# LV.VOL.2022.9.1

Pierādīt, ka visiem reāliem skaitļiem un ir spēkā nevienādība .

* questionType:
* domain:

## Atrisinājums

Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

Tā kā skaitḷa kvadrāts ir nenegatīvs, tad pēdējās nevienādības kreisajā pusē ir divu nenegatīvu skaitļu summa, kas arī ir nenegatīvs skaitlis. Tātad pēdējā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem reāliem skaitliem un .

# LV.VOL.2022.9.2

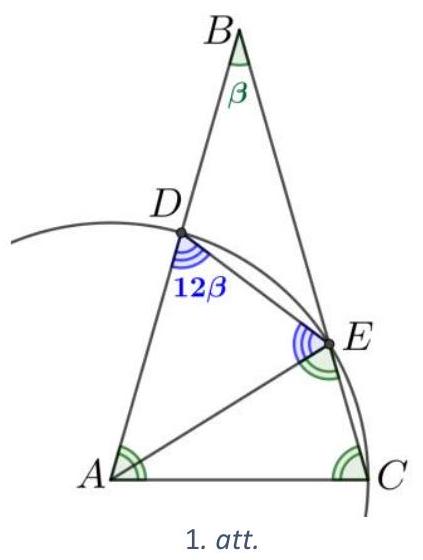
Vienādsānu trijstūrī virsotnes leņķis . Ar centru punktā un rādiusu novilkta riņḳa līnija, kas krusto malas un attiecīgi punktos un . Zināms, ka . Aprēķināt lielumu!

* questionType:
* domain:

## Atrisinājums

Tā kā ir vienādsānu, tad . Ievērojam, ka kā rādiusi (skat. 1. att.), tātad un ir vienādsānu trijstūri. Izsakām leṇķus:

Līdz ar to iegūstam vienādojumu:



# LV.VOL.2022.9.3

9.3. Pierādīt, ka katram naturālam var atrast tādu naturālu skaitli, kas dalās ar 7 un kura ciparu summa ir .

* questionType:
* domain:

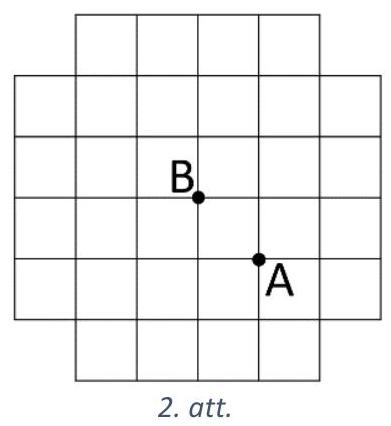
## Atrisinājums

Apskatām divus gadījumus.

* Ja ir pāra skaitlis, tas ir, , kur . Ievērosim, ka dalās ar (jo ) un tā ciparu summa ir . Uzrakstot skaitli rindā aiz sevis reizes (100110011001…), iegūsim (4n)-ciparu skaitli, kura ciparu summa ir un kurš dalās ar 7 .
* Ja ir nepāra skaitlis, tas ir, , kur . Papildus ievērosim, ka skaitlis dalās ar un tā ciparu summa ir . Aiz skaitļa uzrakstot reizi skaitli , iegūsim -ciparu skaitli, kura ciparu summa ir un kurš dalās ar .

# LV.VOL.2022.9.4

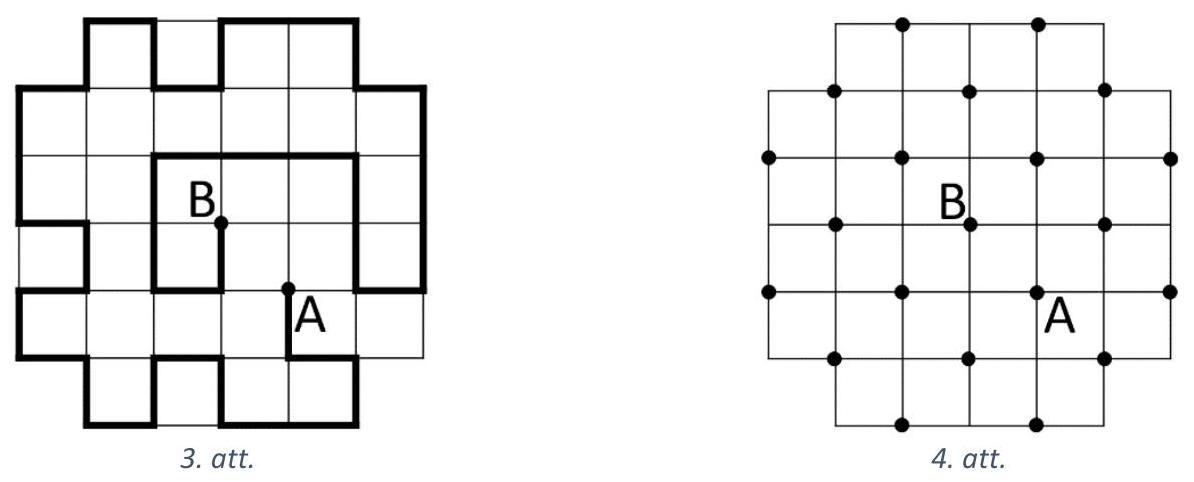
Ziṇkārīgs tūrists vēlas pastaigāties pa pilsētas ielām (plānā attēlotas kā rūtiņu malas) no krustojuma līdz krustojumam B (skat. 2. att.), veicot pēc iespējas garāku ceļojumu un neatgriežoties nevienā krustojumā vairākas reizes. Kāds ir lielākais iespējamais ceļojuma garums, ja uzskatām, ka vienas rūtiņas mala ir vienu vienību gara?



* questionType:
* domain:

## Atrisinājums

Lielākais iespējamais ceļojuma garums ir , to var veikt, piemēram, kā parādīts 3 . att.

Pierādīsim, ka lielāks ceļojuma garums nav iespējams. Atzīmēsim katru otro krustojumu ar melnu aplīti (skat. 4. att.). Ievērosim, ka ik pēc diviem veiktiem posmiem ceḷotājs nonāk atzīmētajā krustpunktā. Tā kā sākumpunkts A ir atzīmēts un atzīmētu krustpunktu kopā ir 21, tad apmeklēšanai atliek vairs tikai atzīmētu krustpunktu (ieskaitot B). Tātad celojums beigsies punktā B pēc ne vairāk kā posmiem. 

# LV.VOL.2022.9.5

Pierādīt, ka trijstūra augstumi nevar būt un vienību gari!

* questionType:
* domain:

## Atrisinājums

Pienemsim, ka šāds trijstūris eksistē un ka tā laukums ir . Izmantojot trijstūra laukuma aprēkināšanas formulu , izsakām trijstūra malas garumu . Tad trijstūra malu garumi ir un . Bet šiem malu garumiem neizpildās trijstūra nevienādība, jo . Šī nevienādība ir ekvivalenta nevienādībai , kuras patiesumu var viegli pārbaudīt, piemēram, ar šādiem ekvivalentiem pārveidojumiem:

# LV.VOL.2022.10.1

Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu sistēmu

* questionType:
* domain:

## Atrisinājums

Atņemot no pirmā vienādojuma otro un veicot ekvivalentus pārveidojumus, iegūstam

Tātad vai .

* Apskatām gadījumu, kad . Izsakām un ievietojam to dotās vienādojumu sistēmas pirmajā vienādojumā. legūstam kvadrātvienādojumu , kuram ir divas saknes un . Tad attiecīgi arī un . Pārbaudot redzam, ka skaitļu pāri un der.
* Apskatām gadījumu, kad . Izsakām un ievietojam to dotās vienādojumu sistēmas pirmajā vienādojumā. legūstam , kuram ir divas saknes un . Tad attiecīgi un . Pārbaudot redzam, ka un apmierina doto vienādojumu sistēmu.

Tātad dotajai vienādojumu sistēmai ir atrisinājumi:

# LV.VOL.2022.10.2

Uz regulāra trijstūra malas kā uz diametra konstruēta pusriņķa līnija ārpus trijstūra. Punkti un atrodas uz šīs pusriņķa līnijas un dala to trīs vienādos lokos. Pierādīt, ka nogriežņi un sadala malu trīs vienāda garuma nogriežņos!

* questionType:
* domain:

## Atrisinājums

Nogriežņu un krustpunktus ar apzīmējam attiecīgi ar un (skat. 5.att.) un apzīmējam . No simetrijas izriet, ka , tātad prasītais būs pierādīts, ja pierādīsim, ka .

Novelkam un . Tā kā loki un ir vienādi, tad katrs no tiem ir un kā ievilktais leņķis, kas balstās uz loku .

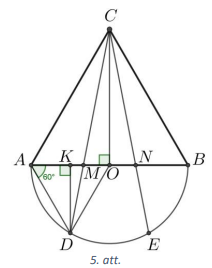
levērojam, ka ir gan regulārā trijstūra augstuma pamats, gan pusriņķa līnijas centrs. legūstam, ka . levērojam, ka trijstūris ir regulārs, jo tas ir vienādsānu trijstūris, kam leņķis pie pamata ir . Tā kā punkts ir šī regulārā trijstūra augstuma pamats, tad .

Regulārie trijstūri un ir līdzīgi ar līdzības koeficientu . Tas nozīmē, ka .

Trijstūri un ir līdzīgi pēc pazīmes (vienādi taisnie leņķi un krustleņķi). Tā kā līdzīgos trijstūros atbilstošās malas ir proporcionālas un , tad arī jeb .

levērojam, ka , no kurienes .

Tātad .



# LV.VOL.2022.10.3

Pierādīt, ka katram naturālam var atrast tādu naturālu skaitli, kas dalās ar un kura ciparu summa ir .

* questionType:
* domain:

## Atrisinājums

Apskatām divus gadījumus.

* Ja ir pāra skaitlis, tas ir, , kur . levērojam, ka dalās ar (jo ) un tā ciparu summa ir . Uzrakstot skaitli rindā aiz sevis reizes ($100110011001$), iegūsim -ciparu skaitli, kura ciparu summa ir un kurš dalās ar .
* Ja ir nepāra skaitlis, tas ir, , kur . Papildus ievērosim, ka skaitlis dalās ar (jo ) un tā ciparu summa ir . Aiz skaitla uzrakstot () reizi skaitli ($1010110011001$), iegūsim -ciparu skaitli, kura ciparu summa ir un kurš dalās ar .

# LV.VOL.2022.10.4

Vienādojuma saknes ir trijstūra malu garumi, kas izteikti centimetros. Aprēkināt šī trijstūra laukumu!

* questionType:
* domain:

## Atrisinājums

Dotā vienādojuma saknes apzīmējam ar un vienādojumu pārrakstām formā:

Atverot iekavas, iegūstam

Dotajā vienādojumā un vienādojumā (2), pielīdzinot koeficientus pie vienādām pakāpēm, iegūstam, ka

Pēc Hērona formulas trijstūra laukums , kur un -trijstūra malu garumi, bet - pusperimetrs. Tā kā ir trijstūra malu garumi un , tad pusperimetrs .

Analogiski kā no (1) tika iegūts (2), iegūstam, ka

Tātad trijstūra laukums ir

## Atrisinājums

Atradīsim trijstūra malu garumus. Ja tie ir naturāli skaitļi, tad tiem jābūt brīvā locekla dalītājiem. levērojot, ka , var uzminēt sakni, piemēram, .

Sagrupējot vienādojuma locek!̣us, iegūstam arī pārējās saknes:

Tātad dotā vienādojuma saknes un attiecīgi arī trijstūra malu garumi ir . Tā kā , tad dotais trijstūris ir taisnleņķa trijstūris un tā laukums ir .

# LV.VOL.2022.10.5

Holivudas diētā katrās septiņās secīgās dienās kopā jāapēd tieši trīs sieriņi “Kārums”, bet Bolivudas diētā - katrās vienpadsmit secīgās dienās kopā jāapēd tieši pieci sieriņi “Kārums”. Kādu lielāko secīgu dienu skaitu var ievērot abas diētas vienlaicīgi?

Katru dienu var ēst veselu nenegatīvu skaitu sieriṇu.

* questionType:
* domain:

## Atrisinājums

Abas diētas vienlaicīgi var ievērot lielākais dienas pēc kārtas. Lai to izdarītu viens sieriṇš “Kārums” jāēd dienā. Viegli pārbaudīt, ka abu diētu nosacījumi izpildās.



Pierādīsim, ka (vai vairāk) dienas abas diētas vienlaicīgi ievērot nevar. Pieṇemsim pretējo, ka to var izdarīt, un apzīmēsim -ajā dienā apēsto sieriņu skaitu ar . No Holivudas diētas nosacījuma izriet, ka visiem , bet no Bolivudas diētas nosacījuma izriet, ka visiem . Apvienojot šos nosacījumus, iegūstam divas vienādību virknes (pirmās vienādības locekļus apzīmējam ar , bet otrās - ar ):

Pirmajās septiņās dienās apēsto sieriṇu skaits ir , bet pirmajās dienās apēsto sieriņu skaits ir . No diētu nosacījumiem iegūstam vienādojumu sistēmu: , kuru atrisinot, iegūstam, ka un , kas nav iespējams (apēsto sieriņu skaits nevar būt negatīvs).

# LV.VOL.2022.11.1

Vai eksistē tāds naturāls skaitlis, kuram vienlaikus izpildās šādas trīs īpašības:

* to reizinot ar , iegūst naturāla skaitļa kvadrātu;
* to reizinot ar , iegūst naturāla skaitļa kubu;
* to reizinot ar , iegūst naturāla skaitļa piekto pakāpi?
* questionType:
* domain:

## Atrisinājums

Jā, piemēram, der skaitlis , jo

# LV.VOL.2022.11.2

Četrstūra malu un viduspunkti ir attiecīgi un . Nogriežņu un vidusperpendikuli krustojas vienā punktā. Pierādīt, ka .

* questionType:
* domain:

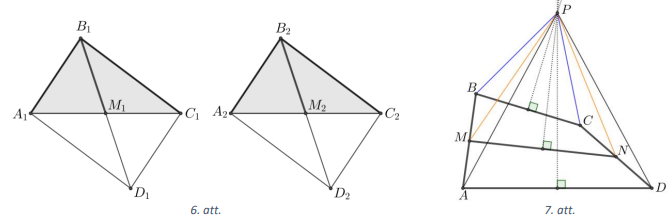
## Atrisinājums

Vispirms pierādīsim lemmu: ja diviem trijstūriem ir vienādas divas malas un mediānas pret trešo malu, tad šie trijstūri ir vienādi.

Pieņemsim, ka ir doti divi trijstūri un , kuros novilktas mediānas un un kuros un . Papildinām trijstūri līdz paralelogramam: uz taisnes atliekam punktu tā, ka (skat. 6.att.). Tā kā četrstūra diagonāles krustojoties dalās uz pusēm, tad šis četrstūris ir paralelograms. Analogi izdarām arī ar trijstūri .

Trijstūri un ir vienādi pēc pazīmes , jo un . Tātad (vienādos trijstūros attiecīgie leņķi ir vienādi). Analogi no trijstūru un vienādības izriet, ka .

Tātad , no kā izriet, ka trijstūri un ir vienādi pēc pazīmes . Lemma pierādīta.

Tagad dotajā uzdevumā vidusperpendikulu krustpunktu apzīmēsim ar (skat. 7.att.). Trijstūri un ir vienādi pēc iepriekš pierādītās lemmas, jo no vidusperpendikulu īpašībām vienādas ir to divas malas un , un vienādas ir to mediānas . Tā kā vienādos trijstūros atbilstošie elementi ir vienādi, tad . 

# LV.VOL.2022.11.3

Sākumā uz papīra lapas uzrakstīts skaitlis . Ja uz lapas ir

* uzrakstīts skaitlis , tad uz tās atlauts uzrakstīt arī skaitli ;
* uzrakstiti skaitļi un , tad uz tās atļauts uzrakstīt arī skaitli .

Vai var panākt, lai uz lapas būtu uzrakstïts skaitlis (neviens uzrakstītais skaitlis netiek nodzēsts)?

* questionType:
* domain:

## Atrisinājums

Pamatosim, ka nevar panākt, lai uz lapas būtu uzrakstīts skaitlis .

Sākumā uzrakstītais skaitlis , dalot ar , dod atlikumu .

* Ja skaitlis dod atlikumu , dalot ar , tad arī skaitlis , dalot ar , dod atlikumu , jo .
* Ja skaitļi un , dalot ar , dod atlikumu , tad arī skaitlis dod atlikumu , dalot ar , jo .

Tas nozīmē, ka uz lapas var iegūt tikai tādus skaitļus, kas dod atlikumu , dalot ar . Tā kā dalās ar (bez atlikuma), tad aprakstītajā veidā šo skaitli uz lapas iegūt nevar.

Uzdevumu var risināt arī pēc moduḷa vai pēc moduḷa .

# LV.VOL.2022.11.4

Vienādojuma saknes ir trijstūra malu garumi, izteikti centimetros. Aprēķināt šī trijstūra laukumu!

* questionType:
* domain:

## Atrisinājums

Dotā vienādojuma saknes apzīmējam ar un vienādojumu pārrakstām formā:

Atverot iekavas, iegūstam

Dotajā vienādojumā un vienādojumā (2), pielīdzinot koeficientus pie vienādām pakāpēm, iegūstam, ka

Pēc Hērona formulas trijstūra laukums , kur un - trijstūra malu garumi, bet - pusperimetrs. Tā kā ir trijstūra malu garumi un , tad pusperimetrs .

Analogiski kā no (1) tika iegūts (2), iegūstam, ka

Tātad trijstūra laukums ir

## Atrisinājums

Atradīsim trijstūra malu garumus. Ja kāds no tiem ir racionāls skaitlis, tad tas ir skaitļa dalītājs. levērojot, ka , uzminam vienu sakni .

Sagrupējot vienādojuma locekļus, iegūstam:

Atrisinot kvadrātvienādojumu , iegūstam, ka tā saknes ir un . Tātad trijstūra malu garumi ir un . Lai aprēķinātu trijstūra laukumu, izmantosim Hērona formulu. Trijstūra pusperimetrs ir un tātad tā laukums ir

# LV.VOL.2022.11.5

Naturālu skaitli sauksim par , ja katru secīgu naturālu skaitli reizinājums dalās ar . Kuri skaitlļi nav amizanti?

* questionType:
* domain:

## Atrisinājums

Pamatosim, ka amizanti nav visi pirmskaitli, kā arī skaitlis .

Ja ir pirmskaitlis, tad pirmo skaitļu reizinājums nedalās ar , jo neviens no pirmajiem skaitliem nedalās ar .

Pirmo skaitļu reizinājums nedalās ar , tātad skaitlis nav amizants.

Pierādīsim, ka visi pārējie skaitli ir amizanti. Ja ir salikts skaitlis, kas ir lielāks nekā , tad to var izteikt kā reizinājumu , kur un . Tātad un . No pēc kārtas sekojošiem skaitļiem viens noteikti dalās ar . Tā kā , tad vēl vismaz viens cits no šiem pēc kārtas sekojošiem skaitļiem dalās ar . Tā kā , tad vēl vismaz divi citi no šiem pēc kārtas sekojošiem skaitļiem dalās ar (tas nozīmē, ka kāds no šiem diviem skaitliem, kas dalās ar , noteikti nesakrīt ar to skaitli, kas dalās ar ). Tātad pēc kārtas sekojošu skaitļu reizinājums dalās ar .

# LV.VOL.2022.12.1

Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu .

* questionType:
* domain:

## Atrisinājums

Der vērtība , jo . Ja , tad , tātad vienādība nevar pastāvēt.

# LV.VOL.2022.12.2

Trapeces pamati ir un . Leņķu un bisektrises krustojas punktā , bet leņķu un bisektrises - punktā . Pierādīt, ka .

* questionType:
* domain:

## Atrisinājums

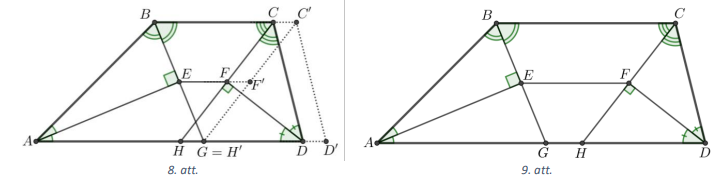
Taisnes un krustpunktu apzīmēsim ar , bet taisnes krustpunktu ar - ar (skat. 8.att.).

Tā kā , tad un no trijstūra iegūstam, ka . Tad pēc pazīmes un kā atbilstošās malas vienādos trijstūros. Analoǵiski pierāda, ka .

No tā, ka un izriet, ka un (caur punktu novelk taisni paralēli un , pēc Talesa teorēmas šī taisne sadala nogriezni uz pusēm, tātad tā iet caur punktu ).

Apskatīsim divus gadījumus, kādā secībā var būt izkārtoti punkti uz taisnes .

* Skat. 8.att. Trijstūri paralēli pārnesam par . Tad . Tā kā ir trijstūra viduslīnija, tad . legūstam, ka . levērojam, ka . Tātad .
* Skat. 9.att. legūstam, ka .



## Atrisinājums

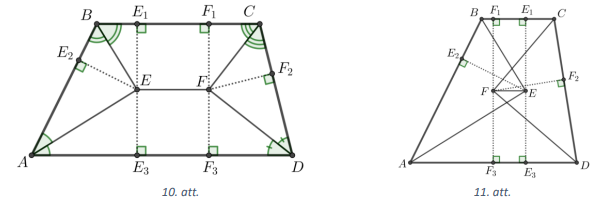
No punkta novelkam perpendikulus pret malām un , to pamatus attiecīgi apzīmējam (skat. 10.att.). Līdzīgi no punkta novelkam perpendikulus pret malām un to pamatus attiecīgi apzīmējam .

Tā kā katrs leņķa bisektrises punkts atrodas vienādā attālumā no leņķa malām, tad un . Līdzīgi iegūstam, ka .

Taisnleṇka trijstūri un ir vienādi (jo ir vienāda katete un hipotenūza), tāpēc kā atbilstošās malas vienādos trijstūros. Līdzīgi iegūstam, ka un .

Četrstūris ir taisnstūris un ir tā viduslīnija tāpēc .

* Ja uz nogriežṇa punkti atrodas secībā (skat. 10.att.; attiecīgi uz tad punkti atrodas secībā $.A, E\_{3}, F\_{3}, D$), tad
* Ja uz nogriežṇa punkti atrodas secībā (skat. 11.att.; attiecīgi uz tad punkti ir šādā secībā: $.A, F\_{3}, E\_{3}, D$), tad



# LV.VOL.2022.12.3

Pierādīt, ka divu vai vairāku secīgu naturālu skaitļu kubu summa nevar būt pirmskaitlis!

* questionType:
* domain:

## Atrisinājums

No kubu summas formulas redzams, ka dalās ar . Apskatīsim divus iespējamos gadījumus.

* Ja ir pāra skaits secīgu naturālu skaitļu, tas ir, secīgi naturāli skaitli, kur $k=1,2,$, tad šo skaitlu summu var uzrakstīt kā

Sagrupējot pirmo saskaitāmo ar pēdējo, otro saskaitāmo - ar pirmspēdējo utt., iegūstam, ka

Tā kā visas šīs summas dalās ar , tad arī visu kubu summa dalās ar , līdz ar to nav pirmskaitlis.

* Ja ir nepāra skaits secīgu naturālu skaitļu, tas ir, secīgi naturāli skaitli, kur $k=1,2,$, tad šo skaitļu summu var uzrakstīt kā

Ievērojam, ka pašā vidū šiem saskaitāmajiem atrodas skaitlis , kas dalās ar . Pārējos saskaitāmos sagrupējam tāpat kā iepriekš, tas ir, sagrupējam pirmo saskaitāmo ar pēdējo, otro saskaitāmo - ar pirmspēdējo utt., iegūstam, ka

Tā kā visas šīs summas dalās ar , un vidējais saskaitāmais dalās ar , tad arī visu kubu summa dalās ar , līdz ar to nav pirmskaitlis.

Uzdevumu var atrisināt arī ar matemātiskās indukcijas metodi.

# LV.VOL.2022.12.4

Vienādojuma saknes ir trijstūra malu garumi, kas izteikti centimetros. Aprēķināt šī trijstūra laukumu!

* questionType:
* domain:

## Atrisinājums

Dotā vienādojuma saknes apzīmējam ar un vienādojumu pārrakstām formā:

Atverot iekavas, iegūstam

Dotajā vienādojumā un vienādojumā (2), pielīdzinot koeficientus pie vienādām pakāpēm, iegūstam, ka

Pēc Hērona formulas trijstūra laukums , kur un - trijstūra malu garumi, bet - pusperimetrs. Tā kā ir trijstūra malu garumi un , tad pusperimetrs .

Analoǵiski kā no (1) tika iegūts (2), iegūstam, ka

Tātad trijstūra laukums ir

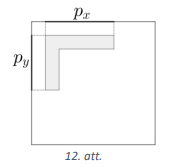
# LV.VOL.2022.12.5

Kvadrātu ar izmēriem rūtiņas pa rūtiņu līiijām sadalīia deviņos daudzstūros, kas katrs satur tieši rūtiņas, un katru no tiem nokrāsoja citā krāsā. Katrā dotā kvadrāta rindā un katrā kolonnā atrodas tieši trīs dažādu krāsu rūtiņas. Pierādīt, ka visi iegūtie daudzstūri ir kvadrāti ar izmēriem rūtiņas!

* questionType:
* domain:

## Atrisinājums

Aplūkosim, cik garas var būt katra daudzstūra projekcijas uz divām dotā kvadrāta perpendikulārajām malām. Abas projekcijas ir nogriežṇi, tās apzīmēsim ar un (skat. 12.att.).



Tā kā katrs daudzstūris satur rūtiņas, tad projekciju garumu reizinājums būs vismaz rūtiņas, tas ir, .

Noteiksim, kāda ir mazākā iespējamā projekciju garumu summa. No nevienādības starp vidējo aritmētisko un vidējo ǵeometrisko iegūstam, ka

Tātad , pie tam vienādība izpildās tikai tad, ja .

Tā kā katrā rindā un katrā kolonnā ir tieši trīs dažādu krāsu rūtinas, tad katrā rindā projekciju summa ir un arī katrā kolonnā projekciju summa ir . Tātad visu projekciju garumu kopsumma ir rindas (kolonnas . Līdz ar to katrai no deviņu daudzstūru projekciju garumu summām jābūt (pretējā gadīumā, ja kaut viena daudzstūra projekciju garumu summa pārsniegtu , tad visu projekciju garumu summa pārsniegtu ). Tātad visi daudzstūri ir kvadrāti ar izmēriem rūtiņas.