galapunkta koordinātas; salīdzina ar citu iegūtajiem rezultātiem. Vingrinās lietot iegūto formulu ar nezināmo jebkurā pozīcijā.</p> <p>Lieto formulu attālumam starp diviem punktiem un sakarības nogriežņa viduspunkta koordinātu noteikšanai viena uzdevuma ietvaros, piemēram, nosaka trijstūra mediānas garumu, ja dotas trijstūra virsotņu koordinātas.</p>
---	--

Lineāra funkcija. Virziena koeficients	<p>Sadarbojas mazās grupās ar mērķi formulēt pēc iespējas efektīvāku vai sev saprotamāku paņēmienu lineāras funkcijas $y = kx + b$ grafika konstruēšanai izmantojot k un b vērtības; savstarpēji apmainās ar rezultātiem un salīdzina piedāvātos paņēmienus. Izmanto iegūtos rezultātus vai skolotāja sniegtos informāciju un secina, kā ģeometriski interpretēt koeficientu k, saskata iespējas to izmantot grafika uzzīmēšanai. Vingrinās uzzīmēt lineāru funkciju, izmantojot koeficientu k un b skaitliskās vērtības, pašpārbaudei izmanto digitālos rīkus (piemēram, [2]).</p> <p>Iepazīst un lieto jēdzienus argumenta pieaugums un funkcijas pieaugums, lai raksturotu lineāras funkcijas, ja dots to grafiks. Zīmē/skicē lineāras funkcijas grafiku, izmantojot dotos nosacījumus par argumenta pieaugumu un funkcijas pieaugumu. Izvērtē un pamato dotās informācijas pietiekamību, piemēram, vai lineāra funkcija ir viennozīmīgi noteikta, ja dota funkcijas pieauguma skaitliskā vērtība. Nosaka dotas lineāras funkcijas pieaugumu analitiski pie dotā argumenta pieauguma, aplūko iespējas dažādi veidot simbolisko pierakstu.</p> <p>Izmanto konkrētu lineāru funkciju piemērus, spriež un formulē saistību starp argumenta pieaugumu, funkcijas pieaugumu un taisnes virziena koeficientu; savstarpēji salīdzina iegūtos rezultātus. Definē taisnes virziena koeficientu. Sadarbojas pāri vai mazā grupā un formulē secinājumus par taisnes/taišņu novietojumu koordinātu plaknē atkarībā no virziena koeficiente, tā izmaiņām; savstarpēji apmainās ar rezultātiem un izvērtē apgalvojumu patiesumu, t. sk., izmantojot digitālos rīkus. Izmantojot iegūtos rezultātus vai skolotāja sniegtos informāciju, formulē vairākus secinājumus, piemēram: 1) paralēlām taisnēm virziena koeficienti ir vienādi, un otrādi – ja virziena koeficienti ir vienādi, var secināt, ka taisnes ir paralēlas; 2) ja pozitīvs virziena koeficients palielinās, tad palielinās leņķis starp taisni un abscisu asi, 3) taisnei, kas perpendikulāra abscisu asij, virziena koeficientu nevar noteikt u. tml.</p> <p>Sadarbojas grupā ar mērķi noteikt sakārību starp virziena koeficientiem perpendikulāru taišņu vienādojumos. Izvēlas veikt izpēti ar vai bez digitālajiem rīkiem (piemēram, [3]); pastāsta citiem par saviem secinājumiem, uzklauša citu rezultātus.</p>
Lineāras funkcijas lietojums fiziķālu procesu aprakstišanai (šajā sadaļā integrēts matemātikas un fiziķas saturs)	<p>Analizē, nolasa informāciju no lineāras funkcijas grafika, kas apraksta sakārību starp mainīgiem lielumiem praktiskos vai citu mācību priekšmetu (piemēram, ekonomikas, fiziķas) kontekstos; nosaka atkarīgo un neatkarīgo mainīgo, nemainīgos lielumus. Zīmē grafiku, ja dots sakārības vienādojums, izvēlas atbilstošus asu nosaukumus, vienības nogriežņu vērtības un koordinātu plaknes daļas, kurās zīmēt grafiku.</p> <p>Izmantojot simulāciju, piemēram, <i>PhET simulations The Moving Man</i>, iegūst datus, kā koordināta mainīs laikā pie diviem atšķirīgiem ātrumiem. Attēlo uz koordinātu ass objekta novietojumu fiksētajos laika momentos, norādot ātruma vektorus katrā momenta. Aprēķina veikto ceļu atkarībā no kustības laika. Skaidro koordinātas nepieciešamību kustības aprakstā.</p> <p>Zīmē koordinātas, ceļa un ātruma grafikus (dati iegūti fizikas stundā). Izvēlas atbilstošu vienības nogriezni, skaidro koordinātu plaknes kvadrantu izmantošanu. Uzraksta koordinātas, pārvietojuma un ātruma vienādojumus (taisnes), katrā no gadījumiem spriež par definīcijas kopu, tās saistību ar iegūtajiem datiem.</p> <p>Raksturo vienmērīgas kustības koordinātas vienādojumā $x = x_0 + vt$ lietotos apzīmējumus, lielumus (neatkarīgais/atkarīgais/nemainīgais jeb konstantais), to fizikālo jēgu, raksturo saistību ar taisnes vienādojumu vispārīgā veidā $y = kx + b$ un lietotajiem apzīmējumiem.</p> <p>Lieto zināšanas par funkcijas īpašībām, lai raksturotu iegūtās sakārības; piemēram, koordinātas un ceļa izmaiņas raksturo augoša funkcija, bet ātruma izmaiņu – nemainīga funkcija. Saskaņa un matemātiski raksturo saistību starp iegūtajiem vienādojumiem un grafikiem, piemēram, kādi ģeometriskie pārveidojumi ļauj no viena grafika iegūt citu.</p>

Lineāras funkcijas lietojums fizikālū procesu aprakstīšanai (šajā sadaļā integrēts matemātikas un fizikas saturus)	<p>Skaidro koordinātas vienādojuma fizikālo jēgu, prognozē ķermeņa kustību raksturojošo lielumu atkarībā no laika. Savas prognozes salīdzina ar simulācijas rezultātu ilgākam laika posmam. Analizē dažādus kustības piemērus.</p> <p>Analizē situācijas, kuru raksturo divas kustības ar pretējiem ātruma virzieniem, secina par nepieciešamību aplūkot koordinātas mainu pretēji pieņemtajam ass virzienam. Secina, ka ceļš nav atkarīgs no koordinātu ass izvēles. Izmantojot simulāciju, piemēram, PhET simulations The Moving Man, iegūst datus, kā koordināta mainīs laikā pie diviem atšķirīgiem ātrumiem, ja kustība notiek pretēji koordinātu ass virzienam.</p> <p>Zīmē koordinātas, ceļa un ātruma grafikus (dati iegūti fizikas stundā), ja kustība notiek pretēji koordinātu ass virzienam. Izvēlas atbilstošu vienības nogriezni, skaidro koordinātu plaknes kvadrantu (I un IV) izmantošanu. Uzraksta koordinātas, pārvietojuma un ātruma vienādojumus (taisnes), katrā no gadījumiem spriež par definīcijas kopu, tās saistību ar iegūtajiem datiem.</p> <p>Lieto zināšanas par funkcijas īpašībām, lai raksturotu iegūtās sakarības; piemēram, koordinātas izmaiņu raksturo dilstoša funkcija, bet ceļa izmaiņu raksturo augoša funkcija. Saskaņa un matemātiski raksturo saistību starp iegūtajiem vienādojumiem un grafikiem, piemēram, kādi ģeometriskie pārveidojumi ļauj no viena grafika iegūt citu. Sadarbojas, veido kopsavilkumu par grafiku novietojumiem kustībai koordinātu ass virzienā un kustībai pretēji koordinātu ass virzienam.</p>
Taisnes vienādojums	<p>Izsaka domas, kā analītiski pierakstīt taisni, kas perpendikulāra abscisu asij. Secina, ka katru taisni koordinātu plaknē var pierakstīt analītiski, iepazīst jēdzienu "taisnes vienādojums" un tās vispārīgo veidu $Ax + By = C$, atpazīst šo pierakstu, uzdot taisni digitālos rīkos. Skaidro saistību starp jēdzieniem "lineāras funkcijas analītiskā izteiksme" un "taisnes vienādojums", "funkcijas grafiks" un "līnija", izmantojot matemātikas valodu. Nosaka un pamato, vai koordinātu plaknē līnija ir funkcijas grafiks.</p> <p>Spriež konkrēti un vispārīgi, raksturo taisnes novietojumu koordinātu plaknē, ja $A = 0$, $B = 0$ vai $C = 0$.</p> <p>Vingrinās ar vispārīgo vienādojumu uzdotai taisnei $Ax + By = C$ noteikt virziena koeficientu un krustpunktus ar asīm; pašpārbaudei izmanto digitālos rīkus (piemēram, [2]). Zīmē grafiku taisnei, kas uzdota formā $Ax + By = C$, izvēloties un raksturojot savu paņēmienu, piemēram, pāreju uz taisnes pierakstu ar virziena koeficientu, nosaku koordinātas taisnes diviem punktiem, nosaku taisnes krustpunktus ar asīm u. tml.</p> <p>Sadarbojas, analizē doto informāciju – vienā vai vairākās koordinātu plaknēs dotas 4 vai 5 taisnes un iezīmēti tām perpendikulāri vektori ar mērķi: 1) noteikt taisnes vispārīgo vienādojumu un tai perpendikulāra vektora koordinātas; 2) formulēt sakarību starp taisnes koeficientiem un tai perpendikulārā vektora koordinātām, 3) pārbaudīt saskatīto sakarību, izmantojot pašu izveidotu piemēru; pastāsta par iegūtajiem rezultātiem un uzklaušu citu iegūtos rezultātus; secina, ka vektors $(A; B)$ ir perpendikulārs taisnei $Ax + By + C = 0$; skaidro, kā to saprot, kā to var parādīt attēlā, kā pareizi, bet dažādi var novietot vektoru. Pašpārbaudei vai papildus izpētēi izmanto mācību līdzekli [3].</p> <p>Lieto taisnes vienādojumu vai vektoru, nosakot vai pamatojot plaknes figūras īpašību, nezināmo lielumu, piemēram, pamato daudzstūra malu paralelitāti vai perpendikularitāti, nosaka attālumu no punkta, kura koordinātas dotas līdz taisnei, kura vienādojums dots.</p>

Taisnes uzdošanas veidi, to lietojums.

2 vai 3 grupas konkrētos piemēros veic izpēti, kura mērķis ir formulēt paņēmienu/aprakstīt darbības – kā uzrakstīt taisnes vienādojumu, ja dotas viena taisnes punkta koordinātas un taisnes virziena koeficients. 2 vai 3 citas grupas konkrētos piemēros veic izpēti ar mērķi formulēt paņēmienu/aprakstīt darbības – kā uzrakstīt taisnes vienādojumu, ja dotas taisnes divu punktu koordinātas. Divas grupas (ar dažādiem darba uzdevumiem) apvienojas un savstarpēji skaidro formulētos paņēmienus, kopīgi salīdzina un raksturo saistību; veido paņēmienu apkopojumu (ja nepieciešams, skolotāja vadīt): abos gadījumos var izmantot jau apgūto prasmi izveidot un atrisināt lineāru vienādojumu sistēmu vai izmantot virziena koeficientu (saistību ar argumenta pieaugumu un funkcijas pieaugumu), formulē sakarības $\frac{y-y_0}{x-x_0} = k$ un $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Vingrinās uzrakstīt taisnes vienādojumu, ja dotas viena taisnes punkta koordinātas un taisnes virziena koeficients, dotas divu taisnes punktu koordinātas, izvēloties paņēmienu un argumentējot izvēli. Vingrinās lietot līdz šim tematā apgūto, lai koordinātu plaknē dotām plaknes figūrām noteiktu veidu, īpašības un nezināmo lielumu, veidotu figūras atbilstoši nosacījumiem, piemēram, nosaka laukumu četrstūrim, kura virsotnes ir taišņu $y = -0,5x + 1$ un $y = -0,5x + 2$ krustpunkti ar asīm.

Sadarbojas pāri, lasa un analizē datus situāciju aprakstus un skaidro/pamato piemērotu taisnes uzdošanas veidu, piemēram, jāuzraksta vienādojumi taisnēm, uz kurām atrodas trijstūra/četrstūra malas, ja virsotņu koordinātas dotas; jāuzraksta vienādojums taisnei, kas paralēla taisnei, kuras vienādojums dots u. tml.

Lieto taisnes vienādojumu un jau iepriekš apgūto (formulas attāluma starp diviem punktiem, viduspunkta koordinātu noteikšanai), lai noteiktu figūru (četrstūra, trijstūra) veidu, to virsotņu koordinātas, pamatotu to īpašības, noteiktu nezināmos lielumus, izvēloties sev vai situācijai piemērotāko taisnes uzdošanas veidu, piemēram, aprēķina attālumu no koordinātu sākumpunkta līdz taisnei $3x + 4y = 12$.

Vienādojums un nevienādība ar diviem mainīgajiem, riņķa līnijas vienādojums

Sadarbojas pārī, izvēlas paņēmienu vienkārša situāciju uzdevuma, piemēram, ("Galda kalendāra cena ir 3 eiro, sienas kalendāra cena – 4 eiro. Firma saviem darbiniekiem iegādājās vairākus kalendārus, par kuriem kopā samaksāja 27 eiro. Nosaki, cik katru veida kalendārus varēja nopirk! Pamato, ka citu iespēju nav.") atrisināšanai; pastāsta citiem, kā risināja, uzklausa citu risinājumus; skaidro, vai un kā vienādojums ar diviem mainīgajiem $3x + 4y = 27$ palīdz atrisināt šo uzdevumu. Sadarbojas pārī un zīmē taisni, kuras vienādojums ir $3x + 4y = 27$; skaidro, vai un kā grafiskais attēls palīdz noteikt un pamatot atrisinājumu.

Sadarbojas pārī un ievērojot dotos nosacījumus, piemēram, atrisinājumu veido tieši viens vai tieši divi skaitļu pāri u. tml., veido tekstu situāciju uzdevumam, kura matemātiskais modelis ir vienādojums $Ax + By = C$ naturālo skaitļu kopā; ar citu pāri savstarpēji apmainās ar uzdevumiem, veido risinājumus un apspriež tos.

Skaidro, ko nozīmē atrisināt vienādojumu ar diviem mainīgajiem, piemēram, $2x + y = -3$ reālo skaitļu kopā. Vingrinās noteikt atsevišķus skaitļu pārus, kas pieder atrisinājumu kopai.

Spriež, kā koordinātu plaknē parādīt/attēlot punktus, ievērojot pēc iespējas vienkāršus nosacījumus, kas pierakstīti kā nevienādība, piemēram, $x > 0$, $x < 4$, $y \leq 0$ u. tml., izvērtē dotās atbildes. Tad aplūko nevienādības $y > x$, $y < -x$ un secina, ka nevienādību attēlošanai nepieciešams attēlot taisni, ko raksturo atbilstošā vienādība.

Izvērtē dotos lineāru nevienādību ar diviem mainīgajiem atrisinājumus koordinātu plaknē; skaidro, kā domāja vai kā rīkojās, lai noteiktu atrisinājuma attilstību.

Spriež, kādas nevienādības atrisinājums ir attēlots, aplūkojot atrisinājuma attēlojumu; skaidro, kā rīkojās un uzklausa citu lietotos paņēmienus.

Vingrinās noteikt un attēlot koordinātu plaknē vienādojuma $Ax + By = C$, nevienādību $Ax + By > C$ un to sistēmu ar diviem mainīgajiem atrisinājumu reālo skaitļu kopā; vispirms situācijās, ja atbilstošās taisnes ir dotas koordinātu plaknē; pēc tam paši veido grafiskos attēlus, lai attēlotu atrisinājumu.

Lieto prasmi sastādīt un atrisināt lineāru nevienādību ar diviem mainīgajiem un to sistēmu, lai atrisinātu vienkāršus situāciju uzdevumus, kas ietver nosacījumus par sakārbām starp lielumiem, kuriem jāizpildās vienlaikus.

Sadarbojas, spriež un skaidro, ko nozīmē atrisināt vienādojumu ar diviem mainīgajiem, kas satur arī otro pakāpi, piemēram, $y - x^2 = 2$, kā parādīt visus atrisinājumus, nosauc atsevišķus skaitļu pārus, kas pieder atrisinājumu kopai.

Sadarbojas pārī un cenšas noteikt pēc iespējas vairāk vienādojuma $x^2 + y^2 = 25$ atrisinājumus un tos atlikt koordinātu plaknē; salīdzina ar citu iegūtajiem rezultātiem, papildina rezultātus un formulē pienēmumu par visu dotā vienādojuma atrisinājumu kopu.

Veic izpēti, izmantojot digitālos rīkus (piemēram [4]), formulē saskatītās sakārības un raksturo riņķa līnijas rādiusu un novietojumu koordinātu plaknē atkarībā no koeficientu a , b un R skaitliskajām vērtībām vienādojumā $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. Vingrinās uzrakstīt riņķa līnijas vienādojumu formā $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, izmantojot koordinātu plaknē dotos riņķa līniju attēlojumus, un otrādi – uzskicēt riņķa līniju, ja dots tās vienādojums.

Spriež, skicē un nosaka atrisinājumu skaitu vienādojumu sistēmai, kas satur riņķa līnijas vienādojumu, piemēram, $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y - x = 3 \end{cases}$

atsevišķus atrisinājumus nevienādībām un to sistēmām ar diviem mainīgajiem, izsaka idejas, kā attēlot visus atrisinājumus, piemēram, nevienādībai

$$x^2 + y^2 < 9, \text{ sistēmai } \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ y > x \end{cases}.$$

Mācību līdzekļi

Mācību materiāli

Skola2030 mācību līdzeklis

- [1] Geogebra.org. [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://www.geogebra.org/m/nzHEjDhz> (Attālums starp diviem punktiem)
- [2] Geogebra.org. [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://www.geogebra.org/m/Dv3VKCSb> (Taisnes vienādojums)
- [3] Geogebra.org. [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://www.geogebra.org/m/aDb5bkgM> (Perpendikulāru taišņu virziena koeficienti)
- [4] Geogebra.org. [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://www.geogebra.org/m/QP287GFY> (Riņķa līnijas vienādojums)
- [5] Geogebra.org. [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://www.geogebra.org/m/auBfrkX5> (Riņķa līnijas vienādojums)

Resursi

Dators, ekrāns, projektors, pieslēgums internetam.

Starppiekšmetu saikne

Temats plānots daļēji integrēts (matemātika un fizika).

Metodiskais komentārs

Ieteikums laika plānojumam	Sadaļai "Attālums starp punktiem. Nogriežņa viduspunkta koordinātas" plānotas 4 m. s., "Lineāra funkcija. Virziena koeficients" – 4 m. s.; "Lineāras funkcijas lietojums fizikālā procesu aprakstīšanai" – 5 m. s., "Taisnes vienādojums" – 5 m. s., "Taisnes uzdošanas veidi, to lietojums" – 8 m. s., "Vienādojums un nevienādība ar diviem mainīgajiem, riņķa līnijas vienādojums" – 6 m. s. Summatīvajam pārbaudes darbam plānotas 2 m. s. Skolotājs, ievērojot savu pieredzi vai skolēnu vajadzības, laika plānojumu temata ietvaros koriģē pēc saviem ieskatiem.
Jaunu zināšanu konstruēšana	Pie jaunajām zināšanām par lineāru funkciju (argumenta pieaugums, funkcijas pieaugums un virziena koeficients) skolēni nonāk, pētot un formulējot pēc iespējas efektīvāku lineāras funkcijas grafika uzzīmēšanas paņēmienu, izmantojot jau pamatskolā apgūto par lineāru funkciju.
Starpdisciplinaritāte	Sadaļas "Lineāras funkcijas lietojums fizikālā procesu aprakstīšanai" saturs ir starpdisciplinārs – matemātikas un fizikas skolotāji kopīgi plāno tās norisi – var izmantot un konkretizēt/precizēt temata norises aprakstā piedāvāto plānojumu vai veidot savu. Būtiski, ka sasniegts kompleksais rezultāts ar starpdisciplināru saturu (sk. tematā sasniedzamos rezultātus).
Digitālo rīku lietojums	Izmanto digitālos rīkus, lai pētītu saistību starp lielumiem, piemēram, lineāras funkcijas argumenta pieaugumu, funkcijas pieaugumu un virziena koeficientu; riņķa līnijas novietojumu koordinātu plaknē un koeficientiem riņķa līnijas vienādojumā.
Matemātikas valoda	Vērst skolēnu uzmanību, ka burtu lietojums lielumu apzīmēšanai nav viennozīmīgs, piemēram, fizikā kustību pa taisni raksturo vienas koordinātas izmaiņa laikā jeb koordināta kā funkcijas vērtība tiek apzīmēta ar $x(t)$.

Analitiskā ģeometrija I		Varbūtība un statistika I		Algebra I		Trigonometrija I		Algebra I		Geometrija I	
1. Vektori un kustība	2. Līnijas vienādo- jums	3. Kombi- natorika un varbūtība	4. Statistika	5. Daļveida funkcija, algebriskās daļas	6. Daļveida vienādo- jumi un nevienā- dības	7. Sinusa un kosinusa funkcijas	8. Trigono- metriskās izteiksmes un vienā- dojumi	9. Pakāpe ar racionālu kāpinātāju, ģeomet- riskā pro- gresija	10. Eksponent- funkcija	11. Taisnes un plak- nes telpā, daudz- skaldņi	12. Rotācijas ķermenī, telpisku ķermenē kombinā- cijas

Varbūtība un statistika I

3. Kombinatorika un varbūtība

Ieteicamais laiks temata apguvei: 38 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: pilnveidot prasmi pētīt kopas elementu un apakškopu sakārtojumus, noteikt to eksistenci, skaitu un īpašības. Padziļināt izpratni par gadījuma notikumu varbūtību un tās izmantošanu ar dažādām dzīves jomām saistītu procesu analīzei, t. sk., lietojot statistisko varbūtību un nosacīto varbūtību.

Sasniedzamie rezultāti

Zinās	Prasmes
<ul style="list-style-type: none"> Kopu nosaka: 1) uzskaidot visus kopas elementus, 2) uzrakstot formulu visu elementu noteikšanai. (M.Li.5.) Kopu apvienojumu, šķēlumu, starpību izmanto, lai veidotu un pētītu kopas ar noteiktām īpašībām. Darbības ar kopām palīdz attēlot gan matemātiskas sakarības, gan modelēt reālas situācijas. (M.Li.5.) Kombinatorikai raksturīgi jautājumi: vai eksistē elements ar noteiktām īpašībām, kā to iegūt, cik pavism ir tādu elementu, kā iegūt tos visus. Risināšanai izmanto spriedumus, shēmas, grafus vai formulas. (M.Li.5.) Skaitļa n faktoriāls ir visu naturālo skaitļu no 1 līdz n reizinājums. (M.Li.5.) Izlase ir apakškopa ar noteiktām īpašībām. Nesakārtotām izlasēm (t. sk. kombinācijām) nav svarīga elementu secība, piemēram, $\{a;b\}$ un $\{b;a\}$ apzīmē vienu un to pašu nesakārtotu izlasi. Sakārtotām izlasēm (t. sk. variācijām, permutācijām) ir svarīga elementu secība, piemēram, $(a; b)$ un $(b; a)$ ir dažādas sakārtotas izlases. No katras nesakārtotas izlases elementiem var izveidot sakārtotas izlases noteiktā skaitā. (M.Li.5.) No konkrētā uzdevuma satura jāsecina, kādas izlases izmantot risinājumā – nesakārtotas vai sakārtotas. Izlašu skaitu var noteikt, spriežot vai lietojot atbilstošu formulu. (M.Li.2.; M.Li.5.) Gadījuma mēģinājums (piemēram, monētas mešana) ir vienādos apstākļos veikta darbība/eksperiments, kuras iznākums iepriekš nav viennozīmīgi (precīzi) zināms; gadījuma mēģinājuma iznākumus sauc par notikumiem; notikuma varbūtības noteikšanai svarīgi noteikt iznākumu kopu. (M.Li.5.) Kopas un darbības ar tām lieto, lai raksturotu notikumus (ar vienu un to pašu mēģinājumu saistītus) un noteiktu varbūtību notikumam, kas ir citu notikumu apvienojums, šķēlums vai starpība. (M.Li.5.) Ar vienu mēģinājumu saistīti notikumi A un B ir nesavienojami, ja to iznākumu kopām nav kopīgu elementu; tad $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. (M.Li.5.) Notikuma A varbūtība, ja notikums B ir realizējies, ir notikuma A nosacītā varbūtība; to apzīmē $P(A B)$. (M.Li.5.) Divi notikumi A un B ir neatkarīgi, ja viena notikuma iestāšanās varbūtība neietekmē otru notikuma iestāšanos. (M.Li.5.) Notikumu neatkarību var pamatot, izmantojot nosacīto varbūtību vai sakarību $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, kas patiesa, ja A, B – neatkarīgi notikumi. (M.Li.5.) Ja gadījuma mēģinājums tiek veikts n reižu un notikums A iestājas k reižu, tad skaitli $\frac{k}{n}$ sauc par notikuma A relatīvo biežumu jeb statistisko varbūtību. Palielinot mēģinājumu skaitu n, notikuma A relatīvais biežums/statistiskā varbūtība stabilizējas ap konstantu skaitli – notikuma A varbūtību. (M.Li.5.) Varbūtību teorijas metodes izmanto, lai raksturotu riskus (piemēram, nosakot apdrošināšanas iemaksas), iespējas (piemēram, analizējot pētījumus medicīnā), nodrošinātu kvalitātes kontroli (piemēram, izvērtējot brāķēto detaļu īpatsvaru) u. tml. (M.Li.5.) 	<ul style="list-style-type: none"> Raksturo īpašības, kas piemīt kopas visiem elementiem, definē/uzdod kopu ar visu elementu sarakstu vai ar formulu. Nosaka un pamato kopas elementa vai apakškopas ar noteiktu īpašību eksistenci. Nosaka galīgu vai bezgalīgu kopu apvienojumu, šķēlumu un starpību, darbības ar kopām attēlo ar Venna diagrammu. Nosaka un skaidro vai pamato izlases veidu (sakārtota, nesakārtota) konkrētos piemēros, izmantojot izpratni par kontekstu. Nosaka objektu/elementu, apakškopu/izlašu skaitu spriežot, veicot pilno pārlasi, veidojot grafu, lietojot reizināšanas likumu. Aprēķina skaitļa faktoriālu, izpilda darbības ar faktoriāliem. Lieto formulas variāciju, permutāciju un kombināciju skaita aprēķināšanai; t. sk., lai aprēķinātu notikuma varbūtību; skaidro formulu izvēli konkrētā uzdevuma atrisināšanai. Konkrētos piemēros nosaka mēģinājumu iznākumu kopu, tās noteiktas apakškopas atbilstoši nosacījumiem. Aprēķina notikumam A pretējo notikumu \bar{A}, izmantojot spriešanu vai sakarību $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. Nosaka, attēlo ar Venna diagrammu divu notikumu apvienojumu, šķēlumu, starpību; izmanto darbības ar notikumiem, lai skaidrotu un aprēķinātu varbūtību. Aprēķina relatīvo biežumu/statistisko varbūtību.

Komplekss sasniedzamais rezultāts	Ieradumi
<ul style="list-style-type: none"> Izvēlas un argumentē kopas uzdošanas, informācijas attēlošanas veidu un risināšanas paņēmienu, lai noteiktu elementu, izlašu/kopu eksistenci, īpašības vai skaitu. (M.O.1.2.1.; M.O.5.1.1.; M.O.5.1.2.) Konkrētos piemēros pēta, formulē un skaidro sakārības starp izlasēm, to skaitu, piemēram, saistību starp C_n^k un C_n^{n-k}, saistību starp C_n^k un A_n^k. (M.O.5.1.4.; M.O.5.1.5.; M.O.5.1.6.; M.O.2.3.1.; M.O.2.1.2.) Raksturo notikumus (drošs, neiespējams, pretējs, nesavienojami u. tml.) un lieto darbības ar notikumiem vai formulas izlašu skaita aprēķināšanai, lai aprēķinātu varbūtību, t. sk. nesavienojamu notikumu apvienojuma varbūtību. (M.O.5.1.3.; M.O.5.1.6.; M.O.5.2.1.; M.O.5.2.2.; M.O.5.2.4.) Konkrētos piemēros izmanto grafu un skaidro, kas ir nosacītā varbūtība, attēlo un raksturotu saistību starp $P(B)$, $P(\bar{B})$, $P(A B)$, $P(\bar{A} B)$, $P(A \bar{B})$, $P(\bar{A} \bar{B})$ un to skaitiskajām vērtībām, formulē secinājumus. (M.O.5.2.5.) Pamato, kāpēc dotie notikumi ir vai nav neatkarīgi, un aprēķina varbūtību, izmantojot nosacīto varbūtību vai lietojot varbūtību reizināšanas teorēmu. (M.O.5.2.6.) Iegūst datus (t.sk. digitāli) un skaidro, kas ir notikuma absolūtais biezums/statistiskā varbūtība, formulē ar datiem pamatotus secinājumus, izmantojot doto vai aprēķināto statistisko varbūtību, tās saistību ar varbūtību. (M.O.5.2.3.) 	<ul style="list-style-type: none"> Veido dotās informācijas un risinājuma gaitas shematiskus attēlojumus, attīstot ieradumu plānot un vadīt savu domāšanas procesu, strukturēti un uzskatāmi attēlot informāciju. Apzināti izvēlas izmantot spriešanu vai formulas izlašu skaita noteikšanai, attīstot ieradumu meklēt dažādus risinājumus, plānot un vadīt savu domāšanas procesu. Izvērtē iegūto varbūtības skaitisko vērtību, attīstot ieradumu kritiski izvērtēt rezultātu ticamību un atbilstību konkrētajai situācijai.
Jēdzieni: kopa, apakškopa, izlase, sakārtota izlase, nesakārtota izlase, kombinācijas, variācijas, permutācijas, skaitļa faktoriāls, gadījuma mēģinājums, notikums, nesavienojami notikumi, savienojami notikumi, nosacītā varbūtība, neatkarīgi notikumi, statistiskā varbūtība.	

Temata apguves norise

Kopas, darbības ar kopām	<p>Ar piemēriem ilustrē, skaidro ar kopām saistītos jēdzienus: "kopa", "kopas elements", "apakškopa", "galīga kopa", "bezgalīga kopa", "tukša kopa". Izmanto ar kopām saistītos jēdzienus, lai raksturotu ar matemātiku un citām mācību jomām saistītas klasifikācijas grupas, piemēram, četrstūru klasifikācija, dzīvnieku vai augu klasifikācija, ķīmisko vielu klasifikācija.</p> <p>Lieto kopu simboliku, lai pierakstītu apgalvojumus par elementu, apakškopu piederību kopai dažādos matemātikas un citu jomu kontekstos, t. sk., nosakot saistību starp skaitļu kopām \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}.</p> <p>Raksturo īpašības, kas piemīt dotas kopas visiem elementiem (matemātiski un citu jomu konteksti).</p> <p>Sadarbojas, lai formulētu pieņēmumus, kā varētu definēt/uzdot kopu; apspriež un kritiski izvērtē dažādos piedāvājumus.</p> <p>Vingrinās raksturot dotas kopas ar visu elementu sarakstu un ar formulas palīdzību, salīdzina definīcijas ar klassesbiedriem. Pārrunā, secina, kādās situācijās ērtāk izmantot vienu vai otru veidu.</p> <p>Nosaka un pamato kopas elementa un apakškopas ar noteiktu īpašību eksistenci, piemēram, nosaka un pamato, vai eksistē prizma ar četrām skaldnēm (piramīda ar četrām skaldnēm).</p> <p>Skaidro, ilustrē ar piemēru (kopas elementu skaits nepārsniedz 4), kas ir galīgas kopas visas iespējamās apakškopas, uzraksta tās.</p>
---------------------------------	---

Kopas, darbības ar kopām	<p>Vienkāršās situācijās lieto jau apgūtos algoritmus, piemēram, atrisina lineāru nevienādību sistēmu, kvadrātneviendību, atrisina vienādojumu ar diviem mainīgajiem naturālo skaitļu kopā un skaidro risinājuma gaitu, atrisinājumu, izmantojot ar kopām saistīto terminoloģiju, darbības ar kopām.</p> <p>Vingrinās noteikt galīgu un bezgalīgu kopu apvienojumu, šķēlumu un starpību dažādos matemātiskos kontekstos. [1]</p> <p>Lieto darbības ar kopām un to vizuālo attēlojumu, lai atrisinātu situāciju uzdevumus ar loģikas elementiem, piemēram, "Skolā centralizētos eksāmenus kārtoja 20 skolēni. No tiem bioloģijas eksāmenu kārtoja 10 skolēni, fizikas eksāmenu kārja 5 skolēni. Zināms, ka 3 skolēni kārtoja gan bioloģijas, gan fizikas eksāmenu. Cik skolēnu nekārtoja nevienu no šiem abiem eksāmeniem?".</p> <p>Sadarbojoties, veido situāciju uzdevumus ar loģikas elementiem, risina citu grupu izveidotos piemērus, salīdzina un apspriež risinājumus.</p> <p>Aplūko, skaidro citu veidotās interpretācijas/vizualizācijas darbībām ar kopām, piemēram, izmantojot saiti [2].</p> <p>Kopīgi apspriež un formulē vērtēšanas kritērijus un individuāli vai, sadarbojoties mazās grupās, veido interaktīvu materiālu ar mērķi pēc iespējas uzskatāmāk parādīt kopu apvienojumu, šķēlumu un starpību, radoši izpaužoties izmantojamo līdzekļu un konteksta izvēlē.</p>
Kombinatorika	<p>Risina vairākus uzdevumus, kuros visos iespējamos veidos jāizveido divu kopu elementu pāri, trīs kopu elementu trijnieki utt., tā, ka pāris/trijnieks satur pa vienam elementam ko katras kopas. Sadarbojas, raksturo kopīgo visās situācijās, formulē vispārinājumu (kombinatorikas reizināšanas likumu).</p> <p>Vingrinās noteikt elementu/objektu skaitu, veidojot shēmas, grafus un izmantojot formulēto vispārinājumu.</p> <p>Rada uzdevumu par elementu/objektu skaita noteikšanu, apmainās ar klasesbiedru un risina klasesbiedra izveidoto uzdevumu, apspriež uzdevumus, to risinājumus.</p> <p>Izmantojot piemērus, kuros atrisinājuma veidošanai tiek sareizināti vairāki naturālie skaitļi, saskata nepieciešamību ieviest apzīmējumu īsākam, viennozīmīgi saprotamam pierakstam. Lasa, skaidro skaitļa n faktoriāla definīciju, piemēram, ko formulas pierakstā attēlo reizinājums $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots$.</p> <p>Vingrinās skaitļa faktoriāla lietošanā, ja skaitļi ir konkrēti un vispārīgi uzdoti. Veido spriedumus, t. sk. galvā, saīsinot dājas, kas satur skaitļa faktoriālu, piemēram, $\frac{10!}{8!} \cdot \frac{(n+2)!}{n!}$.</p> <p>Nosaka elementu/objektu skaitu konkrētā piemērā un secina, ka dažādā secībā novietoti vienas un tās pašas apakškopas elementi ir ar dažādu nozīmi. Secina, ka līdztekus jēdzieniem kopa un apakškopa nepieciešams jauns jēdziens. Lasa, skaidro izlases, nesakārtotas izlases, sakārtotas izlases definīcijas. Spriež par saistību starp jēdzieniem kopa, apakškopa un nesakārtotas, sakārtotas izlases.</p> <p>Vingrinās veidot kopu, piemēram, $\{a, b, c, d\}$, visas nesakārtotas un sakārtotas izlases, kurās ir viens, divi un trīs elementi, lietojot pilno pārlasi, skaidrojot savu paņēmienu informācijas strukturēšanai.</p> <p>Lasa dotus situāciju aprakstus un nosaka, vai situācijas matemātiskais modelis ir nesakārtota vai sakārtota izlase. Veido uzdevumus/situāciju aprakstus atbilstoši norādei par to matemātisko modeli – nesakārtota vai sakārtota izlase. Argumentē, pamato satura/konteksta atbilstību. Izvērtē citu veidotās uzdevumus/situāciju aprakstus.</p> <p>Aplūko 3 vai 4 piemērus un nosaka kopas (satur n elementus) sakārtotu izlašu (satur k elementus, kur $k < n$) skaitu spriežot, veidojot shēmas vai grafus; risinājuma gaitā raksturo iespējas lietot reizināšanas likumu, pēc visu piemēru atrisināšanas veido kopsavilkumu un mēģina formulēt vispārinājumus.</p> <p>Lasa, skaidro, kā saprot definīciju variācijām no n elementiem pa k elementiem ($k \leq n$), to simbolisko pierakstu, lielumus variāciju skaita aprēķināšanas formulā.</p>

Kombinatorika	<p>Aplūko virkni piemēru, kuros 1) skaidro/pamato, ka situāciju raksturo sakārtotas izlases; 2) izvēlas paņēmienu – spriežot vai lietojot variāciju skaita aprēķināšanas formulu, un paskaidro savu izvēli, 3) nosaka variāciju skaitu.</p> <p>Konkrētā piemērā nosaka variācijas no n elementiem pa n elementiem, secina par iespēju skaita pierakstam lietot skaitļa faktoriālu. Lasa permutāciju definīciju, skaidro saistību starp permutācijām un variācijām.</p> <p>Vingrinās saskatīt permutāciju lietojumu un noteikt izlašu skaitu situācijās ar 1 vai 2 spriedumiem/darbībām, piemēram, $4 \cdot 5!; 6! - 5!$.</p> <p>Aplūko konkrētu piemēru par iespējamo izvēlu skaitu, ja jāizvēlas 3 elementi no 4 un a) secība ir jāievēro, b) nav jāievēro. Pēc tam aplūko uzdevumu ar citu n un k skaitisko vērtību, piemēram, jāizvēlas 2 elementi no 5 un a) secība ir jāievēro, b) nav jāievēro. Sadarbojoties pēta, nosaka, kā (cik reižu) atšķiras izvēlu skaits gadījumos a) un b). Mēģina saskatīt kopīgo abās situācijās.</p> <p>Izmantojot interaktīvas simulācijas, piemēram, skatīt saiti [3], pēta un formulē saskaņītās likumsakarības.</p> <p>Lasa, skaidro, kā saprot definīciju kombinācijām no n elementiem pa k elementiem ($k \leq n$) un to simbolisko pierakstu, lielumus kombināciju skaita aprēķināšanas formulās.</p> <p>Sadarbojas, aplūko konkrētus piemērus (n nepārsniedz 5) un secina par saistību starp lielumiem A_n^k, P_n un C_n^k; sākotnēji formulē to vārdiski, uzzīnu literatūrā atrod atbilstošo formulu.</p> <p>Aplūko 2 vai 3 piemērus, kuros jāveido nesakārtotas izlases; pēc uzdevumu atrisināšanas secina par saistību starp C_n^k un C_n^{n-k} un raksturo tās jēgu vārdiski, ilustrē iegūto sakarību vēl ar dažiem paša radītiem piemēriem un skaidro, kā tā var palīdzēt uzdevumu risināšanā.</p> <p>Aplūko virkni piemēru, kuros 1) skaidro/pamato, ka situāciju raksturo nesakārtotas izlases; 2) izvēlas paņēmienu – spriežot vai lietojot kombināciju skaita aprēķināšanas formulu, un paskaidro savu izvēli, 3) nosaka kombināciju skaitu.</p> <p>Konkrētos piemēros nosaka izlases veidu, paņēmienu izlašu skaita noteikšanai un izlašu skaitu. Klasē salīdzina risinājumus, formulē secinājumus par savu darbību un dažādajām iespējām.</p>
Varbūtību teorijas elementi	<p>Informācijas avotos meklē informāciju, kurās nozarēs un kā izmanto varbūtību teoriju, kāpēc tā ir nepieciešama. Lai pilnveidotu angļu valodas vai citas svešvalodas prasmes, ieteicams izmantot izvēlētos avotu ne tikai latviešu valodā.</p> <p>Lasa jaunu jēdzienu definīcijas un izmantojot konkrētus piemērus skaidro, kas ir eksperiments/mēģinājums, gadījuma mēģinājums, notikums, iznākumu kopa, drošs notikums, neiespējams notikums.</p> <p>Aplūko 3 vai 4 piemērus un veido gadījuma mēģinājuma iznākumu kopu, lieto kopu simboliku. Izmanto jau aplūkotos piemērus/gadījuma mēģinājumus un nosaka droša notikuma un neiespējama notikuma piemērus.</p> <p>Izmanto konkrētus gadījuma mēģinājumus (monētas mešana, spēļu kauliņa mešana u. tml.) un skaidro notikumam A pretējo notikumu \bar{A}. Vingrinās noteikt notikumu A un \bar{A} iznākumu kopas un aprēķināt varbūtības; formulē vispārinājumu.</p> <p>Aplūko gadījuma mēģinājumu "Spēļu kauliņa mešana" un izmanto divu notikumu piemērus, lai skaidrotu divu notikumu apvienojumu (summu), šķēlumu (reizinājumu) un starpību. Nosaka notikumu apvienojuma, notikumu šķēluma vai notikumu starpības iznākumu kopu, izmanto Venna diagrammu notikumu $A, B, A \cup B, A \cap B$ un $A \setminus B$ attēlošanai un nozīmes skaidrošanai. Vingrinās formulēt notikumus $A \cup B, A \cap B$ un $A \setminus B$, ja doti notikumi A un B. Nosaka notikumu $A, B, A \cup B, A \cap B$ un $A \setminus B$ varbūtību spriežot, nosakot notikumu iznākumu kopas, lietojot varbūtības definīciju. Izprot, ka informāciju var pierakstīt dažādi, piemēram, $A \cup B, A$ vai $B, A \cdot B$, izvēlas sev pieņemamāko veidu.</p>

Varbūtību teorijas elementi	<p>Vingrinās aprēķināt varbūtību, nosakot iznākumu kopu, t. sk., izmantojot kombinatoriskus spriedumus un formulas sakārtotu vai nesakārtotu izlašu skaita noteikšanai.</p> <p>Izmanto interaktīvas simulācijas, piemēram, animāciju saitē [4], lai salīdzinātu notikuma relatīvo biežumu jeb statistisko varbūtību un varbūtību, skaidrotu saistību starp tām, palielinot notikuma mēginājumu skaitu. Lieto relatīvā biežuma aprēķināšanas formulu, lai noteiktu nezināmo lielumu, formulētu spriedumus.</p> <p>Vingrinās noteikt relatīvo biežumu gan situācijās ar dotiem un tabulā apkopotiem datiem, gan situācijās, kurās datus iegūst skolēni, t. sk., izmantojot interaktīvas simulācijas, formulē ar datiem pamatotus secinājumus.</p> <p>Pēta, analizē divus piemērus, izmantojot gadījuma mēginājumu "Spēļu kauliņa mešana". 1. piemērs: notikums A ir "uzmest 1 vai 2", notikums B ir "uzmest 3 vai 4". Noteikt $P(A \cup B)$. 2. piemērs: notikums C ir "uzmest 1, 2 vai 3", notikums D ir "uzmest 3, 4 vai 5". Noteikt $P(C \cup D)$. Raksturo saskaņto, formulē secinājumus, t.sk. pieņemumu, ka $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Skaidro, kāpēc līdzīga sakārība nav spēkā 2. piemērā; raksturo/salīdzina abas situācijas, lietojot Venna diagrammu.</p> <p>Vingrinās noteikt, vai divi notikumi ir nesavienojami, t.sk., izmantojot biežuma tabulas, un nosaka nesavienojamu notikumu apvienojuma varbūtību, izmantojot sakārību $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.</p> <p>Aplūko piemēru: "Urnā ir 4 Baltas un 2 melnas bumbiņas. Vispirms no urnas izņēma vienu bumbiņu un pēc tam (neatliekot pirmo bumbiņu atpakaļ) - izvilkta otru bumbiņu. Noteikt varbūtību, ka otrā bumbiņa ir balta." Spriež par notikuma A (otrā izņemtā bumbiņa ir balta) varbūtību, sprieduma attēlošanai un varbūtību noteikšanai izmanto grafu un secina, ka notikuma A varbūtība atkarīga no notikuma B (pirmā izņemtā bumbiņa ir balta) realizēšanās.</p> <p>Definē nosacīto varbūtību, skaidro tās simbolisko pierakstu. Vingrinās noteikt nosacīto varbūtību izmantojot spriedumus par doto notikumu vai zīmējot grafu.</p> <p>Definē atkarīgus un neatkarīgus notikumus. Klasificē dotos notikumus, nosakot, vai tie ir atkarīgi vai neatkarīgi, izveido savus piemērus, izvērtē to atbilstību.</p> <p>Izmanto konkrētus piemērus, aprēķina notikumu varbūtību un secina, ka sakārības $P(A B) = P(A)$ un $P(B A) = P(B)$ ir patiesas, ja notikumi A un B ir neatkarīgi. Vingrinās pamato divu notikumu neatkarību, salīdzinot $P(A B)$ un $P(A)$ vērtības.</p> <p>Analizē konkrētus piemērus ar mērķi noskaidrot, kā aprēķināt notikumu A un B šķēluma (reizinājuma) varbūtību: 1) secina, ka atkarīgiem notikumiem A un B notikumu šķēluma/reizinājuma varbūtība nav vienāda ar varbūtību reizinājumu jeb $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, 2) nosaka lielumus $P(A \cap B)$, $P(B)$, $P(A B)$ un, spriežot induktīvi, secina, ka $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A B)$.</p> <p>Analizē konkrētus piemērus un secina, ka diviem neatkarīgiem notikumiem A un B ir patiesa sakārība $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.</p> <p>Vingrinās aprēķināt varbūtību, lietojot sakārību $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, ja A un B ir neatkarīgi notikumi. Secina par varbūtību $P(A \cap B \cap C)$, ja A, B un C ir neatkarīgi notikumi.</p> <p>Vingrinās dažāda veida uzdevumu risināšanā, izmanto darbības ar kopām, spriedumus, formulas, t. sk. kombinatorikas, lai aprēķinātu prasīto varbūtību.</p> <p>Veido pārskatu par tematā apgūto, veic pašvērtējumu, izmantojot sākotnēji dotos sasniedzamos rezultātus vai skolotāja sagatavotus uzdevumus un atbilstošus kritērijus.</p>
------------------------------------	---

Mācību līdzekļi

Mācību materiāli

Skola2030 mācību līdzeklis

[1] *Geogebra.org.* [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://www.geogebra.org/m/ozOTtfO8#material/uZTzH9dw> (Darbības ar kopām (vizualizācijas piemērs))

[2] *Geogebra.org.* [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: https://ej.uz/darbibas_ar_kopam_3D (Darbību ar kopām vizualizācijas 3D formā)

[3] *Geogebra.org.* [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://www.geogebra.org/m/UJUqb6N5> (Piemērs kombināciju skaita noteikšanai)

[4] *Geogebra.org.* [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://www.geogebra.org/m/AqPc9Hs4> (Simulācija statistiskās varbūtības/relatīvā biežuma noteikšanai, salīdzināšanai ar varbūtību)

[5] DZM atbalsta materiāli. [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: https://www.siic.lu.lv/mat/IT/M_11/default.aspx@tabid=17&id=450.html#navtop (Nosacītās varbūtības definīcija)

Mācību resursi

Dators, ekrāns, projektors, interneta pieslēgums.

Metodiskais komentārs

Ieteikums laika plānojumam	Sadaļai "Kopas" plānotas 6 m. s., sadaļai "Kombinatorika" – 12 m. s., sadaļai "Varbūtību teorijas elementi" – 18 m. s. Summatīvajam pārbaudes darbam plānotas 2 m. s. Skolotājs, ievērojot savu pieredzi vai skolēnu vajadzības, laika plānojumu temata ietvaros koriģē pēc saviem ieskatiem.
Saistība ar iepriekš apgūto	Varbūtības klasisko definīciju skolēni ir apguvuši jau pamatskolā. Šajā tematā iepriekš apgūtais tiek izmantots, lai padziļinātu izpratni par jēdzienu varbūtību, veidojot izpratni par tādiem jēdzieniem, kā statistiskā varbūtībā, nosacītā varbūtība, neatkarīgi notikumi, kas plaši tiek izmantoti citās zinātnē jomās, saimnieciskās un finansiālās darbības risku prognozēšanā u. tml.
Jaunu zināšanu konstruēšana	Temata ievāros pie jaunu jēdzienu nepieciešamības, to nozīmes izpratnes vairākkārt (piemēram, sakārtotas un nesakārtotas izlases, nesavienojami notikumi, nosacītā varbūtība) skolēni nonāk, spriežot un pētot konkrētus piemērus, izmantojot jau esošās zināšanas un prasmes. Tas turpmāk palīdz saprast un skaidrot arī formālās definīcijas, simbolu lietojumu.
Satura saistība, vizualizēšana	Svarīgi, ka visa temata laikā skolēni lieto pirmajā sadaļā aktualizēto un apgūto par kopām, darbībām ar tām un to vizuālo attēlošanu, kas daļai skolēnu nozīmīgi palīdz veidot izpratni par kombinatorikas un varbūtību teorijas jēdzieniem, lielumiem un sakarībām starp tiem.
Digitālo rīku un resursu izmantošana	Izpratnes veidošanai par jēdzienu relatīvais biežums/statistiskā varbūtība un tā saistību ar varbūtību būtiski lietot kādu no simulācijām, kas pieejamas tīmeklī [4]. Aktualizējot kopu jēdzienu un apgūstot darbības var izmantot digitālas sagataves, kas vizuāli dod iespēju labāk izprast darbības ar kopām [1], [2]. Apgūstot nosacīto varbūtību, var izmantot interaktīvo materiālu [5].

Analitiskā ģeometrija I		Varbūtība un statistika I		Algebra I		Trigonometrija I		Algebra I		Geometrija I	
1. Vektori un kustība	2. Līnijas vienādo- jums	3. Kombi- natorika un varbūtība	4. Statistika	5. Daļveida funkcija, algebriskās daļas	6. Daļveida vienādo- jumi un nevienā- dības	7. Sinusa un kosinusa funkcijas	8. Trigono- metriskās izteiksmes un vienā- dojumi	9. Pakāpe ar racionālu kāpinātāju, ģeomet- riskā pro- gresija	10. Eksponent- funkcija	11. Taisnes un plak- nes telpā, daudz- skaldņi	12. Rotācijas ķermenī, telpisku ķermenē kombinā- cijas

Varbūtība un statistika I

4. Statistika

Ieteicamais laiks temata apguvei: 30 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: pilnveidot un padziļināt izpratni par pētījuma plānošanu, t. sk. pētījumam atbilstošu instrumentu pamatotu izvēli visos tā etapos, datu ieguvi un apstrādi, rezultātu statistisko analīzi un interpretēšanu.

Sasniedzamie rezultāti

Zīnības	Prasmes
<ul style="list-style-type: none"> Populācija (ģenerālkopa) ir visu pētāmo elementu kopa, tāpēc tās analīze dod precīzu informāciju par šo kopu. (M.Li.5.) Populācijas izlase ir reprezentatīva, ja tā atlasīta tādā veidā, lai tās pazīmes iespējami precīzi atspoguļotu populācijas pazīmes. (M.Li.5.) Lai vispārinātu no izlases gūtos secinājumus uz populāciju (ģenerālkopu), izlasei jābūt reprezentatīvai. (M.Li.5.) Dati ir pētījuma mainīgā lieluma (pazīmes) vērtības; izšķir kvantitatīvus un kategorīlus (kvalitatīvus) datus. (M.Li.5.) Kategorīlus datus (piemēram, dzimums, ģimenes stāvoklis) apraksta un klasificē aprakstoši; kvantitatīvi dati izsakāmi ar skaitlisku vērtību, bet ne visi dati, kurus pieraksta ar cipariem, ir kvantitatīvi dati (piemēram, telefonu numuri ir kategorīli dati). (M.Li.5.) Kvantitatīvu un kategorīlu (kvalitatīvu) datu analīzei izmanto dažadas metodes. (M.Li.5.) Dažādi datu attēlošanas veidi atklāj atšķirīgas datu kopai raksturīgās īpašības un paplašina datu analīzes iespējas. (M.Li.5.) Datu kopas vidējie lielumi (aritmētiskais vidējais, moda, mediāna) raksturo centrālo tendenci/ tipisko vērtību, bet neraksturo vērtību izkliedi. (M.Li.5.) Izkliedes mēri (kvartiles, starpkvartīlu amplitūda, vidējā absolūtā novirze un standartnovirze) raksturo, cik ļoti datu kopas vērtības atšķiras viena no otra un no vidējās vērtības. (M.Li.5.) Kvartiles ir pazīmes vērtības, kas augošā vai dilstošā secībā sakārtotas vērtības sadala 4 vienādās daļās. Vidējā no piecām kvartīlēm sakrīt ar mediānu. (M.Li.5.) Kvartiles un kastu diagrammas bieži izmanto, lai salīdzinātu datu izkliei divās izlases/kopās. (M.Li.5.) Vidējā absolūtā novirze ir vidējais attālums, kādā datu kopas vērtības atrodas no šīs kopas datu vidējās aritmētiskās vērtības; to aprēķina pēc formulas $\frac{\sum_{i=1}^n x_i - \bar{x} }{n}$. Standartnovirzes aprēķināšanai tiek izmantots novirzes kvadrāts $(x_i - \bar{x})^2$, kas vairumā gadījumu precīzāk raksturo datu izkliedi; standartnovirzi praksē izmanto biežāk. (M.Li.5.) Divu pazīmu saistības raksturošanai izmanto biežuma tabulas, izkliedes diagrammas un korelācijas koeficientu (lineārai saistībai). (M.Li.5.) Saistība starp mainīgajiem lielumiem (pazīmēm) ne vienmēr ļauj secināt par cēloņsakarību. (M.Li.5.) 	<ul style="list-style-type: none"> Raksturo kvantitatīvus un kategorīlus (kvalitatīvus) datus, attēlo tos biežuma tabulās vai grafiski vienam vai diviem mainīgiem lielumiem (pazīmēm), tai skaitā, izmantojot digitālos rīkus. Atbilstoši datu veidam (diskrēti, nepārtraukti), izmantojot reālu datu piemērus un atbilstošus digitālos rīkus, nosaka datu kopas vidējos lielumus (aritmētiskais vidējais, mediāna, moda) un izkliedes mērus (amplitūda, kvartiles, starpkvartīlu amplitūda, vidējā absolūtā novirze, dispersija, standartnovirze). Analizē un interpretē datus pēc to vidējiem lielumiem un izkliedes mēriem. Veido, tai skaitā ar digitāliem rīkiem, datu grafisko attēlojumu (stabiņu un kastu diagramma, izkliedes diagramma, histogramma), konkrētos piemēros izvērtē to lietojumu un formulē ar datiem pamatotus secinājumus. Salīdzina divas vai vairākas izlases, izmantojot vidējos lielumus, izkliedes mērus, stabiņu un kastu diagrammas, izkliedes diagrammu. Raksturo divu mainīgo lielumu (pazīmju) saistību, izmantojot biežuma tabulas, izkliedes diagrammas un korelācijas koeficientu (lineāra saistība) un atbilstošus digitālos rīkus. Salīdzina divu vai vairāku kopu datu sadalījumus, aprakstot un izmantojot kopas datu sadalījuma simetriskumu un formu, izmantojot vidējos lielumus un izkliedes mērus.

Komplekss sasniedzamais rezultāts	Ieradumi
<ul style="list-style-type: none"> Lieto atbilstošus digitālos rīkus, lai raksturotu un pamatotu izlašu un populācijas (ģenerālkopas) raksturielumu atšķirību; salīdzina divas vai vairāk izlases, izmantojot vidējos lielumus, izklieces mērus, stabīnu un kastu diagrammu, izklieces diagrammu. (M.O.5.3.1.; M.O.5.3.5.) Argumentēti raksturo pētījumu, tā mērķi, piemēram, vai dotais jautājums ir statistiski analizējams, izlases reprezentativitāti, mainīgā lieluma (pazīmes) atbilstību pētāmai problēmai, vidējo lielumu un izklieces mēru lietojumu u. tml. (M.O.5.3.1.; M.O.5.3.3.; M.O.5.3.4.) Skaidro atšķirību starp saistību un cēloņsakarību un nosaka, vai saistība starp atkarīgo un neatkarīgo mainīgo konkrētajā pētījumā ļauj secināt cēloņsakarību. (M.O.5.3.7.) Patstāvīgi veic pētījumu – pēta divu lielumu saistību, t.sk. korelāciju – izvēlas lielumus, plāno un veic datu ievākšanu, izmanto digitālos rīkus datu apstrādei un attēlošanai, analizē datus un interpretē rezultātus. (M.O.5.3.2.; M.O.5.3.3.; M.O.5.3.6.; M.O.5.3.7.; M.O.5.3.8.) 	<ul style="list-style-type: none"> Rūpīgi plāno datu ievākšanas procesu un attēlošanu, apzinoties, ka neprecizitātes var būt pamats aplamiem secinājumiem. Izvērtē dotos vai iegūtos datus, attīstot ieradumu iegūto informāciju saistīt ar jau zināmo, kritiski izvērtēt rezultātu ticamību un atbilstību konkrētajai situācijai.

Jēdziens: kvantitatīvi un kategorīāli (kvalitatīvi) dati, populācija, dispersija, standartnovirze, vidējā absolūtā novirze, kvartiles, starpkvartīlu amplitūda, korelācija, Pīrsona koeficients.

Temata apguves norise

Populācija, izlase un dati. Datu sakārtošana un grupēšana.	<p>Savieto dotās kopas ar to apakškopām (kopu elementi raksturo daudzveidīgus kontekstus).</p> <p>Skaidro, kas ir populācija citu mācību priekšmetu kontekstos. Izmantojot skolotāja dotos piemērus, min, kas varētu būt populācija un kas – izlase, pēc tam, strādājot individuāli vai pāros, veido savus piemērus.</p> <p>Strādājot grupā (3 līdz 4 skolēni), veido domu karti, lai attēlotu dažādus jautājumus, kurus var analizēt statistiski, ja ir dota noteikta populācija (iedzīvotāju grupa, kādas valsts pilsoni, parkā augošie koki u. tml.). Stāsta klasesbiedriem par to, kas noteica pētāmā jautājuma izvēli – vēlme izpētīt pētāmās kopas elementu noteiktas īpašības, pieejamie līdzekļi/instrumenti, personiskā pieredze, iegūtā informācija u. tml.</p> <p>Izmanto skolotāja piedāvātos pētāmo jautājumu piemērus, lai izvērtētu, kura izlase labāk raksturo doto populāciju (ģenerālkopu), strādājot pāri, pamato viedokli, salīdzinot izlasē iekļauto/neiekļauto elementu īpašības ar īpašībām, kas caurmērā piemīt populācijas (ģenerālkopas) elementiem (piemēram, pētījumā par smēķēšanas ieradumiem tiek apskatītas trīs izlases: kādas skolas skolēni, autoostas smēķētāju zonas apmeklētāji un 30 nejauši izvēlēti gājēji).</p> <p>Pilnveido prasmi formulēt pētāmo jautājumu: izveido divus pētāmos jautājumus tā, lai vienā gadījumā dotā kopa (piemēram, otrdien lidostas stāvlaukumā novietotās mašīnas) būtu populācija (ģenerālkopa), bet otrā – izlase.</p> <p>Izmantojot tīmekļa resursus, atrod vārdu kvantitāte, kvalitāte, kategorija nozīmi (vēl nesaistītu ar statistiku). Strādājot ar skolotāja piedāvātiem piemēriem, izsaka pieņēmumu par to, kuri dati varētu būt kvantitatīvi, kvalitatīvi/kategorīāli.</p>
---	--

Populācija, izlase un dati. Datu sakārtošana un grupēšana.	<p>Konkrētos piemēros nosaka datu veidu – kategorīali (kvalitatīvi), kvantitatīvi (diskrēti, nepārtraukti), minot pazīmes, kas ļauj atšķirt vienu datu veidu no otra.</p> <p>Vingrinās dažādos veidos iegūtos datus (tīmeklī, citos avotos pieejamus reālus datus vai patstāvīgi iegūtos) sakārtot augošā vai dilstošā secībā, izmantojot digitālos rīkus.</p> <p>Izmanto tīmeklī pieejamus diskrētus datus, tos sagraupē, t. sk. dažādos veidos, un sagraupētos datus sakārto relatīvā biežuma tabulā.</p> <p>Vingrinās grupēt diskrētus un nepārtrauktus datus relatīvā biežuma tabulās, izmantojot intervālus.</p>
Statistiskie rādītāji, to noteikšana	<p>Skolotāja dotos vai klases biedru veidotos piemēros pēc dotā apraksta atpazīst <i>absolūto un relatīvo biežumu, aritmētisko vidējo, modu, mediānu, amplitūdu</i>. Vispirms nosaka statistiskos rādītājus neliela apjoma datu kopai, savu darbību komentē, lieto matemātisko valodu, t.sk., izmantojot dotas simulācijas, piemēram, [1]. Tad nosaka statistiskos rādītājus reālai liela apjoma datu kopai, izmantojot digitālos rīkus; raksturo datus, izmantojot statistiskos rādītājus.</p> <p>Aplūkojot vienu un to pašu datu dažādus attēlojumus (līniju, stabīnu, sektoru diagramma), spriež par to priekšrocībām un trūkumiem.</p> <p>Sadarbojas, lasa un analizē dotu reālu datu apkopojumu, kurā tiek salīdzināti dati (2 vai 3 datu kopas); mēģina salīdzināt datus, izmantojot jau zināmos statistiskos rādītājus, secina, ka tie ir nepietiekami. Tad, lasot tekstu, t. sk., izmantojot tīmeklī pieejamo informāciju, piemēram, [3], skolēni iepazīst jēdzienus kvartiles un starpkvartīlu amplitūda. Nosaka kvartiles dotajām 2 vai 3 datu kopām, ar digitāliem rīkiem veido kastu diagrammas. Secina, komentē, pamato, kā kvartiles un datu attēlošana ar kastu diagrammu palīdz salīdzināt datus.</p> <p>Spriež, raksturo saistību starp lielumiem mediāna, amplitūda un kvartiles, starpkvartīlu amplitūda.</p> <p>Dotām reālu datu kopām vingrinās noteikt kvartiles, starpkvartīlu amplitūdu, veido kastu diagrammas ar digitāliem rīkiem; vārdiski raksturo datu izkliedi.</p> <p>Izmantojot dotu neliela apjoma datu kopu, spriež par iespējām novērtēt datu izkliedi: apskatot dažādus variantus (novirze no aritmētiskā vidējā, novirzes absolūtā vērtība, novirzes kvadrāts). Mācās lasīt un izmantot summas simbolu Σ, veido vidējās absolūtās novirzes, dispersijas un starndartnovirzes aprēķināšanas izteiksmes (nelielam datu skaitam).</p> <p>Dotām (2 vai 3) liela apjoma reālām datu kopām nosaka standartnovirzi, izmantojot digitālos rīkus. Raksturo, salīdzina datu izkliedi dota jās kopās, izmantojot katras datu kopas vidējo un standartnovirzi.</p> <p>Lietojoj digitālos rīkus un skolotāja piedāvātos datus par kādu populāciju (ģenerālkopu) ar vismaz 50 elementiem, nosaka gan populācijas, gan izvēlētās izlases absolūto un relatīvo biežumu, aritmētisko vidējo, modu, mediānu, amplitūdu, kvartiles, standartnovirzi, vidējo absolūto novirzi; pēta, kā mainās šie lielumi, ja izvēlas citu, pēc elementiem vai apjoma atšķirīgu, dotās populācijas izlasi. Izsaka priekšlikumus par to, kā vajadzētu rīkoties, veidojot izlasi, ja mērķis ir analizēt populāciju.</p>

Datu analīze un interpretācija	<p>Izvērtē, kādi dati būs nepieciešami, lai analizētu pētamo jautājumu, un veido veicamajam uzdevumam un datu tipam atbilstošu biežuma tabulu: biežums nolasāms pa vienu vai divām dimensijām. Uzkrāj datus, izmantojot digitālos rīkus.</p> <p>Analizē skolotāja piedāvātos piemērus ar datu attēlojumiem, norāda uz paņēmieniem, kas izmantoti, lai radītu maldinošu iespaidu: nav norādīta nulltā iedaļa, dati apkopoti dažāda platuma intervālos, daži intervāli ir izlaisti u. tml. Strādājot pāros vai grupās, meklē kļūdaini attēlotu datu piemērus apkārtējā vidē.</p> <p>Izmantojot atbilstošo statistisko rādītāju vērtības, veido dotās/paša pētītās populācijas (ģenerālkopas) vai izlases aprakstu dažādiem adresātiem: piemēram, specializēta zinātniska žurnāla lasītājs, TV reportāzas skatītājs, kāda produkta/pakalpojuma potenciālais lietotājs.</p> <p>Veic laboratorijas darbā, piemēram, fizikā, bioloģijā, iegūto rezultātu analīzi, izmantojot zināšanas par statistiskajiem rādītājiem.</p> <p>Veic statistisko analīzi, piemēram, kas ir daļa no uzdevuma par pilsētu iedzīvotājiem (uzdevums iedots un sākts risināt mācību priekšmetā ģeogrāfija).</p> <p>Izmantojot skolotāja dotos, pašu atrastus vai veidotus piemērus, izvērtē, kuros gadījumos ievāktie dati nav ticami; pamato viedokli, atsaucoties uz konkrētām vērtībām vai novērotajām tendencēm (piemēram, tiek mērīts dažādu gliemežvāku garums, bet mērījumi lielākoties beidzas ar cipariem 0 un 5) datu kopā.</p> <p>Izmantojot reālus datus (basketbola vai hokeja komandu rādītāji; klašu pārbaudes darbu rezultāti u. tml.), salīdzina divas vai vairākas izlases, lietojot ar digitāliem rīkiem iegūtos vidējos lielumus, izkliedes mērus, stabīju un kastu diagrammas.</p>
Korelācija un cēloņsakarība	<p>Veido teikumus formā "jo lielaks (mazāks)..., jo lielāks (mazāks)...", papildina izkliedes diagrammas, kurās redzama pozitīva/negatīva korelācija (vēl nezinot jēdzienu) ar atbilstošiem lielumiem uz asīm, paskaidro savu izvēli.</p> <p>Izmantojot dotos datus (lineāra saistība), ar digitāliem rīkiem veido izkliedes diagrammas un nosaka Pīrsona koeficientu, lai spriestu par divu izvēlēto lielumu saistību.</p> <p>Izmantojot paša izvēlētus piemērus, izsaka savas domas, kas ir saistība/korelācija un cēloņsakarība un to, vai saistība starp diviem lielumiem vienmēr nozīmē arī cēloņsakarību. Sadarbojas, spriež vai atrod piemērus tīmeklī vai izmanto dotos datus, piemēram, [2], un ar konkrētiem piemēriem argumentē/pamato, ka saistība ne vienmēr lauj secināt arī par cēloņsakarību. Izvērtē citu grupu veidotos piemērus, formulē jautājumus par neskaidro.</p> <p>Sadarbojoties ar klases biedriem, spriež par to, kā atšķirt situācijas, kurās starp lielumiem ir ne tikai saistība, bet arī cēloņsakarība. Izvērtē skolotāja vai klasesbiedru piedāvātos divu lielumu korelācijas piemērus pēc pazīmes cēloņsakarība, pamato savu atbildi.</p> <p>Strādājot pāros vai grupās, formulē pētījuma mērķi, izstrādā kritērijus atbilstošai aptaujas anketai un veic neliela apjoma (2 līdz 3 jautājumi; līdz 20 respondenti) aptauju.</p> <p>Izmanto skolotāja piedāvātas idejas un pēta divu lielumu saistību, t.sk. korelāciju – izvēlas lielumus, plāno un veic datu ievākšanu, izmanto digitālos rīkus datu apstrādei un attēlošanai, analizē datus un interpretē rezultātus.</p> <p>Patstāvīgi vai sadarbībā ar ģeogrāfijas skolotāju izvēlas un formulē pētījuma mērķi, plāno un veic pētījumu (sk. nākamo sadaļu), izmanto statistiku, lai formulētu pamatotus secinājumus.</p>

Pētījums (šajā sadaļā integrēts matemātikas un ģeogrāfijas saturs)

Plāno pētījumu "Migrācijas procesi manā dzīvesvieta", kura mērķis ir analizēt izvēlētās teritorijas iedzīvotāju migrāciju un noteikt faktorus, kuri veicina vai ierobežo migrāciju.

Individuāli iepazīst pieejamo informāciju par migrāciju un to ietekmējošiem faktoriem (lielumiem) un sakarībām starp tiem.

Grupā apspriežas un formulē hipotēzes, piemēram, 1) jauni cilvēki dodas uz ārzemēm strādāt biežāk nekā gados vecāki; 2) jauni cilvēki ārzemēs pavada ilgāku laiku, mācoties vai strādājot.

Iegūst datus tiešsaistes vietnē (csb.gov.lv) par dzīvesvietai atbilstošu teritoriju – novada vai pilsētas līmenī. Izmanto izklājlapu lietotni, lai apstrādātu un analizētu datus par iebraukusajiem un izbraukusajiem iedzīvotājiem teritorijā un noteiktu, migrācijas saldo dinamiku noteiktā laika posmā (piemēram, 10 gadi).

No izvēlētās teritorijas iedzīvotājiem plāno izveidot reprezentatīvu izlasi (ne mazāk par 100 respondentiem). Spriež par iespējām veikt aptauju dažāda apjoma izlasēs.

Veido anketu, iekļaujot hipotēzēm atbilstošus jautājumus, piemēram, 1) cik reižu pēdējo 10 gadu laikā esat devies strādāt vai mācīties uz citām valstīm; 2) cik ilgu laiku pavadījāt ārzemēs (pēdējā reizē), strādājot vai mācoties u. tml.

Iegūst datus, izmantojot sagatavoto anketu.

Apstrādā un analizē iegūtos datus, izmantojot izklājlapu lietotnes: 1) sagatavo iegūtos datus statistiskajai apstrādei, kodējot un ievadot datus; 2) aprēķina statistikas rādītājus, piemēram, personu vecuma absolūto un relatīvo biežumu, vidējo vecumu, vecuma kvartiles, t. sk. mediānu, standartnovirzi ārzemēs pavadītajam laikam strādājot vai mācoties u. c.; 3) nosaka saistību starp respondentu vecumu un ārzemēs pavadīto laiku, aprēķina Pīrsona korelācijas koeficientu; 4) izvēlas un veido atbilstošas diagrammas, lai attēlotu iegūtos rezultātus; 5) interpretē iegūtos rezultātus.

Veido pētījuma pārskatu un prezentāciju par pētījuma rezultātiem.

Mācību līdzekļi

Mācību materiāli

Skola2030 mācību līdzeklis

[1] [Geogebra.org](https://www.geogebra.org/m/LM5NI8aB). [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://www.geogebra.org/m/LM5NI8aB> (Statistikisko rādītāju modeļi (vienam; diviem mainīgiem lielumiem), simulācijas)

[2] [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <http://www.tylervigen.com/spurious-correlations> (Divu lielumu korelācija un cēloņsakarība)

[3] [Math is fun](https://www.mathsisfun.com/data/index.html). [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://www.mathsisfun.com/data/index.html> (Statistikā lietoto jēdzienu skaidrojums; ieteikumi, kas būtu jāievēro, ievācot un attēlojot datus)

Mācību resursi

Dators, ekrāns, projektors, interneta pieslēgums.

Starppiekšmetu saikne

Pētījumā integrēts matemātikas un ģeogrāfijas saturs.

Metodiskais komentārs

Ieteikums laika plānojumam	"Populācija, izlase un dati. Datu sakārtošana un grupēšana" – 6 m. s., "Statistiskie rādītāji, to noteikšana" – 9 m. s., "Datu analīze un interpretācija" – 6 m. s., "Korelācija un cēloņsakarība" – 6 m. s. Patstāvīgajam pētījumam, kas vienlaikus plānots kā summatīvās vērtēšanas darbs – 3 m. s.
Datu ticamība	Lai varētu paļauties uz secinājumiem, kas iegūti, analizējot izlases statistiskos rādītājus, ir nepieciešams izkopt prasmi iegūt ticamus datus. Skolēni analizē vienu un to pašu populāciju, izmantojot dažadas tās izlases; spriež par izlases reprezentativitāti (piemēram, lai spriestu par to, cik labi aizsargākivere sargā velosipēdista galvu sadursmes laikā, ir nepieciešami gan dati par sadursmē traumu guvušajiem velosipēdistiem, gan sadursmē necietušajiem velosipēdistiem). Iegūtā pieredze ļaus saprast, ka dati var maldināt, ja izlase nav reprezentatīva.
Jēdziens populācija	Lai saskaņotu Latvijā un citur pasaulē lietotos terminus, piedāvājam aizstāt terminu ģenerālkopa ar terminu <i>populācija</i> , jo tas ne tikai atbilst vispārējai praksei, bet arī palīdz veidot izpratni par šo jēdzienu, saskatot saistību ar tā lietojumu bioloģijā, ģeogrāfijā.
Kategorīāli dati	Dati, kurus raksturo, izmantojot kategorijas: piemēram, līmenis – zems, vidējs, augsts; asins grupa; novads.
Kā iegūt dispersijas un standartnovirzes formulas?	Izmantojot nelielas kopas, piemēram, {4; 4; -4; -4} un {7; 1; -2; -6}, skolēni secina, ka noviržu absolūto vērtību summa un vidējā absolūtā novirze abām kopām ir vienāda, lai gan otrs kopas elementi ir acīmredzami vairāk izkliedēti. Izmantojot skaitļa kvadrāta īpašības, var panākt, ka tās novirzes, kas bija salīdzinoši nelielas (to modulis ir mazāks par 1), tiek aizvietotas ar vēl mazākiem skaitļiem, bet relatīvi lielās novirzes – ar vēl lielākiem skaitļiem. Dispersija ir noviržu kvadrātu summas aritmētiskais vidējais, bet kvadrātsakne no šī skaitļa – standartnovirze.
Kvartiles, starpkvartīlu amplitūda, kastu diagrammas	Kvartiles ļauj spriest ne tikai par pusi no visas kopas datiem, bet arī par to, kuru vērtību nesasniedz vai pārsniedz 25% kopas elementu. Starpkvartīlu amplitūda norāda starpību starp trešo un pirmo kvartili, var apgalvot, ka vismaz puse visu datu pieder intervālam $[Q_1; Q_3]$. Kastu diagrammas ir ērts rīks divu izlašu salīdzināšanai, tajā redzamie izvirzījumi (ūsas) garumā nepārsniedz pusotru starpkvartīju amplitūdu, tas ļauj noteikt tos kopas elementus, kas kaut kādu iemeslu dēļ "izlec" – tie varētu norādīt uz iespējamu mērījumu kļūdu.
Pīrsona koeficients un korelācija	Pīrsona koeficients norāda, cik stipra ir divu lielumu korelācija, statistikā to apzīmē ar r , jo tuvāk šī skaitļa absolūtā vērtība ir skaitlim 1, jo izteiktāka ir divu lielumu korelācija. Pīrsona koeficients korekti izmantojams tikai lineāras saistības raksturošanai normāli sadalītiem datiem. Runājot ar skolēniem par korelāciju, ir ļoti būtiski veltīt pietiekami daudz uzmanības situācijām, kas parāda, ka korelācija vēl nenozīmē cēloņsakarību: piemēram, vasarā var novērot, ka starp pārdoto saldējumu skaitu un pārdoto saulesbrīļu skaitu pastāv korelācija, bet cēloņsakarības starp šiem diviem lielumiem nav, jo gan viena, gan otra lieluma pieaugumu izraisa no Saules saņemtā enerģijas daudzuma pieaugums.
Starpdisciplināru uzdevumu vai pētījuma veikšana	Šajā tematā ieteicams veikt datu apstrādi, izmantojot reālus datus, te ir jāveic pietiekami liela apjoma (vismaz 100 mērījumi) datu apstrāde un analīze, piemēram, saskaņot darbu ar datiem ar ģeogrāfijas skolotāju, kad skolēni ģeogrāfijā apgūst tematu "Demogrāfijas un migrācijas procesi". Pētījumu var starpdisciplināri paplašināt, ja skolēni apgūst programmēšanu. Tad skolēni var programmēt sensoru datu ieguvei, kuru izmanto fizikā, bet datu apstrādi un analīzi veic matemātikā. Skolotājiem kopīgi ar skolēniem ir iespēja izvēlēties saistošāko tematu/piemērotāko starppriekšmetu sasaisti, piemēram, bioloģija, vēsture, politika, psiholoģija u.c.

Analitiskā ģeometrija I		Varbūtība un statistika I		Algebra I		Trigonometrija I		Algebra I		Geometrija I	
1. Vektori un kustība	2. Līnijas vienādo- jums	3. Kombi- natorika un varbūtība	4. Statistika	5. Daļveida funkcija, algebriskās daļas	6. Daļveida vienādo- jumi un nevienā- dības	7. Sinusa un kosinusa funkcijas	8. Trigono- metriskās izteiksmes un vienā- dojumi	9. Pakāpe ar racionālu kāpinātāju, ģeomet- riskā pro- gresija	10. Eksponent- funkcija	11. Taisnes un plak- nes telpā, daudz- skaldņi	12. Rotācijas ķermenī, telpisku ķermenē kombinā- cijas

Algebra I

5. Daļveida funkcija, algebriskās daļas

Ieteicamais laiks temata apguvei: 46 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: noteikt daļveida funkcijas īpašības un zīmēt tās grafiku;
apgūt, skaidrot un lietot algebrisko daļu pārveidojumus.

Sasniedzamie rezultāti

Zinās	Prasmes
<ul style="list-style-type: none"> Vispārīgie vienādojumu atrisināšanas paņēmiens ir: 1) sadalot reizinātājos izteiksmi, kas pielīdzināta nullei; 2) definējot jaunu mainīgo (substitūciju), kas ļauj pāriet uz vienādojumu, kura atrisināšana zināma; 3) attēlojot vienādojuma abas puses grafiski; 4) spriežot un lietojot attiecīgo funkciju īpašības. (M.Li.4.) Divu polinomu dalījums ir algebriska daļa (saka arī – racionāla daļveida izteiksme). Algebriskas daļas definīcijas kopa ir visas tās mainīgā vērtības, kurām daļas saucējs nav vienāds ar nulli. (M.Li.4.) Izteiksmes (piemēram, $\frac{4}{x-3}$) definīcijas kopu ar simboliem var pierakstīt dažādi: 1) $x \neq 3$, norādot tikai tās mainīgā vērtības, ar kurām izteiksme nav definēta; 2) $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$ vai $R \setminus \{3\}$, norādot visas mainīgā vērtības, ar kurām izteiksme ir definēta. (M.Li.1.; M.Li.4.) Izteiksmju pārveidojumos dažkārt nepieciešams kādu izteiksmi pierakstīt citādi, aizstājot ar identiski vienādu izteiksmi, piemēram, $\frac{y-x}{y}$ var aizstāt ar $\frac{x-y}{y}$. (M.Li.4.) Algebrisko daļu saīsināšanu un paplašināšanu pamato daļas pamatīpašība – daļas vērtība nemainās, ja skaitītāju un saucēju reizina vai dala ar vienu un to pašu skaitli, kas nav nulle; dažkārt, lai neklūdītos spriedumos, svarīgi ievērot definīcijas kopas izmaiņas (M.Li.4.) Algoritmus algebrisko daļu saskaitīšanai un atņemšanai, reizināšanai un dalīšanai var formulēt, izmantojot darbības ar parastajām daļām. (M.Li.2.; M.Li.4.) Saskaitot un atņemot algebriskas daļas, jāvienādo saucēji. Lai kopsaucēja pakāpe būtu mazākā iespējamā, saucējus sadala reizinātājos. (M.Li.4.) Dalīveida funkcijas $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ grafiks ir hiperbola. Ja dalīveida funkcija ir formā $f(x) = m + \frac{k}{cx+d}$, tad skaitli m un $\frac{d}{c}$ nosaka attiecīgi x un y asij paralēlas taisnes, kurām tuvojas hiperbolas zari. (M.Li.4.) 	<ul style="list-style-type: none"> Lieto kubu starpību $a^3 - b^3$, kubu summu $a^3 + b^3$ izteiksmes sadalīšanai reizinātājos. Atrisina algebrisku vienādojumu, izmantojot sadalīšanu reizinātājos. Atrisina algebrisku vienādojumu, izmantojot substitūciju. Atrisina algebrisku vienādojumu ar grafisko paņēmienu. Skaidro un pamato vienkāršas identitātes, identiskos pārveidojumus, t. sk. zīmju maiņu daļas skaitītājā vai saucējā, piemēram, $\frac{x}{y} = -\frac{-x}{y}$. Nosaka algebriskas daļas definīcijas kopu un to pieraksta, korekti lietojot pieņemtos apzīmējumus. Saīsina vai paplašina algebrisku daļu, sadalot daļas skaitītāju un saucēju reizinātājos. Reizina un dala algebriskas daļas, kuru skaitītājā un saucējā ir monomi vai pirmās un otrās pakāpes polinomi. Saskaņa un atņem algebriskas daļas ar vienādiem un dažādiem saucējiem, ja saucēji ir pirmās vai otrās pakāpes polinomi un kopsaucēja pakāpe nepārsniedz trešo pakāpi. Nosaka funkcijas $f(x) = \frac{k}{ax+b}$ īpašības (definīcijas kopa, vērtību kopa, funkcijas nulles, augoša/dilstoša, vienādas zīmes intervāli) analītiski vai grafiski. Zīmē dalīveida funkcijas $f(x) = \frac{k}{ax+b}$ grafiku, izmantojot funkcijas un grafika īpašības un nosakot atsevišķus grafika punktus. Zīmē dalīveida funkcijas $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ grafiku, izmantojot digitālos rīkus.

Komplekss sasniedzamais rezultāts	Ieradumi
<ul style="list-style-type: none"> Skaidro dotos vienādojumu atrisinājumus, izvērtē lietotā paņēmienā (spriešana, lietojot atbilstošo funkciju īpašības; sadališana reizinātājos; substitūcija un grafiskais paņēmiens) efektivitāti, piedāvā alternatīvu risinājumu un pamato savu izvēli. (M.O.1.2.2.; M.O.4.5.1.; M.O.2.1.1.; M.O.4.4.2.) Spriež induktīvi, izmanto zināšanas par darbībām ar parastajām daļām un formulē algoritmus algebrisko daļu saīsināšanai/paplašināšanai, reizināšanai un dalīšanai, saskaitīšanai un atņemšanai, skaidro definīcijas kopas nozīmi. (M.O.2.1.2.; M.O.4.4.1.; M.O.4.4.3.; M.O.4.4.4.) Matemātiski raksturo dotu racionālu daļveida izteiksmi, kas satur 3 vai 4 darbības, plāno veicamos pārveidojumus un to secību, raksturo nepieciešamās zināšanas, izpilda pārveidojumus, komentējot veiktās darbības. (M.O.1.1.2.; M.O.1.2.2.; M.O.4.4.1.; M.O.4.4.2.; M.O.4.4.3.; M.O.4.4.4.) Pēta daļveida funkciju grafiku novietojumu koordinātu plaknē, t. sk. transformācijas, izmantojot digitālos rīkus, nosaka funkcijas īpašības, vispārina iegūtos secinājumus. (M.O.1.2.1.; M.O.1.2.2.; M.O.4.2.4.; M.O.4.2.5.; M.O.6.1.2.) Analizē un modelē reālas situācijas, izmantojot daļveida funkciju. (M.O.2.2.1.; M.O.4.2.6.) 	<ul style="list-style-type: none"> Skaidro paņēmienā izvēli, risinot algebriskus vienādojumus, attīstot ieradumu plānot un vadīt savu domāšanas procesu. Mēģina izmantot jau apgūto par darbībām ar parastajām daļām, attīstot ieradumu iegūto informāciju saistīt ar jau zināmo, meklēt risinājumu nepazīstamās situācijās. Raksturo izteiksmju pārveidojumus, attīstot ieradumus paskaidrot un pamatot savus spriedumus.

Jēdzieni: algebriska daļa (racionāla daļveida izteiksme), daļveida funkcija, definīcijas kopa.

Temata apguves norise

Algebriskas izteiksmes un vienādojumi	<p>Sadarbojas, pēta un raksturo iespējas pamatskolā apgūtos vienādojumus (piemēram, $(2x - 3)^2 = 16$; $(2x - 1)^2 = x^2$) atrisināt spriežot, pamatojot ar attiecīgo funkciju (piemēram, kvadrātfunkcijas) īpašībām. Salīdzina doto vienādojumu dažādos risināšanas veidus, argumentēti raksturo sev piemērotāko veidu.</p> <p>Vingrinās vienādumu risināšanā izmantot spriešanu; mācās veidot strukturētu pierakstu, ja vienādojuma atrisinājums ietver 2 (vai vairāk) gadījumu aplūkošanu.</p> <p>Aplūko dotos piemērus, kuros veikta algebrisku izteiksmju sadališana reizinātājos, iznesot (t. sk. 2 vai 3 reizes) kopīgo reizinātāju pirms iekavām, strādājot grupā veido skaidrojumus, kā veikt šāda veida sadališanu reizinātājos.</p> <p>Vingrinās sadalīt izteiksmi reizinātājos, iznesot kopīgo reizinātāju pirms iekavām.</p> <p>Sadarbojas pāri vai mazā grupā, izmanto stratēģiju "Mēģini un pārbaudi" un izpratni par sadališumu reizinātājos, lai kubu summu/starpību pierakstītu kā reizinājumu. Skolēni, kuriem izdodas iegūt formulu, citiem pastāsta, kā sprienda un ieguva rezultātu. Vingrinās sadalīt izteiksmi reizinātājos, lietojot iegūtās formulas.</p>
--	---

Algebriskas izteiksmes un vienādojumi	<p>Grupē dotas izteiksmes pēc pazīmes "Panēmiens sadalīšanai reizinātājos", skaidro, argumentē paņēmiena izvēli.</p> <p>Lieto algebrisko izteiksmju sadalīšanu reizinātājos ar dažadiem paņēmieniem, lai identiski pārveidotu izteiksmes, pamatotu identitātes.</p> <p>Izmanto sadalīšanu reizinātājos, lai atrisinātu trešās un ceturtās pakāpes vienādojumus, piemēram, $x^4 - 3x^3 + 2x^2 = 0$, skaidro savu darbību, lietojot matemātikas valodu un kā pārliecinās, ka atrisinājums pareizs.</p>
	<p>Sadarbojas, pēta dotos piemērus un raksturo iespējas vienādojuma atrisinājumu veidot pēc iespējas racionālāku, uztverot izteiksmi kā nezināmo lielumu, piemēram, $5(2x - 6) = 20; \frac{8}{(5-2x)^2} = 2$. Tad apspriežas un formulē priekšlikumus/idejas vienādojuma $x^4 + x^2 = 20$ atrisināšanai; aplūko vēl 2 vai 3 piemērus, vingrinās izteiksmi uztvert kā nezināmu lielumu (jauna mainīgā definēšana/substitūcija kā paņēmiens vēl nav formalizēts).</p> <p>Strādā nelielās grupās, izmanto dotos dažāda veida vienādojumu atrisinājumus ar substitūciju un mēģina formulēt algoritmu/paņēmienu vienādojumu atrisināšanai, lietojot substitūciju. Grupas iepazīstina klasesbiedrus ar izveidoto algoritmu, skaidro algoritma soļu saistību, lieto matemātikas valodu.</p> <p>Vingrinās atrisināt vienādojumus, t. sk. tādus, kas satur 3. vai 4. pakāpi, lietojot substitūciju, skaidro savu risinājumu. Izvērtē un raksturo iespējamos kļūdu cēloņus, lietojot substitūciju; formulē ieteikumus paškontrolei.</p>
	<p>Sadarbojas un formulē idejas vienādojuma $x^3 = 2 - x$ atrisināšanai. Ja nosaka sakni galvā, meklē pamatojumu tam, kā var zināt, ka citu sakņu nav. Grupas, kas secina par funkciju grafiku izmantošanas iespējām, skaidro risinājumu klasesbiedriem, piemēram, sakni noteicām mēģinot un pārbaudot, bet to, ka vairāk sakņu nav, pamatojām ar grafiku uzskicēšanu.</p> <p>Vingrinās lietot digitālos rīkus, vairākus dotos vienādojumus formā $f(x) = g(x)$ atrisinot ar grafisko paņēmienu, nosakot vienādojuma sakņu precīzās vai aptuvenās vērtības; sadarbojas un izvērtē, kurus no dotajiem vienādojumu var atrisināt, neizmantojot grafisko paņēmienu, secina par piemērotāko paņēmienu katrā konkrētajā gadījumā.[1]</p> <p>Raksturo dotos vienādojumus un paņēmienus to atrisināšanai, t. sk. digitālo rīku iespējas, argumentē paņēmiena izvēli, vai tas ir vienīgais iespējamais paņēmiens, uzklausa citus un formulē jautājumus par neskaidro, labo neprecizitātes spriedumos.[2]</p>
	<p>Veido algebrisku izteiksmi un vienādojumu kā situācijas (praktisks, citu mācību jomu vai matemātisks konteksts) matemātisko modeli. Izmanto ieteikumus/atgādnes darbam ar tekstu, matemātiskai modelēšanai. Komentē savu darbību, kā veicas ar vienādojuma izveidi, kas tieši sagādā grūtības. Veido matemātisko atrisinājumu. Pārliecinās un argumentē, vai vienādojuma atrisinājums ir arī sākotnējās problēmas atrisinājums, piemēram, nosakot, kādā skaitļu kopā meklējams konkrētās problēmas atrisinājums.</p>
Darbības ar algebriskām daļām	<p>Izsaka savas domas, kāpēc nepieciešamas algebrisko izteiksmju pārveidošanas prasmes; grupā veido strukturētu apkopojumu par pamatskolā apgūtajām algebrisko pārveidojumu prasmēm.</p> <p>Izvēlas sev piemērotu veidu – spriežot konkrēti vai vispārīgi – un pamato vienkāršas identitātes, piemēram, $a - b = -(b - a)$; $(a - b)^2 = (b - a)^2$; $(a - b)^3 = -(b - a)^3$.</p> <p>Vingrinās veidot dotaiz teiksmei (piemēram, $-x - y$) identiskas izteiksmes.</p>

Darbības ar algebriskām daļām

Sadarbojoties grupā, analizē dotas dažādas uzrakstītas izteiksmes, atlasa racionālas daļveida izteiksmes, vingrinās lasīt algebrisku daļu (nosaukt skaitītāju un saucēju), uzrakstīt pēc vārdiskā apraksta.

Apskatot konkrētus piemērus, kuros jāaprēķina racionālas daļveida izteiksmes vērtību ar dotu mainīgā vērtību, skolēni secina, ka ir vērtības, ar kurām nevar aprēķināt izteiksmes vērtību, nosaka mainīgā pieļaujamās vērtības (definīcijas kopu). Patstāvīgi veido racionālas daļveida izteiksmes, ievērojot dotu definīcijas kopu, pāros salīdzina un pārrunā, vai iespējams izveidot dažādas algebriskās daļas, kurām definīcijas kopa sakrit.

Veido sakarību starp lielumiem situācijās ar citu jomu kontekstu kā racionālu daļveida izteiksmi, nosakot definīcijas kopu, piemēram, uzrakstot vidējo ražošanas izmaksu sakarību, ja atbilstoši uzdevumā dotajiem nosacījumiem tiek sastādīta kopējo izmaksu izteiksme.

Izvēlas sev piemērotu veidu – spriežot konkrēti vai vispārīgi – un pamato vienkāršas identitātes, piemēram, $\frac{x-y}{y} = -\frac{y-x}{y} = \frac{y-x}{-y} = -\frac{x-y}{-y}$.

Formulē idejas par to, ko nozīmē saīsināt dotu algebrisku daļu, piemēram, $\frac{x^2+x}{x^2-x}$. Kritiski izvērtē piedāvātos risinājumus, izmanto konkrētus,

t. sk. skaitliskus piemērus un pretpiemērus, lai pamatotu, ka kāds pārveidojums aplams. Secina par nepieciešamību daļas skaitītāju un saucēju sadalīt reizinātajos.

Izvēloties paņēmienus algebriskās daļas skaitītājā un saucējā esošo izteiksmju sadalīšanai reizinātajos, vingrinās saīsināt vai paplašināt algebrisko daļu, skaidro veiktos pārveidojumus, salīdzina grupas un klases ietvaros, kādi paņēmieni izmantoti, pārrunā izmantoto paņēmienu priekšrocības.

Strādājot pārī, formulē darbības paškontrolei, kā pārbaudīt, vai algebriska daļa ir saīsināta pareizi (piemēram, sareizinu skaitītāju un saucēju ar vienu un to pašu lielumu un pārliecinos, ka iegūta sākotnējā daļa); uzsklusa citu idejas, salīdzina savu piedāvājumu ar cita pāra idejām, papildina vai precīzē darbību aprakstu.

Formulē idejas par to, ko nozīmē sareizināt divas algebriskas daļas, piemēram, $\frac{x-2}{x} \cdot \frac{x^2}{2x-4}$. Kritiski izvērtē piedāvātos risinājumus, izmanto

konkrētus, t. sk. skaitliskus piemērus un pretpiemērus, lai pamatotu, ka kāds pārveidojums aplams. Apkopo idejas, secinājumus un formulē algoritmu algebrisko daļu reizināšanai.

Vingrinās parasto daļu reizināšanā, ja skaitītājā un saucējā ir monomi, katrs skolēns novērtē savu izpratni un prasmi, patstāvīgi vai, konsultējoties ar skolotāju, nosaka sev nepieciešamo piemēru skaitu. Tad aplūko piemērus, kuros daļu skaitītāji, saucēji satur pirmās pakāpes polinomus; skaidro, vai un kas mainās risināšanā, domāšanā. Raksturo iespējamos kļūdu cēloņus. Skaidro, kā skaitītājos un saucējos esošo izteiksmju ieslēgšana iekavās palīdz nekļūdīties pārveidojumos. Formulē citas idejas paškontrolei. Vingrinās, patstāvīgi vai konsultējoties ar skolotāju, nosaka sev nepieciešamo piemēru skaitu.

Formulē algoritmu algebrisko daļu dalīšanai, izmantojot jau apgūto un saistību starp reizināšanu un dalīšanu. Vingrinās algebrisko daļu dalīšanā.

Aplūko algebrisko daļu reizināšanas un dalīšanas piemērus, kuros daļu skaitītāji, saucēji satur otrās pakāpes polinomus; skaidro, vai un kas mainās risināšanā, domāšanā, salīdzinot ar jau aplūkotajiem gadījumiem. Kopīgi izvērtē piedāvātos dažādos risinājumus, un secina par nepieciešamību algebrisko daļu (gan doto, gan pārveidojumu rezultātā iegūto) skaitītājus un saucējus sadalīt reizinātajos.

Vingrinās algebrisko daļu reizināšanā un dalīšanā, pirms risināšanas raksturo daļas, piemēram, skaitītāji, saucēji ir/nav sadalīti reizinātajos un pastāsta, ko un kādā secībā darīs; risinājuma laikā vai pēc tā skaidro veiktās darbības, lietojot matemātikas valodu.

Izvērtē dotos aplamus un pareizus algebrisko daļu reizināšanās vai dalīšanas piemērus, skaidro un labo kļūdas, iespējamos kļūdu cēloņus, iesaka uzlabojumus.

Darbības ar algebriskām daļām

Formulē idejas par to, ko nozīmē saskaitīt, atņemt divas algebriskas daļas, piemēram, $\frac{4}{x} - \frac{1}{x^3}$; $\frac{x}{x-2} + \frac{1}{2x-4}$. Kritiski izvērtē piedāvātos risinājumus, izmanto konkrētus, t. sk. skaitliskus, piemērus un pretpiemērus, lai pamatotu, ka kāds pārveidojums aplams. Apkopo idejas, secinājumus un formulē algoritmu algebrisko daļu saskaitīšanai, atņemšanai.

Vingrinās parasto daļu saskaitīšanā un atņemšanā, lai veiktu algebrisko daļu ar vienādiem saucējiem (sākotnēji, ja skaitītājā un saucējā ir monomi) saskaitīšanu un atņemšanu, pāros skaidro veiktās darbības un formulē algebrisko daļu ar vienādiem saucējiem saskaitīšanas un atņemšanas algoritmu.

Vingrinās parasto daļu saskaitīšanā un atņemšanā, ja skaitītājā un saucējā ir monomi, katrs skolēns novērtē savu izpratni un prasmi, izvēloties sev nepieciešamo vingrināšanās piemēru skaitu. Tad aplūko piemērus, kuros daļu skaitītāji, saucēji satur pirmās pakāpes polinomus, bet saucēji vēl nesatur vienādus reizinātājos, piemēram, $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x-3}$; raksturo iespējamos kļudu cēloņus un skaidro savas stratēģijas, kā nekļūdīties, pierakstot izteiksmi starpības skaitītājā un nosakot kopsaucēju. Vingrinās, patstāvīgi vai konsultējoties ar skolotāju, nosaka sev nepieciešamo piemēru skaitu.

Konkrētos piemēros spriež, kā var iegūt vienādus saucējus, ja saucēja izteiksmes var sadalīt reizinātājos, piemēram, $3x - 9$ un $2x - 6$, izmanto daļu paplašināšanas īpašību, uzrakstot daļas tā, lai to saucēji būtu vienādi. Patstāvīgi saskaita/atņem daļas, kuru saucēji satur kopīgu reizinātāju, piemēram, $\frac{x}{x^2-9} + \frac{1}{2x-6}$. Vispirms grupās, tad kopīgi izvērtē dažādos risinājumus, secina par nepieciešamību saucējus sadalīt reizinātājos pirms kopsaucēja noteikšanas.

Vingrinās algebrisko daļu saskaitīšanā un atņemšanā, pirms risināšanas raksturo daļas, nosaka, vai saucēji ir sadalāmi reizinātājos un pastāsta, ko un kādā secībā darīs; risinājuma laikā skaidro veiktos pārveidojumus, lietojot matemātikas valodu.

Vingrinās veikt pārveidojumus ar racionālu daļveida izteiksmi, kas satur 3 vai 4 darbības; pirms risināšanas raksturo izteiksmi un tajā ietilpstos lielumus; stāsta, ko un kādā secībā darīs, kādus paņēmienus, formulas lietos, ko ievēros, lai nekļūdītos; risinājuma laikā vai pēc tā skaidro veiktās darbības.

Daļveida funkcija, tās īpašības un grafiks

Pārī sadarbojas un zīmē funkciju $f(x) = \frac{4}{x}$ un $f(x) = \frac{4}{x-2}$ grafikus, izmantojot pamatskolā apgūto un spriežot, saskatot saistību starp doto funkciju formulām un to grafikiem; patstāvīgi vai konsultējoties ar skolotāju izvēlas punktu skaitu grafiku uzzīmēšanai. Klasē apspriežas, daži no pāriem pastāsta par saviem secinājumiem, piemēram, par otras funkcijas grafika novietojumu attiecībā pret taisni $x = 2$. Formulē pieņēmumu par funkcijas $f(x) = \frac{4}{x+3}$ grafiku un tā novietojumu koordinātu plaknē; pārbauda pieņēmumu, izmantojot digitālos rīkus. No grafikiem raksturo funkciju

$f(x) = \frac{4}{x-2}$ un $f(x) = \frac{4}{x+3}$ īpašības – definīcijas kopa, vērtību kopa, funkcijas nulles, vienādas zīmes intervāli, augoša/dilstoša; pieraksta īpašības, lietojot simbolisko pierakstu.

Pēta funkciju $f(x) = \frac{k}{x}$, $f(x) = \frac{k}{x+b}$, $f(x) = \frac{k}{ax+b}$ grafiku novietojumu koordinātu plaknē, izmantojot digitālos rīkus; zīmē pēc kārtas vairāku funkciju grafikus, mainot k , a un b vērtības. Apskatot vairākus piemērus, cenšas saskatīt sakarības un formulē vispārinājumus par koeficientu k , a un b ietekmi uz funkcijas grafika novietojumu. Spriež, vai un kā iepriekš uzzīmētais grafiks palīdz iegūt nākamā veida grafikus.

Vingrinās uzzīmēt daļveida funkcijas $f(x) = \frac{k}{ax+b}$ grafiku, ievērojot tā īpašības un nosakot atsevišķus grafika punktus, pašpārbaudei izmanto digitālos rīkus.

Nosaka funkciju $f(x) = \frac{-2}{x+4}$ un $f(x) = \frac{6}{x+4}$ īpašības analītiski vai grafiski, nosauc to kopīgās un atšķirīgās īpašības; formulē un pārbauda vispārinājumus par funkcijas $f(x) = \frac{k}{ax+b}$ īpašībām.

Lieto digitālos rīkus un uzzīmē grafikus 2 vai 3 funkcijām formā $f(x) = m + \frac{k}{cx+d}$; formulē secinājumus par kopīgo un atšķirīgo ar jau aplūkoto daļveida funkciju grafikiem, un to novietojumu koordinātu plaknē.

Lieto digitālos rīkus un zīmē funkcijas $f(x) = \frac{2x+4}{x+1}$ grafiku, no grafika nosaka funkcijas īpašības.

Izmanto dotus vai tīmeklī atrastus piemērus – situācijas ar citu jomu, piemēram, ekonomikas, fizikas, kontekstu, kuros sakarību starp lielumiem raksturo daļveida funkcija un vingrinās nolasīt informāciju, raksturo saistību starp lielumu izmaiņām, nosaka nezināmos lielumus, raksturo tendences u. tml.

Mācību līdzekļi

Mācību materiāli

Skola2030 mācību līdzeklis

[1] DZM atbalsta materiāli. [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://www.siic.lu.lv/datadir/matematika/registretieskolotaji/165.pdf> (Trešās pakāpes vienādojumu

atrisināšana)

[2] DZM atbalsta materiāli. [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams:

https://www.siic.lu.lv/mat/IT/M_10/default.aspx@tabid=17&id=563.html

(Vispārējās vienādojumu atrisināšanas metodes)

[3] Geogebra.org. [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://www.geogebra.org/m/BuuqzaG9> (Daļveida izteiksmes veselā atdališana)

Mācību resursi

Dators, ekrāns, projektors, interneta pieslēgums.

Metodiskais komentārs

Ieteikums laika plānojumam	Sadalai "Algebriskās izteiksmes un vienādojumi" plānotas 14 m. s., sadalai "Darbības ar algebriskām daļām" – 20 m. s., sadalai "Dalveida funkcija, tās īpašības un grafiks" – 10 m. s. Summatīvajam pārbaudes darbam plānotas 2 m. s. Skolotājs, ievērojot savu pieredzi vai skolēnu vajadzības, laika plānojumu temata ietvaros koriģē pēc saviem ieskatiem.
Saikne ar turpmāko	Algebrisko vienādojumu atrisināšanas vispārīgos paņēmienus (sadališana reizinātājos, substitūcija, grafiskais paņēmiens) skolēni lietos, risinot trigonometriskos un eksponentvienādojumus. Būtiski, ka skolēni spēj skaidrot katru no paņēmiem vispārīgi, raksturot saistību starp atsevišķiem soljiem to algoritmos.
Jaunu zināšanu konstruēšana, digitālo riku efektīva izmantošana	Skolēni ir apguvuši darbības ar parastajām daļām un vieniem ir fragmentāra pieredze veidot burtu izteiksmes, piemēram, $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$. Gan algebrisko daļu saīsināšanas/paplašināšanas, gan reizināšanas/dalīšanas, gan saskaitīšanu/atņemšanas apguvi ieteicams sākt ar jaunās situācijas patstāvīgu izpēti un mēģinājumu algoritmu "atklāt" un formulēt pašiem. Spiež un runā par riskiem kļūdīties, ja pārnesums no skaitliskām uz vispārīgi uzzotām izteiksmēm tiek veikts bez izpratnes, formāli. Digitālo rīku, piemēram, programmas/lietotnes Desmos vai Geogebra izmantošana dažādu grafiku konstruēšanai mainot koeficientus, dod iespēju ātrāk pašiem saskatīt kopsakarības un formulēt secinājumus un vispārinājumus gan par funkciju grafiku novietojumu, gan funkcijas grafika "izskatu".
Pieejamie materiāli	Ieteikums izmantot arī jau iepriekš sagatavotos materiālus par algebriskām izteiksmēm un vienādojumiem https://www.siic.lu.lv/datadir/matematika/registretieskolotaji/165.pdf https://www.siic.lu.lv/mat/IT/M_10/default.aspx@tabid=17.html https://www.siic.lu.lv/mat/IT/M_10/default.aspx@tabid=17&id=594.html
Pašvadīta mācišanās	Digitālos rīkus izmanto paškontrolei – vai pārveidojumi veikti pareizi, vai funkciju grafiks uzzīmēts precīzi, vai vienādojuma sakņu skaits noteikts pareizi u. tml. Veido dažādas satura izpratnē balstītas paškontroles stratēģijas arī izpildot darbības ar daļām, piemēram, kā nekļūdīties, pierakstot daļu summas/starpības skaitītāju vai kā pārliecināties, ka saucēji sadalīti reizinātājos, kā atcerēties un pārbaudīt, vai rezultātā iegūtā daļa ir pārveidota par nesaīsināmu.

Analitiskā ģeometrija I		Varbūtība un statistika I		Algebra I		Trigonometrija I		Algebra I		Geometrija I	
1. Vektori un kustība	2. Līnijas vienādo- jums	3. Kombi- natorika un varbūtība	4. Statistika	5. Daļveida funkcija, algebriskās daļas	6. Daļveida vienādo- jumi un nevienā- dības	7. Sinusa un kosinusa funkcijas	8. Trigono- metriskās izteiksmes un vienā- dojumi	9. Pakāpe ar racionālu kāpinātāju, ģeomet- riskā pro- gresija	10. Eksponent- funkcija	11. Taisnes un plak- nes telpā, daudz- skaldņi	12. Rotācijas ķermenī, telpisku ķermenē kombinā- cijas

Algebra I

6. Daļveida vienādojumi un nevienādības

Ieteicamais laiks temata apguvei: 34 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: pilnveidot prasmi sastādīt daļveida vienādojumu
vai daļveida nevienādību kā situācijas matemātisko modeli un tos atrisināt, izvēloties
piemērotāko atrisināšanas paņēmienu.

Sasniedzamie rezultāti

Zīnības	Prasmes
<ul style="list-style-type: none"> Dalveida vienādojums satur daļu (daļas) ar nezināmo saucējā. (M.Li.4.) Dalveida vienādojumu risināšanā izmanto spriedumu: ja $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, tad $f(x) = 0$ un $g(x) \neq 0$. (M.Li.2.; M.Li.4.) Dalveida vienādojuma atrisināšanā dažkārt izmanto sakarības starp lielumiem divu daļu vienādībā (proporcijā), ievērojot definīcijas kopu. (M.Li.2.; M.Li.4.) Lai atrisinātu sarežģītākus dalveida vienādojumus, tos ekvivalenti pārveido par vienādojumiem, kuru atrisināšana ir zināma, piemēram, $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p(x)}{g(x)}$. (M.Li.4.) Dalveida vienādojumu atrisināšanā izmanto vispārīgos vienādojumu atrisināšanas paņēmienu (sadalīšanu reizinātājos, substitūciju, grafisko paņēmienu). (M.Li.4.) Atrisināt nevienādību $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ ($<$, \leq, \geq) nozīmē noskaidrot tos x, ar kuriem skaitītāja $f(x)$ un saucēja $g(x)$ dalījums ir pozitīvs (negatīvs, nepozitīvs, nenegatīvs). Sprieduma pierakstam izmanto divas nevienādību sistēmas, kuru atrisinājumu apvienojums ir nevienādības $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ atrisinājums. (M.Li.2.; M.Li.4.) Risināt nevienādību $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ ar grafisko intervālu metodi nozīmē uzskicēt funkciju $f(x)$ un $g(x)$ grafikus, attēlojot funkciju nulles un nosakot funkciju vērtību zīmes iegūtajos intervālos; tas ļauj secināt par nevienādības $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ atrisinājumu. (M.Li.2.; M.Li.4.) Dalveida vienādojumu vai nevienādību izmanto, lai matemātiski aprakstītu/modelētu situācijas, kuras raksturo apgriezti proporcionāli lielumi. (M.Li.2.; M.Li.4.) 	<ul style="list-style-type: none"> Atrisina dalveida vienādojumu, kas dots pamatformā $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, skaidrojot veiktos pārveidojumus. Izpilda darbības ar algebriskām daļām, pārveidojot dalveida vienādojumu vai nevienādību pamatformā $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ($\frac{f(x)}{g(x)} > 0$), ja daļu saucēji ir pirmās vai otrās pakāpes polinomi un kopsaucēja pakāpe nepārsniedz trešo. Atrisina dalveida nevienādību formā $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ ($\frac{f(x)}{g(x)} < 0$), skaidrojot pāreju uz nevienādību sistēmām un saistību starp nevienādību sistēmu atrisinājumiem un dotās nevienādības atrisinājumu. Atrisina dalveida nevienādību formā $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ ($\frac{f(x)}{g(x)} < 0$) ar grafisko intervālu metodi, skaidrojot veiktās darbības un pamatojot spriedumus. Sastāda un atrisina situāciju uzdevumus pazīstamās situācijās, piemēram, par plānoto un faktiski esošo, par kustību, izmantojot dalveida vienādojumu vai nevienādību.

Komplekss sasniedzamais rezultāts	Ieradumi
<ul style="list-style-type: none"> Skaidro dotu daļveida vienādojuma vai daļveida nevienādības atrisinājumu, izvērtē lietotā paņēmienā piemērotību, piedāvā alternatīvu risinājumu un pamato savu izvēli. (M.O.1.2.2.; M.O.4.5.2.; M.O.4.5.5.) Atrisina algebrisku nevienādību jaunā situācijā, izmantojot spriešanu, piemēram, $x(x-2)^2 \leq 0$, skaidro risinājumu vai izvēlēto paņēmieno. (M.O.1.2.2.; M.O.2.2.2.) Plāno risinājumu, izvēlas paņēmienu un atrisina divu vienādojumu sistēmu (dalveida vienādojums un lineāru vienādojumu). (M.O.4.5.7.) Veic visus matemātiskās modelēšanas soļus un izstrādā piedāvājumu autentiskas problēmas risinājumam, izmantojot dalveida vienādojumu vai nevienādību, izklāsta un prezentē savu piedāvājumu, saistot matemātisko atrisinājumu ar situācijas kontekstu. (M.O.2.2.1.; M.O.4.5.2.; M.O.4.5.7.) 	<ul style="list-style-type: none"> Pārbauda vienādojuma sakni vai nevienādības atrisinājuma atbilstību dotajai situācijai, attīstot ieradumu plānot un vadīt savu domāšanas procesu, pamatot savus spriedumus. Saskata iespējas izmantot jau apgūto par pozitīvu/negatīvu skaitļu dalījumu un par proporciju, attīstot ieradumu iegūto informāciju saistīt ar jau zināmo, meklēt risinājumu nepazīstamās situācijās.

Jēdziens: daļveida vienādojums, daļveida nevienādība, nevienādību sistēma, nevienādības un nevienādību sistēmas atrisinājums.

Temata apguves norise

Daļveida vienādojumi	<p>Nosaka un aprakstoši pamato vienkārša daļveida vienādojuma formā $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ atrisināšanu, piemēram, $\frac{2x-8}{x-1} = 0$, lietojot iepriekš apgūto – zināšanas par divu skaitļu, zināšanas par divu skaitļu dalījumu un tā pierakstu daļas veidā. Pārbauda, vai skaitlis ir vienādojuma sakne.</p> <p>Tad aplūko vienādojumu $\frac{2x^2-8}{x-2} = 0$. Grupās veido risinājumu, kopīgi apspriež un salīdzina visu grupu atrisinājumus. Pārbauda, vai skaitļi 2 un -2 ir vienādojuma saknes. Secina, ka, nosakot vienādojuma atrisinājumu, jāievēro definīcijas kopa; skaidro, kāpēc tas svarīgi. Formulē, kā jārīkojas, lai atrisinātu vienādojumu $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ un noskaidrotu, vai saknes ietilpst definīcijas kopā.</p> <p>Atrisina 2 vai 3 daļveida vienādojumus formā $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$.</p> <p>Sadarbojas, risina situāciju uzdevumu, kura konteksts ir pazīstams, piemēram, kustība, plānotais un esošais u. tml., iegūstot jauna veida vienādojumu – daļveida vienādojumu. Nosaka izteiksmju definīcijas kopu. Izsaka idejas, kā varētu risināt iegūto vienādojumu, piemēram $\frac{60}{x} = \frac{40}{x-2}$. Saskata dažādas iespējas: izmantot zināšanas par sakarībām starp lielumiem proporcijā, lietot daļas pamatīpašību, lai vienādotu skaitītājus vai saucējus, kas lauj secināt attiecīgi par saucēju vai skaitītāju vienādību, piemēram, $\frac{120}{2x} = \frac{120}{3(x-2)}$, u. tml. Skolotāja vadīti izskata visus piedāvājumus, veido korektus un pamatotus spriedumus, ievēro definīcijas kopu.</p>
---------------------------------	--

Daļveida vienādojumi

Tad aplūko situācijas uzdevumu, kura matemātiskais modelis ir daļveida vienādojums, kas satur daļu summu vai starpību, piemēram, $\frac{21}{x+3} + \frac{6}{x-3} = 9$.

Pārī apspriežas un raksturo pieredzi vienādojumu risināšanā, piemēram, kā rīkojās, lai atrisinātu kvadrātvienādojumu, kas nav pamatformā, izsaka idejas, vai un ar kādu mērķi var izmantot darbības ar algebriskām daļām, jau izprasto par daļveida vienādojumu atrisināšanu. Skolotāja vadīti izskata visus piedāvājumus, veido korektus un pamatotus spriedumus, ievēro definīcijas kopu.

Lasa un analizē datus daļveida vienādojumu risinājumus, skaidro izmantotos vienādojumu ekvivalentos pārveidojumus, papildina vai precizē, ja nepieciešams, doto risinājumu.

Apvienojas lielākās grupās, lai atrisinātu 2 vai 3 daļveida vienādojumus un formulētu plānu daļveida vienādojumu atrisināšanai; apspriežas, ar ko sāks – vienādojumu risināšanu vai plāna formulēšanu, sadala pienākumus. Pēc tam klasē apspriež vienādojumu risinājumus un izveidotos plānus; ja nepieciešams, skolotājs precizē, labo, iesaka.

Vingrinās daļveida vienādojumu risināšanā; pirms katras piemēra risināšanas pārī kopīgi plāno kādas darbības un kādā secībā veicamas, bet pēc vienādojuma atrisināšanas pārī salīdzina rezultātus, savstarpēji skaidro savu risinājumu, veiktos pārveidojumus; ja nepieciešams savstarpēji konsultējas arī risināšanas laikā.

Sadarbojas, apspriež un analizē datus daļveida vienādojumu risinājumus, kuros lietoti vienādojumu risināšanas vispārīgie paņēmiens: substitūcija, grafiskais paņēmiens, sadalīšana reizinātājos. Pēc apspriešanas skolēni individuāli stāsta par to, ko saprata, ko nesaprata, kura paņēmiena lietojums un kādās situācijās ir saprotams, kura – ne tik skaidrs.

Grupa saņem 2 vai 3 vienādojumus, kopīgi plāno to atrisināšanu – vienojas par darbību secību, iespējamiem klūdu cēloņiem un par to, kā tos novērst, izvēlas paņēmienu u. tml., pēc kopīgās plānošanas un apspriešanas skolēni strādā individuāli, risina dotos vienādojumus.

Lasa 3 vai 4 situāciju (teksta) uzdevumus un veido algebriskas izteiksmes, vienādojumus (iegūtos vienādojumus nerisina); skolēni veic pašnovērtējumu par savām prasmēm. Skolēni kopīgi pārrunā kādus paņēmienus katrs izmanto teksta lasīšanai un pārveidei no vārdiskā uz simbolisko attēlojumu.

Lieto daļveida vienādojumus, piemēram, risinot uzdevumus par kustību, par plānoto un faktiski esošo, par darbu vai procentu uzdevumus, izvērtē daļveida vienādojuma saknes saistībā ar uzdevuma kontekstu. Skolēni strādā individuāli, ik pa laikam tiek organizētas "kopsapulces", kurās satiekas tie skolēni, kuriem nepieciešama palīdzība jebkurā no risinājuma fāzēm, lai skolotāja vadībā katrs koncretizētu – ko tieši es nesaprotru un kopīgi meklētu atbildes uz šiem jautājumiem.

Sadarbojas, apspriež un analizē dotu divu vienādojumu sistēmu, kur viens ir daļveida vienādojums un otrs lineārs vienādojums; plāno risināšanas solus, spriež par racionālāko sistēmas atrisināšanas paņēmienu. Atrisina 2 vai 3 vienādojumu sistēmas.

Veido dotas situācijas vai biznesa plāna (sava vai skolotāja dota) matemātisko modeļi; ievērojot plānotās izmaksas, ieņēmumus un plānoto peļņu, aprēķina vēlamo jeb "ideālo" produkta cenu, kas nosegs izmaksas un dos vēlamo peļņu, formulē secinājumus, argumentē ekonomiski pamatotus lēmumus, piemēram, par optimālo ražošanas apjomu. Savstarpēji apspriež, izvērtē izveidotos matemātiskos modeļus.

Daļveida nevienādības

Skaidro, ko nozīmē atrisināt nevienādību; pastāsta, ko atceras par lineāru, kvadrātnevienādību risināšanu, izmanto digitālos rīkus, lai ilustrētu stāstījumu.

Dotas daļveida nevienādības (skaitītājs pozitīvs vai negatīvs skaitlis), piemēram, $\frac{-4}{x-3} > 0$ mēģina izlasīt dažādi, t. sk. "dalījums ir pozitīvs", daļu pierakstīt kā dalījumu $-4:(x-3) > 0$. Formulē un pamato, ko var pateikt par nezināmo lielumu $x-3$. Stāsta, ko nozīmē atrisināt nevienādību $\frac{-4}{x-3} > 0$, kā veidot atrisinājuma pierakstu. Vingrinās līdzīgu nevienādību risināšanā, izmanto spriešanu, stāsta, kā veido atrisinājuma pierakstu.

Apspriežas pārī, izmanto spriešanu, lai atrisinātu daļveida nevienādības, kuru skaitītājs vai saucējs ir pozitīvs vai negatīvs lielums, piemēram, $\frac{-2x^2-1}{x-3} < 0$. Pārī vai mazā grupā apspriežas un formulē idejas vienkāršas daļveida nevienādības, piemēram, $\frac{x-4}{6-3x} > 0$, atrisināšanai un risinājuma pierakstīšanai, lietojot iepriekš apgūto par pozitīvu/negatīvu skaitļu dalīšanu, lineāru nevienādību sistēmām, to atrisinājumu. Apspriež piedāvātos risinājumus, nosaka iespējamos kļūdu rašanās cēloņus, piemēram, skaidro, pamato kopu šķēluma un apvienojuma lietojumu daļveida nevienādības atrisinājuma un pieraksta veidošanā.

Dotas daļveida nevienādības formā $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ ($>$, \geq , \leq) vingrinās lasīt, lietojot izteikumus "daļa/dalījums ir negatīvs/pozitīvs/ nenegatīvs/nepozitīvs"; skaidro, kā tas var palīdzēt saprast nevienādību atrisināšanu.

Vingrinās daļveida nevienādību $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ ($>$, \geq , \leq) risināšanā, pārejot uz nevienādību sistēmām, skaidrojot risinājumu, spriedumus un pieraksta veidošanu, t. sk. darbību ar kopām lietojumu.

Atrisina 2 vai 3 daļveida nevienādības, veicot nevienādību ekvivalentos pārveidojumus, līdz iegūst pamatformu $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$.

Grupā apspriežas, pēta, kā daļveida nevienādības, piemēram, $\frac{x-2}{2x-1} < 0$, atrisināšanai var izmantot zināšanas par funkcijām $y = x - 2$ un $y = 2x - 1$, to grafikiem; izmanto digitālos rīkus funkciju grafiku attēlošanai un/vai ideju pārbaudei. Pieņemumu pārbaudei aplūko vēl citus piemērus. Formulē secinājums, iepazīstina ar tiem pārējos, uzklausa citu paveikto, skolotāja vadībā veido kopsavilkumu, precizē un optimizē algoritmu.

Vingrinās lietot grafisko intervālu metodi, lai atrisinātu daļveida nevienādības pamatformā (skaitītājs un saucējs ir pirmās vai otrās pakāpes polinomus), t. sk., lietojot digitālos rīkus; skaidro savu darbību.

Risina situāciju uzdevumus, t.sk. ar citu mācību jomu kontekstu, sastādot un atrisinot daļveida nevienādības.

Mācību līdzekļi

Mācību materiāli

Skola2030 mācību līdzeklis

DZM atbalsta materiāli. [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejami: <https://www.siic.lu.lv/datadir/matematika/registretieskolotaji/165.pdf>

https://www.siic.lu.lv/mat/IT/M_10/default.aspx@tabid=17.html

https://www.siic.lu.lv/mat/IT/M_10/default.aspx@tabid=17&id=594.html (Algebriskas izteiksmes un vienādojumi)

Mācību resursi

Dators, ekrāns, projektors, interneta pieslēgums.

Metodiskais komentārs

Ieteikums laika plānojumam	Sadalai "Daļveida vienādojumi" plānotas 22 m. s., sadaļai "Daļveida nevienādības" – 10 m. s. Summatīvajam pārbaudes darbam plānotas 2 m. s. Skolotājs, ievērojot savu pieredzi vai skolēnu vajadzības, laika plānojumu temata ietvaros koriģē pēc saviem ieskatiem.
Matemātikas valoda	Šajā programmā ar jēdzienu "daļveida vienādojums" saprotam "racionālu daļveida algebrisku vienādojumu", kas tiek minēts daudzos literatūras avotos.
Jaunu zināšanu konstruēšana	Svarīgi, ka skolēniem ir iespēja lietot jau apgūto par proporciju un algebrisko daļu pārveidošanu un piedāvāt dažādus paņēmienus daļveida vienādojuma atrisināšanai pirms vispārīgā algoritma formulēšanas, piemēram, meklējot risinājumu vienādojumam $\frac{60}{x} = \frac{40}{x-2}$ (sk. temata norisi). Svarīgi, ka veidojas ieradums noteikt definīcijas kopu. Mācoties risināt daļveida nevienādības, algoritma būtiskākais solis ir atbilstošo funkciju grafiku uzskicēšana un funkciju īpašību izmantošana nevienādību atrisinājuma noteikšanā. Skolēni pie idejas, kā rīkoties, var nonākt paši, ir iespēja lietot jau zināmo par funkcijām, to īpašībām.
Par apgūto prasmju lietojumu	Vingrinās lietot apgūtās prasmes, risinot situāciju uzdevumus ar citu jomu saturu, piemēram, par kustību, par noguldījumiem uz procentiem. Iespēju robežās aplūkot arī kādu autentisku problēmu, kuras matemātiskais modelis ir daļveida vienādojums.
Starppiekšmetu saikne	Izstrādājot projektu, svarīgi pārrunāt ar ekonomikas skolotāju priekšzināšanas un prasmes, ekonomikā apgūtos un lietotos jēdzienus. Skolēni var veidot matemātisko modeli dotai problēmai vai autentiskai, kas saistīta vai nu ar konkrētas situācijas risināšanu, vai ar sava uzņēmuma darbību. Viens no piemēriem – projekts "Izgatavo nozīmītes!", kura ievāros jāpieņem pamatoti lēmumi, piemēram, pasūtīt nozīmīšu izgatavošanu vai, iegādāties aparātu tās izgatavošanai, kā organizēt logistiku u. tml. Ieteicams vienoti ar valodas skolotājiem izstrādāt prasības un kritērijus labam valodas lietojumam, apkopojot un prezentējot rezultātus.

Analitiskā ģeometrija I		Varbūtība un statistika I		Algebra I		Trigonometrija I		Algebra I		Ģeometrija I	
1. Vektori un kustība	2. Līnijas vienādo- jums	3. Kombi- natorika un varbūtība	4. Statistika	5. Daļveida funkcija, algebriskās daļas	6. Daļveida vienādo- jumi un nevienā- dības	7. Sinusa un kosinusa funkcijas	8. Trigono- metriskās izteiksmes un vienā- dojumi	9. Pakāpe ar racionālu kāpinātāju, ģeomet- riskā pro- gresija	10. Eksponent- funkcija	11. Taisnes un plak- nes telpā, daudz- skaldņi	12. Rotācijas ķermenī, telpisku ķermenē kombinā- cijas

Trigonometrija I

7. Sinusa un kosinusa funkcijas

Ieteicamais laiks temata apguvei: 29 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: paplašina un padzilina izpratni par funkcijas jēdzienu, apgūst un lieto sinusa un kosinusa funkciju īpašības t. sk. fizikālu parādību un lielumu raksturošanai.

Sasniedzamie rezultāti

Zīņas	Prasmes
<ul style="list-style-type: none"> Daži procesi dabā, tehnoloģijās, sabiedrībā u. tml. ir periodiski – to raksturīgo lielumu vērtības atkārtojas pēc noteiktas likumsakarības. Dažu periodisku procesu raksturošanai izmanto sinusa un kosinusa funkcijas. (M.Li.4.) Ja funkcija ir periodiska, var noteikt tādu mazāko skaitli T (periodu), ka visiem x no definīcijas kopas izpildās vienādība $f(x+T)=f(x)$ jeb vārdiski – izmainot funkcijas argumentu par periodu, funkcijas vērtība nemainās. (M.Li.4.) Divi sakrītoši stari veido leņķi, kura lielums ir skaitlis nulle. Ja viens stars paliek nekustīgs, bet otrs tiek pagriezts vienā (lielums pozitīvs) vai otrā (lielums negatīvs) virzienā, veidojas pagrieziena leņķis. Kustīgais stars pēc pilna apgrieziena var turpināt rotācijas kustību, tāpēc tā lielums var būt jebkurš reāls skaitlis. Pagrieziena leņķu attēlošanai izmanto vienības riņķi. (M.Li.1.; M.Li.2.) Pagrieziena leņķi raksturo kustīgā stara OP punkts $P(x; y)$ uz vienības riņķa. Pagrieziena leņķa sinuss ir punkta P ordināta y, bet kosinuss ir punkta P abscisa x. Ja α pagrieziena leņķis, tad $P(\cos\alpha; \sin\alpha)$. (M.Li.2.; M.Li.3.) Vienības riņķa līnijas vienādojums ir $\sin^2x + \cos^2x = 1$ (sauc arī par trigonometrisko pamatidentitāti). (M.Li.1.; M.Li.4.) Sinusu teorēma un kosinusu teorēma apraksta sakarības starp trijstūra malu garumiem un leņķu lielumiem; kosinusu teorēma ir Pitagora teorēmas vispārinājums. (M.Li.6.) Pagrieziena leņķi izsaka radiānos. Pārejai no vienas leņķa mērvienības uz otru izmanto sakarību $180^\circ = \pi$ (saka "180 grādi ir vienādi ar π radiāniem"). (M.Li.1.; M.Li.4.) Funkciju $y = \sin x$ un $y = \cos x$ arguments ir leņķa lielums (radiānos), definīcijas kopa ir intervāls $(-\infty; +\infty)$, bet funkcijas vērtību kopa ir intervāls $[-1; 1]$. (M.Li.4.) Pāra funkcijas grafiks ir simetrisks y asij ($y = \cos x$ ir pāra funkcija), nepāra funkcijas grafiks ir simetrisks koordinātu sākumpunktam ($y = \sin x$ ir nepāra funkcija). (M.Li.4.) Saliktas funkcijas arguments ir kāda cita funkcija, piemēram, $f(x) = \sin 2x$ ir salikta funkcija, kur $u(x) = 2x$ ir iekšējā funkcija un $f(u) = \sin u$ ir ārējā funkcija. (M.Li.4.) Funkciju $y = a \cdot \sin(bx + c) + d$ un $y = a \cdot \cos(bx + c) + d$ grafiks ir sinusoīda; koeficientu a, b, c un d vērtības katrā konkrētajā gadījumā nosaka funkcijas īpašības un grafika novietojumu koordinātu plaknē. (M.Li.2.; M.Li.4.) 	<ul style="list-style-type: none"> Nosaka pagrieziena leņķa kvadrantu un attēlo pagrieziena leņķi vienības riņķi atbilstoši nosacījumiem. Pāriet no grādiem uz radiāniem un otrādi. Nosaka pagrieziena leņķa sinusu un kosinusu vienības riņķī, no funkciju $y = \sin x$ un $y = \cos x$ grafika, kā arī lietojot digitālos rīkus. Attēlo vienības riņķī pagrieziena leņķus, ja zināmas to sinusa vai kosinusa vērtība. Salīdzina pagrieziena leņķa sinusus vai kosinusus, izmantojot vienības riņķi, funkciju grafikus. Lieto sinusu un kosinusu teorēmu, lai aprēķinātu trijstūra nezināmos lielumus matemātiskos, praktiskos un citu jomu kontekstos. Uzskicē funkciju $y = \sin x$ un $y = \cos x$ grafiku, ievērojot sinusoīdas formu, simetrijas veidu, vērtību kopu, periodu un funkcijas nulles (vienādas zīmes intervālus). Konstruē, tai skaitā ar digitāliem rīkiem, funkciju $y = a \cdot \sin(bx + c) + d$ un $y = a \cdot \cos(bx + c) + d$ grafikus un nosaka to īpašības (definīcijas kopa, vērtību kopa, funkcijas nulles, vienādas zīmes intervāli, pāra/nepāra funkcija, lielākā/mazākā vērtība, periods), izmantojot grafiku.

Komplekss sasniedzamais rezultāts	Ieradumi
<ul style="list-style-type: none"> Skaidro izteiksmju, kas satur pagrieziena leņķa pierakstu grādos un radiānos, sinusus, kosinusus, to skaitiskās vērtības aprēķināšanu un salīdzināšanu, izmantojot vienības riņķi, funkciju īpašības un grafikus; formulē un pamato spriedumus. (M.O.3.1.1.; M.O.3.1.2.; M.O.3.2.2.; M.O.3.2.3.; M.O.2.3.1.; M.O.4.4.6.) Veido sinusu un kosinusu teorēmas pierādījumu patstāvīgi vai izmanto dotu pierādījuma plānu. (M.O.2.3.1.; M.O.6.1.1.; M.O.4.4.8.) Skaidro, ilustrē ar piemēriem, kas ir salikta funkcija, lietojot jēdzienus ārējā funkcija, iekšējā funkcija; pēta, t. sk., izmantojot digitālos rīkus, raksturo funkciju $y = \sin(x+a)$, $y = a + \sin x$, $y = k \cdot \sin x$, $y = \sin(kx)$, $y = \cos(x+a)$, $y = a + \cos x$, $y = k \cdot \cos x$, $y = \cos(kx)$ īpašības un grafiku, salīdzinot ar funkciju $y = \sin x$, $y = \cos x$ īpašībām un grafiku. (M.O.2.1.2.; M.O.4.2.3.; M.O.4.2.4.; M.O.6.1.2.) Izmantojot dotas lietotnes, pēta un matemātiski raksturo fizikālus lielumus, kas raksturo skaņu, mehāniskās svārstības u. tml., ja sakārību starp tiem raksturo funkcija $y = a \cdot \sin(bx+c)$ vai $y = a \cdot \cos(bx+c)$. (M.O.3.3.2.; M.O.4.2.6.) Zīmē jaunas periodiskas funkcijas (piemēram, $y = \operatorname{tg} x$) grafiku, izmantojot digitālos rīkus, formulē secinājumus par funkcijas īpašībām. (M.O.4.2.7.) <p>Jēdzieni: vienības riņķa līnija, pagrieziena leņķis, periods, radiāns, ierobežota funkcija, salikta funkcija, iekšējā funkcija, ārējā funkcija, pāra funkcija, nepāra funkcija.</p>	<ul style="list-style-type: none"> Jēdzienus, pieņemtos apzīmējumus un simbolus cenšas lietot precīzi, apzinoties, ka neprecizitātes var būt pamats aplamiem secinājumiem. Noskaidro jauno/vispārināto jēdzienu saistību ar jau pazīstamiem ģeometrijas jēdzieniem, attīstot ieradumu iegūto informāciju saistīt ar jau zināmo, lai konstruētu jaunas zināšanas. Levērojot situāciju un mērķi, grafika attēlošanai pamatoti izvēlas lietot digitālos rīkus vai skicēt/zīmēt ar roku, attīstot ieradumu plānot un vadīt savu domāšanas procesu, meklēt dažādus risinājumus.

Temata apguves norise

Periodiski procesi	<p>Saskata, raksturo periodiskumu savā ikdienas darbībā. Izsaka idejas, kā periodiskumu varētu raksturot matemātiski, vizualizēt.</p> <p>Izmantojot doto procesa (planētu kustība; Saules aktivitāte; elektromagnētisko vilņu svārstības u. tml.) aprakstu (grafiks, tabula, vārdisks apraksts, formula), procesu raksturojošo lielumu vērtības, nosaka, vai process ir periodisks, spriež par periodu.</p> <p>Sadarbojas grupās, lai: 1) apspriestos, atrastu nepieciešamo informāciju un izvēlētos 2 vai 3 periodiskus procesus (piemēram, sirds darbība, skaņas vilņu kustība, maijvaboļu populācijas attīstība), ko turpmāk vajadzēs matemātiski aprakstīt; 2) aprakstoši, skaitliski vai grafiski raksturo mainīgos lielumus un periodu. Iepazīstina citas grupas ar savu darbu, uzsklauša citu paveikto un reflektē par dzirdēto – ko saprata, ko nesaprata, jautā par neskaidro u. tml.</p> <p>Sadarbojas, izmanto datus vai atrod datus tīmeklī un grafiski, t. sk. ar digitāliem rīkiem, attēlo lielumus, kas mainās ar noteiktu periodu (dienas garums; atlikumi, kas rodas, dalot naturālu skaitli ar 4; luksofora gaismas signālu ilgums u. tml.), izvēloties lielumus uz asīm un piemērotas vienības; spriež par to, vai ir korekti grafika atsevišķos punktus savienot ar nepārtrauktu līniju.</p> <p>Spriež par iespējām ar formulu aprakstīt dienas garumu atkarībā no dienas (datuma); secina, ka jau zināmās funkcijas izmantot nevar. Pēc skolotāja norādēm, izmantojot digitālos rīkus uzzīmē funkcijas $y = \sin x$ grafiku; saskata, ka grafika forma ir līdzīga dažiem iepriekšējās stundās izveidotajiem reālo periodisko procesu grafikiem. Formulē mācīšanās mērķi tuvākajām matemātikas stundām – saprast, kā veidojas un kā uzzīmēt funkcijas $y = \sin x$ grafiku, vai un kāda saistība šai funkcijai ar sakārībām taisnlenķa trijstūri.</p>
--------------------	---

Pagrieziena leņķa sinuss un kosinuss	<p>Apspriežas pārī un pastāsta, kā ar modeļiem vai vizualizējot var attēlot leņķa lieluma maiņu. Dalās ar idejām, secina, ka viena no iespējām – vienas leņķa malas jeb kustīgā stara pagrieziens attiecībā pret otru leņķa malu jeb nekustīgo staru. Apdomā savu pieredzi, ilustrē ar konkrētiem piemēriem leņķu, kas pārsniedz 360°, lietojumu dažādās dzīves jomās, piemēram, lai raksturotu daiļslidotāju izpildītos lēcienus ar dažādu apgriezienu skaitu; izsaka idejas par iespējām attēlot leņķi, kas pārsniedz 360°.</p> <p>Lasa vienības riņķa aprakstu un pagrieziena leņķa definīciju; formulē jautājumus par neskaidro. Vingrinās lietot vienības riņķi – attēlo pagrieziena leņķi; nosaka pagrieziena leņķa kvadrantu; nosaka/uzraksta vairākus leņķus, ja dots atbilstošais kustīgais stars; nosaka dotam kustīgajam staram atbilstošu negatīvu pagrieziena leņķi; nosaka pagrieziena leņķi, ievērojot divus datus nosacījumus par kvadrantu/skaitliskās vērtības intervālu un virzienu u. tml.</p> <p>Pārī apspriežas un nosaka šaura pagrieziena leņķa sinusu un kosinusu, izmantojot pamatskolas zināšanas un vienības riņķa rādiusa skaitlisko vērtību. Nosaka brīvi izvēlēta plata leņķa sinusu un kosinusu, kā arī atrod platā leņķa lielumu, ja ir dota tā sinusa vai kosinusa vērtība, izmantojot no milimetra papīra izgatavoto vienības riņķi vai digitālos rīkus; skaidro savu darbību. Formulē vispārinājumus – pagrieziena leņķa sinusa un kosinusa definīcijas, sakarību $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.</p> <p>Vingrinās vienības riņķi lietot pagrieziena leņķa sinusu, kosinusu definīcijas: noteikt aptuveno vai precīzo to skaitlisko vērtību vienības riņķi attēlotiem leņķiem; attēlot pagrieziena leņķus pēc dotas sinusa, kosinusa skaitliskās vērtības; salīdzināt viena un tā paša leņķa sinusu un kosinusu; salīdzināt divu dažādu leņķu sinusus vai kosinusus, sakārto augošā/dilstošā secībā datus skaitļus u. tml.</p>
Sinusu teorēma un kosinusu teorēma	<p>Sadarbojas, pēta un formulē secinājumus par iespējām izmantot vienības riņķi un dažu šauro leņķu ($30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$) precīzās sinusa un kosinusa vērtības, lai noteiktu dažu plato leņķu precīzās sinusa, kosinusa vērtības – pastāsta un pamato, kā rīkoties, lietojot matemātikas valodu. Formulē savu stratēģiju – atcerēties vai iegūs, izmantojot vienības riņķi, ja uzdevuma ietvaros būs nepieciešamas sinusu, kosinusu precīzās vērtības, t. sk. platiem leņķiem. Sadarbojas pārī, lai pārbaudītu izvēlēto stratēģiju.</p> <p>Individuāli risina uzdevumu, kura atrisinājums ietver spriedumus, kas ļauj pamatot sinusu teorēmu, piemēram, trijstūri ABC jānosaka malas BC garums, ja malas AB garums ir 6 cm, leņķis A ir 45°, bet leņķis C ir 30° liels. Sadarbojas pārī, un salīdzina, precīzē risinājumus.</p> <p>Sadarbojas grupā un pierāda sinusu teorēmu, veido logiski saistītu strukturētu pierādījuma pierakstu, iepazīstina ar to citus un uzklausa citu grupu veidotos pierādījumus.</p> <p>Vingrinās lietot sinusu teorēmu.</p> <p>Izmanto prasmi lietot sinusu teorēmu un dotu tekstu, piemēram, <i>Ilustrētā pasaules vēsture</i>, 2018 (124), (60.–67. lpp.), lai noteiktu nezināmo attālumu dabā, raksturotu aprēķinu precīzitāti, izmantojot lietotni (piemēram, <i>Google Earth</i>).</p> <p>Izmanto jau esošās zināšanas un prasmes, lai noteiktu trijstūra garākās malas garumu, ja dots trijstūra platais leņķis ($120^\circ, 135^\circ$ vai 150°) un tā piemalu garumi.</p> <p>Sadarbojas grupā un veido kosinusu teorēmas pierādījumu, izmantojot dotu pierādījuma plānu (soļus) un savietojot tos pareizā secībā, veido un prezentē saistītu un logisku pierādījuma tekstu, uzklausa un izvērtē citu grupu veidotos pierādījumus.</p> <p>Vingrinās lietot kosinusu teorēmu.</p> <p>Situācijās gan ar matemātisku, gan ar praktisku kontekstu lieto sinusu vai kosinusu teorēmu, lai aprēķinātu nezināmos lielumus trijstūri. Izvērtē, vai ir iegūtas visas dotajiem nosacījumiem atbilstošas vērtības. Pārliecinās, ka trijstūris, kas atbilst noteiktajiem lielumiem, eksistē.</p>

Trigonometriskās funkcijas, to īpašības

Nosauc piemērus – lielumus, kuru raksturošanai tiek izmantotas dažādas skalas vai mērvienības (piemēram, Celsija, Kelvina un Fārenheita skala temperatūras mērišanai, kalorijas un džouli enerģijas daudzuma mērišanai); meklē informāciju par matemātiskām sakarībām, kas ļauj pāriet no vienas mērvienības (skalas) uz citu, un par iemesliem, kāpēc cilvēki veido un lieto dažādas mērvienības viena un tā paša lieluma raksturošanai.

Izvērtē savas zināšanas par kalkulatora tastatūru. Ar kalkulatoru mācās noteikt sinusa un kosinusa vērtības dažādiem leņķiem, ja leņķi tiek mēriti grādos. Atrod informāciju, lasa matemātisku tekstu par dažādiem leņķa lieluma mēriem (grādi, radiāni un gradiāni); tad grupās apspriež iegūto informāciju, izvērtē ko nesaprata, meklē papildus informāciju u. tml.

Lasa informatīvu materiālu, piemēram, [6], par radiānu, apspriež izlasito – ko saprata, ko nesaprata, kāda ir galvenā atziņa u. tml., uzklausa citu domas, veido iegūtās informācijas strukturētu apkopojumu.

Zīmē/skicē 1 radiānu lielu leņķi un spriežot novērtē tā aptuveno lielumu (mazāk nekā 60°). Vingrinās pareizi lasīt un pierakstīt leņķu mēru radiānos; pāriet no leņķa mēra grādos uz radiāniem un otrādi. Ar kalkulatoru nosaka sinusa un kosinusa vērtības dažādiem leņķiem, ja leņķi tiek mēriti radiānos.

Izmanto vienības rīnķi, spriež un zīmē funkcijas $y = \sin x$ vai $y = \cos x$ grafiku vismaz divu periodu ietvaros, nosakot funkcijas vērtības atsevišķiem grafika punktiem, lai izveidotu iespējamī precīzāku grafiku. Veic pašnovērtējumu, izmantojot digitālos rīkus, piemēram, [1], un, ja nepieciešams, precīzē uzzīmēto grafiku, labo kļūdas. Turpmāk pār strādā skolēni, kas uzzīmēja dažādu funkciju grafikus, lai salīdzinātu un formulētu tajos kopīgās un atšķirīgās īpašības, saskaņātās sakarības. Dalās ar cītiem pāriem par secināto, papildina secinājumus. Ja skolēni paši neizmanto jau zināmo par simetriju un paralēlo pārnesi, skolotājs aicina izmantot šos jēdzienus funkciju un to grafiku īpašību raksturošanai. Iepazīst jēdzienus pāra funkcija, nepāra funkcija.

Vingrinās nolasīt informāciju no funkciju $y = \sin x$ vai $y = \cos x$ grafikiem, t. sk. digitāli izveidotiem, izmantojot jau zināmo par funkciju īpašībām kopumā, piemēram, nosaka funkcijas vērtību dotajam argumentam un otrādi – atrod dotajai funkcijas vērtībai atbilstošos argumentus (grādos vai radiānos) noteiktā intervālā, definīcijas kopu un vērtību kopu, intervālus, kuros funkcija ir augoša/dilstoša, funkcijas nulles, intervālus, kuros funkcijas vērtība pozitīva/negatīva; veido pierakstu, korekti lietojot simbolus un pieņemtos apzīmējumus, lieto gan grādus, gan radiānus.

Sadarbojas, izsaka idejas, kā pierakstīt visas funkcijas nulles. Ja nepieciešams, skolotājs aicina izmantot jau zināmo par virknī, tās formulas pierakstu.

Vingrinās ar simboliem pierakstītas bezgalīgi daudz leņķu vērtības izlasīt, un otrādi – pierakstīt atbilstoši vārdiskam aprakstam vai attēlojumam grafikā.

Sadarbojas, un pēta, t. sk., izmantojot digitālos rīkus, funkciju $y = a \cdot \sin x$, $y = a \cdot \cos x$, tad $y = a \cdot \sin x + b$, $y = a \cdot \cos x + b$ īpašības un novietojumu koordinātu plaknē, saistot ar funkciju $y = \sin x$, $y = \cos x$ īpašībām un novietojumu.

Grupā apspriežas un formulē pieņēmumus par dotu, t. sk. jaunu/nepazīstamu funkciju grafiku (līkņu) veidu un/vai novietojumu koordinātu plaknē, piemēram, $y = 2x + 1$, $y = \frac{1}{2x + 1}$ un $y = \sin(2x + 1)$; $y = \sin(x^2)$, $y = (\sin x)^2$ un $y = \frac{1}{(\sin x)^2}$; izmanto digitālos rīkus, lai pārbaudītu pieņēmumus.

Lasa saliktas funkcijas definīciju un to izmanto, lai dotos funkciju, t. sk. sinusa un kosinusa funkciju piemēros noteiktu iekšējo un ārējo funkciju. Veido saliktu funkciju formulu pierakstu, ievērojot dotos nosacījumus, piemēram, ārēja funkcija ir kosinusa funkcija, iekšējā funkcija ir lineāra funkcija.

Sadarbojas, un pēta, t. sk., izmantojot digitālos rīkus, funkciju $y = \sin(x + a)$ un $y = \cos(x + a)$, $y = \sin(k \cdot x)$ un $y = \cos(k \cdot x)$ īpašības un novietojumu koordinātu plaknē, saistot ar funkciju $y = \sin x$, $y = \cos x$ īpašībām un novietojumu.

Pēta fizikālos lielumus, kas raksturo skaņu, izmantojot skolotāja piedāvātu digitālo rīku (sk. [5]) – formulē secinājumus par koeficientu nozīmi formulas pierakstā.

Trigonometriskās funkcijas, to īpašības	<p>Analizē reālu periodisku procesu (piemēram, atsperē iekārta atsvara svārstības), kuru apraksta trigonometriskā funkcija, lietojot tiešsaistes rīkus. [7]</p> <p>Veido pārskatu par sinusa un kosinusa funkciju grafiku novietojum koordinātu plaknē, atkarībā no koeficientiem funkcijas pierakstā.</p> <p>Izmantojot pamatskolā veidoto stratēģiju nezināmas funkcijas grafika konstruēšanai, izveido savu stratēģiju trigonometriskas funkcijas grafika konstruēšanai visā tās definīcijas apgabalā; lieto šo stratēģiju, lai konstruētu nezināmas trigonometriskās funkcijas grafiku, piemēram, $y = \operatorname{tg}x$; pārbauda rezultātu, izmantojot digitālos rīkus.</p>
--	--

Mācību līdzekļi

Mācību materiāli

Skola2030 mācību līdzeklis

[1] [Geogebra.org](https://www.geogebra.org/m/zctE8msW#material/DHPyZp8G). [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://www.geogebra.org/m/zctE8msW#material/DHPyZp8G> (Pagrieziena leņķa sinuss; vienības riņķa līnija un grafiks; radiāni)

[2] [Geogebra.org](https://www.geogebra.org/m/zctE8msW#material/d6hGsXdT). [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://www.geogebra.org/m/zctE8msW#material/d6hGsXdT> (Pagrieziena leņķa kosinuss; vienības riņķa līnija un grafiks; grādi)

[3] [Geogebra.org](https://www.geogebra.org/m/BJCaZ5tm). [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://www.geogebra.org/m/BJCaZ5tm> (Funkciju $y = a \cdot \sin(bx + c) + d$ un $y = a \cdot \cos(bx + c) + d$ grafiki atkarībā no koeficientiem)

[4] [Geogebra.org](https://www.geogebra.org/m/dQNWCH7S). [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://www.geogebra.org/m/dQNWCH7S> (Kosinusa funkcijas lietojums: panorāmas rata modelis ar uzdevumiem)

[5] [Geogebra.org](https://www.geogebra.org/m/tycxbu5U). [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://www.geogebra.org/m/tycxbu5U> (Skaņas viļņu pētīšana)

[6] [Geogebra.org](https://mathwithbaddrawings.com/2013/05/02/degrees-vs-radians/). [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://mathwithbaddrawings.com/2013/05/02/degrees-vs-radians/> (Grādi un radiāni: kāpēc radiāns ir būtisks?)

[7] [PhET™ Interactive Simulations](https://phet.colorado.edu/sims/html/masses-and-springs-basics/latest/masses-and-springs-basics_en.html). [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: https://phet.colorado.edu/sims/html/masses-and-springs-basics/latest/masses-and-springs-basics_en.html (Atsperē iekārta atsvara svārstības)

Mācību resursi

Dators, ekrāns, projektors, interneta pieslēgums.

Starppiekšmetu saikne

Fizikā sinusa un kosinusa funkcijas tiek lietotas, matemātiski raksturojot spēku mijiedarbību, kā arī vienkāršos mehānismus (svira, trīsis, slīpā plakne), skaņas viļņu svārstības, gaismas laušanu un atstarošanu u.c.

Metodiskais komentārs

Ieteikums laika plānojumam	"Periodiski procesi" – 3 m. s., "Pagrieziena leņķa sinuss un kosinuss" – 4 m. s., "Sinusu un kosinusu teorēma" – 6 m. s., "Trigonometriskās funkcijas, to īpašības" – 14 m. s., summatīvajam pārbaudes darbam plānotas 2 m. s.
Pēctecība un padziļinājums	Padziļina izpratni par jēdzienu "funkcija" – veido izpratni par periodisku funkciju un funkcijas periodu, raksturo salikušu funkciju, lietojot jēdzienus "ārējā funkcija", "iekšējā funkcija". Pagrieziena leņķa sinusu un kosinusu saista ar jau zināmo par šaurā leņķa trigonometriskajām sakārībām taisnleņķa trijstūri.
Grādi un radiāni	Lai skolēns apzinātos nepieciešamību leņķus mērīt ne tikai grādos, bet arī radiānos, ieteikums mācību procesā iekļaut sarunu, kuras plānošanai var izmantot mācību materiālu [6]; vienlaikus tā ir iespēja pilnveidot skolēnu angļu valodas prasmes matemātiskā kontekstā. Svarīgi, ka skolēni nonāk pie atziņas, ka pagrieziena leņķi radiānos izteikt ir ērtāk, jo tas ļauj izmantot sakārības vienības riņķa līnijā.
Pierādišanas prasmes	Skolotājs pieņem lēmumu par skolēniem nepieciešamo atbalstu un pieeju sinusu un kosinusa teorēmas pierādišanā, piemēram, ja skolēni kopumā nav gatavi patstāvīgi veidot pierādījumu, tad var dot uzdevumu izpētīt, izlasīt un komentēt sinusu (kosinusu) teorēmas pierādījumu, demonstrējot izpratni par tajā iekļautajiem jēdzieniem, pieņemto simbolu, apzīmējumu un matemātikai raksturīgo izteikumu formu lietojumu; cita iespēja – sakārtot dotā sinusu (kosinusa) teorēmas pierādījuma etapus logiskā secibā, ja nepieciešams, papildinot pierādījumu ar saviem spriedumiem. Vairumam skolēnu pieejami kosinusa teorēmas pierādījumi ietver sakārības $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ izmantošanu, tāpēc, definējot pagrieziena leņķa sinusu un kosinusu, skolēni spriežot (izmantojot jau zināmo par riņķa līnijas vienādojumu) paši "atklāj" arī šo sakārību.
Trigonometriskās funkcijas pieraksts vispārīgā veidā	Ja funkcija ir pierakstīta formā $y = a \cdot \sin(b(x+c))$, tad pastāv tieša saistība starp tās koeficientiem un grafika transformācijām, lietojot pierakstu $y = a \cdot \sin(bx+c)$ jāņem vērā, ka funkcijas nulles nobīdās pa x asi par $-\frac{c}{b}$ vienībām.

Analitiskā ģeometrija I		Varbūtība un statistika I		Algebra I		Trigonometrija I		Algebra I		Geometrija I	
1. Vektori un kustība	2. Līnijas vienādo- jums	3. Kombi- natorika un varbūtība	4. Statistika	5. Daļveida funkcija, algebriskās daļas	6. Daļveida vienādo- jumi un nevienā- dības	7. Sinusa un kosinusa funkcijas	8. Trigono- metriskās izteiksmes un vienā- dojumi	9. Pakāpe ar racionālu kāpinātāju, ģeomet- riskā pro- gresija	10. Eksponent- funkcija	11. Taisnes un plak- nes telpā, daudz- skaldņi	12. Rotācijas ķermenī, telpisku ķermenē kombinā- cijas

Trigonometrija I

8. Trigonometriskās izteiksmes un vienādojumi

Ieteicamais laiks temata apguvei: 24 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: padziļināt izpratni par matemātisku izteiksmju identiskiem pārveidojumiem, pilnveidot prasmes analizēt un formulēt matemātiskas sakārības, atrisināt vienādojumus.

Sasniedzamie rezultāti

Zīņas	Prasmes
<ul style="list-style-type: none"> Sakarības $\sin(-x) = -\sin x$ un $\cos(-x) = \cos x$ var pamatot, izmantojot vienības riņķi vai funkciju $y = \sin x$ un $y = \cos x$ grafiku īpašības. (M.Li.2.; M.Li.4.) Ja divi leņķi atšķiras par $\frac{\pi}{2} \cdot n$ ($n \in \mathbb{Z}$), tad starp to sinusiem vai kosinusiem ir sakarība, piemēram, $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x$. Sakarības var pamatot dažādi (funkciju īpašības, vienības riņķis, argumentu summas formulas). (M.Li.2.; M.Li.4.) Sinusa argumentu summas formulu $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$ var pierādīt, izmantojot plaknes figūru īpašības. Svarīgi ievērot, ka $\sin(\alpha + \beta) \neq \sin\alpha + \sin\beta$. Divkārša argumenta formulas iegūst no argumentu summas formulām. (M.Li.2.; M.Li.4.) Veicot algebriskos pārveidojumus ar viena argumenta sinusiem (kosinusiem), arguments nemainās, piemēram, $\sin 3x + 4\sin 3x = 5\sin 3x$. (M.Li.2.; M.Li.4.) Vienkāršojot trigonometrisku izteiksmi, tiek izmantotas gan trigonometriskās sakarības (argumenti var mainīties), gan algebriskie pārveidojumi (argumenti nemainās). (M.Li.4.) Funkcijas $y = \sin x$ īpašības vai grafiku izmanto, lai pamatotu, ka vienādojumam $\sin x = a$ var būt bezgalīgi daudz atrisinājumu; noteiktā intervālā trigonometriska vienādojuma atrisinājumu skaits ir galīgs un tos var noteikt, izmantojot atbilstošas funkcijas grafiku, funkcijas īpašības vai vienības riņķa līniju. (M.Li.1.; M.Li.2.; M.Li.4.) Trigonometrisko vienādojumu risināšanā lieto arī vispārigos vienādojumu risināšanas paņēmienus: substitūcija, sadalīšana reizinātājos, grafiskais paņēmiens. (M.Li.2.; M.Li.4.) 	<ul style="list-style-type: none"> Aprēķina trigonometriskas izteiksmes skaitlisko vērtību, nosakot pagrieziena leņķu sinusa un kosinusa vērtības, t. sk., izmantojot vienības riņķi un digitālos rīkus, lietojot sakarības starp vienādu un dažādu argumentu sinusiem un kosinusiem (redukcijas formulas), sakarības $\sin(-x) = -\sin x$ un $\cos(-x) = \cos x$. Aprēķina sinusa (kosinusa) skaitlisko vērtību, ja dota kosinusa (sinusa) skaitliskā vērtība, izmantojot vienības riņķi vai sakarību $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Veic algebriskus pārveidojumus ar trigonometriskām izteiksmēm, kas satur vienādu un dažādu argumentu sinusus, kosinusus. Lieto redukcijas formulas, sakarības $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$ un $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, sinusa un kosinusa argumentu summas formulas, divkāršā argumenta formulas, identiski pārveidojot izteiksmes, pierādot identitātes un risinot vienādojumus. Nosaka trigonometriskā vienādojuma $\sin(ax + b) = c$, $\cos(ax + b) = c$ atrisinājumus noteiktā intervālā, lietojot grafiku vai vienības riņķi. Lieto digitālos rīkus, lai noteiktu trigonometriskā vienādojuma atrisinājumu noteiktā intervālā. Atrisina trigonometrisku vienādojumu, lietojot substitūciju. Atrisina trigonometrisku vienādojumu, lietojot sadalīšanu reizinātājos.
Komplekss sasniedzamais rezultāts	Ieradumi
<ul style="list-style-type: none"> Plāno un raksturo veicamās darbības, nosauc lietotās sakarības/formulas, paņēmienus un argumentē to izvēli, lai veiktu trigonometrisko izteiksmju pārveidojumus, atrisinātu trigonometriskos vienādojumus. (M.O.4.4.5.; M.O.4.5.4.; M.O.4.5.5.) Izmanto zināšanas vai lieto pretpiemēru, lai atspēkotu aplamus pieņēmumus, piemēram, par sinusa vai kosinusa vērtību argumentu summai ($\sin(\alpha + \beta) \neq \sin\alpha + \sin\beta$) vai starpībai, divkāršam argumentam. (M.O.2.3.2.; M.O.4.4.8.) Pamato sakarības starp vienādu un dažādu argumentu sinusiem un kosinusiem (redukcijas formulas), lietojot vienības riņķi un divkārša argumenta formulas, izmantojot argumenta summas formulas. (M.O.4.4.7.; M.O.2.3.1.) Analītiski nosaka funkciju $y = a \cdot \sin(bx + c) + d$ un $y = a \cdot \cos(bx + c) + d$ īpašības (definīcijas kopa, vērtību kopa, funkcijas nulles, vienādas zīmes intervāli, lielākā/mazākā vērtība). (M.O.4.2.4.; M.O.4.2.5.) 	<ul style="list-style-type: none"> Jēdzienus, pieņemtos apzīmējumus un simbolus cenšas lietot precīzi, apzinoties, ka neprecizitātes var būt pamats aplamiem secinājumiem. Saista trigonometrika vienādojuma atrisināšanu ar zināšanām par algebriskiem vienādojumiem, attīstot ieradumu iegūto informāciju saistīt ar jau zināmo, lai konstruētu jaunas zināšanas.
Jēdzieni: trigonometriska izteiksme, trigonometrisks vienādojums.	

Temata apguves norise

Trigonometrisko sakārību formulēšana un pamatošana, izmantojot funkcijas īpašības, grafiku	<p>Sadarbojas, lai saskatītu, formulētu un pamatotu pēc iespējas vairāk/dažādas konkrētas un vispārīgas sakārības starp funkcijas $y = \sin x$ vērtībām dažādiem argumentiem, izmantojot jau zināmo par funkcijas īpašībām vai dotu/uzzīmētu funkcijas grafiku, piemēram, $\sin 0 = \sin \pi$, $\sin(-90^\circ) = -\sin(90^\circ)$, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\sin(-x) = -\sin x$ u. tml.</p> <p>Papildina iesāktus vai paši formulē pēc iespējas vairāk/dažādus vārdiskus apgalvojumus par funkcijas īpašībām, par saskatīto grafikā, piemēram, "Positīvi argumenti, kuru sinusa vērtība ir 1, veido aritmētisku progresiju, kuras difference ir 2π", "Funkcijai $y = \sin x$ ir bezgalīgi daudz funkcijas nulles un starpība starp katrām divām blakusesošajām ir π."</p> <p>Vingrinās dotā grafikā parādīt/attēlot argumentus vai funkcijas vērtības, ja tās pierakstītas simboliski, piemēram, $-90^\circ + 90^\circ \cdot n$, $\sin(\pi \cdot n)$; stāsta, kā spriež, kā saprot reizinātāja n lietojumu.</p> <p>Vienā koordinātu plaknē doti funkciju $y = \sin x$ un $y = \cos x$ grafiki. Sadarbojas, lai saskatītu, formulētu un pamatotu pēc iespējas vairāk/dažādas konkrētas un vispārīgas sakārības starp abu funkcijas vērtībām gan vienādiem, gan dažādiem argumentiem, piemēram, "ja leņķa kosinuss ir 0, tad leņķa sinuss ir vai nu 1, vai -1", $\sin x = \cos(90^\circ - x)$; raksturotu saistību starp abu funkciju grafikiem, piemēram, "funkcijas $y = \sin x$ grafiku iegūst, pārnesot funkcijas $y = \cos x$ grafiku par argumenta vērtību $\frac{\pi}{2} - x$ ass virzienā".</p> <p>Vingrinās lasīt un veidot argumentu vai funkcijas vērtību simbolisko pierakstu.</p>
Trigonometriskās sakārības un to lietojums	<p>Lieto vienības riņķi, lai formulētu un/vai pamatotu sakārības starp vienādu un dažādu argumentu sinusiem, kosinusiem, piemēram, $\sin(-x) = -\sin x$, $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin(x + 2\pi n) = \sin x$.</p> <p>Vingrinās aprēķināt trigonometrisku izteiksmju skaitlisko vērtību, izmantojot sakārības starp vienādu un dažādu argumentu sinusiem, kosinusiem, piemēram, $2\sin\frac{5\pi}{2} + \cos(-3\pi)$.</p> <p>Izvēlas sev piemērotāko pieeju – izmanto funkciju grafikus vai vienības riņķi, lai pamatotu sakārību starp vienādu vai dažādu argumentu sinusiem, kosinusiem (sakārība līdz šim nav aplūkota), piemēram, $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.</p> <p>Sadarbojas mazā grupā, aktualizē jau zināmo un veido risinājumu uzdevumam – noteikt 4. kvadranta leņķa α kosinusu, ja $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$. Grupas iepazīstina ar savu risinājumu, uzklausa citu veidotos risinājumus, izsaka viedokli, kurš parādiens noderīgāks kosinusa precīzās vērtības noteikšanai.</p> <p>Vingrinās noteikt pagrieziena leņķa sinusa vai kosinusa vērtību, izmantojot sakārību $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ un vienības riņķi; vārdiski skaidro risinājuma gaitu, lietojot matemātikas valodu.</p> <p>Vingrinās izteiksmju algebriskos un trigonometriskos pārveidojumos, lietojot vai pamatojot sakārības starp vienādu vai dažādu argumentu sinusiem un kosinusiem, piemēram, $4 - 2\sin^2 x - 2\cos^2 x$, $2\cos x + \cos(\pi + x)$.</p> <p>Sadarbojas, pēta, pārbauda un pamato konkrētu piemēru izmantošanas iespējas, lai secinātu par izteiksmes $\sin(\alpha + \beta)$ pārveidošanu. Iepazīstina ar saviem secinājumiem, uzklausa citus, formulē secinājumu – sinuss no summas nav vienāds ar sinusu summu. Izmanto pretpiemēru, un pamato, ka kāda cita vienādība ir aplama, piemēram, $\cos(\alpha - \beta) \neq \cos \alpha - \cos \beta$.</p>

Trigonometrisko vienādojumu atrisināšanas paņēmieni	<p>Izsaka savas domas, ko nozīmē atrisināt vienkāršu trigonometrisku vienādojumu, piemēram, $\sin x = 0,5$, izmantojot jau zināmo par vienādojumu atrisināšanu, izpratni par pagrieziena leņķa sinusu. Apkopo savas un citu nosauktās nezināmā leņķa vērtības, pāri vai mazā grupā apspriež, kā pierakstīt visas saknes; formulē ieteikumu vienādojuma visu sakņu pierakstam. Izvērtē, salīdzina citu grupu izveidotos pierakstus. Ar skolotāja atbalstu vienojas par pierakstu, ko turpmāk lietos trigonometiska vienādojuma sakņu pierakstam.</p> <p>Skaidro, ko nozīmē atrisināt vienādojumu noteiktā intervālā un nosaka sakņu skaitu, izmantojot lietotni [1].</p> <p>Lasa, raksturo visu iespējamo informāciju no funkciju $y = \cos x$ un $y = -0,5$ grafikiem, kas attēloti vienā koordinātu plaknē. Nosaka/parāda un pieraksta vienādojuma $\cos x = -0,5$ saknes intervālā $[-2\pi; 2\pi]$. Vingrinās noteikt vienādojuma $\sin x = a$, $\cos x = a$ saknes ar grafisko paņēmienu, izmantojot digitālos rīkus.</p>
--	---

Trigonometrisko vienādojumu atrisināšanas paņēmieni	<p>Ar grafisko paņēmienu noteiktā intervālā nosaka sakņu skaitu trigonometriskam vienādojumam, kura abas puses satur sinusa vai kosinusa funkcijas, piemēram, $\sin 2x = \cos x$.</p> <p>Sadarbojas, formulē idejas, kā izmantot vienības riņķi, lai noteiktu trigonometriskā vienādojuma, piemēram, $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ saknes noteiktā intervālā, kā pamatot, ka noteiktas visas saknes no dotā intervāla. Vingrinās atrisināt trigonometriskos vienādojumus $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\sin x = \cos y$, $\cos x = \cos y$ noteiktā intervālā, lietojot vienības riņķi.</p> <p>Spriež vispārīgi, izmanto funkciju īpašības un pamato, ka vienādojumam nav sakņu, piemēram, $\sin x = \sqrt{2}$, $\sin x + 2\cos x = 5$.</p> <p>Spriež, izmanto jau apgūto un atrisina vienādojumu formā $\sin(ax+b) = c$, $\cos(ax+b) = c$. Vingrinās un atrisina 3 vai 4 piemērus, pārliecinās par atrisinājuma pareizību; pārī apspriežas un formulē sev piemērotu algoritmu šādu vienādojumu atrisināšanai noteiktā intervālā. Pēc algoritma izveides vingrinās vienādojumu risināšanā.</p> <p>Lieto prasmi atrisināt trigonometriskus vienādojumus, lai funkcijām $y = a \cdot \sin(bx+c)$ un $y = a \cdot \cos(bx+c)$ analītiski noteiktu funkcijas nulles, vienādas zīmes intervālus, tās argumenta vērtības, pie kurām funkcijas vērtība ir lielākā/mazākā.</p> <p>Lieto prasmi atrisināt trigonometrisku vienādojumu, lai noteiktu nezināmo lielumu situācijā ar fizikas kontekstu. Atrisina 3 vai 4 piemērus (nezināmie lielumi tajos ir dažādi).</p>
Vispārīgo vienādojumu risināšanas paņēmieni lietojums	<p>Sadarbojas, formulē idejas vienādojumu $\sin^2 2x - \sin 2x - 2 = 0$, $\sin x \cdot \cos 4x = 0$ atrisināšanai. Izstāsta citiem savas idejas, uzklausa citus, vienojas par idejām, kuras mēģinās realizēt. Veido, salīdzina un pārbauda atrisinājumus, t. sk. paškontrolei izmanto digitālos rīkus. Raksturo/adaptē vispārīgos vienādojuma atrisināšanas paņēmienus (substitūcijas un sadalīšanas reizinātājos izmantošana vienādojumu atrisināšanai), ilustrē ar vienādojumu piemēriem; vingrinās vienādojumu risināšanā.</p> <p>Skaidro dotos trigonometriskā vienādojuma atrisinājumus. Sakārto dotos trigonometriskā vienādojuma risinājuma soļus logiskā secībā, skaidro un pamato izvēles.</p> <p>Lieto sakarības starp vienādu un dažādu argumentu sinusiem un kosinusiem, t. sk. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, argumentu summas formulas un divkāršā argumenta formulas, lai dotu trigonometrisku vienādojumu pārveidotu par tādu, kura atrisināšana ir zināma; pirms risināšanas stāsta, kā risinās, kādu formulu vai kāda paņēmiena lietojumu saskata; atrisina iegūto vienādojumu, salīdzina un izvērtē savu un citu veidotos atrisinājumus.</p> <p>Sadarbojas pārī un veido sev palīdzīgu shematisku apkopojumu/atgādni par trigonometrisku vienādojumu veidiem, to atrisināšanu, atrisināšanas paņēmieniem.</p> <p>Izvēlas paņēmienu dota trigonometriskā vienādojuma atrisināšanai, un veido atrisinājumu noteiktā intervālā; skaidro savu darbību, simbolu lietojumu. Matemātiski apraksta doto situāciju ar fizikas (cita mācību priekšmeta) kontekstu, sastādot trigonometrisku vienādojumu; izvēlas paņēmienu tā atrisināšanai, izvērtē matemātiskā atrisinājuma atbilstību kontekstam.</p>

Mācību līdzekļi

Mācību materiāli

Skola2030 mācību līdzeklis

[1] Geogebra.org. [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://www.geogebra.org/m/NmnpVUmd>

(Trigonometriskā vienādojuma $\sin x = a$, $\cos x = a$ atrisināšana noteiktā intervālā, izmantojot grafiku)

[2] Geogebra.org. [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://www.geogebra.org/m/gNVjYaPy>

(Sinusa un kosinusa argumentu summas formulas pamatošana)

Mācību resursi

Dators, ekrāns, projektors, interneta pieslēgums.

Metodiskais komentārs

Ieteikums laika plānojumam	“Trigonometrisko sakarību formulēšana un pamatošana, izmantojot funkcijas īpašības, grafiku” – 3 m. s., “Trigonometriskās sakarības un to lietojums” – 10 m. s. “Trigonometrisko vienādojumu atrisināšanas paņēmieni” – 5 m. s., “Vispārīgo vienādojumu risināšanas paņēmieni lietojums” – 4 m. s. Summatīvajam pārbaudes darbam plānotas 2 m. s.
Matemātikas valoda un simbolu lietojums	Svarīgi pārliecināties, ka skolēni pareizi lasa, piemēram, sinuss no leņķu alfa un beta summas, un spēj pierakstīt pēc dzirdētā trigonometriskas izteiksmes (skaitliskas un vispārīgas). Skaidro atšķirību starp algebriskiem pārveidojumiem (t. sk. ar trigonometriskām izteiksmēm) un trigonometrisku sakarību lietošanu, piemēram, lietojot trigonometriskās sakarības, argumenti var mainīties, bet veicot algebriskos pārveidojumus, argumenti nemainās.
Vienādojuma atrisinājuma iegūšana un pierakstīšana	Kursa ietvaros nav iekļauts inversās funkcijas jēdziens; līdz ar to netiek aplūkotas inversās trigonometriskās funkcijas un skolēni trigonometriskos vienādojumus atrisina tikai noteiktā intervālā. Apzīmējumi \arcsin un \arccos netiek lietoti. Trigonometriskā vienādojuma saknes pieraksta, lietojot indeksus, vai pierakstot kā skaitļu kopu.

Analitiskā ģeometrija I		Varbūtība un statistika I		Algebra I		Trigonometrija I		Algebra I		Geometrija I	
1. Vektori un kustība	2. Līnijas vienādo- jums	3. Kombi- natorika un varbūtība	4. Statistika	5. Daļveida funkcija, algebriskās daļas	6. Daļveida vienādo- jumi un nevienā- dības	7. Sinusa un kosinusa funkcijas	8. Trigono- metriskās izteiksmes un vienā- dojumi	9. Pakāpe ar racionālu kāpinātāju, ģeomet- riskā pro- gresija	10. Eksponent- funkcija	11. Taisnes un plak- nes telpā, daudz- skaldņi	12. Rotācijas ķermenī, telpisku ķermenē kombinā- cijas

Algebra I

9. Pakāpe ar racionālu kāpinātāju, ģeometriskā progresija

Ieteicamais laiks temata apguvei: 28 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: paplašināt izpratni par matemātiskām darbībām un saistību starp tām, padziļināt izpratni par virkni kā naturāla argumenta funkciju, formulēt un lietot sakārības, kas raksturo ģeometrisko progresiju.

Sasniedzamie rezultāti

Ziņas	Prasmes
<ul style="list-style-type: none"> Par n-tās pakāpes sakni no reāla skaitļa a sauc tādu skaitli b, kurš kāpināts n-tajā pakāpē vienāds ar a, t. i., $\sqrt[n]{a} = b$, ja $b^n = a$. (M.Li.3.) n-tās pakāpes saknes dažas īpašības ir līdzīgas kvadrātsaknes īpašībām. (M.Li.2.; M.Li.3.) Ja bāze ir pozitīvs skaitlis, n-tās pakāpes sakni var aizstāt ar pakāpi un otrādi; šo sakarību apraksta formula $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. (M.Li.1.; M.Li.3.) Pakāpu īpašības: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $a^m : a^n = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ ir spēkā arī tad, ja kāpinātāji m un n ir racionāli skaitļi. (M.Li.2.; M.Li.3.) Virkne ir funkcija, kuras definīcijas kopa ir naturālie skaitļi, bet funkcijas vērtības ir virknes locekļi. (M.Li.4.) Pēc īpašībām izšķir augošas, dilstošas un nemainīgas (konstantas) virknes; galīgas un bezgalīgas virknes; mainīgumu virknes. (M.Li.4.) Ģeometriskā progresija ir skaitļu virkne, kurā katrs nākamais elements tiek iegūts, iepriekšējo pareizinot ar vienu un to pašu skaitli – kvocientu. (M.Li.4.) Skaitļu virkni, t. sk. ģeometrisko progresiju, var pierakstīt rekurenti un ar vispārīgā locekļa formulu. (M.Li.1.; M.Li.4.) Ģeometrisko progresiju izmanto, lai matemātiski aprakstītu sakarības starp lielumiem citu jomu kontekstos, piemēram, salikto procentu formula ekonomikā. (M.Li.4.) 	<ul style="list-style-type: none"> Lasa, raksta pēc dzirdētā izteiksmes, kas satur n-tās pakāpes saknes un pakāpes ar racionālu kāpinātāju, skaidro pieņemto simbolu un apzīmējumu lietojumu. Aprēķina, t.sk. ar digitāliem rīkiem, n-tās pakāpes saknes, pakāpes ar racionālu kāpinātāju, precīzo vai aptuveno vērtību, t. sk., pārejot no viena skaitļa pieraksta veida uz otru. Izpilda darbības ar n-tās pakāpes saknēm: saknes rādītāja paplašināšana/saīsināšana, sakne no reizinājuma, dalījuma, pakāpes un saknes, saskaita un atņem līdzīgas saknes. Izpilda darbības ar pakāpēm, ja kāpinātājs racionāls skaitlis: reizina, dala pakāpes ar vienādām bāzēm, kāpina pakāpi, saskaita un atņem līdzīgas pakāpes. Ģeometrisko progresiju, kuras daži locekļi doti, attēlo grafiski, raksturo aprakstoši, ar vispārīgā locekļa formulu un rekurenti. Nosaka virknes, t. sk. ģeometriskās progresijas nezināmos locekļus un sakarības starp virknes locekļiem, ja virkne uzdota vispārīgi vai rekurenti. Lieto ģeometriskās progresijas vispārīgā locekļa formulu, pirmo n locekļu summas formulu uzdevumos ar praktisku, citu mācību jomu un matemātisku kontekstu.

Komplekss sasniedzamais rezultāts	Ieradumi
<ul style="list-style-type: none"> Formulē algoritmus darbību izpildei ar n-tās pakāpes saknēm (paplašināšana/sāsināšana, sakne no reizinājuma, dalījuma, pakāpes, saknes), izmantojot zināšanas par darbību izpildi ar kvadrātsaknēm. (M.O.2.1.1.; M.O.3.1.1.; M.O.3.2.1.) Aplūko konkrētus piemērus, formulē un pārbauda pieņēmumu par saistību starp n-tās pakāpes sakni un pakāpi ar racionālu kāpinātāju, iegūtos rezultātus salīdzina ar informāciju uzziņu avotos. (M.O.2.1.2.; M.O.3.1.1.; M.O.1.1.1.) Salīdzina skaitliskas izteiksmes, kas satur n-tās pakāpes saknes vai pakāpes ar racionālu kāpinātāju, novērtē šādu izteiksmju aptuvenās vērtības, sakārto tās augošā/dilstošā secībā, pamato vienkāršas nevienādības. (M.O.3.1.2.; M.O.3.2.3.) Vienkāršos gadījumos rekurenti uzdotu skaitļu virknī, t. sk. ģeometrisko progresiju, uzdod vispārīgi un otrādi – vispārīgi uzdotu skaitļu virknī uzdod rekurenti; pastāsta, kā domāja, korekti lietojot matemātikas valodu. (M.O.1.1.2.; M.O.3.2.3.; M.O.4.1.2.) Skaidro lielumus salikto procentu formulā un tās saistību ar ģeometriskās progresijas vispārīgā locekļa formulu, lieto salikto procentu formulu nezināmā lieluma noteikšanai citu jomu kontekstos. (M.O.4.1.1.; M.O.4.1.2.) 	<ul style="list-style-type: none"> Matemātiski korekti lasa un pieraksta saknes, pakāpes un virknes formulas, attīstot ieradumu apgalvojumus formulēt precīzi, apzinoties, ka neprecizitātes var būt pamats aplamiem secinājumiem. n-tās pakāpes sakni saista ar kvadrātsakni, attīstot ieradumu iegūto informāciju saista ar jau zināmo, lai konstruētu jaunas zināšanas.

Jēdziens: n -tās pakāpes sakne, pakāpe ar racionālu kāpinātāju, vispārīgā locekļa formula, rekurenta formula, ģeometriskā progresija, kvocients.

Temata apguves norise

<i>n</i>-tās pakāpes sakne	<p>Nosauc kādu matemātisku darbību un tai apgrīzto darbību, veido kopsavilkumu par visām līdz šim zināmajām darbībām, t. sk. kāpināšanu kvadrātā un kvadrātsaknes vilkšanu. Secina, ka līdz šim nav aplūkota apgrīzta darbība kāpināšanai jebkurā citā pakāpē, izņemot 2. pakāpi. Izsaka pieņēmumu, kā veikt apgrīztu darbību kāpināšanai kubā (trešajā pakāpē) un kā to varētu saukt; izmanto konkrētus piemērus un digitālos rīkus, lai to ilustrētu. Formulē, kas ir apgrīzta darbība kāpināšanai n-tajā pakāpē.</p> <p>Uzklausa skolotāja stāstīto par n-tās pakāpes saknes simbolisko pierakstu, jēdzienu korektu lietojumu. Mācās pareizi lasīt n-tās pakāpes saknes, ja tās pierakstītas ar simboliem, piemēram, ceturtās pakāpes sakne no 81. Pieraksta n-tās pakāpes saknes pēc dzirdētā.</p> <p>Vingrinās noteikt n-tās pakāpes sakni no racionāliem skaitļiem, izsakot pieņēmumu par skaitlisko vērtību un to pārbaudot, t. sk. ar digitāliem rīkiem. Apskatot pietiekami daudz piemēru, formulē pieņēmumu par definīcijas kopu saknei ar pāra un nepāra saknes rādītāju.</p> <p>Spriežot nosaka, starp kādiem veseliem skaitļiem atrodas n-tās pakāpes saknes, piemēram, $\sqrt[4]{40}$, precīzā vērtība; skaidro risinājumu, lietojot matemātikas valodu; sakārto dotus skaitļus (t. sk. n-tās pakāpes saknes ar dažādām n vērtībām) augošā/dilstošā secībā.</p>
-----------------------------------	--

n-tās pakāpes sakne

Pēta iespējas saskaitīt, atņemt n -tās pakāpes saknes, piemēram, $\sqrt[3]{6} + 2\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{32} - \sqrt[4]{2}$, $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$, formulē un pārbauda pieņēmumus (t. sk. ar digitāliem rikiem), sadarbojas pāri vai mazā grupā, lai apspriestu iegūtos rezultātus un formulētu vispārinājumus, salīdzina rezultātus ar citu grupu rezultātiem, ja nepieciešams – tos papildina un precizē.

Pierāda vienkāršas skaitliskas nevienādības, kas satur n -tās pakāpes saknes, piemēram, $\sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{70} > 6$; pierādījumu veido kā saistītu tekstu (vārdiski vai rakstiski), uzklausa un izvērtē citu veidotus pierādījumus.

Ar kalkulatoru nosaka precīzo vai aptuveno vērtību skaitliskām izteiksmēm, kas satur n -tās pakāpes saknes. Pirms aprēķiniem izsaka pieņēmumu par aptuveno vērtību; pēc pašpārbaudes pastāsta, kā sprieda, un raksturo kļūdaina/neprecīza pieņēmuma iemeslus.

Aplūko konkrētus piemērus (salīdzini $\sqrt[3]{4} \dots \sqrt[3]{20}$, aprēķini $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8}$ u. tml.), spriež konkrēti un vispārīgi, izsaka idejas un pieņēmumus par n -tās pakāpes saknes īpašībām (paplašināšana/saīsināšana, sakne no reizinājuma, dalījuma un saknes), kas izmantojas konkrēto piemēru atrisināšanai; sadarbojas mazās grupās un pamato pieņēmumus, izmantojot pretējās darbības (kāpināšanas) īpašības, formulē algoritmus darbību izpildei ar n -tās pakāpes saknēm, salīdzina ar jau zināmo par darbību izpildi ar kvadrātsaknēm.

Vingrinās lietot n -tās pakāpes saknes īpašības skaitlisku izteiksmju vērtības aprēķināšanai un aptuvenai novērtēšanai, skaitlisku izteiksmju salīdzināšanai un nevienādību pierādīšanai.

Pakāpe ar racionālu kāpinātāju

Aplūko pietiekami daudz n -tās pakāpes saknes no pakāpes, piemēram, $\sqrt[3]{4^{12}}$, $\sqrt[5]{10^{15}}$, ar mērķi pēc iespējas racionāli noteikt rezultātu; pārbauda un pamato rezultātu patiesumu, formulē pieņēmumu/secinājumu par iespēju n -tās pakāpes sakni pierakstīt kā pakāpi $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Sadarbojas pāri, ģenerē skaitlisku izteiksmju piemērus, ja $m < n$, piemēram, $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[3]{3^2}$, nosaka un pamato rezultātus, izmantojot kāpināšanu un tās īpašības; ja nepieciešams – papildina vai precizē secinājumu par iespējām n -tās pakāpes sakni pierakstīt kā pakāpi ar dalveida kāpinātāju.

Lasa pakāpes ar dalveida kāpinātāju definīciju; pāri apspriežas un ģenerē piemēru, kas ilustrē nepieciešamību ierobežot bāzes definīcijas kopu.

Vingrinās lasīt matemātiskas izteiksmes, kas satur n -tās pakāpes saknes un pakāpes ar racionālu kāpinātāju. Vingrinās n -tās pakāpes sakni pierakstīt kā pakāpi un otrādi; komentē pārveidojumus, lietojot matemātikas valodu.

Pāri apspriežas un veido pārskatu par jau zināmajām pakāpes īpašībām vai atrod nepieciešamo informāciju uzziņu literatūrā. Lieto sakņu un pakāpju īpašības, sakarību $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, lai pārveidotu skaitliskas izteiksmes, kas satur pakāpes ar racionālu kāpinātāju un n -tās pakāpes saknes, lai veidotu spriedumus matemātiskos kontekstos (novērtētu aptuveno vērtību, salīdzinātu izteiksmes, pierādītu identitātes u. tml.). Argumentēti raksturo, kuru no skaitļa pieraksta formām (sakne vai pakāpe) izvēlas, veicot pārveidojumus vai spriedumus, kas nosaka izvēli.

Virknes	<p>Mazā grupā apspriežas un izveido informatīvu apkopojumu: kas jau zināms par virknēm, virķu veidiem, virķu īpašībām un virķu pieraksta veidiem. Grupas savstarpēji apmainās ar apkopojumu saturu, precizē un papildina informāciju savos pierakstos.</p> <p>Lasa un analizē konkrētus piemērus, skaidro pieņemto simbolu un apzīmējumu lietojumu virknes vispārīgā locekļa formulā. Skaidro pieņemto simbolu un apzīmējumu lietojumu, pierakstot virknes rekurenti. Secina, kādas ir priekšrocības katram virknes pieraksta veidam. Vingrinās vispārīgi uzdotu aritmētisko progresiju pierakstīt rekurenti un otrādi, skaidro pieņemto simbolu un apzīmējumu lietojumu.</p> <p>Pārī sadarbojas un mēģina atrast vispārīgā locekļa formula rekurenti uzdotai sakarībai (nav aritmētiskā progresija), piemēram, $a_1 = 1, \ a_{n+1} = a_n + 2n + 1$, kur $n \in N$.</p> <p>Aprēķina skaitļu virknes nezināmos locekļus, ja tā uzdota vispārīgi vai rekurenti, piemēram, $c_n = \frac{n+1}{n+3}$, $a_1 = 2, \ a_{n+1} = 2a_n + 1$, kur $n \in N$. Vingrinās aprēķināt virknes nezināmos locekļus.</p> <p>Pēta, formulē sakarības starp vispārīgi vai rekurenti uzdotas skaitļu virknes locekļiem.</p> <p>Izpauž sevi radoši un definē 2 vai 3 skaitļu virknes, izvēloties uzdošanas veidu. Sadarbojas pārī un 1) mēģina noteikt/pierakstīt pirmos 4 vai 5 klasesbiedra definēto virķu locekļus, apspriež iegūtos rezultātus, 2) izskata iespējas vispārīgi uzdotas virknes pierakstīt rekurenti un rekurenti uzdotas virknes pierakstīt vispārīgi; skaidro citiem, kā konkrētos piemēros rīkojās, lai pārietu no viena uzdošanas veida uz citu, raksturo virknes, ar kurām tas neizdevās.</p>
Ģeometriskā progresija	<p>Aplūko konkrētus ģeometrisko progresiju (jēdzienu skolēni vēl nezina) piemērus – pirmos 3 vai 4 virknes locekļus, grupā apspriežas un raksturo visām dotajām virknēm kopīgo, izsaka idejas, kā tās pierakstīt ar formulu (vispārīgi vai rekurenti). Definē ģeometrisko progresiju; salīdzina ar aritmētisko progresiju, raksturojot kopīgo un atšķirīgo. Izmantojot digitālos rīkus, veido aritmētisko un ģeometrisko progresiju grafiskos attēlojumus; raksturo tos, korekti lietojot jēdzienus, piemēram, arguments, lineāra sakarība, nav lineāra sakarība, augoša/dilstoša.</p> <p>Spriež vispārīgi, lieto pirmā locekļa un kvocienta simbolisko apzīmējumu un secina par ģeometriskās progresijas vispārīgā locekļa formulu.</p> <p>Sadarbojas pāri un vingrinās (formulējot viens otram) vārdiski aprakstītu ģeometrisko progresiju uzdot ar formulu un otrādi – ar formulas uzdotu ģeometrisko progresiju raksturot vārdiski, pārrunā rezultātus, novērš neprecizitātes.</p> <p>Sadarbojas, aplūko ģeometrisku progresiju piemērus ar mērķi saskatīt un formulēt sakarības starp ģeometriskās progresijas locekļiem, piemēram, sakarību starp trīs pēc kārtas ņemtiem virknes locekļiem.</p> <p>Lieto ģeometriskās progresijas formulu un saskatītās sakarības, lai noteiku nezināmo lielumu – kvocientu vai jebkuru elementu, aplūkojot situācijas ar nezināmo jebkurā no pozīcijām.</p> <p>Sadarbojas un pierāda ģeometriskās progresijas pirmo n locekļu summas formulu, izmantojot dotu pierādījuma plānu vai savietojot pareizā secībā dotus pierādījuma solus, un izveidojot logiski saistītu tekstu; izstāsta savu pierādījumu citiem, uzklauša citu veidotos pierādījumus, jautā par neskaidro, precizē savu pierādījumu.</p> <p>Lieto ģeometriskās progresijas summas formulu matemātiskos un citu mācību jomu kontekstos, piemēram, aprēķinot uz noteiktiem procentiem noguldītās naudas summas pieaugumu pēc vairākiem pilniem gadiem.</p>

Mācību līdzekļi

Mācību materiāli

Skola2030 mācību līdzeklis

Mācību resursi

Dators, ekrāns, projektors, interneta pieslēgums.

Starppiekšmetu saikne

Fizikā lieto darbības ar skaitļiem normālformā, ekonomikā izmanto salikto procentu formulu.

Metodiskais komentārs

Ieteikums laika plānojumam	Sadaļai “ n -tās pakāpes sakne” plānotas 6 mācību stundas, sadaļai “Pakāpe ar racionālu kāpinātāju” – 6 mācību stundas, sadaļai “Virknes” – 4 vai 5 mācību stundas, bet sadaļai “Ģeometriskā progresija” – 9 vai 10 mācību stundas. Summatīvajam pārbaudes darbam plānotas 2 m. s. Skolotājs, ievērojot savu pieredzi vai skolēnu vajadzības, laika plānojumu temata ietvaros koriģē pēc saviem ieskatiem.
Tematā būtiskākais	Izpratne par virkni kā funkciju, kuras arguments ir naturāls skaitlis, bet funkcijas vērtības ir virknes locekļi. Padziļināt mācību procesā izpratni par dažādajiem virķu uzdošanas veidiem, veidot sarunas par to, kurš no veidiem ir vieglāk uztverams, kuru lietojot var iegūt precīzākas, ātrākas atbildes risinot doto problēmuzdevumu. Padziļināt izpratni par to, kas ir hipotēze un kad tā ir pierādīta, piemēram, aplūkojot virķu piemērus, kur doti tikai divi pirmie virknes locekļi un ir uzdevums definēt šo virkni.
Jauno zināšanu konstruēšana	Veido un izmanto saistību ar kvadrātsaknēm, formulējot darbību izpildi ar n -tās pakāpes saknēm. Formulē un pārbauda pieņēmumus par darbībām ar pakāpēm, kuru kāpinātājs ir racionāls skaitlis, izmantojot jau esošās zināšanas par pakāpju īpašībām. Lieto zināšanas par aritmētisko progresiju, lai pilnveidotu izpratni par virknes uzdošanas diviem veidiem – ar vispārīgo formula un rekurenti.
Viens un tā paša lieluma dažādi attēlošanas veidi	Iespēja pakāpi ar racionālu kāpinātāju pierakstīt kā sakni un otrādi, sniegs skolēniem izdevību veikt darbības ar skaitļiem dažādās pieraksta formās. Svarīgi, ka skolēni saskata kopsakarības, jauno saistot ar jau apgūto, piemēram, minot piemērus – citus satura jautājumus, kuros bija iespēja šādi rīkoties (piemēram, racionālu skaitli pierakstīt parastās daļas vai decimāldaļas veidā).

Analitiskā ģeometrija I		Varbūtība un statistika I		Algebra I		Trigonometrija I		Algebra I		Geometrija I	
1. Vektori un kustība	2. Līnijas vienādo- jums	3. Kombi- natorika un varbūtība	4. Statistika	5. Daļveida funkcija, algebriskās daļas	6. Daļveida vienādo- jumi un nevienā- dības	7. Sinusa un kosinusa funkcijas	8. Trigono- metriskās izteiksmes un vienā- dojumi	9. Pakāpe ar racionālu kāpinātāju, ģeomet- riskā pro- gresija	10. Eksponent- funkcija	11. Taisnes un plak- nes telpā, daudz- skaldņi	12. Rotācijas ķermenī, telpisku ķermenē kombinā- cijas

Algebra I

10. Eksponentfunkcija

Ieteicamais laiks temata apguvei: 32 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: pilnveidot prasmes darbā ar funkcijām, vienādojumiem un nevienādībām, nosakot eksponentfunkcijas īpašības un tās lietojot matemātiskos kontekstos, matemātiski modelējot ar citām jomām saistītus procesus/situācijas.

Sasniedzamie rezultāti

Zīnas	Prasmes
<ul style="list-style-type: none"> Aizvietojot pozitīvu skaitļa kāpinātāju ar mainīgu lielumu, iegūst eksponentfunkciju $y = a^x$, kur $a > 0$; $a \neq 1$; eksponentfunkcijas īpašības ir atkarīgas no bāzes a. (M.Li.4.) Eksponentfunkcija formā $y = c \cdot a^{kx+b}$ matemātiski apraksta/modelē noteiktus procesus dabā, tehnoloģijās un sabiedrībā, kuros kāds raksturīgais lielums "arvien straujāk" palielinās vai samazinās (M.Li.4.) Lai novērtētu pakāpes aptuveno vērtību, salīdzinātu pakāpes, izmanto eksponentfunkcijas īpašības. (M.Li.2.; M.Li.4.) Eksponentfunkcijas īpašības izmanto, lai risinot vienādojumus (nevienādības) $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ ($a^{f(x)} < a^{g(x)}$) spriedumu rezultātā pārietu uz jau pazīstamiem vienādojumiem (nevienādībām). (M.Li.2.; M.Li.4.) Pakāpu īpašības izmanto, lai eksponentvienādojumus (nevienādības) pārveidotu formā $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ ($a^{f(x)} < a^{g(x)}$). (M.Li.4.) Logaritms ir kāpinātājs, piemēram, ja $2^x = 7$, tad ar simbolu $\log_2 7$ tiek apzīmēta precīzā vērtība kāpinātājam, kurā kāpinot skaitli 2, iegūst skaitli 7. (M.Li.1.; M.Li.3.) Citu zinātņu kontekstos bieži izmanto logaritmus ar bāzi 10 jeb decimāllogaritmus; pārejai uz citu bāzi lieto bāzes maiņas formulu. (M.Li.1.; M.Li.3.) Kāpināšana, n-tās pakāpes saknes vilkšana un logaritmēšana (logaritma noteikšana) ir savstarpēji saistītas darbības. (M.Li.2.; M.Li.3.) Logaritma precīzu vai tuvinātu skaitlisko vērtību var noteikt spriežot, izmantojot eksponentfunkcijas grafiku vai digitālos rīkus. (M.Li.2.; M.Li.3.) 	<ul style="list-style-type: none"> Nosaka un pārbauda, vai analītiski, grafiski uzdota funkcija ir eksponentfunkcija. Zīmē eksponentfunkcijas $f(x) = c \cdot a^{kx+b}$ grafiku, izmantojot funkcijas un grafika īpašības un nosakot atsevišķus grafika punktus. Lieto digitālos rīkus, lai uzzīmētu eksponentfunkcijas grafiku. Izpilda darbības ar pakāpēm, lai eksponentvienādojumu un eksponentnevienādību pārveidotu formā $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, $a^{f(x)} < a^{g(x)}$. Atrisina analītiski vai grafiski eksponentvienādojumu $a^{f(x)} = b$, eksponentnevienādību $a^{f(x)} > b$. Atrisina analītiski eksponentvienādojumu $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, skaidro risinājuma gaitu un pamato veiktos pārveidojumus, izmantojot eksponentfunkcijas īpašības. Atrisina divu vienādojumu sistēmu, kas satur eksponentvienādojumu un lineāru vienādojumu. Atrisina analītiski eksponentnevienādību $a^{f(x)} < a^{g(x)}$, skaidro risinājuma gaitu un pamato veiktos pārveidojumus, izmantojot eksponentfunkcijas īpašības. Nosaka logaritma precīzo vai aptuveno skaitlisko vērtību, izmantojot logaritma definīciju, piemērotas eksponentfunkcijas grafiku un digitālos rīkus. Pārveido skaitliskas izteiksmes un aprēķina to skaitlisko vērtību, lietojot logaritma definīciju, logaritmisko pamatidentitāti, logaritma īpašības (logaritms no reizinājuma, dalījuma, pakāpes).

Komplekss sasniedzamais rezultāts	Ieradumi
<ul style="list-style-type: none"> Argumentēti izvēlas un lieto atbilstošu vispārīgo vienādojumu risināšanas paņēmienu (sadališana reizinātājos, substitūcija, grafiskais paņēmiens) eksponentvienādojumu atrisināšanā, skaidro kopīgo un atšķirīgo šo paņēmienu lietošanā ar jau apgūtajiem vienādojumiem. (M.O.4.5.3.; M.O.4.5.5.) Analizē un lieto dotos vai izveidotus eksponenciālus modeļus (funkcijas, vienādojumus, nevienādības) situācijās ar citu mācību jomu kontekstu, piemēram, radioaktīvo izotopu pussabrukšanas periods, pasaules iedzīvotāju skaits, baktēriju populācijas vairošanās, banku rēķini, lai noteiktu nezināmo lielumu, formulētu secinājumus. (M.O.2.2.1.; M.O.4.2.6.; M.O.4.5.7.) Lieto logaritma definīciju un īpašības, lai aprēķinātu izteiksmju skaitlisko vērtību citu mācību jomu kontekstā, piemēram, nosakot zemestrīces stiprumu pēc Rihtera skalas. (M.O.3.1.1.; M.O.3.2.1.; M.O.3.3.1.) Veido, t. sk., izmantojot digitālos rīkus kopsavilkumu/pārskatu par funkciju (lineāra, kvadrātfunkcija, daļveida, sinusa, kosinusa, eksponentfunkcija) īpašībām, to grafiku novietojumu koordinātu plaknē un izmantošanu situāciju/procesu matemātiskai modelēšanai. (M.O.1.1.2.; M.O.2.2.1.; M.O.4.2.4.; M.O.4.2.5.; M.O.4.2.6.) 	<ul style="list-style-type: none"> Veido apgūto zināšanu kopsavilkumus/pārskatus, attīstot ieradumu plānot un vadīt savu domāšanas procesu, ik pa laikam izvērtēt paveikto. Strukturēti skaidro un pieraksta eksponentvienādojuma, nevienādības atrisinājumu, attīstot ieradumu vārdisko un rakstīto tekstu veidot saistītu un cītiem saprotamu, pamatot savus spriedumus.

Jēdzieni: eksponentfunkcija, eksponentvienādojums, eksponentnevienādība, skaitļa logaritms, logaritma bāze, decimāllogaritms.

Temata apguves norise

Eksponentfunkcija	<p>Raksturo grafiku, kurā attēlots uz noteiktiem procentiem noguldītās naudas summas daudzums pēc katra pilna gada (ģeometriskā progresija). Izsaka un argumentē, atrodot nepieciešamo informāciju, savas domas par argumenta pieļaujamām vērtībām dotajā situācijā.</p> <p>Analizē dotos vai pašu atrastus piemērus par eksponentfunkcijas lietojumu procesu matemātiskai raksturošanai, piemēram, [2].</p> <p>Lasa eksponentfunkcijas $f(x) = a^x$ definīciju; skaidro nosacījumus par bāzi, funkcijas vērtību kopu. Raksturo eksponentfunkcijas $f(x) = a^x$ un ģeometriskās progresijas ($b_1 = 1$) saistību, kopīgo un atšķirīgo.</p> <p>Prognozē funkcijas $f(x) = a^x$ īpašības pie konkrētām bāzes skaitliskajām vērtībām, izmanto jau zināmo par kvocienta ietekmi uz ģeometriskās progresijas īpašībām; pārbauda prognozēto uzkicējot funkcijas grafiku vai izmantojot digitālos rīkus.</p> <p>Sadarbojas, sistematizē atsevišķos rezultātus un formulē funkcijas $f(x) = a^x$ īpašības, skaidro grafika novietojumu koordinātu plaknē un rīcību, lai uzzīmētu funkcijas $f(x) = a^x$ grafiku. Vingrinās uzzīmēt funkcijas grafiku spriežot, cik un kādas vērtības būtu jāizvēlas, lai iegūtu pietiekami precīzu grafiku.</p>
-------------------	---

Eksponentfunkcija

Salīdzina bāzes vienā koordinātu plaknē uzzīmētiem funkcijas $f(x) = a^x$ grafikiem; uzskicē grafiku augošai vai dilstošai funkcijai $f(x) = a^x$, ja tās bāze ir lielāka/mazāka nekā funkcijai, kuras grafiks jau dots koordinātu plaknē.

Pārī sadarbojas, lieto matemātiku un veido interpretāciju, kas ilustrētu/pamatotu eksponentfunkcijas $f(x) = a^x$ grafika īpašību – “arvien vairāk tuvojas abscisu asij, bet nekad to nekrusto”.

Sadarbojas un pēta funkciju $f(x) = a^x$, $f(x) = a^{kx}$, $f(x) = a^{kx+b}$, $f(x) = c \cdot a^x$, $f(x) = c \cdot a^{kx}$, $f(x) = c \cdot a^{kx+b}$ grafiku novietojumu koordinātu plaknē, izmantojot digitālos rīkus, piemēram, [1]; zīmē vairāku funkciju grafikus, mainot k , b un c vērtības, formulē vispārinājumus par koeficientu k , b un c ietekmi uz funkcijas grafika novietojumu un funkcijas īpašībām.

Vingrinās uzskicēt eksponentfunkcijas grafiku, ja dota formula, prognozē 2 vai 3 eksponentfunkciju grafiku savstarpējo novietojumu; veic pašpārbaudi, izmantojot digitālos rīkus.

Nosaka pakāpes ar racionālu kāpinātāju precīzo vai aptuveno vērtību, salīdzina reālus skaitļus, ja tie pierakstīti kā pakāpes racionālu kāpinātāju, izmantojot atbilstošu eksponentfunkcijas grafiku. Izdara spriedumus, cik precīzi var noteikt vērtības no paša uzzīmēta grafika vai digitāli zīmēta.

Nosaka un pamato funkcijas $f(x) = c \cdot a^{kx+b}$ īpašības (definīcijas kopu, vērtību kopu, krustpunktu ar ordinātu asi, augoša/dilstoša, funkcijas nulles, vienādas zīmes intervālus.

Nosaka pakāpes ar racionālu kāpinātāju precīzo vai aptuveno vērtību, izmantojot atbilstošu eksponentfunkcijas grafiku. Izvērtē secinājumu precizitāti, izmantojot ar roku vai digitāliem rīkiem uzzīmētu grafiku.

Izmanto eksponentfunkcijas īpašības un skaidro reālu skaitļu salīdzināšanu, ja tie pierakstīti kā pakāpes ar racionālu kāpinātāju.

Nosaka nezināmos lielumus situācijā ar citas mācību jomas kontekstu, ja sakarību starp lielumiem raksturo eksponentfunkcija $f(x) = c \cdot a^x$, izmantojot gan funkcijas formulu, gan grafiku; vienādojuma $c \cdot a^x = b$ vai nevienādības $c \cdot a^x > b$ atrisinājumu nolasa no grafika; veic paškontroli, izmantojot digitālos rīkus.

Spriež vai izmanto digitālos rīkus un nosaka vienādojuma $2^x = b$ sakņu skaitu atkarībā no b vērtības; maina bāzi, formulē secinājumus.

Spriež, uzzīmē funkcijas $f(x) = a^x + c$, ja tajā pašā koordinātu plaknē dots funkcijas $f(x) = a^x$ grafiks, skaidro grafika pārbīdes, nosaka funkcijas $f(x) = a^x + c$ īpašības (definīcijas kopa, vērtību kopa, augoša/dilstoša, funkcijas nulle, vienādas zīmes intervāli).

Skaitļa logaritms	<p>Izveido vienādojumu, lai matemātiski aprakstītu situāciju, kurā zināmie lielumi ir procentu likme, noguldītā summa un uzkrātā summa, bet nezināmais lielums ir laiks uzkrājuma veidošanai; risinot nonāk pie problēmas – kā/ar kādu darbību noteikt nezināmo kāpinātāju. Apsriežas mazā grupā, lai raksturotu šo situāciju ar jau esošajām zināšanām un secina, ka jaunā darbība ir saistīta ar divām citām matemātiskām darbībām – kāpināšanu un saknes izvilkšanu. Spriežot nosaka nezināmā lieluma aptuveno vērtību.</p> <p>Definē logaritmu, izmantojot uzziņu literatūru, pārī apspriežas un skaidro logaritma eksistences nosacījumus pie noteiktām bāzes un logaritmējamā lieluma vērtībām, skaidrojumā izmanto konkrētus piemērus.</p> <p>Noskaidro, kādas iespējas ir izmantojot dažādus kalkulatorus, lai aprēķinātu logaritma vērtību. Secina par nepieciešamību mainīt logaritma bāzi. Uzziņu literatūrā noskaidro simbola $\lg x$ nozīmi, atrod un apkopo decimāllogaritmu lietojumu citās zinātnu jomās. Lieto bāzes maiņas formulu, lai pārietu uz decimāllogaritmiem un izmantotu kalkulatoru logaritma vērtības aprēķināšanai.</p> <p>Vingrinās pareizi pierakstīt pēc dzirdētā un lasīt ar simboliem pierakstītu logaritmu, t. sk. decimāllogaritmu, nosaka logaritma skaitisko vērtību spriežot, izmantojot pretējo darbību – kāpināšanu, skaidro kā sprieda.</p> <p>Spriežot nosaka, starp kādiem blakus esošiem veseliem skaitļiem ir dotais logaritms, piemēram, $\log_3 40$. Dotus skaitļus, t. sk. logaritmus, sakārto augošā/dilstošā secībā.</p> <p>Lasa un skaidro kīmijā pieņemto apzīmējumu lietojumu pH skaitliskai raksturošanai. Atbilstoši skolotāja norādēm atrod uzziņu literatūrā ar citām mācību jomām saistītu lielumu, piemēram, decibels un skaņas intensitāte, aprakstus/definīcijas un formulē secinājumus par to, kādas darbības ar logaritmiem tiek veiktas. Formulē pētāmo jautājumu, piemēram, ko nozīmē atņemt divus logaritmus un kā iegūt rezultātu.</p> <p>Spriež, pēta konkrētus piemērus, piemēram, $\log_2 32 - \log_2 4$, un formulē pieņēmumu par divu logaritmu starpību, pārbauda pieņēmumu, izmantojot citus piemērus; ar skolotāja atbalstu veido pamatojumu, izmantojot jau zināmās kāpināšanas īpašības. Līdzīgi aplūko konkrētus piemērus un secina par divu logaritmu summu, par logaritmu no pakāpes.</p> <p>Vingrinās darbību izpildē ar logaritmiem. Lieto darbības ar logaritmiem citu mācību jomu kontekstos, piemēram, nosaka nezināmo lielumu, izmantojot formulu zemestrīču stipruma noteikšanai; aprēķinos izmanto digitālos rīkus.</p>
EkspONENTVIEŅĀDOJUMI UN NEVIEŅĀDĪBAS	<p>Sastāda eksponentvienādojumu $a^{f(x)} = b$, lai aprēķinātu, pēc cik ilga laika noguldījums bankā sasniegts konkrētu summu. Uzraksta vienādojuma precīzo sakni, lietojot skaitļa logaritmu. Nosaka saknes aptuveno vērtību ar situācijai atbilstošu precizitāti, t. sk., lietojot digitālos rīkus.</p> <p>Nosaka sakni vienādojumam $3^x = 81$, pamato, ka sakne ir vienīgā, izmantojot eksponentfunkcijas īpašības. Tad aplūko vienādojumu $3^{2x+1} = 81$, raksturo kopīgo un atšķirīgo abu vienādojumu pierakstā un atrisināšanā; aplūko un izvērtē dažādus vienādojuma $3^{2x+1} = 81$ atrisinājuma pierakstus. Vingrinās, no skolotāja dotajiem uzdevumiem atrisinot sev vajadzīgo skaitu.</p> <p>Sadarbojas, pēta un raksturo vienādojuma $2^x = b$ sakņu precīzo vērtību noteikšanu dažādām b vērtībām.</p> <p>Vingrinās analītiski atrisināt eksponentvienādojumu $a^{f(x)} = b$; skaidro veiktos pārveidojumus.</p>

Eksponentvienādojumi un nevienādības

Pārī sadarbojas un plāno vienādojuma atrisināšanu jaunā situācijā – vienādojuma abas puses satur nezināmo kāpinātājā, piemēram, $2^{2x+3} = 2^{x-1}$; skaidro savu risinājumu citiem, uzklausa citu veidotos risinājumus; izsaka idejas, kā pamatot, ka citu sakņu nav. Tad patstāvīgi plāno atrisinājumu vienādojumam, kas satur vienas bāzes dažādas pakāpes, piemēram, $25^{x+1} = 125^{x-1}$; skaidro veiktos pārveidojumus, izsaka savas domas par iespējamiem klūdu cēloņiem.

Vingrinās analītiski atrisināt eksponentvienādojumu, piemēram, $4 \cdot 2^{x+2} = 8^3$, pārī sadarbojas un pārrunā veicamos/veiktos pārveidojumus ar pakāpēm, līdz iegūta pamatforma $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, izmanto funkcijas īpašību, formulē spriedumu, saistot pakāpju vienādību ar kāpinātāju vienādību (bāzes vienādas).

Savieto dotas vienkāršas eksponentnevienādības un tām atbilstošos grafiskos attēlojumus.

Lasa, skaidro datus eksponentnevienādību atrisinājumus, pamato veiktos pārveidojumus, atsaucoties uz pakāpju īpašībām, eksponentfunkcijas īpašībām. Pārī sadarbojas un formulē algoritmu eksponentnevienādību, kas pārveidojamas formā $a^{f(x)} < a^{g(x)}$, atrisināšanai, uzklausa citu veidotos algoritmus, papildina un precizē savu algoritmu; mēģina to realizēt, atrisinot skolotāja datus piemērus; formulē vai un kā pašu izveidotais algoritms palīdz atrisināt nevienādības.

Vingrinās analītiski atrisināt eksponentnevienādības, skaidro izmantotos ekvivalentos pārveidojumus, līdz iegūst pamatformu $a^{f(x)} < a^{g(x)}$, pamato pārveidojumus, izmantojot eksponentfunkcijas īpašības.

Izmanto spriešanu, funkcijas īpašības nevienādību atrisināšanā, piemēram, $4^x < -4$; $0,5^x > 0$.

Pārī sadarbojas un plāno vienādojuma atrisināšanu jaunā situācijā – 1) eksponentvienādojums, kas pārveidojams par algebrisku, izmantojot substitūciju, piemēram, $4^{x+1} - 2^{x+3} + 4 = 0$; 2) eksponentvienādojums, kas atrisināms, izmantojot sadalīšanu reizinātājos, piemēram, $(2^x - 8) \cdot (3^x - 1) = 0$; 3) vienādojums ar nezināmo kāpinātājā, kas atrisināms ar grafisko paņēmienu, piemēram, $2^{x+3} = -x + 5$, prezentē savus risinājumus, uzklausa citu pāru veidotos risinājumus, formulē jautājumus par neskaidro, iesaka uzlabojumus u. tml.

Vingrinās lietot vispārīgos vienādojumu atrisināšanas paņēmienus eksponentvienādojumu atrisināšanai.

Mācību līdzekļi

Mācību materiāli

Skola2030 mācību līdzeklis

[1] *Geogebra.org*. [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://www.geogebra.org/m/AAvMcjU5>, <https://www.geogebra.org/m/BzD6b7P6> (Eksponentfunkcijas grafika novietojums atkarībā no koeficientu vērtībām)

[2] DZM atbalsta materiāli. [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://www.siic.lu.lv/datadir/mathematika/registretieskolotaji/186.pdf> (Pasaules iedzīvotāju skaits, fosiliju vecuma noteikšana)

Mācību resursi

Dators, ekrāns, projektors, interneta pieslēgums.

Starppriekšmetu saikne

Fizikā eksponentfunkcija apraksta radioaktīvās sabrukšanas procesu, bioloģijā ar eksponentfunkciju modelē, prognozē dažādu populāciju, piemēram, baktēriju vairošanos, ekonomikā eksponentfunkciju lieto, lai matemātiski raksturotu noguldījumus.

Metodiskais komentārs

Ieteikums laika plānojumam	Sadalai "Eksponentfunkcija" plānotas 10 m. s., sadalai "Skaitļa logaritms" – 5 vai 6 m. s., bet sadaļai "Eksponentvienādojumi un nevienādības" – 14 vai 15 m. s. Summatīvajam pārbaudes darbam plānotas 2 m. s. Skolotājs, ievērojot savu pieredzi vai skolēnu vajadzības, laika plānojumu temata ietvaros koriģē pēc saviem ieskatiem.
Jauno zināšanu konstruēšana un paškontrole	<p>Konkrētos piemēros raksturo kopīgo un atšķirīgo eksponentfunkcijai, piemēram, $y = 2^x$ un ģeometriskais progresijai ($b_n = 2^n$).</p> <p>Digitālo rīku, piemēram, programmas/lietotnes Desmos vai Geogebra izmantošana dažādu grafiku konstruēšanai mainot koeficientus, dod iespēju skolēniem konstruēt pašiem jaunās zināšanas – saskatīt saistību starp funkcijas formulu un atbilstošā grafika novietojumu, secināt par eksponentfunkcijas grafika formu u. tml.</p> <p>Digitālos rīkus skolēni izmanto kā paškontroles rīku, piemēram, nosakot vai funkcijas grafika skice izveidota atbilstoša, vai vienādojuma grafiskā paņēmiena lietošana ļauj pietiekami precīzi noteikt saknes vai to skaitu.</p>
Induktīva un deduktīva spriešana	Konkrētos piemēros formulē pieņēmumus par logaritmu īpašībām, spriež vispārīgi un pamato pieņēmumus, izmanto zināšanas par pakāpju (ar vienādām bāzēm) īpašībām.
Par logaritmumu. Matemātikas valodas lietojums	<p>Jaunu jēdzienu – logaritms – iegūst, risinot eksponentvienādojumu situācijā ar citas jomas kontekstu.</p> <p>Kursā apgūst darbības ar logaritmiem, lai aprēķinātu skaitlisku izteiksmju vērtības.</p> <p>Ieteicams pievērst uzmanību tam, vai skaitlisku izteiksmi, kas satur logaritmus, var pierakstīt pēc dzirdētā, korekti izlasīt, paskaidrot katra simbola nozīmi.</p> <p>Bāzes maiņas formulas lietojumā akcentēt pāreju uz decimāllogaritmiem, ilustrējot ar konkrētiem citu jomu kontekstiem, kur vairumā gadījumu tiek lietoti decimāllogaritmi.</p>

Analitiskā ģeometrija I		Varbūtība un statistika I		Algebra I		Trigonometrija I		Algebra I		Ģeometrija I	
1. Vektori un kustība	2. Līnijas vienādo- jums	3. Kombi- natorika un varbūtība	4. Statistika	5. Daļveida funkcija, algebriskās daļas	6. Daļveida vienādo- jumi un nevienā- dības	7. Sinusa un kosinusa funkcijas	8. Trigono- metriskās izteiksmes un vienā- dojumi	9. Pakāpe ar racionālu kāpinātāju, ģeomet- riskā pro- gresija	10. Eksponent- funkcija	11. Taisnes un plak- nes telpā, daudz- skaldņi	12. Rotācijas ķermenī, telpisku ķermenē kombinā- cijas

Stereometrija I

11. Taisnes un plaknes telpā, daudzskaldņi

Ieteicamais laiks temata apguvei: 38 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: sistematizēt un padzīlināt zināšanas par telpisku figūru un telpisku (ģeometrisku) ķermenē savstarpējo novietojumu, īpašībām, attēlošanu plaknē un raksturīgo lielumu noteikšanu.

Sasniedzamie rezultāti

Zīņas	Prasmes
<ul style="list-style-type: none"> Plakni viennozīmīgi nosaka 1) jebkuri trīs punkti, kas neatrodas uz vienas taisnes, 2) taisne un punkts, kas tai nepieder; 3) divas krustiskas taisnes; 4) divas paralēlas taisnes. (M.Li.2.; M.Li.6.) Pēc savstarpējā novietojuma telpā divas taisnes var būt krustiskas, paralēlas vai šķērsas. (M.Li.1.; M.Li.6.) Taisne un plakne telpā var būt novietotas tā, ka: 1) taisne atrodas plaknē, 2) taisne krusto plakni (viens kopīgs punkts), 3) taisne un plakne ir paralēlas (nav kopīgu punktu). (M.Li.2.; M.Li.6.) Divas plaknes telpā var būt novietotas tā, ka: 1) plaknes šķeļas (kopīga taisne), 2) plaknes ir paralēlas (nav kopīgu punktu). (M.Li.2.; M.Li.6.) Daudzskaldni šķeļot ar plakni, katrai daudzskaldņa skaldnei un plaknei vai nu ir kopīgs nogrieznis, vai ir viens kopīgs punkts, vai arī nav kopīgu punktu. Šķēlums ir plaknes daudzstūris, kura malas atrodas uz daudzskaldņa virsmas. (M.Li.2.; M.Li.6.) Veidojot telpisku figūru attēlus plaknē ar paralēlās projicēšanas metodi (ir arī citas) saglabājas paralelitāte un taisnes nogriežņu garumu attiecība. (M.Li.2.; M.Li.6.) Lenķis starp divām šķērsām taisnēm a un b ir vienāds ar lenķi, ko veido krustiskas taisnes, kas attiecīgi paralēlas taisnēm a un b. Telpā perpendikulāras (lenķis starp tām 90°) var būt gan divas krustiskas taisnes, gan divas šķērsas taisnes. (M.Li.6.) Lenķis starp taisni un plakni ir lenķis starp taisni un tās projekciju plaknē. (M.Li.6.) Divplakņu kakts ir figūra, ko veido divas pusplaknes (neatrodas vienā plaknē) ar kopīgu šķēluma taisni. Divplakņu kakta lenķi iegūst, no brīvi izvēlēta kopīgās šķēluma taisnes punkta abās skaldnēs novelket staru perpendikulāri šķautnei. (M.Li.2.; M.Li.6.) Lenķa lielums telpisku figūru un telpisku kermeņu attēlojumos plaknē nesaglabājas, tāpēc lenķa lielums, t. sk. perpendikularitāte, jāpamato, lai nekļūdītos spriedumos par figūras īpašībām. (M.Li.2.; M.Li.6.) Ja taisne, kas atrodas plaknē, ir perpendikulāra pret slīpnes projekciju šajā plaknē, tad tā ir perpendikulāra arī pret pašu slīpni un otrādi. Šīs teorēmas lieto, lai noteiktu un pamatotu, vai lenķis ir taisns. (M.Li.2.; M.Li.6.) Piramīda ir daudzskaldnis, kuras viena skaldne (pamats) ir n-stūris, bet pārējās skaldnes (sānu skaldnes) ir trijstūri ar kopīgu virsotni. (M.Li.6.) 	<ul style="list-style-type: none"> Raksturo un pamato divu taišņu, taisnes un plaknes, divu plakņu savstarpējo novietojumu telpiskās figūrās. Lieto atbilstošus simbolus, pieņemtos apzīmējumus un jēdzienus figūru savstarpējā novietojuma raksturošanai, spriedumu un uzdevumu atrisinājuma pierakstīšanai. Veido telpisku figūru un daudzskaldņu attēlus plaknē. Veido un/vai raksturo daudzskaldņa diagonālšķēlumu un šķēlumu ar plakni, ja dotie plaknes punkti ir tieši savienojami. Lieto sakarību starp slīpni, slīpnes projekciju un perpendikulu, sakarību starp slīpņu un to projekciju garumiem, triju perpendikulu teorēmu, lai formulētu un pamatotu apgalvojumus un aprēķinātu nezināmos lielumus, t. sk. prizmās un piramīdās. Lieto plakņu perpendikularitātes pazīmi, divplakņu kakta lenķa un attāluma līdz plaknei definīciju, lai formulētu un pamatotu apgalvojumus, noteiktu nezināmos lielumus, t. sk. prizmās un piramīdās. Nosaka un pamato raksturīgos lielumus piramīdā, piemēram, augstums, sānu skaldnes augstums, lenķis starp sānu šķautni un pamata plakni, divplakņu kakta lenķis pie pamata šķautnes u. tml.

Komplekss sasniedzamais rezultāts	Ieradumi
<ul style="list-style-type: none"> Izmantojot modeļus vai digitālos rīkus, pēta, raksturo un pamato taišņu un plakņu savstarpējo novietojumu telpā, daudzskaldņa šķēlumu ar plakni, piramīdas, t. sk. neregulāras, virsotnes projekciju pamata plaknē u. tml. (M.O.1.2.1.; M.O.2.3.1.; M.O.6.3.1.; M.O.6.3.2.; M.O.6.3.4.) Konkrētos piemēros pēta un formulē secinājumus par plaknes figūras un telpiska ķermenē attēlošanu paralēlajā projicēšanā. (M.O.1.2.1.; M.O.2.1.1.; M.O.6.3.3.) Sadarbojas un veido pierādījumu teorēmai par slīpnu un to projekciju garumu salīdzināšanu, triju perpendikulu teorēmai; formulē un pierāda to apgrieztās teorēmas; izvērtē citu grupu veidotos pierādījumus, formulē jautājumus, raksturo pierādīto teorēmu iespējamo lietojumu. (M.O.2.3.1.; M.O.2.3.3.; M.O.6.3.2.) Plāno praktiskas problēmas risinājumu, pieņem lēmumu par nepieciešamajiem pamatojumiem vai modeļa izstrādi, veic prizmas vai piramīdas lielumu aprēķinus, vārdiski un rakstiski prezentē savu risinājumu konkrētai auditorijai. (M.O.1.1.2.; M.O.2.2.1, M.O.6.3.5.) <p>Jēdzieni: prizmas/piramīdas augstums, paralēlā projicēšana, slīpne, slīpnes projekcija, triju perpendikulu teorēma, leņķis starp pamata plakni un šķautni, divplakņu kakts, divplakņu kakta leņķis, daudzskaldņa šķēlums ar plakni, diagonālšķēlums.</p>	<ul style="list-style-type: none"> Neskaidrās situācijās veido skici, zīmējumu vai situācijas modelēšanai izmanto digitālos rīkus, attīstot ieradumu plānot un vadīt savu domāšanas procesu. Sadala uzdevuma atrisinājumu soļos un plāno tā izkārtojumu lapā, attīstot ieradumu strukturēti un uzskatāmi attēlot informāciju, vārdisko un rakstisko tekstu veidot saistītu un citiem saprotamu.

Temata apguves norise

Taišņu un plakņu savstarpējais novietojums telpā	<p>Skaidro, ilustrē ar piemēriem jēdzienus telpiska figūra, telpisks (géometrisks) ķermenis, daudzskaldnis, virsma, plakne.</p> <p>Spriež, iztēlojas, modelē praktiski vai, izmantojot digitālos rīkus, lai noteiku un skaidrotu punktu, taišņu un plakņu savstarpējo stāvokli vienkāršās situācijās: 1) ko var secināt par taisni AB, ja zināms, ka punkti A un B atrodas plaknē α, 2) ko var secināt par divām plaknēm, ja zināms, ka tām ir viens kopīgs punkts, 3) cik daļas telpu var sadalīt divas plaknes u. tml.</p> <p>Definē piramīdu; izvērtē citu veidotās definīcijas, skaidro savu definīciju, atbild uz jautājumiem, precīzē definīciju.</p> <p>Dots daudzskaldņa attēls, uz kura šķautnēm un/vai skaldnēm atlikti 2 vai 3 punkti, piemēram, trijsūra piramīda $SABC$ un $M \in SB$, $N \in SA$, $K \in ASC$. Sadarbojas pāri, lai meklētu atbildes uz jautājumiem par punktu, taišņu/nogriežņu un plakņu savstarpējo novietojumu, piemēram, vai punkti K, S, M un N atrodas vienā plaknē; vai taisnes SK un AC atrodas vienā plaknē; vai taisnes MN un CB ir krustiskas u. tml. Apspriež atbildes, cenšas veidot pamatojumu, izvērtē esošo zināšanu pietiekamību.</p> <p>Tad aplūko kāda cita ķermene, piemēram, kuba attēlu (virsotnes un uz virsmas atliktie punkti nosaukti ar burtiem) un katrs pāris formulē 2 vai 3 apgalvojumus par punktu, taišņu/nogriežņu un plakņu savstarpējo novietojumu, par kura patiesumu nešaubās un var to pamatot, un 2 vai 3 tādus apgalvojumus, kura patiesums ir neskaidrs; savstarpēji apspriež, izvērtē iespējas pamatot, izmantojot esošās zināšanas.</p>
---	---

<p>Taišņu un plakņu savstarpējais novietojums telpā</p>	<p>Spriež, iztēlojas, modelē praktiski vai, izmantojot digitālos rīkus, lai noteiktu un skaidrotu, cik dažādu plakņu var novilkta caur vienu punktu, caur diviem punktiem, caur trim punktiem, kas neatrodas uz vienas taisnes. Secina, ka trīs punkti, kas neatrodas uz vienas taisnes, nosaka plakni. Spriežot nosaka un pamato, cik dažādu plakņu var novilkta caur četriem punktiem; secina, ka četri telpas punkti, kas neatrodas vienā plaknē ir kādas trijstūra piramīdas virsotnes.</p> <p>Sadarbojas pāri/mazā grupā un pēta, secina par citiem plaknes novilkšanas/uzdošanas veidiem. Vingrinās daudzskaldņa attēlā nosaukt/parādīt/novilkta un pamatot plakni, ko nosaka doti elementi, piemēram, kuba $ABCDA_1B_1C_1D_1$ šķautne AA_1 un virsotne C.</p> <p>Izmanto kuba attēlu (virsotnes nosauktas) un klasificē/grupē taišņu (caur 2 virsotnēm) pārus pēc to savstarpējā novietojuma; secina, ka divas taisnes telpā var būt novietotas tā, kas tās nav ne paralēlas, ne krustiskas. Definē šķērsas taisnes. Vingrinās noteikt un pamatot divu taišņu savstarpējo novietojumu citu daudzskaldņu attēlos, t. sk., izmantojot digitālos rīkus.</p> <p>Patstāvīgi lasa matemātisku tekstu, lai noskaidrotu paralēlu taišņu īpašības, veido skici, formulē jautājumus neskaidrību gadījumā; izmanto īpašības, lai pamatotu dota daudzskaldņa divu šķautņu savstarpējo novietojumu, ievērojot daudzskaldņa īpašības vai dotos nosacījumus.</p> <p>Taisnes a un b ir krustiskas; spriež un uzzīmē taisni c tā, lai a) c ir šķērsa gan ar a, gan ar b, b) c ir šķērsa ar a, bet nav šķērsa ar b, c) c nav šķērsa ne ar a, ne ar b; veido zīmējumu ar roku vai izmantojot digitālos rīkus, skaidro atrisinājumu.</p> <p>Sadarbojas pāri/mazā grupā un nosaka, cik kopīgu punktu var būt taisnei un plaknei, ja tās novietotas telpā. Veido ilustratīvu apkopojumu, lai atrisinājumu skaidrotu citiem, uzklausa citu iegūtos rezultātus. Vingrinās lietot simbolus, lai pierakstītu punktu, taišņu un plakņu savstarpējo novietojumu. Skaidro simbolu (pieder, nepieder, paralēls, šķēlums/kopīgā daļa) lietojumu, raksturo jau zināmo par to lietojumu citos matemātikas kontekstos.</p> <p>Izmanto digitālos mācību līdzekļus, piemēram, [1], un raksturo taišņu un plakņu savstarpējo novietojumu paralēlskaldnī.</p> <p>Vingrinās raksturot taišņu un plakņu savstarpējo novietojumu daudzskaldņos; atsevišķos gadījumos veido pamatojumu, t. sk., uzzīnu literatūrā patstāvīgi atrodot un izmantojot nepieciešamo informāciju (piemēram, taisnes un plaknes paralelitātes pazīmi).</p> <p>Sadarbojas pāri/mazā grupā un nosaka, cik kopīgu punktu var būt divām plaknēm telpā; izpētei izmanto digitālos rīkus. Formulē secinājumus, uzklausa un izvērtē citu iegūtos rezultātus. Definē paralēlas plaknes. Secina, ka divas plaknes var šķelties tikai pa taisni.</p> <p>Vingrinās raksturot divu plakņu, taisnes un plaknes savstarpējo novietojumu daudzskaldņos; izsaka domas, vai kādā situācijā divu plakņu vai plaknes un taisnes savstarpējais novietojuma rada šaubas. Izmanto uzzīnu literatūru, lai atrastu nepieciešamo teorētisko pamatojumu, piemēram, teorēmas par divu paralēlu plakņu šķelšanu ar trešo plakni, divu plakņu paralelitātes pazīmi u. tml.</p>
<p>Figūru attēlošana plaknē. Daudzskaldņa šķēlums ar plakni</p>	<p>Izmantojot gaismas avotu, pēta dažādu daudzstūru un telpisku kermeņu modeļu ēnu attēlus. Secina par objektu attēlošanos plaknē. Savus secinājumus salīdzina ar informācijas avotos pieejamo informāciju par projicēšanu, tās veidiem.</p> <p>Sadarbojas, spriež vai modelē praktiski/izmanto digitālos rīkus, lai noskaidrotu, kādi telpiska kermeņa lielumi saglabājas, kādi – nesaglabājas, veido rezultātu apkopojumu, prezentē to, uzklausa citu iegūtos rezultātus. Salīdzina iegūtos rezultātus ar uzzīnu literatūrā aprakstītajiem.</p> <p>Vingrinās zīmēt prizmas un piramīdas, ievērojot formulētos nosacījumus. Nelielās grupās salīdzina savus zīmējumus un stāsta, kā tos ir veidojuši.</p>

<p>Figūru attēlošana plaknē. Daudzskaldņa šķēlums ar plakni</p>	<p>Sadarbojas, izmanto praktiskus modeļus vai digitālos rīkus un pēta daudzskaldņa šķēlumu ar plakni, piemēram, pēta kuba šķēlumu ar plakni ar mērķi 1) raksturot kuba un šķēluma plaknes kopīgo daļu, 2) raksturot šķelšanas rezultātā iegūtās kuba daļas. Pirms pētījuma kopīgi izstrādā pētījuma vērtēšanas kritērijus. Ja nepieciešams, pētījuma laikā konsultējas ar skolotāju. Veido rezultātu apkopojumu, prezentē to, uzskausa citu iegūtos rezultātus, apspriež tos, veic nepieciešamos precizējumus un labojumus savos rezultātos. Saīdzina iegūtos rezultātus ar uzzīnu literatūrā aprakstītajiem, formulē secinājumus, kas izdevās labi, kas sagādāja grūtības u. tml.</p> <p>Skaidro, kas ir prizmas diagonāle, diagonālšķēlums, vingrinās nosaukt/attēlot diagonālšķēlumus dažādās prizmās. Vienkāršās situācijās aprēķina prizmas nezināmos lielumus, t. sk. diagonāles garumu, diagonālšķēluma laukumu.</p> <p>Zīmē, raksturo prizmas un piramīdas šķēlumu ar plakni, ja dotie šķēluma plaknes punkti ir tieši savienojami; pamato šķēlumu, izmantojot īpašības, kas raksturo taišu un plakņu savstarpējo novietojumu, piemēram, veido kuba $ABCDA_1B_1C_1D_1$ šķēlumu ar plakni, kas iet caur punktiem D, A_1 un B_1; vingrinās. Vienkāršās situācijās aprēķina daudzskaldņu nezināmos lielumus.</p> <p>Zīmē, raksturo piramīdas šķēlumu ar plakni, kas iet caur piramīdas augstumu. Zīmē, t. sk., izmantojot digitālos rīkus, raksturo piramīdas šķēlumus ar plakni, ja tie paralēli pamatam/perpendikulāri augstumam. Vienkāršās situācijās aprēķina piramīdas nezināmos lielumus, t. sk., izmantojot trijstūru līdzību.</p> <p>Sadarbojas pārī un veido daudzskaldņa šķēlumu ar plakni jaunā/kompleksā situācijā, piemēram, kubs $ABCDA_1B_1C_1D_1$ tiek šķelts ar plakni, kas iet caur B, C_1 un šķautnes DD_1 viduspunktu; ja nepieciešams, veic izpēti, izmantojot praktiskus modeļus vai digitālos rīkus, attēlo šķēluma zīmējuma plaknē un skaidro, pamato šķēluma uzzīmēšanas gaitu.</p>
<p>Taišņu un plakņu perpendikularitāte</p>	<p>Izsaka idejas, kā noteikt leņķi starp šķērsām taisnēm. Sadarbojas pārī un veido definīciju leņķim starp šķērsām taisnēm, salīdzina ar mācību literatūrā doto. Analizē informāciju dotā taisnas prizmas zīmējumā un nosauc vai formulē pieņēmumus, kuras divas taisnes ir perpendikulāras, kuras divas plaknes ir perpendikulāras, kuras no taisnēm ir perpendikulāras kādai plaknei. Izvērtē konkrēto apgalvojumu patiesumu.</p> <p>Sadarbojas pārī un izvērtē patiesumu apgalvojumam: ja taisne a ir perpendikulāra kādai taisnei b plaknē α, tad taisne a ir perpendikulāra plaknē α. Pamato, ka apgalvojums ir aplams, modeļējot praktiski un izveidojot pretpiemēru. Formulē taisnes un plaknes perpendikularitātes pazīmi; vingrinās to lietot, raksturojot un pamatojot taišņu un plakņu savstarpējo novietojumu taisnās prizmās, t. sk. paralēlskaldņos.</p> <p>Vēro dažādu vienkāršu būvkonstrukciju, sadzīves priekšmetu attēlus ar mērķi saskatīt un raksturot visām situācijām kopīgo ģeometrisko modeli – pret plakni no punkta novilkts perpendikuls un 2 vai 4 slīpnes. Mācību literatūrā atrod definīcijas jaunajiem jēdzieniem “perpendikuls, kas novilkts no punkta pret plakni”, “slīpne un tās projekcija plaknē” un tos izmanto, lai raksturotu nogriežņus un to savstarpējo novietojumu piramīdu un prizmu attēlos.</p> <p>Modelē praktiski (kociņi, plastilīns u. tml.) vai veido telpiskas figūras zīmējumu atbilstoši nosacījumiem, piemēram, pret plakni no punkta novilktais divas slīpnes, turklāt to projekcijas ir perpendikulāras savā starpā. Vienkāršās situācijās aprēķina nezināmos lielumus (perpendikula, slīpnes un slīpnes projekcijas garums), izmantojot Pitagora teorēmu, vienādsānu trijstūra īpašības u. tml.</p> <p>Izsaka idejas, kā noteikt leņķi starp taisni un plakni, ja tas nav taisns; skaidro savu ideju, izmantojot zīmējumu vai modeļējot praktiski. Definē leņķi starp taisni un plakni. Vingrinās piramīdu attēlos parādīt/iezīmēt leņķus starp taisni un plakni, ja nepieciešams, uzzīmē perpendikulu un slīpņu projekcijas. Vienkāršās situācijās aprēķina regulāras piramīdas nezināmos lielumus, izmantojot sakārības taisnleņķa trijstūri, t. sk. šaurā leņķa sinusu, kosinusu, tangensu.</p>

Taišņu un plakņu perpendikularitāte	<p>Sadarbojas, pēta un formulē sakarības starp slīpņu un to projekciju garumiem, veido pamatojumu. Aprēķina nezināmos lielumus situācijās, kurās jāizmanto slīpņu un to projekciju garumu salīdzināšana.</p> <p>Praktiski veido modeli/telpisku figūru atbilstoši nosacījumiem (mērķis – konkrētā piemērā ilustrēt triju perpendikulu teorēmas saturu): piramīdas pamats ir taisnstūris, bet piramīdas augstuma pamats ir viena no taisnstūra virsotnēm. Izmanto modeli, lai veidotu zīmējumu un skaidrotu figūras lielumus. Nosaka, kāda veida trijstūris ir katras skaldne; pastāsta, par kura trijstūra veidu ir pārliecināts, bet par kura – nav. Lasa, pārī apspriež un praktiski modelē triju perpendikulu teorēmu un tai apgriezto teorēmu.</p> <p>Vingrinās lietot triju perpendikulu teorēmu, telpiskās figūrās un telpiskos ķermeņos pamatojot taišņu/nogriežņu savstarpējo novietojumu, leņķa lielumu/trijstūra veidu; aprēķinot nezināmos lielumus.</p> <p>Lieto apgūtās zināšanas pazīstamās un jaunās situācijās, piemēram, izmantojot mācību līdzekli [4].</p> <p>Izsaka idejas, kā izmantot praktiskus modeļus, lai skaidrotu un noteiktu leņķi starp divām plaknēm; uzklausa citu formulētās idejas. Salīdzina formulētās idejas ar mācību literatūrā atrodamo – lasa divplakņu kakta definīciju, divplakņu kakta leņķa lieluma definīciju.</p> <p>Grupā plāno un veic izpēti/projekta darbu "Divplakņu kakta leņķa lielums jumtu konstrukcijās", apsver iespējas izmantot digitālos rīkus datu ieguvei un/vai apstrādei, plāno maketu/modelu izgatavošanu. Apkopo un prezentē projekta darba rezultātus.</p> <p>Izmanto iegūto informāciju, lai iezīmētu, skaidrotu un pamatotu divplakņu kakta leņķus dažāda veida piramīdās. Aprēķina regulāras piramīdas nezināmos lielumus, izmantojot sakarības taisnleņķa trijstūri, triju perpendikulu teorēmu.</p>
Piramīdas	<p>Definē regulāru piramīdu. Vingrinās, aprēķinot nezināmo lielumu regulārā trijstūra un četrstūra piramīdā, pirms risinājuma stāsta ko un kādā secībā darīs, skaidro savu darbību risinājuma laikā.</p> <p>Ilustrē ar piemēriem, praktiski veido, uzzīmē un raksturo neregulāras piramīdas.</p> <p>Pārī apspriežas un izvērtē patiesumu apgalvojumam: "ja piramīdas sānu šķautnes ir vienāda garuma, tad piramīda ir regulāra"; izvēlas veidu, kā rīkosies – skicēs un spriedīs, modelēs praktiski vai izmantojot digitālo rīku iespējas. Formulē savus secinājumus.</p> <p>Sadarbojas un pēta īpašības trijstūra vai četrstūra piramīdai, ja tās sānu šķautnes ir vienāda garuma. Apspriež un savstarpēji papildina rezultātus ar kādu citu grupu. Veido secinājumu apkopojumu; ja nepieciešams skolotājs precizē, papildina skolēnu iegūtos rezultātus. Izmantojot dotu pierādījuma plānu pierāda teorēmu par piramīdas augstuma pamatu, ja sānu šķautnes ar pamata plakni veido vienādus leņķus. Lieto (aplūko 2 vai 3 dažādas neregulāras piramīdas) pierādīto teorēmu, lai pamatotu piramīdas īpašības, veidotu atbilstošu zīmējumu un aprēķinātu nezināmos lielumus (dotie lielumi ir konkrēti un vispārīgi uzdoti).</p> <p>Izmantojot dotu pierādījuma plānu pierāda teorēmu par piramīdas augstuma pamatu, ja sānu skaldnes ar pamata plakni veido vienādus divplakņu kakta leņķus. Lieto (aplūko 2 vai 3 dažādas neregulāras trijstūra vai četrstūra piramīdas) pierādīto teorēmu, lai pamatotu piramīdas īpašības, veidotu atbilstošu zīmējumu un aprēķinātu nezināmos lielumus (dotie lielumi ir konkrēti un vispārīgi uzdoti).</p>

Mācību līdzekļi

Mācību materiāli

Skola2030 mācību līdzeklis

[1] Geogebra.org. [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://www.geogebra.org/m/r4rpg4jq> (Taišņu un plakņu savstarpējais novietojums paralēlskaldnī)

[2] Geogebra.org. [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://www.geogebra.org/m/ZSXPZW7> (Telpisku ķermēnu šķēlums ar plakni)

[3] Geogebra.org. [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://www.geogebra.org/m/rfcwtyas> – kuba šķēlums ar plakni

[4] DZM atbalsta materiāli. [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://www.siic.lu.lv/datadir/matematika/registretieskolotaji/174.pdf> (Triju perpendikulu teorēmas lietojums)

Mācību resursi

Telpisko ķermēnu modelēšanai – iesmiņi, kociņi, krāsainie papīri; datori vai planšetes Geogebra.org izmantošanai, projektors, interneta pieslēgums.

Metodiskais komentārs

Ieteikums laika plānojumam	Sadalai “Taišņu un plakņu savstarpējais novietojums telpā” plānotas 8 m. s., sadalai “Figūru attēlošana plaknē. Daudzskaldņa šķēlums ar plakni” – 8 m. s., sadalai “Taišņu un plakņu perpendikularitāte” – 12 m. s., bet sadaļai “Piramīdas” – 8 m. s. Summatīvajam pārbaudes darbam plānotas 2 m. s. Skolotājs, ievērojot savu pieredzi vai skolēnu vajadzības, laika plānojumu temata ietvaros koriģē pēc saviem ieskatiem.
Jauno zināšanu konstruēšana	Apgūstot taišņu un plakņu savstarpējo novietojumu, iesakām to definēšanai izmantot telpisku figūru, jau pazīstamo daudzskaldņu modeļus. Skolēni vispirms modeļos saskata, raksturo jauno jēdzienu vai savstarpējo novietojumu un tad formulē vispārinājumu/definīciju, t. i. jēdzienu definēšanā virzās no konkrētā uz vispārīgo, kas ir pretēji tam, kā tradicionāli ir ierasts. Lai veidotos izpratne par to, ka projekcijas var būt dažadas, skolēni veic patstāvīgu izpēti, piemēram, pēta un matemātiski raksturo figūru ēnas. Formulētos secinājumus (to vidū var būt arī aplami) salīdzina ar teoriju, ar fizikā apgūto, lai neveidotos maldīgi priekšstati. Daudzskaldņa šķēluma ar plakni apguvi iesakām sākt ar patstāvīgu pētījumu, turklāt izpratnes veidošanai nozīmīgi izmantojami ir gan patiesie, gan aplamie secinājumi – noskaidrojot, kur un kāpēc kļūdījies spriedumos.
Par pētījumu un uzdevuma diferencēšanu	Pētījuma atvērtības un kompleksuma pakāpi nosaka skolotājs, ievērojot savu pieredzi un konkrēto skolēnu mācīšanās vajadzības. Izpētei var piedāvāt konkrētu daudzskaldni vai pētīt daudzskaldņus kopumā, pētījuma mērķi var noteikt fokusētu, piemēram, izpētīt tikai daudzskaldņa un šķēluma plaknes kopīgo daļu, var izpētei piedāvāt divus mērķus – raksturot daudzskaldņa un šķēluma plaknes kopīgo daļu, kā arī iegūtās daudzskaldņa daļas un visbeidzot, var aicināt skolēnus veikt pilnīgi atvērtu pētījumu (ko vien var secināt).

Par pierādišanu un vispārinājumu formulēšanu	Visa temata gaitā iespēju robežas veido pamatojumus, kam ne vienmēr jābūt stingri deduktīviem pierādījumiem, padziļinot izpratni/nostiprinot atziņu, ka figūras attēlojums vai atsevišķu piemēru apskatīšana u. tml. var maldināt. Nostiprina prasmes teorētisko pamatojumu sameklēt uzziņu literatūrā un paskaidrot, kā izmantot atrasto teorēmu vai definīciju, lai pamatotu konkrētā apgalvojuma patiesumu vai veiktās darbības atbilstību.
Digitālo rīku izmantošana	Ieteicams izmantot digitālos rīkus, apgūstot šķēluma konstruēšanu, piemēram, [2], [3]; svarīgi, ka skolēns var paskaidrot konstrukcijas vai risinājuma gaitu, pamatot veiktos spriedumus, lietojot matemātikas valodu.
Par projekta darbu un vērtēšanu	Projekta darba mērķis ir apgūto zināšanu un prasmju sasaiste ar dzīves darbību, konkrētajā gadījumā ar būvniecību un arhitektūru. Piedāvātais temats "Divplakņu kakta leņķa lielums jumtu konstrukcijās" (sk. temata norisi) ir tikai viens no iespējamajiem; nozīmīgi, ka skolēni paši izvēlas izpētes objektu un formulē savu darba mērķi, kas atbilst skolotāja vispārīgi formulētajam mērķim un formulētajiem nosacījumiem. Projektu var izmantot kā summatīvo darbu, kurā skolēni demonstrē kompleksu sniegumu – zināšanas un prasmes par taišņu un plakņu savstarpējo novietojumu, mērījumiem un aprēķiniem, kā arī inženierdzaina elementu lietošanu.

Analitiskā ģeometrija I		Varbūtība un statistika I		Algebra I		Trigonometrija I		Algebra I		Ģeometrija I	
1. Vektori un kustība	2. Līnijas vienādo- jums	3. Kombi- natorika un varbūtība	4. Statistika	5. Daļveida funkcija, algebriskās daļas	6. Daļveida vienādo- jumi un nevienā- dības	7. Sinusa un kosinusa funkcijas	8. Trigono- metriskās izteiksmes un vienā- dojumi	9. Pakāpe ar racionālu kāpinātāju, ģeomet- riskā pro- gresija	10. Eksponent- funkcija	11. Taisnes un plak- nes telpā, daudz- skaldņi	12. Rotācijas ķermenī, telpisku ķermenē kombinā- cijas

Stereometrija I

12. Rotācijas ķermenī, telpisku ķermenē kombinācijas

Ieteicamais laiks temata apguvei: 38 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: sistematizē un padziļina zināšanas par rotācijas ķermenē un telpisku ķermenē kombināciju īpašībām, attēlošanu plaknē un raksturīgo lielumu aprēķināšanu.

Sasniedzamie rezultāti

Zīņas	Prasmes
<ul style="list-style-type: none"> Rotācijas ķermenis veidojas plaknes figūrai rotējot ap kādu taisni (rotācijas asi), kas atrodas figūras plaknē. (M.Li.6.) Aksiālšķēlumu iegūst, rotācijas ķermenī šķēlot ar plakni, kas iet caur rotācijas asi. (M.Li.6.) Ja piramīdu vai konusu šķēl ar pamatam paralēlu plakni, svarīgi apsvērt trijstūri līdzības lietošanu iegūto plaknes figūru īpašību noteikšanai, nezināmo lielumu aprēķināšanai. (M.Li.2.; M.Li.6.) Telpisku ķermeņu virsmas laukumu var aprēķināt, izmantojot jau zināmo plaknes figūru laukumu aprēķināšanu, izņemot atsevišķus rotācijas ķermeņus. (M.Li.6.) Konusa sānu virsmas izklājums plaknē ir riņķa sektors. Konusa sānu virsmas aprēķināšanas formulas iegūst, izmantojot sakārības starp lielumiem riņķa sektorā. (M.Li.6.) Tilpuma aprēķināšanas formulas prizmai un cilindram ($V = S \cdot h$), kā arī piramīdai un konusam ($V = \frac{1}{3}S \cdot h$) satur divus mainīgos lielumus – pamata laukumu S un augstumu h. (M.Li.6.) Lodes virsmas laukuma formula $S = 4\pi R^2$ un lodes tilpuma formula $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ satur vienu mainīgo lielumu – lodes rādiusu R. (M.Li.6.) Ja telpisks ķermenis A ir ievilkts telpiskā ķermenī B, tad ķermeņa B katrā virsma (skaldne) satur vismaz vienu ķermeņa A punktu. Katrā konkrētā gadījumā svarīgi noteikt un pamatot ķermeņu A un B kopīgos punktus, līnijas vai daļas. (M.Li.2.; M.Li.6.) 	<ul style="list-style-type: none"> Uzzīmē un raksturo rotācijas ķermenī, kas veidojas plaknes figūrai rotējot ap dotu taisni, spriežot vai izmantojot digitālos rīkus. Uzzīmē un raksturo rotācijas ķermeņa aksiālšķēlumu, lodes šķēlumu ar plakni un šķēlumu raksturīgos lielumus. Lieto plaknes figūru līdzību, lai aprēķinātu regulāras četrstūra piramīdas, nošķeltas regulāras četrstūra piramīdas, konusa un nošķelta konusa elementus, ja dotie lielumi ir konkrēti un vispārīgi uzdoti lielumi. Lieto taisnas prizmas, piramīdas, cilindra, konusa, lodes virsmas laukuma aprēķināšanas formulas, lai praktiskos un matemātiskos kontekstos aprēķinātu nezināmo lielumu, formulētu un pamatotu apgalvojumus, ja dotie lielumi ir konkrēti un vispārīgi uzdoti lielumi. Lieto prizmas, piramīdas, cilindra, konusa un lodes tilpuma aprēķināšanas formulas, lai praktiskos un matemātiskos kontekstos aprēķinātu nezināmo lielumu, formulētu un pamatotu apgalvojumus Uzziņas literatūrā iegūst uzdevuma atrisināšanai nepieciešamo formulu jaunās vai neskaidrās situācijās un skaidro formulas pierakstā lietoto apzīmējumu nozīmi. Veido telpisku ķermeņu (prizma un cilindrs, prizma un lode) kombinācijas attēlus plaknē, tai skaitā ar digitālo rīku palīdzību.

Komplekss sasniedzamais rezultāts	Ieradumi
<ul style="list-style-type: none"> Konkrētos piemēros pēta un formulē nosacījumus divu telpisku ķermeņu kombinācijas eksistencei, izvēlas situācijai piemērotāko attēlošanas veidu, t.sk., izmantojot digitālos rīkus. (M.O.2.1.2.; M.O.2.3.1.; M.O.6.3.5.) Aprēķina nezināmos lielumus, formulē un pamato apgalvojumus, ja dotas ķermeņu kombinācijas (prizma un cilindrs, piramīda un konuss, prizma un lode) un dotie lielumi ir konkrēti un vispārīgi uzdoti lielumi. (M.O.6.3.5.; M.O.2.3.1.) Pamato formulas konusa sānu virsmas laukuma aprēķināšanai, izmantojot sānu virsmas izklājumu, zināšanas par riņķa sektoru, tā raksturīgiem lielumiem. (M.O.2.1.1.; M.O.2.3.1.; M.O.6.3.5.) Modelē algebriski sakarības starp telpisku ķermeņu lielumiem, lai noteiktu prasītos lielumus vai lieluma vērtību, ievērojot dotos nosacījumus, piemēram, mazāko/lielāko iespējamo vērtību. (M.O.2.2.1.; M.O.6.3.5.) Sadarbojas un veic projekta darbu, piemēram, par optimālo risinājumu, plānojot taras formu un izmērus, ievērojot dotos nosacījumus – veido risinājumu, izvēlas tā attēlošanas veidu un prezentē to, izmantojot klasē kopīgi apspriestos un izveidotos vērtēšanas kritērijus par projekta darbu kopumā. (M.O.1.1.2.; M.O.2.2.1.; M.O.6.3.5.) 	<ul style="list-style-type: none"> Izsaka idejas par rotācijas ķermeņu praktisku izveidošanu, attīstot ieradumu zināšanas saistībā ar savu pieredzi. Veic telpisku ķermeņu un to kombināciju izpēti ar digitāliem rīkiem, attīstot ieradumu meklēt risinājumu nepazīstamās situācijās.

Jēdzieni: rotācijas ķermenis, telpisku ķermeņu kombinācijas.

Temata apguves norise

Rotācijas ķermenī	<p>Izsaka idejas, kā tiek veidotas detaļas, kurām ir precīza lodes forma vai kā tēlnieki panāk to, ka trauki ar liektām formām ir precīzi simetriiski u. tml. Apsriežas mazā grupā un formulē idejas par to, kā visas šīs situācijas kopumā aprakstīt matemātiski.</p> <p>Praktiski vai, izmantojot digitālos rīkus, piemēram, [3], modelē dažādu plaknes figūru rotāciju ap taisni/rotācijas asi. Vienkāršās situācijās prognozē, kāds rotācijas ķermenis veidosies, un otrādi – pēc rotācijas ķermeņa attēla nosaka un raksturo rotējošo plaknes figūru un rotācijas asi.</p> <p>Definē cilindru, konusu, nošķeltu konusu, lodi kā rotācijas ķermenēs. Vingrinās uzzīmēt šos rotācijas ķermenēs plaknē, attēlojot raksturīgos lielumus, t. sk. digitāli.</p> <p>Spriež, modelē praktiski vai ar digitāliem rīkus, nosaka kāda plaknes figūra veidojas, ja cilindrs tiek šķelts ar plakni, kas iet caur rotācijas asi. Sadarbojas pāri un formulē apgalvojumus, lai raksturotu cilindra aksiālšķēluma elementus, lielumus, to saistību, t. sk. ar cilindra elementiem, lielumiem, piemēram, cilindra aksiālšķēluma malu garumi sakrīt ar cilindra augstumu un pamata diametru; aksiālšķēluma diagonāle ir hipotenūza taisnleņķa trijstūri, kura katetes ir cilindra augstums un pamata diametrs; ja cilindra pamata diametrs un augstums ir vienāda garuma, tad cilindra aksiālšķēlums ir kvadrāts. Uzklausa citu izveidotos apgalvojumus, izvērtē to patiesumu, papildina vai precīzē savus apgalvojumus.</p>
-------------------	---

Rotācijas ķermenī	<p>Vingrinās aprēķināt cilindra elementus, piemēram, cilindra augstumu, ja zināms tā rādiuss un diagonālšķēluma diagonāles garums, t. sk. situācijās ar praktisku vai citas mācību jomas kontekstu.</p> <p>Spriežot, modelējot praktiski vai ar digitāliem rīkiem, nosaka, kāda plaknes figūra veidojas, ja konuss tiek šķelts ar plakni, kas iet caur rotācijas asi. Sadarbojas pārī un formulē apgalvojumus, lai raksturotu konusa aksiālšķēluma elementus, lielumus, to saistību, t. sk. ar konusa elementiem, lielumiem, piemēram, konusa aksiālšķēlums ir vienādsānu trijsstūris; konusa un tā aksiālšķēluma raksturīgos lielumus saista sakārība $R^2 + h^2 = l^2$ (R – pamata rādiuss, h – augstums, l – veidule), ko pamato Pitagora teorēma.</p> <p>Vingrinās aprēķināt konusa elementus, piemēram, konusa augstumu, ja zināms tā rādiuss un konusa aksiālšķēluma leņķis pie pamata malas, t. sk. situācijās ar citas mācību jomas kontekstu.</p> <p>Veido loģiski saistītu tekstu, lai noteiktu vai pierādītu patiesumu apgalvojumam par konusa īpašībām, piemēram, ja konusa pamata rādiuss un augstums ir vienāda garuma, tad konusa aksiālšķēlums ir taisnlenķa trijsstūris.</p> <p>Spriež, modelē ar digitāliem rīkiem, lai noteiktu un raksturotu konusa šķēlumu ar plakni, kas paralēla tā pamatam un saistību starp konusa elementiem, lielumiem un šķēluma elementiem, lielumiem. Sadarbojas pārī, lai formulētu saskatītās sakārības, t. sk. sakārības starp raksturīgo nogriežņu garumiem, ievērojot trijsstūru līdzību. Uzklauša citu secinājumus, kopīgi izvērtē un, ja nepieciešams, pamato to patiesumu, papildina vai precizē savus secinājumus.</p> <p>Vingrinās aprēķināt konusa nezināmo lielumu, ja tas šķelts ar plakni, kas paralēla tā pamatam; risinājuma ietvaros saskata un pamato trijsstūru līdzību.</p> <p>Vienkāršas situācijās aprēķina nošķelta konusa nezināmos lielumus, piemēram, aprēķina nošķelta konusa augstumu, ja doti abu pamatu un veidules garums.</p> <p>Veido loģiski saistītu tekstu, lai noteiktu vai pierādītu patiesumu apgalvojumam par konusa īpašībām, piemēram, ja konusu šķēl ar plakni, kas perpendikulāra augstumam un dala to attiecībā 1:2, tad iegūtā šķēluma laukums ir 9 reizes mazāks nekā pamata laukums.</p> <p>Spriež, modelē ar digitāliem rīkiem, lai noteiktu un raksturotu lodes šķēlumu ar plakni un saistību starp lodes elementiem, lielumiem un šķēluma elementiem, lielumiem. Sadarbojas pārī, lai formulētu saskatītās sakārības, piemēram, šķēluma rādiuss ir mazāks nekā lodes rādiuss, izņemot gadījumu, ja šķēlums iet caur lodes centru. Uzklauša, izvērtē citu secinājumus; papildina, precizē savus secinājumus.</p> <p>Vingrinās aprēķināt lodes nezināmo lielumu, ja tā šķelta ar vienu plakni vai divām paralēlām plaknēm.</p> <p>Veido loģiski saistītu tekstu, lai noteiktu vai pierādītu patiesumu apgalvojumam par lodes īpašībām, piemēram, nosaka un pamato patiesumu apgalvojumam: "ja lodi šķēl ar plakni, kas lodes rādiusu dala uz pusēm, tad šķēluma rādiuss ir 2 reizes mazāks nekā lodes rādiuss".</p> <p>Izmanto digitālos rīkus, lai pētītu, kādi telpiskie ķermenī veidojas, ja lodi šķēl ar vienu plakni vai divām paralēlām plaknēm; izmanto uzzīnu literatūru, lai noskaidrotu lietotos terminus.</p>
Virsmas laukums	<p>Sadarbojas pārī vai mazā grupā, lai veidotu jau esošo zināšanu pārskatu/kopsavilkumu "Telpisku ķermeņu virsmas laukuma aprēķināšana". Pastāsta citiem, uzklauša citu veidotos apkopojumus, pārrunā un izvērtē, papildina un precizē informāciju pierakstos. Formulē secinājumus par telpiskiem ķermeņiem, kuru virsmas laukuma aprēķināšana vēl jāapgūst.</p>

Virsmas laukums

Sadarbojas un spriež, vai izmanto dotus vai pašu veidotus taisnu prizmu un piramīdu (regulāru un neregulāru) virsmu izklājumus, lai raksturotu kopīgo un atšķirīgo virsmas laukuma aprēķināšanai prizmām un piramīdām (regulārām un neregulārām), skaidrotu, kā tas redzams formulu pierakstā.

Vingrinās noteikt nezināmo lielumu, izmantojot zināšanas par prizmas, regulāras piramīdas un neregulāras piramīdas virsmas (sānu vai pilnas) laukuma aprēķināšanu, piemēram, aprēķināt piramīdas sānu virsmu, ja tās pamats ir kvadrāts ABCD, kura malas garums ir 6, bet piramīdas augstums ir SA, kura garums ir 8.

Veido loģiski saistītu tekstu, lai noteiktu vai pierādītu patiesumu apgalvojumam par prizmas vai piramīdas elementu īpašībām, sakarībām starp to lielumiem, piemēram, nosaka un pamato patiesumu apgalvojumam: ja regulāras četrstūra prizmas pamata malas garumu palielinā 2 reizes, tad prizmas sānu virsmas laukums palielinās 4 reizes.

Pastāsta, kā veidojas cilindra virsmas laukuma formula, izmantojot zināšanas par riņķa un taisnstūra laukumu, raksturo lielumus un to apzīmējumus. Vingrinās lietot cilindra virsmas formulu situācijās, kurās dotie lielumi uzdoti vispārīgi, piemēram, noteikt cilindra sānu virsmas laukumu, ja cilindra aksiālšķēlums ir kvadrāts, kura perimetrs ir P .

Veido loģiski saistītu tekstu, lai noteiktu vai pierādītu patiesumu apgalvojumam par cilindra elementiem, lielumiem un sakarībām starp tiem, piemēram, pierādīt, ka cilindra sānu virsmas un aksiālšķēluma laukumu attiecība ir π .

Raksturo un uzskicē plaknes figūru, kas veido konusa sānu virsmu, izsaka idejas, kādi lielumi nosaka riņķa sektora laukumu (kādus lielumus mainot, mainīties sektora laukums), secina, ka riņķa sektora (konusa sānu virsmas) formula satur sektora centra leņķa lielumu un riņķa sektora rādiusu (konusa veiduli). Sadarbojas pārī un aprēķina riņķa sektora laukumu, ja dota riņķa rādiuss, piemēram, 6 cm un sektora centra leņķis, piemēram, 120° ; cenšas veidot vispārinājumu (sektora laukuma/konusa sānu virsmas formulu), izmantojot aplūkoto piemēru.

Lasa tekstu/izvedumu, kā no formulas $S = \frac{\pi l^2 \alpha}{360^\circ}$ tiek iegūta formula $S = \pi R l$, un skaidro lietotos apzīmējumus, veiktos pārveidojumus.

Vingrinās lietot konusa sānu virsmas aprēķināšanas formulas, nosakot konusa nezināmo lielumu, ja dotie lielumi uzdoti konkrēti un vispārīgi.

Veido un pamato vispārīgus spriedumus par konusa virsmas laukuma izmaiņām, ja tiek mainīts (palielinās/samazinās n reižu) kāds no lielumiem.

Spriež, plāno nezināmo lielumu aprēķināšanu nošķeltam konusam, izmantojot zināšanas par konusu (piemēram, nošķelta konusa sānu virsma kā divu konusu sānu virsmu starpība) vai atrodot nepieciešamo informāciju uzziņu literatūrā.

Atrod uzziņu literatūrā lodes virsmas laukuma formulu, vingrinās tās lietošanā; lieto to situācijas ar citu mācību jomu kontekstu, piemēram, nosaka Zemeslodes virsmas laukumu, pieņemot, kā tā ir sfēra, un salīdzina iegūto rezultātu ar reālajiem datiem, formulē secinājumus.

Veido loģiski saistītu tekstu, lai noteiktu vai pierādītu patiesumu apgalvojumam par lodes un tās virsmas elementiem, lielumiem, piemēram, pierādīt, ka lodes virsmas laukums ir 4 reizes lielāks nekā laukums lodes šķēlumam ar plakni, kas iet caur lodes centru.

Lieto zināšanas par dažādu virsmu laukuma aprēķināšanu situācijās ar praktisku kontekstu, piemēram, aprēķina dārza telts (dots attēls vai uzbūves apraksts) pagatavošanai nepieciešamo materiāla daudzumu.

Raksturo dažādu rotācijas ķermeņu virsmu un tās laukuma aprēķināšanu, vērojot animācijas vai spriežot un skicējot, saskatītās sakarības pieraksta vispārīgā veidā, veido formulas u. tml., piemēram, paralelograms rotē ap vienu no malām.

Tilpums

Sadarbojas pārī vai mazā grupā, lai veidotu jau esošo zināšanu pārskatu/kopsavilkumu "Telpisku ķermeņu tilpuma aprēķināšana". Pastāsta citiem, uzklausa citu veidotos apkopojumus, pārrunā un izvērtē, papildina un precizē informāciju pierakstos. Formulē secinājumus par telpiskiem ķermeņiem, kuru tilpuma aprēķināšana vēl jāapgūst.

Sadarbojas pārī vai mazā grupā un veido loģiski saistītu tekstu, lai pierādītu, ka piramīdas $OABCD$ tilpums ir $1/6$ no kuba $ABCDA_1B_1C_1D_1$ tilpuma (O – kuba diagonāļu krustpunkts); izmantojot savus rezultātus un video (skolotāja dots vai skolēnu sameklēti, piemēram, [8]), iegūst un raksturo sakarību piramīdas tilpuma aprēķināšanai konkrētā gadījumā; secina, ka formulas pierādījumu vispārīgā gadījumā var atrast uzziņu literatūrā, tīmeklī, bet to pierādišanai nepieciešamas zināšanas, kas pārsniedz šī kursa saturu.

Vēro video, piemēram, [4], [5], par sakārbām starp cilindra, konusa un lodes tilpumu, tā laikā fiksē informāciju par ķermeņu lielumiem, pieraksta būtiskākos apgalvojumus/spriedumus; pēc video noskatīšanās pārī apspriežas un formulē secinājumus, raksturo sakārības starp ķermeņu tilpumiem konkrētajā gadījumā; izvērtē, vai pierādīts vispārīgais gadījums, kas par to liecina. Uzklausa citu secinājumus. Iegūtos rezultātus salīdzina ar uzziņu literatūru.

Vingrinās lietot telpisku ķermeņu (prizmas, piramīdas, cilindra, konusa, nošķelta konusa, lodes un tās daļu) tilpuma formulas, lai aprēķinātu nezināmo lielumu, ja dotie lielumi uzzoti konkrēti un vispārīgi; pirms risināšanas raksturo doto situāciju, zināmos lielumus un plāno risinājuma solus, salīdzina konkrēto situāciju ar iepriekš aplūkotajām un stāsta, vai un kā tas palīdz saprast risinājumu, izmanto uzziņu literatūru.

Vingrinās veidot algebriskas izteiksmes, sastādīt vienādojumu vai nevienādību, lai noteiktu telpiska ķermeņa nezināmo lielumu, ievērojot dotos nosacījumus par sakārbām starp lielumiem; izvērtē matemātiskā atrisinājuma atbilstību kontekstam.

Risina uzdevumus ar praktisku vai citu jomu saturu, veic situācijas izpēti un nosaka kādi aprēķini būs jāveic, izvēlas atbilstošo formulu, izvērtē iegūtos rezultātus, ievērojot kontekstu, piemēram, taisnstūra paralēlskaldnim un trijstūra prizmai ir vienāda masa. Taisnstūra paralēlskaldnis ir veidots no alumīnija, kura blīvums ir $2,7 \text{ g/cm}^3$. Vai ir iespējams izveidot trijstūra prizmu no zelta, kura blīvums ir $19,320 \text{ kg/m}^3$, izmantojot dotos izmērus un ievērojot nosacījumu par vienādajām masām?

Telpisku ķermeņu un to kombināciju virsmas laukumu un tilpuma aprēķināšana

Apspriežas pārī un formulē, kas kopīgs plaknes figūru kombinācijām "riņķi ievilkts n -stūris", kas kopīgs plaknes figūru kombinācijām "ap riņķi apvilkts n -stūris"; izvērtē un argumentē, vai nosacījums "taisnleņķa trijsstūri ievilkts kvadrāts" ir viennozīmīgi saprotams.

Izsaka pieņēmumu, kādi nosacījumi raksturo telpisku ķermeņu kombinācijas "kubā ievilkta lode", "lodē ievilkts kubs". Veido loģiskus spriedumus, lai raksturotu figūru savstarpējo novietojumu vai elementu īpašības, piemēram, nosaki, cik kopīgu punktu ir kuba un tajā ievilktais lodes virsmām; nosaki, kāda sakarība saista lodes rādiusa garumu un lodē ievilkta kuba šķautnes garumu.

Izmanto digitālos mācību līdzekļus par divu telpisko ķermeņu kombinācijām, piemēram, [6], [7], lai mācītos saskaņāt un raksturot vienā plaknē esošo plaknes figūru savstarpējo novietojumu un figūru īpašības, sakarības starp viena un abu ķermeņu lielumiem. Salīdzina ar jau aplūkotajām divu telpisko ķermeņu kombinācijām, raksturo atšķirīgo un kopīgo.

Vingrinās zīmēt telpisko (ģeometrisko) ķermeņu kombinācijas paralēlā projekcijā, raksturo elementu savstarpējo novietojumu un īpašības:

1) lodei un tajā ievilktai vai apvilktai prizmai, 2) cilindram un tajā ievilktai vai apvilktai prizmai.

Sadarbojas un formulē vispārinātus nosacījumus par to, ko nozīmē telpiskā ķermenī ievilkta citu telpisku ķermenī, salīdzina ar citu grupu formulējumiem, izvērtē apgalvojumu patiesumu un izmanto piemērus vai pretpiemērus, lai pamatotu, ka formulējums nav patiess.

Izvēlas kādu no telpisko ķermeņu kombinācijām, un ar digitāliem rīkiem veido interaktīvu mācību materiālu citiem skolēniem.

Ieto zināšanas par telpisko ķermeņu virsmas laukuma un tilpuma aprēķināšanu, aprēķinot nezināmo lielumu vienkāršākajām telpisko ķermeņu kombinācijām (prizma un cilindr, prizma un lode); pirms tam plāno risinājumu, t. sk., izmantojot "spriešanu no beigām" saskata un raksturo lielumus, kas katrā no soliem tiks aprēķināts.

Veido loģiski saistītu tekstu, lai vienkāršās situācijās noteiktu un pamatotu iespēju ievilktai vai apvilktai telpiskos ķermeņus, piemēram, nosaki un pamato, vai lodi var ievilkta regulārā četrstūra prizmā, kuras augstums ir 4, bet pamata malas garums ir 3.

Sadarbojas pārī un veic izpēti/projekta darbu par optimālo risinājumu, plānojot taras (piemēram, cilindra forma) izmērus un vienību skaitu, ievērojot tajā iepildāmo vairāku vienādu produktu (piemēram, lodes forma) izmērus un doto skaitu (iespējamie nosacījumi – mazākie izdevumi pagatavošanai un/vai mazākais tilpums, ko kopā aizņem tara); prezentē savu risinājumu, uzklausa citu iegūtos rezultātus, salīdzina piedāvājumus, prognozē iespējas vēl uzlabot rādītājus vai pamato, ka sasniegts optimālais rezultāts.

Mācību materiāli

Skola2030 mācību līdzeklis

- [1] *Math is fun.* [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://www.mathsisfun.com/geometry/common-3d-shapes.html> (Telpiski ķermenē)
- [2] *Math is fun.* [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://www.mathsisfun.com/geometry/polyhedron-models.html> (Telpiski ķermenē, to virsmas izklājumi)
- [3] *Geogebra.org.* [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://www.geogebra.org/m/UMHXAvhb> (Plaknes figūras rotēšana ap asi)
- [4] https://www.youtube.com/watch?v=RZkhnlzBC_k (Sakarības starp cilindra, konusa un lodes tilpumu)
- [5] *youtube.mathematicsonline.* [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://www.youtube.com/watch?v=YNutS8elhEs> (Sakarības starp cilindra, konusa un lodes tilpumu)
- [6] *Geogebra.org.* [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams <https://www.geogebra.org/m/kMeekef2> (Cilindrā ievilkts konuss)

- [7] *Geogebra.org.* [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams <https://www.geogebra.org/m/uC6UmfHa> (Prizmā ievilkta piramīda)
- [8] *youtube.mathematicsonline.* <https://www.youtube.com/watch?v=5StzaSBF9nY> (Piramīdas tilpuma formulas iegūšana konkrētā gadījumā (kubs, ievilktais piramīdas virsotne kuba diagonālu kruspunktā)
- [9] DZM atbalsta materiāli. [tiešsaiste, skatīts 20.03.2020]. Pieejams: <https://www.siiic.lu/lv/datadir/matematika/registretieskolotaji/180.pdf> (DZM M_12_LD_07 "Lodes kubā")

Mācību resursi

Telpisko ķermenē modelēšanai – iesmiņi, kociņi, krāsainie papīri; Datori vai planšetes *Geogebra.org* izmantošanai, projektors, interneta pieslēgums.

Metodiskais komentārs

Ieteikums laika plānojumam	Sadaļai "Rotācijas ķermenēi" plānotas 12 m. s., sadaļai "Virsmas laukums" – 9 m. s., sadaļai "Tilpums" – 7 m. s., bet sadaļai "Telpisku ķermenē un to kombināciju virsmas laukumu un tilpumu aprēķināšana" – 10 m. s. Skolotājs, ievērojot savu pieredzi vai skolēnu vajadzības, laika plānojumu temata ietvaros korigē pēc saviem ieskaņiem.
Digitālo rīku izmantošana	Ieteikums izmantot digitālos rīkus (sk. piemērus Mācību līdzekļu sarakstā), kas ļauj pašiem izpētes un spriedumu rezultātā ieraudzīt un saskatīt telpisku ķermenē īpašības, sakarības starp to lielumiem, konstruēt telpiskus ķermenēus, to izklājumus un kombinācijas, veido telpas izjūtu.
Projekta darbs	Apspriežot vai formulējot projekta darba pētāmo problēmu var izmantot mācību līdzekli [9]. Projektu var izmantot kā summatīvo darbu, kurā skolēni demonstrē kompleksu sniegumu – zināšanas un prasmes par telpiskiem ķermenēiem, to kombinācijām, veic nepieciešamos mērījumus un aprēķinus un lieto inženierdzaina elementus.

Pielikumi

1. pielikums

Mācību priekšmetu kursu programmu paraugos lietotie kodi

Atsaucei uz standartu* mācību priekšmetu kursu programmu paraugos izmantoti šādi plānoto skolēnam sasniedzamo rezultātu (SR) un lielo ideju (Li) kodi. (Standarta pielikumi, kuros lietoti šie kodi, atrodami [Skola2030 tīmekļa vietnē](#).)

SR kodi

Piemērs:

VL.O.2.1.				
VL.	O.			
Mācību joma (visu mācību jomu apzīmējumus sk. tabulā)				
Kursa apguves līmenis (visu kursu apguves līmenju apzīmējumus sk. tabulā)	2.1. Mācību jomas SR kārtas numurs standartā			
	<table border="1"> <tr> <td>2.1. Izvēlas, atlasa un izmanto informāciju no dažadiem avotiem sava teksta izveidei saskaņā ar konkrētajām vajadzībām un mācību mērķiem.</td><td>2.1. Lai daudzpusīgi izzinātu noteiktu problēmu, jautājumu vai tematu un veidotu savu tekstu, mērķiecīgi izvēlas, kārti, analizē un vērtē informāciju, salīdzinot dažādos avotos publicēto tekstu saturu un tajos izmantotos valodas līdzekļus.</td><td>2.1. Pēta valodas un literatūras jautājumu atspoguļojumu plašsaziņas līdzekļos, lai pēc noteiktiem kritērijiem izvērtētu informāciju un veidotu spriedumus par šo ziņu kvalitāti, aktualitāti un izmantojamību savu tekstu izveidei.</td></tr> </table>	2.1. Izvēlas, atlasa un izmanto informāciju no dažadiem avotiem sava teksta izveidei saskaņā ar konkrētajām vajadzībām un mācību mērķiem.	2.1. Lai daudzpusīgi izzinātu noteiktu problēmu, jautājumu vai tematu un veidotu savu tekstu, mērķiecīgi izvēlas, kārti, analizē un vērtē informāciju, salīdzinot dažādos avotos publicēto tekstu saturu un tajos izmantotos valodas līdzekļus.	2.1. Pēta valodas un literatūras jautājumu atspoguļojumu plašsaziņas līdzekļos, lai pēc noteiktiem kritērijiem izvērtētu informāciju un veidotu spriedumus par šo ziņu kvalitāti, aktualitāti un izmantojamību savu tekstu izveidei.
2.1. Izvēlas, atlasa un izmanto informāciju no dažadiem avotiem sava teksta izveidei saskaņā ar konkrētajām vajadzībām un mācību mērķiem.	2.1. Lai daudzpusīgi izzinātu noteiktu problēmu, jautājumu vai tematu un veidotu savu tekstu, mērķiecīgi izvēlas, kārti, analizē un vērtē informāciju, salīdzinot dažādos avotos publicēto tekstu saturu un tajos izmantotos valodas līdzekļus.	2.1. Pēta valodas un literatūras jautājumu atspoguļojumu plašsaziņas līdzekļos, lai pēc noteiktiem kritērijiem izvērtētu informāciju un veidotu spriedumus par šo ziņu kvalitāti, aktualitāti un izmantojamību savu tekstu izveidei.		

Li kodi

Piemērs:

VSK.S. Li.6.		
VSK.	S.	
Vispārējās vidējās izglītības pakāpe		
Mācību joma	Li.6. Mācību jomas SR kārtas numurs standartā	
	<table border="1"> <tr> <td>6. Jebkurš informācijas avots, kas ataino norises sabiedrībā pagātnē un mūsdienās, ir vērtējams kritiski.</td></tr> </table>	6. Jebkurš informācijas avots, kas ataino norises sabiedrībā pagātnē un mūsdienās, ir vērtējams kritiski.
6. Jebkurš informācijas avots, kas ataino norises sabiedrībā pagātnē un mūsdienās, ir vērtējams kritiski.		

Kursu apguves līmeni apzīmējumi

V	Vispārīgais līmenis
O	Optimālais līmenis
A	Augstākais līmenis

Mācību jomu apzīmējumi

V	Valodu mācību joma		
VL	Latviešu valoda	VS	Svešvaloda
K	Kultūras izpratnes un pašizpausmes mākslā mācību joma		
S	Sociālā un pilsoniskā mācību joma		
D	Dabaszinātņu mācību joma		
M	Matemātikas mācību joma		
T	Tehnoloģiju mācību joma		
F	Veselības, drošības un fiziskās aktivitātes mācību joma		

* Ministru kabineta 2019. gada 3. septembra noteikumi Nr. 416 "Noteikumi par valsts vispārējās vidējās izglītības standartu un vispārējās vidējās izglītības programmu paraugiem".

2. pielikums

Matemātikas mācību joma

Plānotie skolēnam sasniedzamie rezultāti vispārējā vidējā izglītības standartā, beidzot optimālā apguves līmenī

VSK.M.Li.1. Matemātikas valodu izmanto saziņai un zinātniskai jēdzienu, ideju, problēmu risinājumu aprakstīšanai	
1.1. Matemātisks teksts, pieņemtie simboli un apzīmējumi	M.O.1.1.1. Lasa izvērstu matemātisku tekstu ar aktuālu matemātisku kontekstu un raksturo tā saturu, demonstrējot izpratni par tajā ieklautajiem jēdzieniem, pieņemto simbolu, apzīmējumu un matemātikai raksturīgo izteikumu formu lietojumu.
	M.O.1.1.2. Vārdiski un rakstiski veido izvērstu matemātisku tekstu konkrētai auditorijai, korekti lieto izmantotos jēdzienus, pieņemtos simbolus un apzīmējumus, lai pamatotu matemātisko objektu īpašības, formulētu idejas un raksturotu saistību starp tām, aprakstītu risinājumus un lietotos paņēmienus.
1.2. Dažādi attēlošanas veidi (reprezentācijas)	M.O.1.2.1. Skaidro, salīdzina dažādus situācijai noderīgus matemātisko objektu attēlošanas veidus, izvēlas piemērotāko un argumentē to.
	M.O.1.2.2. Skaidro matemātisku izteiksmju identiskos pārveidojumus un vienādojumu, nevienādību un to sistēmu ekvivalentos pārveidojumus; konkrētos piemēros skaidro neekvivalentus pārveidojumus.
	M.O.1.2.3. Skaidro taisnes, riņķa līnijas un vektora attēlošanu koordinātu plaknē un analītisko pierakstu; pāriet no viena attēlošanas veida uz otru, ievērojot situācijas kontekstu.
	M.O.1.2.4. Lieto saistību starp dažādu matemātikas apakšnozaru apgūtajiem elementiem, lai tos skaidrotu, attēlotu, noteiktu nezināmos lielumus un īpašības.
VSK.M.Li.2. Risināt problēmu matemātikai raksturīgi nozīmē saskatīt struktūras, sistēmas, sakarības, veidot vispārinājumus un tos pierādīt	
2.1. Spriešana (pēc analogijas, induktīva un deduktīva, lietojot matemātiskās loģikas elementus)	M.O.2.1.1. Ievērojot jaunās situācijas kontekstu, raksturo kopīgo un atšķirīgo ar līdzīgām, agrāk aplūkotām situācijām un secina par zināšanām, prasmēm un paņēmieniem, kas noderīgi problēmas atrisināšanai.
	M.O.2.1.2. Jaunā situācijā izmanto induktīvu un deduktīvu spriešanu, apzinoties, ka vispārīgu apgalvojumu patiesums jāpierāda.

2.2. Matemātiskā modelēšana un citi problēmrisināšanas paņēmieni	M.O.2.2.1. Veic visus matemātiskās modelēšanas soļus, lai atrisinātu problēmu ar citu mācību jomu vai matemātisku kontekstu. Izvērtē dažādu matemātisko modeļu lietojumu, ievērojot situācijas kontekstu.
	M.O.2.2.2. Argumentē problēmrisināšanas paņēmiena (spriežu no beigām, sadalu problēmu daļās, pāreju uz līdzīgu, vienkāršaku problēmu u. tml.) izvēli, lai atrisinātu problēmu ar pazīstamu matemātisko kontekstu.
2.3. Apgalvojumi un to patiesuma pierādīšana	M.O.2.3.1. Lieto tiešo pierādījumu, pierādot vispārīgus apgalvojumus gan ar ģeometrijas, gan ar algebras saturu, logiski saistot trīs un vairāk spriedumus, izmantojot zināmus vai iepriekš pierādītus apgalvojumus.
	M.O.2.3.2. Veido un izvērtē pretpiemērus apgalvojuma patiesuma pierādīšanai.
	M.O.2.3.3. Skaidro jēdzienus tiešā teorēma, apgrieztā teorēma, formulē teorēmai apgriezto teorēmu un izvērtē tās patiesumu.
VSK.M.Li.3. Skaitļus izmanto konkrētu, arī praktisku uzdevumu atrisināšanai. Katrai darbībai ar skaitļiem ir noteikta jēga, un to izpildei ir noteikti likumi/algoritmi.	
3.1. Skaitļa pieraksts un skaitļu salīdzināšana	M.O.3.1.1. Skaidro, kas ir n-tās pakāpes saknes, pakāpes ar racionālu kāpinātāju, logaritma, pagrieziena leņķa sinusa un kosinusa skaitliskā vērtība.
	M.O.3.1.2. Skaidro reālu skaitļu (n-tās pakāpes saknes, pakāpes ar racionālu kāpinātāju, pagrieziena leņķa sinusi, kosinus) salīdzināšanu, izmantojot attiecīgo funkciju īpašības vai grafisko attēlojumu, vienības riņķi.
3.2. Darbības ar skaitļiem, to īpašības, algoritmi	M.O.3.2.1. Skaidro saistību starp n-tās pakāpes saknes aprēķināšanu, kāpināšanu un logaritmēšanu; formulē un lieto algoritmus darbību izpildei ar n-tās pakāpes saknēm (paplašināšana/saīsināšana, sakne no reizinājuma, dalījuma, pakāpes, saknes) un logaritmiem (reizinājums, dalījums, pakāpe, bāzes maiņa) skaitlisku izteiksmju vērtības aprēķināšanai.
	M.O.3.2.2. Skaidro, formulē, lieto sakarības starp pagrieziena leņķa sinusu un kosinusu; aprēķina skaitlisko vērtību izteiksmei, kas satur sinusus, kosinusus, izmantojot sakarības starp tiem, vienības riņķi, sinusa un kosinusa funkciju īpašības, informāciju uzziņu avotos un digitālos rīkus.
	M.O.3.2.3. Veido spriedumus matemātiskos un citu mācību jomu kontekstos, izmantojot dažādas reālu skaitļu pieraksta formas.
3.3. Darbības ar skaitļiem kā reālu situāciju modeli	M.O.3.3.1. Lieto logaritmus citu mācību jomu (piemēram, bioloģijas, psiholoģijas, astronomijas, ķīmijas, ģeogrāfijas, fizikas) kontekstā.
	M.O.3.3.2. Lieto pagrieziena leņķa sinusu, kosinusu citu mācību jomu (piemēram, fizikā svārstību aprakstīšanai) kontekstā.

VSK.M.Li.4. Sakarības starp lielumiem apraksta algebriskie modelji un funkcijas; izmantojot šos modeļus problēmu risināšanai, tos pārveido, nodrošinot ekvivalenci	
4.1. Virknes	M.O.4.1.1. Saskaņa likumsakarību ģeometriskajā progresijā un pieraksta to ar vispārīgā locekļa formulu, lieto ģeometriskās progresijas pirmo n locekļu summas formulu.
	M.O.4.1.2. Nosaka virknes nezināmos locekļus, sakarības starp virknes locekļiem, ja tā uzdota vispārīgi vai rekurenti, vienkāršākos gadījumos pāriet no viena virknes uzdošanas veida uz citu.
4.2. Reāla argumenta funkcijas	M.O.4.2.1. Nosaka, vai dažādos veidos uzdota sakarība ir funkcija.
	M.O.4.2.2. Skaidro, kas ir argumenta pieaugums un funkcijas pieaugums, nosaka funkcijas pieaugumu no grafika un analītiski.
	M.O.4.2.3. Skaidro, kas ir salikta funkcija, lietojot jēdzienus iekšējā funkcija, ārējā funkcija. Saista salikto funkciju īpašības un grafiku zīmēšanu ar zināšanām par attiecīgo elementāro funkciju.
	M.O.4.2.4. Uzzīmē funkciju $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $y = kf(x)$, $y = f(kx)$ grafikus un raksturo to īpašības, izmantojot zināšanas par funkcijas $y=f(x)$ īpašībām un grafiku.
	M.O.4.2.5. Nosaka funkciju $f(x) = (ax + b)/(cx + d)$, $f(x) = ca^{kx+b}$, $f(x) = \sin(bx+c)$, $f(x) = \cos(bx+c)$ īpašības (definīcijas kopa, vērtību kopa, funkcijas nulles, vienādas zīmes intervāli, lielākā/mazākā vērtība, pāra/nepāra funkcija, periodiskas funkcijas periods) analītiski vai grafiski, lietojot dažādus funkcijas pieraksta veidus, funkcijas grafika pārbīdes un citas transformācijas.
	M.O.4.2.6. Raksturo, analizē situāciju, ja sakarību starp lielumiem raksturo funkcijas $f(x) = (ax+b)/(cx+d)$, $f(x) = ca^{kx+b}$, $f(x) = \sin(bx + c)$ un $f(x) = \cos(bx + c)$, izmantojot gan funkcijas formulu, gan grafiku.
	M.O.4.2.7. Zīmē jaunas, nezināmas funkcijas, piemēram, $f(x) = \operatorname{tg}x$, $f(x) = 2/(x^2 - 1)$ grafiku, izmantojot digitālos rīkus, un spriež par funkcijas īpašībām, izvērtē riskus maldīgu priekšstatu veidošanai.
4.4. Algebriskas izteiksmes	M.O.4.4.1. Skaidro un nosaka racionālas daļveida izteiksmes/algebriskas daļas definīcijas kopu. Aprēķina racionālas daļveida izteiksmes skaitlisko vērtību noteiktai mainīgā skaitliskajai vērtībai.
	M.O.4.4.2. Sadala izteiksmi reizinātajos, vairākkārt iznesot pirms iekavām kopīgo reizinātāju, lietojot kubu summas/starpības formulas, lai pamatotu identitātes, risinātu vienādojumus.
	M.O.4.4.3. Algebrisku daļu lasa, uzraksta pēc vārdiskā apraksta, raksturo iespējas to pierakstīt dažādos veidos, skaidro saīsināšanu, paplašināšanu.

4.4. Algebriskas izteiksmes	<p>M.O.4.4.4. Reizina un dala algebriskas daļas, kuru skaitītājā un saucējā ir monomi vai pirmās un otrās pakāpes polinomi; saskaita un atņem algebriskas daļas, ja saucēji ir pirmās vai otrās pakāpes polinomi un kopsaucēja pakāpe nepārsniedz trešo.</p> <p>M.O.4.4.5. Veic algebriskus pārveidojumus ar pakāpēm, trigonometriskām izteiksmēm, lai pamatotu identitātes, pētītu funkciju īpašības un risinātu vienādojumus.</p> <p>M.O.4.4.6. Skaidro, kas ir radiāns. Lieto sakarību starp grādiem un radiāniem, pārejot no vienas leņķa mērvienības uz otru.</p> <p>M.O.4.4.7. Secina par sakarībām starp vienādu un dažādu argumentu sinusiem un kosinusiem, lietojot vienības riņķi.</p> <p>M.O.4.4.8. Lieto sakarību $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, argumenta summas formulas un divkāršā argumenta formulas trigonometrisku izteiksmju skaitliskās vērtības aprēķināšanai, identiskai pārveidošanai un vienādojumu risināšanai.</p>
4.5. Vienādojumi, nevienādības, to sistēmas	<p>M.O.4.5.1. Atrisina pamatskolā apgūtos vienādojumus, spriežot, lietojot attiecīgo funkciju īpašības un vienādojumu atrisināšanas metodes (sadalon reizinātājos, substitūciju, grafisko paņēmienu). Atrisina nevienādību sistēmu (satur lineāras nevienādības, kvadrātnevienādības).</p> <p>M.O.4.5.2. Atrisina daļveida vienādojumu, nevienādību (saucēji ir pirmās vai otrās pakāpes polinomi un kopsaucēja pakāpe nepārsniedz trešo); izvēlas paņēmienu nevienādības atrisināšanai (pārejot uz nevienādību sistēmām, ar intervālu metodi).</p> <p>M.O.4.5.3. Atrisina eksponentvienādojumu, kas pārveidojams formā $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, un eksponentnevienādību, kas pārveidojama formā $a^{f(x)} < a^{g(x)}$, lietojot eksponentfunkcijas īpašības.</p> <p>M.O.4.5.4. Atrisina noteiktā intervālā trigonometriskos vienādojumus, kas pārveidojami formā $\sin(ax+b) = c$ un $\cos(ax + b) = c$, lietojot vienības riņķi, sinusa un kosinusa funkciju īpašības.</p> <p>M.O.4.5.5. Plāno vienādojumu atrisināšanas metožu (sadalon reizinātājos, substitūcija, grafiskais paņēmiens) lietojumu, lai atrisinātu daļveida vienādojumu, eksponentvienādojumu, trigonometrisko vienādojumu.</p> <p>M.O.4.5.6. Atrisina vienādojumus, nevienādības (pakāpe nepārsniedz otro) un to sistēmas ar diviem mainīgajiem reālo skaitļu kopā, attēlojot atrisinājumu koordinātu plaknē.</p> <p>M.O.4.5.7. Lieto vienādojumu $Ax + By = C$ kopā N, daļveida vienādojumu, eksponentvienādojumu, daļveida nevienādību, divu mainīgo vienādojumu sistēmu (daļveida vienādojums un lineārs vienādojums, eksponentvienādojums un lineārs vienādojums), lai modelētu situāciju ar matemātisku un citu mācību jomu kontekstu.</p>

VSK.M.Li.5. Datus par objektiem, situācijām, notikumiem, procesiem var matemātiski apstrādāt, analizēt, lai pieņemtu pamatotus lēmumus	
5.1. Kopas, darbības ar kopām un kombinatorikas elementi	M.O.5.1.1. Nosaka un pamato, vai kopa ir galīga/ bezgalīga, ar piemēriem ilustrē galīgu un bezgalīgu kopu. Formulē un pamato apgalvojumus, izmantojot jēdzienus kopas elements, apakškopa, tukša kopa; nosaka saistību starp skaitļu kopām N, Z, Q, R.
	M.O.5.1.2. Raksturo un pamato īpašības, kas piemīt kopas visiem elementiem. Nosaka un pamato kopas elementa un apakškopas ar noteiktu īpašību eksistenci; definē/uzdod kopu ar visu elementu sarakstu un ar formulu, piemēram, $\{a = 3n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
	M.O.5.1.3. Nosaka galīgu un bezgalīgu kopu apvienojumu, šķēlumu un starpību pazīstamās un jaunās situācijās.
	M.O.5.1.4. Elementu/objektu skaitu nosaka, spriežot un veicot pilno pārlasi, pamatojot savus spriedumus.
	M.O.5.1.5. Skaidro jēdzienus izlase, kombinācijas, variācijas un permutācijas, to savstarpējo saistību un saistību ar jēdzieniem kopa un apakškopa.
	M.O.5.1.6. Lieto formulas permutāciju, variāciju un kombināciju skaita aprēķināšanai un sakarību $C_n^k = C_n^{n-k}$; izvērtē iespējas noteikt objektu skaitu, spriežot un veicot pilno pārlasi vai lietojot kombinatorikas formulas.
5.2. Varbūtību teorijas elementi	M.O.5.2.1. Skaidro, kas ir eksperiments/mēģinājums, definē notikumu, iznākumu kopu, pretējo notikumu, drošu notikumu, neiespējamu notikumu; konkrētos piemēros nosaka iznākumu kopu, nosauc droša, neiespējama un pretēja notikuma piemērus.
	M.O.5.2.2. Spriež, lieto formulas permutāciju, variāciju un kombināciju skaita aprēķināšanai, nosaka notikumam labvēlīgo iznākumu skaitu, visu iznākumu skaitu un aprēķina notikuma varbūtību.
	M.O.5.2.3. Skaidro, kas ir notikuma absolūtais biežums, definē notikuma relatīvo biežumu/ statistisko varbūtību; aprēķina statistisko varbūtību, formulē datos balstītus secinājumus.
	M.O.5.2.4. Nosaka, attēlo ar Eilera-Venna diagrammu divu notikumu apvienojumu, šķēlumu, starpību. Izmanto darbības ar notikumiem, lai skaidrotu un aprēķinātu varbūtību, t. sk. nesavienojamu notikumu apvienojuma varbūtību.
	M.O.5.2.5. Skaidro, kas ir nosacītā varbūtība, un atšķirību starp $P(A \mid B)$ un $P(B \mid A)$; aprēķina nosacīto varbūtību, izmantojot notikumu biežumu.
	M.O.5.2.6. Pamato, kāpēc dotie notikumi ir vai nav neatkarīgi, izmantojot nosacīto varbūtību. Aprēķina varbūtību, lietojot varbūtību reizināšanas teorēmu.

5.3. Statistikas elementi	M.O.5.3.1. Skaidro, kas ir populācija (ģenerālkopa), izlase, nosacījumus reprezentatīvas izlases veidošanai; izmanto IT rīkus, lai raksturotu un pamatotu izlašu un populācijas (ģenerālkopas) raksturlielumu atšķirību, secina par izlašu raksturlielumu izmaiņām, palielinot izlašu apjomu.
	M.O.5.3.2. Raksturo kvantitatīvus un kategorīlus (kvalitatīvus) datus. Attēlo tos biežuma tabulās vai grafiski vienam vai diviem mainīgiem lielumiem (pazīmēm), izmantojot IT rīkus.
	M.O.5.3.3. Atbilstoši datu veidam (diskrēti, nepārtraukti), izmantojot reālu datu piemērus un IT rīkus, nosaka datu kopas vidējos lielumus (aritmētiskais vidējais, mediāna, moda), izklieces mērus (amplitūda, standartnovirze, vidējā absolūtā novirze, kvartiles, starpkvartīlu amplitūda), veido grafiskos attēlojumus (stabiņu un kastu diagramma, izklieces diagramma, histogramma) un formulē ar datiem pamatotus secinājumus.
	M.O.5.3.4. Argumentēti raksturo pētījumu/ eksperimentu, tā mērķi, piemēram, izlases reprezentativitāti, izvēlētā mainīgā lieluma (pazīmes) atbilstību pētāmai problēmai, vidējo lielumu un izklieces mēru lietojumu u. tml.
	M.O.5.3.5. Salīdzina divas vai vairākas izlases, izmantojot vidējos lielumus, izklieces mērus, stabiņu un kastu diagrammu, izklieces diagrammu.
	M.O.5.3.6. Raksturo divu mainīgo lielumu (pazīmu) saistību, izmantojot biežuma tabulu, izklieces diagrammu, Pīrsona korelācijas koeficientu (lineāra saistība) un atbilstošus IT rīkus.
	M.O.5.3.7. Konkrētos piemēros nosaka un argumentē, vai saistība starp atkarīgo un neatkarīgo mainīgo ļauj secināt arī par cēloņsakarību.
	M.O.5.3.8. Patstāvīgi pēta divu lielumu saistību, t. sk. korelāciju, – izvēlas lielumus, plāno pētījumu un ievāc datus, izmanto IT rīkus datu apstrādei un attēlošanai, analizē datus un formulē datos balstītus secinājumus.
VSK.M.Li.6. Figūru īpašību, novietojuma, to raksturojošo lielumu izpēte ļauj risināt konkrētas, arī praktiskas, problēmas, formulēt vispārīgus secinājumus par objektiem, telpu, formu	
6.1. Plaknes figūras	M.O.6.1.1. Pierāda sinusu teorēmu, kosinusu teorēmu un tās lieto situācijās ar matemātisku vai citu mācību jomu kontekstu.
	M.O.6.1.2. Lieto paralēlo pārnesi, aksiālo simetriju, pagriezienu un homotētiju pazīstamos matemātiskos kontekstos, piemēram, lai noteiktu plaknes figūras novietojumu koordinātu plaknē, raksturotu funkcijas grafika pārbīdi, noteiktu dotai taisnei perpendikulāras taisnes virziena koeficientu.
6.2. Analītiskā ģeometrija	M.O.6.2.1. Geometriskā formā nosaka vienādi vai pretēji vērstus vektorus, vienādus vektorus, pretējus vektorus, saskaita un atņem vektorus un reizina vektoru ar skaitli. Veido spriedumus, lietojot darbību ar vektoriem īpašības, divu vektoru kolinearitātes nosacījumu. Lieto vektorus ģeometriskā formā citu mācību jomu vai matemātiskā kontekstā.
	M.O.6.2.2. Plaknē un telpā nosaka vektora koordinātas, aprēķina vektora garumu, izpilda darbības ar vektoriem koordinātu formā, lieto vektorus koordinātu formā, lai noteiktu figūru veidu, pamatotu to īpašības.

6.2. Analītiskā ģeometrija	M.O.6.2.3. Nosaka punkta koordinātas Dekarta taisnleņķa koordinātu sistēmā telpā, ievērojot dotos nosacījumus, attēlo zīmējumā; aprēķina attālumu starp diviem punktiem koordinātu plaknē un telpā.
	M.O.6.2.4. Attēlo koordinātu plaknē taisni, ja tā uzdota analītiski, un uzraksta taisnes vienādojumu pēc tās attēla koordinātu plaknē, t. sk. ja tā paralēla ordinātu asij, lieto taisnes atklāto vienādojumu, vienādojumu ar virziena koeficientu, vienādojumu caur diviem punktiem, vispārīgo vienādojumu, pāriet no viena veida uz citu; izvēlas taisnes uzdošanas veidu un to lieto, lai noteiktu figūru veidu, pamatotu to īpašības.
	M.O.6.2.5. Formulē un lieto sakarības starp koeficientiem paralēlu un perpendikulāru taišņu vienādojumos.
	M.O.6.2.6. Formulē saistību starp taisni, kas uzdota ar vispārīgo vienādojumu $Ax + By + C = 0$, un vektoru, kura koordinātas ir $(A; B)$, lieto to figūru īpašību noteikšanai.
	M.O.6.2.7. Nosaka sakarības $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ punktu ģeometrisko vietu un otrādi – veido riņķa līnijas vienādojumu pēc tās attēlojuma koordinātu plaknē, zinot riņķa līnijas centra koordinātas un rādiusu.
6.3. Telpiski ķermeņi	M.O.6.3.1. Spriež, formulē nosacījumus plaknes novilkšanai, īpašības un pazīmes, kas raksturo taisnes un plaknes, divu plakņu paralelitāti un perpendikularitāti, lai raksturotu, pamatotu telpisku ķermeņu īpašības.
	M.O.6.3.2. Definē perpendikulu, slīpni, slīpnes projekciju, leņķi starp taisni un plakni, divplakņu kakta leņķi, formulē un pamato sakarības starp slīpnu un to projekciju garumiem, triju perpendikulu teorēmu, lai raksturotu, pamatotu telpisku ķermeņu īpašības, aprēķinātu to lielumus.
	M.O.6.3.3. Veido zīmējumu, ievērojot nosacījumus par to, kādi telpiska ķermeņa lielumi saglabājas, kādi – nesaglabājas.
	M.O.6.3.4. Formulē spriedumus par daudzskaldņa šķēlumu ar plakni, veido daudzskaldņa šķēlumu ar plakni, ja dotie plaknes punkti ir tieši savienojami, attēlo un matemātiski apraksta daudzskaldņu un rotācijas ķermeņu raksturīgos šķēlumus un to lielumus.
	M.O.6.3.5. Aprēķina telpisku ķermeņu (taisna prizma, piramīda, cilindrs, konuss, lode), to daļu un vienkāršako kombināciju (prizma un cilindrs, prizma un lode) elementu raksturīgos lielumus, virsmas laukumu, tilpumu, ja dotie lielumi ir konkrēti un vispārīgi uzdoti lielumi, t. sk. lietojot plaknes figūru līdzību, sakarības starp lielumiem modelējot algebriski.

3. pielikums

Plānotie skolēnam sasniedzamie rezultāti caurviju prasmēs, beidzot vispārējās vidējās izglītības pakāpi

1. Kritiskā domāšana un problēmrisināšana:

- 1.1. mērķtiecīgi formulē precīzus jautājumus, lai kritiski analizētu kompleksas situācijas un abstraktas idejas. Izzina kontekstu, to analizē, kritiski izvērtē, kā arī sintezē un interpretē informāciju, lai sasniegtu konkrētu mērķi. Gūst vispusīgu, precīzu informāciju par kompleksiem jautājumiem, izvērtē tās ticamību un analizē, kādēļ atsevišķas situācijās iegūt ticamu informāciju ir grūti;
- 1.2. kompleksās situācijās spriež no konkrētā uz vispārīgo un no vispārīgā uz konkrēto. Pamana loģiskās argumentācijas klūdas savos un citu izteikumos, novērš tās. Argumentē, pierādot izteiktā apgalvojuma ticamību un veidojot pamatotus secinājumus;
- 1.3. nosaka aktuālas vajadzības, precīzi formulē kompleksu problēmu un pamato nepieciešamību to risināt, izvirza mērķi, piedāvā vairākus risinājumus, izvērtē tos attiecībā pret mērķi, izvēlas īstenot labāko;
- 1.4. kompleksās, neskaidrās situācijās patstāvīgi izstrādā problēmas risinājuma plānu un īsteno to, izvēloties, lietojot un pielāgojot piemērotas problēmrisināšanas stratēģijas, elastīgi reaģē uz neparedzētām pārmaiņām, izvērtē paveikto un gūtos secinājumus izmanto arī citā kontekstā.

2. Jaunrade un uzņēmējspēja:

- 2.1. interesējas par atklājumiem un inovācijām, proaktīvi meklē jaunas iespējas, kā efektīvi uzlabot savu un citu dzīves kvalitāti, rosina uzlabot esošo situāciju, pieņem nepiereķetus, kompleksus izaicinājumus, saglabā emocionālu līdzsvaru un atvērtību nenoteiktības apstākļos;
- 2.2. raugoties uz situāciju no dažādiem skatpunktiem, pamana jaunas iespējas, mērķtiecīgi un elastīgi izmanto vai attīsta pats savas ideju radīšanas stratēģijas, lai nonāktu pie jauniem un noderīgiem risinājumiem, efektīvi organizē resursus (cilvēku, zināšanu, kapitāla, infrastruktūras), lai īstenotu savu ieceri, patstāvīgi meklē, izvērtē un atbildīgi izmanto citu idejas, kā arī piedāvā savas, lai iedvesmotu citus;
- 2.3. gan patstāvīgi, gan grupā attīsta ideju ilgtspējīgā piedāvājumā, klūdas un grūtības izmanto kā iespēju izaugsmei.

3. Pašvadīta mācīšanās:

- 3.1. regulāri un atbilstoši savām vajadzībām izvirza īstermiņa un ilgtermiņa mērķus, formulē kritērijus, pēc kuriem izvērtēt, vai mērķis ir sasniegts, plāno mērķa īstenošanas soļus, uzņemas atbildību par savu lomu soļu īstenošanā un mērķu sasniegšanā;
- 3.2. patstāvīgi un regulāri analizē un reflektē par savas darbības saistību ar emocijām, personiskajām īpašībām un uzvedību, rod veidus, kā attīstīt spējas pārvaldīt savu domāšanu, emocijas un uzvedību;
- 3.3. patstāvīgi izvēlas, pielāgo un rada savas domāšanas stratēģijas kompleksās situācijās;
- 3.4. pieņemot atbildīgus lēmumus, vada emocijas sociāli pieņemamā veidā un orientējas uz iespējām, ieguvumiem un pozitīviem risinājumiem;
- 3.5. patstāvīgi izmanto kritērijus, kas palīdz īstenošanai darba uzraudzīšanu un pilnveidošanu, izvērtē, apkopo un turpmākā darba procesā mērķtiecīgi izmanto gūto pieredzi.

4. Sadarbība:

- 4.1. plāno un īsteno personisko un grupas mērķu sasniegšanai nozīmīgu, cieņpilnu verbālu, neverbālu un digitālu komunikāciju;
- 4.2. piedalās gan viendabīgas, gan neviendabīgas grupas darba procesā, pieņem viedokļu atšķirības, dalībnieku dažādo pieredzi un spējas, prognozē, novērš un risina domstarpības un konfliktus, tostarp digitālā vidē;
- 4.3. mācību procesā un sabiedriskajā dzīvē apzināti orientējas uz kopīgo labumu un grupai nozīmīgu mērķu sasniegšanu, spēj pārstāvēt savas un respektēt citu intereses, ja grupas un paša vajadzības atšķiras.

5. Pilsoniskā līdzdalība:

- 5.1. skaidro un pamato savu skatījumu par kopsakarībām gan vietējā, gan globālā mērogā, izvērtē individu, sabiedrības un vides mijiedarbību;
- 5.2. balstoties savās vērtībās un cienot citu vērtības, izsvērti izvēlas pasākumus un ikdienas situācijas, kurās iesaistīties un iesaistīt citus, cieņpilni pamatojot savu nostāju, prot atteikties, ja pasākums neatbilst vērtībām, un spēj nepakļauties grupas spiedienam, paliekot saistīts ar tiem, kuriem nepiekrit;

- 5.3. skaidro savas rīcības sekas un uzņemas par tām atbildību ikdienas situācijās, lokālos un globālos procesos;
- 5.4. patstāvīgi un kopā ar citiem gūst pieredzi, iesaistoties risinājumu meklēšanā un īstenošanā, kas palīdz uzlabot dzīves kvalitāti.

6. Digitālā pratība:

- 6.1. lai īstenotu daudzveidīgas ieceres, mērķtiecīgi izvēlas vai pielāgo un efektīvi izmanto atbilstošas digitālās tehnoloģijas;
- 6.2. analizē digitālās komunikācijas ieguvumus un riskus, atbildīgi uzvedas un komunicē digitālajā vidē atbilstoši savām un citu interesēm;
- 6.3. kritiski analizē mediju radīto realitāti un informācijas ticamību, uzņemas atbildību rīkoties, lai novērstu nekvalitatīva mediju saturu radīto ietekmi, un, radot savu mediju saturu, ievēro privātuma, ētiskos un tiesiskos nosacījumus;
- 6.4. analizē un novērtē tehnoloģiju lomu dažados kontekstos, izvērtē veselīgus un drošus tehnoloģiju lietošanas paradumus, ievēro un pielāgo tos savām vajadzībām, reflektē par savu digitālo identitāti un tās atbilstību savām un sabiedrības interesēm.

4. pielikums**Skolēnam attīstāmie ieradumi Matemātikas mācību jomā
vidējās izglītības pakāpē**

1. Pārliecinās, ka sapratis jautājumu, situāciju kopumā vai veicamo darbību nozīmi, un tikai tad sāk veidot risinājumu.
2. Plāno un vada savu domāšanas procesu, ik pa laikam izvērtē paveikto, noskaidro kļūdas iemeslu un uztver kļūdu kā iespēju izaugsmei.
3. Darbu veic rūpīgi, apgalvojumus formulē precīzi, apzinoties, ka neprecizitātes var būt pamats aplamiem secinājumiem.
4. Strukturēti un uzskatāmi attēlo informāciju, vārdisko un rakstīto tekstu veido saistītu un citiem saprotamu.
5. Paskaidro un/vai pamato savus spriedumus, veiktās darbības vai uzdevuma risinājumu.
6. Meklē risinājumu nepazīstamās situācijās arī tad, ja ar pirmo reizi tas neizdodas, uzdrīkstas piedāvāt savas idejas.
7. Legūto informāciju saista ar jau zināmo, lai konstruētu jaunas zināšanas, apzinoties, ka nekritiska saistības veidošana var būt pamats aplamiem secinājumiem.
8. Zināšanas saista ar savu pieredzi un lieto tās, lai sadzīves un citu jomu situācijas raksturotu matemātiski, izvērtējot rezultātu ticamību un atbilstību konkrētai situācijai.
9. Meklē dažādus risinājumus, formulē dažādus secinājumus un jautājumus no turpmākās izpētes perspektīvas, attīstot radošumu.

5. pielikums

Matemātika I kursa moduļu/tematu pārskats

Analītiskā ģeometrija I		Varbūtība un statistika I		Algebra I		Trigonometrija I		Algebra I		Ģeometrija I	
1. Vektori un kustība	2. Līnijas vienādo- jums	3. Kombi- natorika un varbūtība	4. Statistika	5. Daļveida funkcija, algebriskās daļas	6. Daļveida vienādo- jumi un nevienā- dības	7. Sinusa un kosinusa funkcijas	8. Trigono- metriskās izteiksmes un vienā- dojumi	9. Pakāpe ar racionālu kāpinātāju, ģeomet- riskā pro- gresija	10. Eksponent- funkcija	11. Taisnes un plak- nes telpā, daudz- skaldņi	12. Rotācijas ķermenī, telpisku ķermenē kombinā- cijas

6. pielikums

Mācību saturu apguvei izmantojamo mācību līdzekļu uzskaitījums

Izmantošanas nolūks	Mācību līdzekļu veids	Mācību līdzekļu nosaukums
Skolēniem darbam (individuālajam /pāru/ grupu darbam, pētījumam ...)	Mācību materiāli	Skola2030 mācību līdzekļi ESF projektā "Dabaszinātnes un matemātika" izstrādātie materiāli
	Darba piederumi, modeļi	Lineāls, cirkulis, plaknes figūru modeļi, telpisku ķermēju modeļi, kalkulators, planšetes/datori, lietotnes notikumu modelēšanai un statistiskās varbūtības noteikšanai, statistisko rādītāju noteikšanai, funkciju grafiku zīmēšanai un funkciju īpašību pētīšanai, plaknes un telpisku figūru, telpisku ķermēju zīmēšanai, transformēšanai, īpašību noteikšanai un pamatošanai, šķēlumu ar plakni konstruēšanai.

DOMĀT. DARĪT. ZINĀT.

Valsts izglītības satura centra īstenotā projekta "Kompetenču pieeja mācību saturā" mērķis ir izstrādāt, aprobēt un pēctecīgi ieviest Latvijā tādu vispārējās izglītības saturu un pieeju mācīšanai, lai skolēni gūtu dzīvei 21. gadsimtā nepieciešamās zināšanas, prasmes un attieksmes.

Projekts Nr. 8.3.1.1/16/I/002 Kompetenču pieeja mācību saturā



Valsts izglītības satura centrs

NACIONĀLĀS
ATTĪSTĪBAS
PLĀNS 2020



EUROPAS SAVIENĪBA
Eiropas Sociālais
fonds

I E G U L D I J U M S T A V Ā N Ą K O T N Ē