

NMS Izlase junioriem: 1.nodarbība skaitļu teorijā

Ieteicams izvēlēties un rakstiski noformēt 5 no 8 uzdevumiem pirms 2019-09-28.

Var risināt uz papīra vai iesūtīt elektroniski: "kalvis.apsitis", domēns "gmail.com"

1.nodaļa: Pirmskaitļi un dalāmība

Uzdevums 1.1: Dota kopa $S = \{105, 106, \dots, 210\}$. Noteikt mazāko naturālo n vērtību, ka, izvēloties jebkuru n skaitļu apakškopu T no kopas S , tajā būs vismaz divi skaitļi, kuri nav savstarpēji pirmskaitļi.

Uzdevums 1.2: Visiem veseliem pozitīviem skaitļiem $m > n$ pierādīt, ka

$$\text{MKD}(m, n) + \text{MKD}(m + 1, n + 1) > \frac{2mn}{\sqrt{m - n}}.$$

Uzdevums 1.3: Vai eksistē bezgalīga stingri augoša naturālu skaitļu virkne $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$, ka jebkuram fiksētam naturālam skaitlim a virknē $a_1 + a < a_2 + a < a_3 + a, \dots$ ir tikai galīgs skaits pirmskaitļu?

Uzdevums 1.4: Pierādīt, ka virkne $1, 11, 111, \dots$ satur bezgalīgu apakšvirkni, kuras katri divi locekļi ir savstarpēji pirmskaitļi.

2.nodaļa: Modulārā aritmētika

Uzdevums 1.5: Atrast visus pirmskaitļus p , ka skaitlim $p^2 + 11$ ir tieši seši dažādi dalītāji (ieskaitot 1 un pašu skaitli).

Uzdevums 1.6: Uz tāfeles sākumā uzrakstīts viens skaitlis:

$$\underbrace{99 \dots 99}_{1997 \text{ deviņnieki}}.$$

Vienā gājienā atļauts kādu uz tāfeles esošo skaitli sadalīt divos reizinātājos; tad katru no reizinātājiem (neatkarīgi vienu no otra) palielināt vai samazināt par 2 un uzrakstīt šos rezultātus uz tāfeles.

Vai pēc kāda no gājieniem uz tāfeles var būt skaitļi, kas visi vienādi ar 9?

Uzdevums 1.7: Trijstūra malu garumi ir k , m un n . Pieņemsim, ka $k > m > n$ un

$$\left\{ \frac{3^k}{10^4} \right\} = \left\{ \frac{3^m}{10^4} \right\} = \left\{ \frac{3^n}{10^4} \right\}.$$

Noteikt trijstūra perimetra mazāko iespējamo vērtību.

Piezīme. Ar $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ apzīmē skaitļa x daļveida daļu - starpību starp skaitli x un tā veselo daļu (lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz x).

Uzdevums 1.8: (a) Pierādīt, ka no 39 pēc kārtas sekojošiem naturāliem skaitļiem atradīsies skaitlis, kura ciparu summa dalās ar 11.

(b) Atrast mazākos 38 pēc kārtas sekojošus naturālus skaitļus, kuriem nevienam ciparu summa nedalās ar 11.