

## 9.2. Induktīvā pāreja $k \rightarrow k + a$

**23.** Parādiet, ka 8, 9 un 10 kapeiku summu var nomaksāt ar 3 un 5 kapeiku monētām. Ja prasītajā veidā var nomaksāt  $k$  kapeikas, tad, pievienojot vienu trīskapeiku monētu, var nomaksāt arī  $k + 3$  kapeikas. Apgalvojums pierādīts.

**24.** Jebkuru skaitli  $n$ , kas lielāks par 11, var izteikt formā  $n = 2a + 3b$ ,  $a, b \geq 2$ . Pierādīsim to ar indukciju.

Ja  $n = 12$ , tad  $n = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2$ ; ja  $n = 13$ , tad  $n = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3$ .

Pieņemsim, ka  $k = 2a + 3b$ . Tādā gadījumā  $k + 2 = 2(a + 1) + 3b$ .

Apgalvojums pierādīts, jo  $2a$  un  $3b$  ir salikti skaitļi.

**25.** Sākumā ar indukciju pierādīsim, ka to var izdarīt vismaz vienā veidā.

Bāze:  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ .  $1 = 1^2$ ,  $2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$ ,  $3 = -1^2 + 2^2$ ,  $4 = -1^2 - 2^2 + 3^2$ .

Induktīvā pāreja ( $l \rightarrow l + 4$ ). Ja  $l = \pm 1^2 \pm \dots \pm m^2$ , tad

$$l + 4 = \pm 1^2 \pm \dots \pm m^2 + (m + 1)^2 - (m + 2)^2 - (m + 3)^2 + (m + 4)^2.$$

Tālāk ievērosim, ka no jebkuras izteiksmes var iegūt bezgalīgu izteiksmju skaitu, pievienojot jau uzrakstītajai summai, summu, kas ir vienāda ar 0. Tiešām,

$$\begin{aligned} & (m + 1)^2 - (m + 2)^2 - (m + 3)^2 + (m + 4)^2 - \\ & (m + 5)^2 + (m + 6)^2 + (m + 7)^2 - (m + 8)^2 = 0. \end{aligned}$$

**26.** Vispirms pierādīsim, ka, ja vienādojumam ir atrisinājums ar  $s = r$ , tad tāds eksistē arī ar  $s = r + 3$ . Tiešām, ja  $(x_1, x_2, \dots, x_r)$  ir atrisinājums, kad  $s = r$ , tad

$$(x_1, \dots, x_{r-1}, 2x_r, 2x_r, 2x_r, 2x_r)$$

ir vienādojuma atrisinājums, kad  $s = r + 3$ . Katrai no skaitļu grupām  $3m$ ,  $3m + 1$ ,  $3m + 2$  norādīsim mazāko (bāzes) atrisinājumu:

a)  $3m$ ;  $s = 6$ ,  $(2, 2, 2, 3, 3, 6)$ ;

b)  $3m + 1$ ;  $s = 1$ ,  $(1)$ ;

c)  $3m + 2$ ;  $s = 8$ ,  $(2, 2, 2, 3, 3, 7, 14, 21)$ .

Tātad visiem skaitļiem  $s$  izņemot 2, 3 un 5 atrisinājumi eksistē. Vēl ir jāpierāda, ka norādītajām  $s$  vērtībām nav atrisinājumu.

**27.** Bāze: ja  $s = 3$ , tad atrisinājums ir  $(12, 15, 20, 10)$ ;

ja  $s = 4$ , tad atrisinājums ir

$$(5 \cdot 7 \cdot 13, 5 \cdot 12 \cdot 13, 7 \cdot 12 \cdot 13, 5 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 13, 5 \cdot 7 \cdot 12),$$

kurš iegūts no vienādības

$$1^3 + 5^3 + 7^3 + 12^3 = 13^3.$$

Induktīvā pāreja ( $r \rightarrow r+2$ ): Ja  $(t_1, t_2, \dots, t_r, t_{r+1})$  ir vienādojuma atrisinājums, kad  $s = r$ , tad

$$(10t_1, 10t_2, \dots, 10t_{r-1}, 12t_r, 15t_r, 20t_r, 10t_{r+1})$$

ir vienādojuma atrisinājums, kad  $s = r+2$ . Tas iegūts, izmantojot vienādību

$$\frac{1}{12^3} + \frac{1}{15^3} + \frac{1}{20^3} = \frac{1}{10^3}.$$

No jebkura atrisinājuma var iegūt bezgalīgi daudz atrisinājumu, pareizinot visus mainīgos ar jebkuru naturālu skaitli.

**28.** Pierādījums balstās uz to, ka vienādojumam eksistē atrisinājums  $(2, 2, \dots, 2)$ , ja  $s = 2^m$  (bāze), un atrisinājuma mainīgo skaitu var palielināt par patvaļīgu skaitli  $a^m - 1$ , ja  $a$  ir kāds no atrisinājuma mainīgajiem.

**29.** Pierādīsim, ka apgalvojums ir spēkā  $6k+9$  lodēm, kuru svāri ir pirmie  $6k+9$  naturālie skaitļi.

Bāze:  $n = 9$ . Pirmās 9 lodes sadalām šādi:  $1 + 5 + 9 = 3 + 4 + 8 = 2 + 6 + 7$ .

Nākamās sešas lodes pievienojam šādi:

$$(k+1) + (k+6) = (k+2) + (k+5) = (k+3) + (k+4).$$

**30.** Kopējā ložu masa ir vienāda ar  $\frac{1}{2}n(n+1)$ , un tāpēc, ja sadalīšana ir iespējama, tad  $n \cdot (n+1)$  dalās ar 3. Tas nozīmē, ka  $n = 3m$  vai  $n = 3m+2$ .

Bāze: pārbaudām, ka sadalījums ir iespējams, ja  $n \in \{5, 6, 8, 9\}$ .

Induktīvā pāreja: ( $n \rightarrow n+6$ ). Nākamās sešas lodes pievienojam šādi:

$$(k+1) + (k+6) = (k+2) + (k+5) = (k+3) + (k+4).$$

Vēl jāatzīmē, ka 2 un 3 lodes atbilstoši uzdevuma prasībām sadalīt trīs grupās nevar.

Atbilde:  $n = 3m$ ,  $m \geq 2$  un  $n = 3m+2$ ,  $m \geq 1$ .

**31.** Apgalvojumu pierāda ar indukciju patvaļīgam  $(4k+1)$ -ciparu skaitlim.

**32.** Skaitlis, kura ciparu summa ir 1 ir vienāds ar  $10^n$  un nedalās ar 7. Ar matemātisko indukciju pierādīsim, ka eksistē skaitlis ar ciparu summu  $n > 1$ , kurš dalās ar 7.

Indukcijas bāze:  $n = 2, n = 3$ .

Skaitļi 1001 un 21 ar ciparu summu 2 un 3 dalās ar 7. Pierādīsim, ka, ja eksistē skaitlis  $A$  ar ciparu summu  $k$ , kurš dalās ar 7, tad eksistē arī skaitlis ar ciparu summu  $k + 2$ , kurš dalās ar 7.

Līdz ar to būs pierādīts, ka eksistē skaitlis, kura ciparu summa ir  $n > 1$  un kurš dalās ar 7.

Lai konstruētu šādu skaitli, aplūkosim skaitli  $\overline{1001A}$ ; šī skaitļa ciparu summa ir  $k + 2$  un tas dalās ar 7.

**33.** No dotā seko, ka  $f(n) = f(f(f(n+2)+2)) = f(n+2) + 2$ . Tātad

$$f(n+2) = f(n) - 2.$$

Acīmredzami  $f(1) = f(f(0)) = 0$ .

Ar indukciju pierādīsim, ka  $f(n) = 1 - n$  visiem nenegatīviem skaitļiem  $n$ .

Bāze: ja  $n = 0$  vai  $n = 1$  apgalvojums izpildās.

Induktīvā pāreja: Pieņemsim, ka apgalvojums izpildās, ja  $n = k$  un pārbaudīsim, ka tas izpildās, ja  $n = k + 2$ .

Dots, ka  $f(k) = 1 - k$ ; jāpārbauda, ka  $f(k+2) = 1 - (k+2)$ . Pārbaude:

$$f(k+2) = f(k) - 2 = (1 - k) - 2 = 1 - (k+2).$$

Līdzīgi pierāda, ka  $f(n) = 1 - n$  arī negatīviem skaitļiem.

Pārbaude parāda, ka funkcija  $f(n) = 1 - n$  apmierina visus uzdevuma nosacījumus.

### 9.3. Induktīvā pāreja $< k \rightarrow k$

**34.** Ja  $m = 1$ , tad apgalvojums ir patiess.

Pieņemsim, ka apgalvojums ir patiess jebkuram  $m < k$ , un pierādīsim to, ja  $m = k$ .

Pieņemsim, ka  $a_n$  ir Fibonači virknes lielākais loceklis, kuram  $a_n \leq k$ . Tad  $k - a_n \leq a_{n+1} - a_n = a_{n-1}$ . Skaitli  $k - a_n$  var izteikt kā dažādu virknes  $(a_i)$  locekļu summu, neizmantojot  $a_n$ , jo  $k - a_n < a_n$ . Pievienojot šai summai skaitli  $a_n$ , mēs prasītajā veidā izteiksim skaitli  $k$ . Apgalvojums pierādīts.

**35.** Skaidrs, ka skaitļi 0 un 1 ir uzrakstāmi prasītajā veidā. Tālāk pierādīsim apgalvojumu tikai pozitīviem skaitļiem, jo, izmainot visas zīmes uz pretējām, var iegūt atbilstošo pierakstu arī negatīviem skaitļiem. Pieņemsim, ka  $k$  ir jebkurš naturāls

skaitlis, un mazāki pozitīvie skaitļi ir šādā veidā uzrakstāmi. Aplūkosim divus gadījumus:

a)  $k = 2l$ ; tad no skaitļa  $l$  pieraksta  $\sum a_i 2^i$  iegūsim prasīto skaitļa  $k$  pierakstu  $k = \sum a_i 2^{i+1}$ .

b)  $k = 4l \pm 1$ ; tad no skaitļa  $l$  pieraksta  $\sum a_i 2^i$  iegūsim prasīto skaitļa  $k$  pierakstu  $k = \pm 1 + \sum a_i 2^{i+2}$ .

Apgalvojums pierādīts.

**36.** Apgalvojumu pierādīsim ar indukciju pēc  $m$ , uzskatot, ka  $n$  ir patvaļīgs naturāls skaitlis.

Ja  $m = 1$ , tad apgalvojums ir patiess.

Pieņemsim, ka tas ir patiess visiem  $m < k$ , un aplūkosim daļu  $\frac{k}{n}$ . Izdalīsim  $n$  ar  $k$  ar

atlikumu:  $n = qk + r$ ,  $0 < r < k$ . Tātad

$$\frac{k}{n} = \frac{1}{q+1} + \frac{(q+1)k - n}{n(q+1)} = \frac{1}{q+1} + \frac{k-r}{n(q+1)}.$$

Tā kā  $k - r < k$ , tad pēc induktīvā pieņēmuma

$$\frac{k-r}{n(q+1)} = \frac{1}{t_1} + \dots + \frac{1}{t_s},$$

un visi  $t_i$  ir dažādi. Tā kā  $\frac{k-r}{n(q+1)} < \frac{1}{q+1}$ , tad  $t_i > q+1$ , un daļu  $\frac{k}{n}$  var izteikt

prasītajā veidā šādi:

$$\frac{k}{n} = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{t_1} + \dots + \frac{1}{t_s}.$$

Apgalvojums pierādīts.

**37.** Pierādījums līdzīgs iepriekšējā uzdevuma pierādījumam.

**38.** Pierādīsim ar matemātisko indukciju līdzīgu apgalvojumu, kur 1990 aizstāts ar  $k$ .

Ja  $k = 1$ , visi  $A$  skaitļi ir pirmskaitļi; tātad var ņemt  $B = A$  un  $p = 1$ .

Pieņemsim, ka apgalvojums pareizs visiem  $k < n$ , un pierādīsim, ka tas izpildās ja  $k = n$ .

Aplūkosim divus gadījumus:

1) Eksistē tāds naturāls skaitlis  $a$ , ka  $a > 1$  un  $a$  ir bezgalīgi daudzu kopas  $A$  elementu dalītājs; Apzīmēsim šo elementu veidoto  $A$  apakškopu ar  $A_1$ . Izveidojam kopu

$$\overline{A} = \left\{ \frac{x}{a} \mid x \in A_1 \right\}.$$

Tad  $\overline{A}$  ir bezgalīga, un katrs  $\overline{A}$  elements ir ne vairāk kā  $n-1$  pirmskaitļu reizinājums (jo  $a$  satur vismaz vienu pirmskaitli kā reizinātāju). No  $\overline{A}$  izvēlāmies, apakškopu  $\overline{B}$  un skaitli  $\overline{p}$ , kam izpildās uzdevuma nosacījumi; tad kopa  $B = \{x \cdot a \mid x \in \overline{B}\}$  un  $p = \overline{p} \cdot a$  der par meklējamajiem.

2) Katram naturālam  $a$  eksistē tikai galīgs daudzums tādu  $A$  elementu, kas dalās ar  $a$ . Nemam patvaļīgu  $a_1 \in A$ . Ir tikai galīgs skaits  $A$  elementu, kas dalās ar kādu no  $a_1$  pirmreizinātājiem. Atrodam tādu  $a_2$ , kas ne ar vienu no tiem nedalās. Pēc tam atrodam tādu  $a_3$ , kas nedalās ne ar vienu no  $a_1$  un  $a_2$  pirmreizinātājiem, utt. Iegūstam bezgalīgu kopas  $A$  elementu virkni  $a_1, a_2, a_3, \dots$ . Šīs virknes elementi veido kopu  $B$ , kurā jebkuru divu elementu lielākais kopīgais dalītājs ir 1. Apgalvojums pierādīts.