9.A. Uzdevumu atrisinājumi

9.1. Induktīvā pāreja $k \to k+1$

1. Ja $n = 1$, tad $3^{3n+3} - 26n - 27 = 676$ dalās ar 169.

Pieņemsim, ka apgalvojums izpildās skaitlim $n = k$, un pārbaudīsim, ka tas izpildās skaitlim $n = k+1$. Lai to pārbaudītu, pietiek pārbaudīt, ka

$$\left(3^{3(k+1)+3} - 26(k+1) - 27\right) - \left(3^{3k+3} - 26k - 27\right) = 26 \cdot 3^{3k+3} - 26$$

dalās ar 169. Tiešām

$$26 \cdot 3^{3k+3} - 26 = 26 \cdot \left(27^{k+1} - 1\right) \vdots 26 \cdot (27-1) \vdots 169 .$$

Apgalvojums pierādīts.

2. Pierādīsim, ka doto skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir 57.
Ja $n = 0$, tad $7^{n+2} + 8^{2n+1} = 7^2 + 8^1 = 57$. Tātad pirmais no dotajiem skaitļiem dalās ar 57, un visu skaitļu LKD nevar būt lielāks par 57. Atliek pārbaudīt, ka arī visi pārējie skaitļi dalās ar 57.
Pieņemsim, ka $57 \mid \left(7^{k+2} + 8^{2k+1}\right)$. Tad

$$7^{(k+1)+2} + 8^{2(k+1)+1} = 7 \cdot 7^{k+2} + 64 \cdot 8^{2k+1} =$$
$$7\left(7^{k+2} + 8^{2k+1}\right) + 57 \cdot 8^{2k+1} \vdots 57 .$$

Apgalvojums pierādīts.

3. Ar indukciju pierāda formulas:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 ,$$
$$3 \cdot \left(1^5 + 2^5 + \cdots + n^5\right) = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 \left(2n^2 + 2n - 1\right).$$

No šīm formulām seko uzdevuma apgalvojums.

4. Ja $n = 1$ tad

$$k^{2^n} - 1 = k^2 - 1 = (2s+1)^2 - 1 = 4\left(s^2 + s\right) \vdots 8 = 2^{1+2} .$$

Pieņemsim, ka apgalvojums izpildās, ja $n = m$, un pierādīsim, ka tas izpildās, ja $n = m+1$.

$$k^{2^{m+1}}-1=\left(k^{2^m}-1\right)\cdot\left(k^{2^m}+1\right)\vdots 2^{m+2}\cdot 2=2^{(m+1)+2}.$$

Apgalvojums pierādīts.

5. Ja $n=0$, tad $2^{3^0}+1=3\vdots 3^{0+1}$.

Ja $n=k+1$, tad

$$2^{3^{k+1}}+1=\left(2^{3^k}+1\right)\left(2^{2\cdot 3^k}-2^{3^k}+1\right).$$

Tā kā $2^{3^k}+1$ dalās ar 3^{k+1}, pietiek pārbaudīt, ka $2^{2\cdot 3^k}-2^{3^k}+1$ dalās ar 3. Tiešām

$$2^{2\cdot 3^k}-2^{3^k}+1\equiv(-1)^{2\cdot 3^k}-(-1)^{3^k}+1\equiv 1+1+1\equiv 0(\mathrm{mod}\,3).$$

Apgalvojums pierādīts.

6. Tādi, piemēram, ir skaitļi $n=3^m$, jo no 5. uzdevuma seko, ka $2^{3^m}+1$ dalās ar 3^m.

Pieņemsim, ka *n* ir pirmskaitlis, un 2^n+1 dalās ar *n*. No MFT seko, ka $n\mid 2^n-2$. Tātad $n\mid\left(2^n+1\right)-\left(2^n-2\right)=3$. Vienīgais pirmskaitlis, kas apmierina uzdevuma nosacījumus ir $n=3$.

7. Ar indukciju pierāda sekojošu lemmu, no kuras seko uzdevuma apgalvojums.

Lemma. Ja *p* ir nepāra pirmskaitlis, kurš ir skaitļa $b+1$ dalītājs, tad $p^s\mid b^{p^s}+1$.

8. Ar indukciju pierādīsim, ka skaitli 1 var izteikt kā $n\geq 3$ dažādu naturālu skaitļu apgriezto lielumu summu.

Ja $n=3$, tad $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$.

Pieņemsim, ka izpildās vienādība

$$1=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_m},\quad a_1<a_2<\cdots<a_m.$$

Tad skaitli 1 var izteikt kā $m+1$ dažādu naturālu skaitļu apgriezto lielumu summu sekojošā veidā:

$$1=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_m+1}+\frac{1}{a_m\left(a_m+1\right)}.$$

Pareizinot vienādību $1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots \frac{1}{a_n}$ ar skaitli $k = \text{MKD}\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)$, iegūsim vienādību $k = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$, kur $d_i = \frac{k}{a_i}$ ir skaitļa k dalītāji.

9. Ja $n = 1$, tad apgalvojums izpildās.

Ja $n = k + 1$ un m – patvaļīgs naturāls skaitlis, kurš nepārsniedz $(k+1)!$, tad izdalīsim m ar $(k+1)$ ar atlikumu. $m = (k+1)q + r$, $0 \le r \le k$. Skaidrs, ka $q \le k!$. No induktīvā pieņēmuma seko, ka $q = a_1 + a_2 + \cdots + a_s$, $s \le k$, un a_i ir skaitļa $k!$ dalītāji. Tātad

$$m = (k+1)a_1 + (k+1)a_2 + \cdots + (k+1)a_s + r,$$

un šajā summā ir ne vairāk kā $k + 1$ saskaitāmais, un tie visi ir skaitļa $(k+1)!$ dalītāji.

10. Ar indukciju pierādīsim, ka katrai augošai naturālu skaitļu aritmētiskai progresijai $x_i = ai + b$ eksistē n pēc kārtas ņemti locekļi, kuri visi ir salikti skaitļi.

Vispirms pierādiet, ka apgalvojums izpildās, ja $n = 1$.
Pieņemsim, ka $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{n+k}$ ir k pēc kārtas ņemti aritmētiskās progresijas locekļi, un tie visi ir salikti skaitļi. Ar p_i apzīmēsim jebkuru skaitļa a_{n+i} pirmreizinātāju, un skaitli $ap_1 p_2 \ldots p_{k+1}$ apzīmēsim ar r. Tad

$$a_{n+1} + r, a_{n+2} + r, \ldots, a_{n+k+1} + r$$

ir $k + 1$ dotās aritmētiskās progresijas sekojoši locekļi, kas visi ir salikti skaitļi. Tiešām $a_{n+i} + r$ dalās ar p_i un ir lielāks par p_i.

11. Ar indukciju pierādīsim, ka $a_{n+1} - a_n$ dalās ar 10^n.

Ja $n = 1$, tad $a_2 - a_1 = 5^2 - 5 \vdots 10$.

Ja $n = k + 1$, tad

$$a_{k+2} - a_{k+1} = a_{k+1}^2 - a_k^2 = \left(a_{k+1} - a_k\right)\left(a_{k+1} + a_k\right) \vdots 10^k \cdot 10 = 10^{k+1}.$$

Otrais reizinātājs dalās ar 10, jo visu skaitļu a_k pēdējie cipari ir 5, un divu šādu skaitļu summa dalās ar 10.

12. Ar indukciju pēc skaitļa m pierādīsim, ka eksistē naturāls skaitlis n, kuram $n^2 + 1$ dalās ar 5^m.

Ja $m=1$, tad ņemsim $n=2$, un $2^2+1\vdots 5$.

Ņemsim naturālu skaitli *n*, kuram n^2+1 dalās ar 5^m. Skaidrs, ka $n\neq 0(\mathrm{mod}\,5)$. Aplūkosim skaitli $N=n+l\cdot 5^m$. Tad

$$N^2+1=(n+l\cdot 5^m)^2+1=n^2+1+2l\cdot n5^m+l^2 5^{2m}=$$
$$5^{m\cdot t}+2l\cdot n5^m+l^2\cdot 5^{2m}=5^m(t+2l\cdot n)+l^2\cdot 5^{2m}.$$

Izvēlēsimies tādu *l*, kuram $t+2l\cdot n\equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$, t.i. $l\equiv -\dfrac{t}{2n}(\mathrm{mod}\,5)$. Tas ir iespējams, jo 2*n* nedalās ar 5. Tādā gadījumā $N^2+1\vdots 5^{m+1}$, un apgalvojums ir pierādīts.

13. Apzīmēsim summu $d_1+d_2+\cdots+d_{2^n}$ ar S_n. Tad

$$S_{n+1}=\left(d_1+d_3+d_5+\cdots+d_{2^{n+1}-1}\right)+\left(d_2+d_4+d_6+\cdots+d_{2^{n+1}}\right)=$$
$$\left(1+3+5+\cdots+\left(2^{n+1}-1\right)\right)+\left(d_1+d_2+d_3+\cdots+d_{2^n}\right)=\left(2^n\right)^2+S_n\ .$$

No vienādības $S_{n+1}=4^{n-1}+S_n$ seko, ka

$$S_n=1+4^0+4^1+\cdots+4^{n-1}=1+\frac{4^n-1}{4-1}=\frac{4^n+2}{3}.$$

Atbilde: $\dfrac{4^{100}+2}{3}$.

14. Ja $n=1$, tad no skaitļiem 1, 2, 3 var izvēlēties jebkurus divus.

Pieņemsim, ka no pirmajiem 3^k skaitļiem mēs esam izvēlējušies skaitļu grupu $a_1<a_2<\cdots<a_{2^k}$, kurai izpildās uzdevuma nosacījumi. Tad no pirmajiem 3^{k+1} skaitļiem vajadzīgo grupu var izvēlēties šādi:

$$a_1,a_2,\ldots,a_{2^k},2\cdot 3^k+a_1,2\cdot 3^k+a_2,\ldots,2\cdot 3^k+a_{2^k}\ .$$

15. Ja $n=1$, tad apgalvojums izpildās.

Pieņemsim, ka apgalvojums izpildās, ja $n=m$, un pierādīsim to, ja $n=m+1$. Ja *k* ir skaitlis no intervāla $1\leq k\leq 3^{m-1}$, tad atzīmētie punkti eksistē pēc induktīvā pieņēmuma nogrieznī $\left[0,3^{m-1}\right]$. Pieņemsim, ka $3^{m-1}<k\leq 3^m$. Tad skaitli *k* var izteikt formā $k=2\cdot 3^{m-1}+l$, kur $-3^{m-1}<l\leq 3^{m-1}$. No induktīvā pieņēmuma seko, ka nogrieznī $\left[0,3^{m-1}\right]$ eksistē tādi atzīmētie punkti s_1 un s_2, ka $s_2-s_1=l$. Tad, izvēloties apzīmētos punktus s_1 un $2\cdot 3^{m-1}+s_2$, iegūsim vienādību

$$k = 2 \cdot 3^{m-1} + l = \left(2 \cdot 3^{m-1} + s_2\right) - s_1 .$$

Apgalvojums pierādīts.

16. Ar indukciju pēc skaitļa *k* pierāda sekojošu apgalvojumu: ja $0 < n \le a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, tad skaitli *n* var uzrakstīt kā dažādu skaitļu summu no kopas $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$.

17. Pierādīsim, ka $b_{n+k} \vdots b_n \cdot b_k$ ar indukciju pēc *k*. Ievērosim, ka $b_{n+k} \vdots b_n \cdot b_k$ nozīmē, ka

$$a_{n+k} a_{n+k-1} \cdots a_{n+1} \vdots a_k a_{k-1} \cdots a_1 .$$

Ja $k = 1$, tad ir jāpārbauda, ka $a_{n+1} \vdots a_1$. Tas seko no tā, ka

$$a_{n+1} = \left(a_{n+1} - a_n\right) + \left(a_n - a_{n-1}\right) + \cdots + \left(a_2 - a_1\right) + a_1 ,$$

un katrs saskaitāmais dalās ar a_1.

Ja $k = m + 1$, tad

$$\begin{aligned} & a_{n+m+1} \cdots a_{n+1} = \\ & \left(a_{n+m+1} \cdots a_{n+1} - a_{n+m} \cdots a_n\right) + \cdots + \left(a_{m+2} \cdots a_2 - a_{m+1} \cdots a_1\right) + a_{m+1} \cdots a_1 = \\ & \left(a_{n+m+1} - a_n\right)\left(a_{n+m} \cdots a_{n+1}\right) + \cdots + \left(a_{m+2} - a_1\right)\left(a_{m+1} \cdots a_2\right) + a_{m+1}\left(a_m \cdots a_1\right). \end{aligned}$$

No uzdevuma nosacījuma seko, ka katra saskaitāmā pirmais reizinātājs dalās ar a_{m+1}, bet otrais dalās ar $a_m \cdots a_1$ pēc induktīvā pieņēmuma.

18. Apgalvojumu pierāda ar matemātisko indukciju. Apzīmēsim doto izteiksmi ar $f(n)$.

Bāze. Ja $n = 1$, tad $f(1) = 36$ dalās ar 9.

Induktīvā pāreja. Pieņemam, ka $f(n)$ dalās ar 9.

Tad $f(n+1) = f(n) + (n+3)^3 - n^3$; mums jāpierāda, ka $(n+3)^3 - n^3 = 9n^2 + 27n + 27$ dalās ar 9. Tas ir acīmredzami.

19. Apzīmējam meklējamo skaitli ar $\overline{a_1 a_2 \ldots a_{100}}$. Iegūstam vienādību $\overline{a_1 a_2 \ldots a_{100}} = \left(a_1 + \cdots a_{100}\right) + \left(a_1 a_2 + a_1 a_3 + \cdots + a_{99} a_{100}\right) + \cdots + a_1 a_2 \cdots a_{100}$ jeb $\overline{a_1 a_2 \cdots a_{100}} = \left(1 + a_1\right)\left(1 + a_2\right) \cdots \left(1 + a_{100}\right) - 1$.

Ar indukciju pierādīsim, ka $\overline{a_1 a_2 \cdots a_n} \ge \left(1 + a_1\right)\left(1 + a_2\right) \cdots \left(1 + a_n\right) - 1$ un vienādība pastāv tad un tikai tad, ja $a_2 = \cdots = a_n = 9$.

Ja $n = 1$, tad tas ir acīmredzams. Pieņemsim, ka tas pierādīts, ja $n = k$. Tad

$$\overline{a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1}} = 10 \cdot \overline{a_1 a_2 \cdots a_k} + a_{k+1} \geq$$
$$(1 + a_{k+1}) \cdot \overline{a_1 a_2 \cdots a_k} + a_{k+1} \geq (1 + a_{k+1})\left[(1 + a_1) \cdots (1 + a_k) - 1\right] + a_{k+1} =$$
$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_{k+1}) - 1$$

un vienādība pastāv tad un tikai tad, kad $a_2 = \cdots = a_k = a_{k+1} = 9$. Ar matemātisko indukciju apgalvojums pierādīts. Tātad mūsu meklējamie skaitļi ir šādi: $a99\ldots9$, kur a ir jebkurš cipars, kas nav 0.

20. Ar matemātisko indukciju pierādām, ka

$$x_{n+1} = \frac{x_1 x_2}{(2^n - 2) \cdot (x_1 - x_2) + x_1}.$$

Skaitītājs ir konstants lielums. Ja $x_1 \neq x_2$, tad saucējs pēc moduļa tiecas uz bezgalību, ja $n \to \infty$. Tāpēc bezgalīgi daudzi virknes (x_n) locekļi nevar būt naturāli skaitļi. Tātad jābūt $x_1 = x_2$. Tādā gadījumā visi virknes locekļi ir vienādi. Tāpēc bezgalīgi daudzi virknes (x_n) locekļi ir naturāli skaitļi tad un tikai tad, ja $x_1 = x_2 \in N$.

21. Ievērosim, ka $\dfrac{1}{2 - \frac{1}{2}} = \dfrac{1}{1\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$ (divi divnieki);

$$\frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}} = \frac{1}{2 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{1\frac{1}{3}} = \frac{3}{4} \text{ (trīs divnieki).}$$

Ar matemātisko indukciju pierādīsim, ka tādas izteiksmes vērtība, kas satur n divniekus, ir $\dfrac{n}{n+1}$. Bāze jau pārbaudīta. Induktīvās parejas pareizība seko no vienādības

$$\frac{1}{2 - \frac{k}{k+1}} = \frac{1}{\frac{2k+2-k}{k+1}} = \frac{k+1}{k+2} = \frac{(k+1)}{(k+1)+1}.$$

Atliek atzīmēt, ka n un $n+1$ ir savstarpēji pirmskaitļi (ja tie abi dalītos ar kādu d, tad ar d būtu jādalās arī starpībai $(n+1) - n = 1$, bet 1 no naturāliem skaitļiem dalās tikai ar 1). Tātad uzdevuma atbilde ir $\dfrac{1993}{1994}$.

22. Vispirms pierādīsim sekojošas formulas:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \qquad (1)$$

un $1^5 + 2^5 + ... + n^5 = \dfrac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$ (2)

(1) pierādīsim ar matemātisko indukciju.

Bāze, ja $n=1$: Tiešām $1^3 = \left[\dfrac{1(1+1)}{2}\right]^2 = 1$.

Induktīvā pāreja: Pieņemsim, ka vienādība (1) izpildās, ja $n = k$, $k \in Z$:

$$1^3 + 2^3 + ... + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2; \qquad (*)$$

jāpierāda, ka vienādība izpildās arī, ja $n = k+1$:

$$1^3 + 2^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2 \quad (**).$$

Pēdējās vienādības (∗∗) kreisās puses pirmos k saskaitāmos aizvietosim ar vienādības (∗) labo pusi. Izdarot sekojošus pārveidojumus, iegūstam:

$$1^3 + 2^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3 =$$

$$= (k+1)^2\left(\left[\frac{k}{2}\right]^2 + (k+1)\right) = (k+1)^2\left(\frac{k^2+4k+4}{4}\right) = (k+1)^2\left(\frac{k+2}{2}\right)^2 =$$

$=\left[\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$ jeb tiešām izpildās vienādība (∗∗) un (1).

Izmantojot matemātisko indukciju, pierādīsim arī (2).

Bāze, ja n=1: Patiešām, $1^5 = \dfrac{1^2(1+1)^2(2\cdot 1^2 + 2\cdot 1 - 1)}{12} = \dfrac{4\cdot 3}{12} = 1$.

Induktīvā pāreja: Pieņemsim, ka vienādība (2) izpildās, ja $n = k$, $k \in Z$.

$$1^5 + 2^5 + ... + k^5 = \frac{k^2(k+1)^2(2k^2+2k-1)}{12} \quad (*).$$

Jāpierāda, ka tā izpildās arī, ja $n = k+1$:

$$1^5 + 2^5 + ... + k^5 + (k+1)^5 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2(2(k+1)^2 + 2(k+1) - 1)}{12} \quad (**).$$

Vienādības (∗∗) kreisās puses pirmos k saskaitāmos aizstāj ar (∗) labo pusi.

Iznesot pirms iekavām $\dfrac{(k+1)^2}{12}$, iegūst:

$$1^5 + 2^5 + ... + k^5 + (k+1)^5 = \frac{k^2(k+1)^2(2k^2+2k-1)}{12} + (k+1)^5 =$$

$= \frac{(k+1)^2}{12} \cdot [\, k^2(\, 2k^2+2k-1) + 12\cdot(k+1)^3 \,]$.

Tā kā reizinātājs $\frac{(k+1)^2}{12}$ kopīgs (∗∗) abām pusēm, tad pietiek pierādīt, ka

$k^2(\, 2k^2+2k-1) + 12\cdot(k+1)^3 = (k+2)^2(\, 2(k+1)^2+2(\, k+1) -1)$.

To pierāda, atverot iekavas un savelkot līdzīgos locekļus, līdz ar to iegūstot, ka vienādības abas puses vienādas ar sekojošu izteiksmi:

$2k^4+14k^3+35k^2+36k+12$.

Vienādība (∗∗), līdz ar to arī vienādība (2), pierādīta.

Tai pašā laikā zināms, ka $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Lai pierādītu a) piemēru, atliek ievērot, ka dalījums $\frac{n(n+1)}{2}$ ir vesels skaitlis visiem naturāliem n.

b) piemērā bez tam jāpierāda, ka arī $\frac{n(n+1)(2n^2+2n-1)}{6}$ ir vesels skaitlis katram n.

To pierāda, aplūkojot atsevišķi variantus, kad, dalot ar 3, n dod atlikumu 0, 1 vai 2.