NMS Izlase junioriem: 2.nodarbība skaitļu teorijā

Ieteicams izvēlēties un rakstiski noformēt 5 no 8 uzdevumiem līdz 2019.g. 30.decembrim.

Var risināt uz papīra vai iesūtīt elektroniski: "kalvis.apsitis", domēns "gmail.com"

3.nodaļa: Ķīniešu atlikumu teorēma

Uzdevums 2.1: Pierādīt, ka jebkuram naturālam skaitlim n, ir n pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi, ka jebkurm no tiem ir dalītājs, kas ir pilns kvadrāts, kas lielāks par 1.

Uzdevums 2.2: Katram naturālam skaitlim n, ir n pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi, no kuriem neviens nav *potents skaitļis*.

Piezīme: Par potentu saucam naturālu skaitli n, ka jebkuram pirmskaitlim p: ja n dalās ar p, tad n dalās arī ar p^2. Sk. `https://en.wikipedia.org/wiki/Powerful%5Fnumber`.

Uzdevums 2.3: Dotajam naturālam skaitlim n, ar $f(n)$ apzīmējam mazāko naturālo skaitli, ka $\sum_{k=1}^{f(n)} k$ dalās ar n. Pierādīt, ka $f(n) = 2n - 1$ tad un tikai tad, ja n ir skaitļa 2 pakāpe.

Uzdevums 2.4: Ar n un k apzīmējam veselus skaitļus, ka $n > 0$ un skaitlis $k(n-1)$ ir pāra skaitlis. Pierādīt, ka eksistē skaitļi x un y, ka $\gcd(x,n) = \gcd(y,n) = 1$ un $x + y \equiv k \pmod{n}$.

Uzdevums 2.5: Dots naturāls skaitlis x. Pierādīt, ka ir n pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi, no kuriem neviens nav pirmskaitļa pakāpe.

Uzdevums 2.6: Ar m, n apzīmēti naturāli skaitļi, kas apmierina šādu īpašību:

$$\gcd(11k-1, m) = \gcd(11k-1, n)$$

ir spēkā visiem naturāliem skaitļiem k. Pierādīt, ka $m = 11^r n$ kādam veselam skaitlim r.

4.nodaļa: Valuācijas

Uzdevums 2.7: Dots naturāls skaitlis $k > 1$. Pierādiet, ka eksistē bezgalīgi daudzi naturāli skaitļi n, kuriem

$$n \mid 1^n + 2^n + 3^n + \ldots + k^n.$$

Uzdevums 2.8: Dots naturāls skaitlis $n > 1$. Pierādiet, ka skaitlim $a^n - b^n$ ir pirmreizinātājs, kurš nav skaitļa $a - b$ dalītājs.