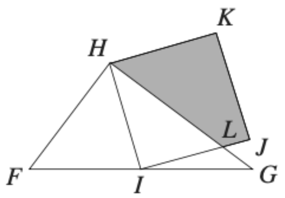
Ģeometrija: Līdzīgi trijstūri

1.uzdevums

Zīmējumā attēlots trijstūris FHG, kur $FH = 6$, $GH = 8$ un $FG = 10$. Punkts I ir FG viduspunkts un $HIJK$ ir kvadrāts. Nogriežņi IJ un GH krustojas punktā L. Cik liels ir iekrāsotā četrstūra laukums? (**A**) 124/8, (**B**) 125/8, (**C**) 126/8, (**D**) 127/8, (**E**) 128/8.



Atbilde: `B`

Atrisinājums:
Trijstūris ar malu garumiem $6, 8, 10$ ir taisnleņķa, jo $6^2 + 8^2 = 10^2$. No taisnā leņķa virsotnes H vilkta mediāna HI – un tā sadala taisnleņķa trijstūri divos vienādsānu trijstūros jeb mediānas garums ir puse no hipotenūzas.

Pierādījums apgalvojumam par taisnleņķa trijstūra mediānu: Taisnleņķa trijstūrim FGH piezīmējam klāt otru tādu pašu simetriski pret centru I, iegūstam taisnstūri. Taisnstūrī abas diagonāles ir vienāda garuma, tās krustpunktā dalās uz pusēm. Tāpēc HI ir puse no taisnstūra diagonāles un $HI = HG/2 = 5$.

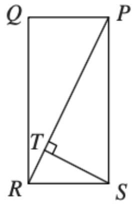
Kvadrāta $HIJK$ laukums ir $5 \cdot 5 = 25$. No tā jāatņem $\triangle HIL$ laukums. Ievērojam, ka $\triangle FGH \sim \triangle LHI$ (abi ir taisnleņķa trijstūri un šaurie leņķi $\sphericalangle IHL = \sphericalangle HGF$, jo trijstūris HGI ir vienādsānu). $\triangle LHI$ un $\triangle FGH$ līdzības koeficients ir $k = 5/8$, jo LHI garākā katete $HI = 5$, bet FGH garākā katete $GH = 8$.

Izsakām abu trijstūru laukumus, izmantojot līdzības koeficientu: $S(FGH) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$ un $S(LHI) = 24 \cdot k^2 = 24 \cdot \frac{25}{64} = \frac{75}{8}$.

Visbeidzot iekrāsotās figūras laukums:
$S(HKJL) = 25 - \frac{75}{8} = \frac{200-75}{8} = \frac{125}{8}$, kas ir atbilde (**B**).

2.uzdevums

Attēlā dots taisnstūris $PQRS$, kurā $PQ : QR = 1 : 2$. Punkts T atrodas uz PR tā, ka ST ir perpendikulārs taisnei PR. Kāda ir trijstūra RST laukuma un taisnstūra $PQRS$ laukuma attiecība? (**A**) $1 : (4\sqrt{2})$, (**B**) $1 : 6$, (**C**) $1 : 8$, (**D**) $1 : 10$, (**E**) $1 : 12$.



Atbilde: `D`

Atrisinājums. Pēc Pitagora teorēmas, taisnstūra diagonāle $PR = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Tā ir hipotenūza taisnleņķa trijstūrim $\triangle PQR$. Trijstūris $\triangle RST$ ir līdzīgs $\triangle PRQ$ un tam hipotenūza ir 1. Tādēļ $\triangle RST$ līdzības koeficients attiecībā pret $\triangle PRQ$ ir $\frac{1}{\sqrt{5}}$ – trijstūra $\triangle RST$ elementi (malas, augstumi) ir apmēram 2.236 reizes īsāki par atbilstošajiem elementiem trijstūrī PRQ.

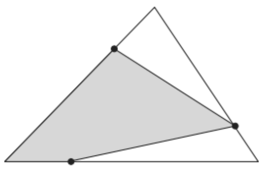
Laukumu attiecība abiem trijstūriem:

$$\frac{S(\triangle RST)}{S(\triangle PRQ)} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{5}.$$

Tā kā taisnstūra laukums $S(PQRS)$ ir divreiz lielāks nekā trijstūra laukums $S(PRQ)$, tad $\triangle RST$ laukuma attiecība pret taisnstūra laukumu ir puse no $1/5$ jeb $\frac{1}{10}$, kas ir atbilde **(D)**.

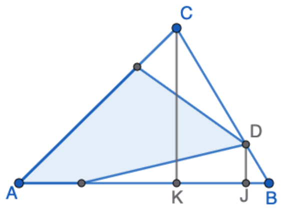
3.uzdevums

Uz katras trijstūra malas ir atzīmēts punkts, kas atrodas vienu ceturtdaļu no malas garuma (sk. attēlu). Kāda daļa no trijstūra laukuma ir iekrāsota? **(A)** $\dfrac{7}{16}$, **(B)** $\dfrac{1}{2}$, **(C)** $\dfrac{9}{16}$, **(D)** $\dfrac{5}{8}$, **(E)** $\dfrac{11}{16}$.



Atbilde: `D`

Atrisinājums:
Katram no abiem baltajiem trijstūriem pamats ir $3/4$ no sākotnējā trijstūra pamata, bet augstums ir četrreiz īsāks par sākotnējā trijstūra augstumu. Šo pēdējo faktu var pamatot, aplūkojot līdzīgus trijstūrus (piemēram, $\triangle BDJ$ un $\triangle BCK$ zīmējumā).



Ja sākotnējā trijstūra laukumu apzīmē ar $S = \frac{1}{2}ah$, tad katram no baltajiem trijstūriem laukums:

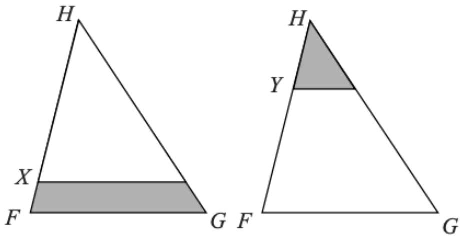
$$S' = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}a\right)\left(\frac{1}{4}h\right) = \frac{3}{16}S.$$

Atņemot divus šādus trijstūrus, iegūstam $S - \frac{3}{16}S - \frac{3}{16}S = \frac{5}{8}S$, kas ir atbilde **(D)**.

Piezīme: Ja izmanto trijstūra laukuma formulu $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, tad balto trijstūrīšu laukumus var izteikt uzreiz (pamatot, ka tie ir $3/16$ no sākotnējā trijstūra laukuma), neizmantojot spriedumus par līdzīgiem trijstūriem.

4.uzdevums

Trijstūrī FGH var novilkt taisni, kas ir paralēla tā pamatnei FG, caur punktu X vai Y. Ieēnoto daļu laukumi ir vienādi. Dotā attiecība ir $HX : XF = 4 : 1$. Kāda ir attiecība $HY : YF$?
(**A**) $1 : 1$, (**B**) $2 : 1$, (**C**) $3 : 1$, (**D**) $3 : 2$, (**E**) $4 : 3$



Atbilde: `D`

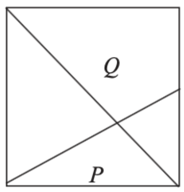
Atrisinājums:
Apzīmējam trijstūra pamata malu ar a un augstumu ar h. Tad kreisā attēla trapecei apakšējais pamats ir a, bet augšējais pamats ir $\frac{4}{5}a$; trapeces augstums ir $\frac{1}{5}h$. Tad trapeces laukums:

$$S = \frac{a + \frac{4}{5}a}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}h\right) = \left(1 + \frac{4}{5}\right) \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{ah}{2} = \frac{9}{25} \cdot \frac{ah}{2}.$$

Iekrāsotās trapeces laukums ir $\frac{9}{25}$ no trijstūra laukuma. Lai labajā pusē iekrāsotajam trijstūrim arī būtu tāds laukums, vajag, lai līdzības koeficients būtu $\frac{3}{5}$. Tad $\frac{HY}{YF} = \frac{3}{5}$, kas ir atbilde (**D**).

5.uzdevums

Zīmējumā dots kvadrāts ar diagonāli un nogriezni, kas savieno virsotni ar malas viduspunktu. Kāda ir P un Q laukumu attiecība? (**A**) $1 : \sqrt{2}$, (**B**) $2 : 3$, (**C**) $1 : 2$, (**D**) $2 : 5$, (**E**) $1 : 3$.



Atbilde: `D`

Atrisinājums-1:
Apzīmējam kvadrāta malu ar 1. Novelkam GE – trijstūra ABC viduslīniju; tās garums ir $1/2$. Trapeces $ABEG$ laukums ir viduslīnijas un augstuma reizinājums:

$$S_{ABEG} = \frac{1 + 1/2}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

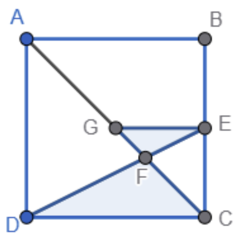
Trijstūri CDF un GEF ir līdzīgi, jo tiem visi leņķi ir pa pāriem vienādi. Līdzības koeficients ir 2, jo CD ir divreiz garāks nogrieznis nekā GE. Abu šo trijstūru vertikālajiem augstumiem jābūt $1/3$ un $1/6$ (vienīgie skaitļi, kuru summa ir $1/2$ un pirmais ir divreiz lielāks kā otrais). Trijstūra FDC laukums – puse no pamata un augstuma reizinājuma:

$$S_{CDF} = \frac{DC \cdot \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{6}.$$

Savukārt $S_{GEF} = \frac{1}{24}$, jo tas ir četras reizes mazāks. Meklējamā laukumu attiecība:

$$\frac{P}{Q} = \frac{S_{CDF}}{S_{ABEG} + S_{GEF}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{8} + \frac{1}{24}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{10}{24}} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}.$$

Tā ir atbilde (**D**)

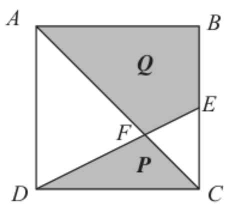


Atrisinājums-2:
Apzīmējam trijstūra CEF laukumu ar S. Ievērojam, ka $\sphericalangle AFD = \sphericalangle CFE$ (krustleņķi) un $\sphericalangle DAF = \sphericalangle ECF$ (iekšējie šķērsleņķi), tādēļ trijstūri ADF un CEF ir līdzīgi. Līdzības koeficients $k = 2$, jo mala AD ir divreiz garāka par attiecīgo malu CE. Tātad:

i. trijstūrim ADF ir laukums $k^2 \cdot S = 4S$,
ii. mala AF ir divreiz garāka nekā attiecīgā mala CF.

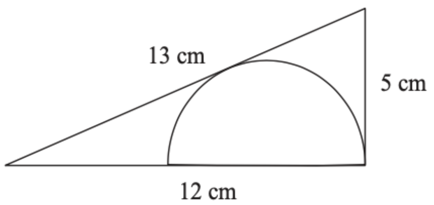
Apskatām AF un CF kā trijstūru ADF un CDF pamatus (tiem ir vienāds augstums). Saskaņā ar (ii), trijstūrim ADF ir divreiz lielāks laukums nekā trijstūrim CDF (laukums P), tātad tas ir $2S$.

Trijstūra ACD laukums ir $6S$; tātad arī trijstūra ABC laukums ir $6S$, bet Q ir $6S - S = 5S$. Tātad meklētā attiecība ir $2 : 5$, kas ir atbilde (**D**).



6.uzdevums

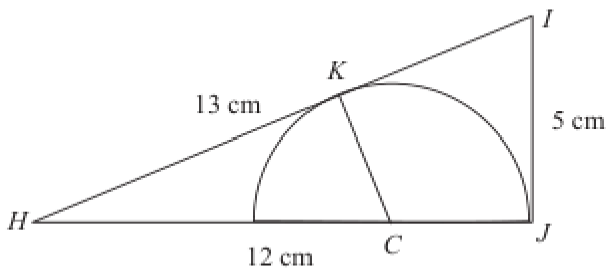
Zīmējumā attēlotajā taisnleņķa trijstūrī malu garumi ir 5 cm, 12 cm un 13 cm. Kāds ir ievilktā pusriņķa rādiuss centimetros, ja tā diametrs atrodas uz malas ar garumu 12 cm?
(**A**) 8/3, (**B**) 10/3, (**C**) 11/3, (**D**) 4, (**E**) 13/3.



Ieteikums: Ja neesat pazīstami ar formulu $S = pr$ ievilktā riņķa rādiusa atrašanai, var savienot riņķa centru ar pieskaršanās punktu uz hipotenūzas un aplūkot līdzīgus trijstūrus.

Atbilde: B

Atrisinājums-1:
Apzīmējam trijstūra virsotnes ar H, I, J, ar C – riņķa centru un K ir punkts, kur pusriņķis pieskaras malai HI, kā redzams zīmējumā. Leņķis $\sphericalangle CKH$ ir taisns, jo nogrieznis HI pieskaras riņķim un tādēļ ir perpendikulārs rādiusam CK. Trijstūri HKC un HJI ir līdzīgi, jo tiem ir katram taisns leņķis un arī kopīgs leņķis virsotnē H. Apzīmējam pusriņķa rādiusu ar r; tad $CK = r$ un $CH = 12 - r$. No trijstūru līdzības iegūstam $\dfrac{12-r}{r} = \dfrac{13}{5}$.



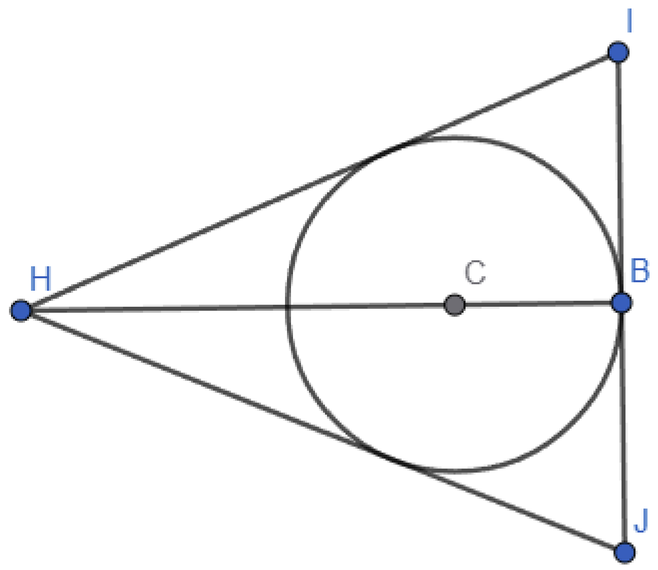
Tātad $5(12 - r) = 13r$ un $60 - 5r = 13r$. No šejienes $18r = 60$, tātad $r = \dfrac{10}{3}$, kas ir atbilde (**B**).

Atrisinājums-2:
Simetriski pret kateti garumā 12 uzzīmējam otru taisnleņķa trijstūri. Esam ieguvuši jaunu vienādsānu trijstūri HIJ, kurā ievilkta riņķa līnija. Šī trijstūra laukums ir divkāršots $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$, tātad 60.

No otras puses, trijstūra laukumu var izteikt ar formulu $S = pr$, kur p ir pusperimetrs un r - ievilktā riņķa līnija. Trijstūra HIJ pusperimetrs ir $(13 + 13 + 10)/2 = 18$. Tāpēc pielīdzinām:

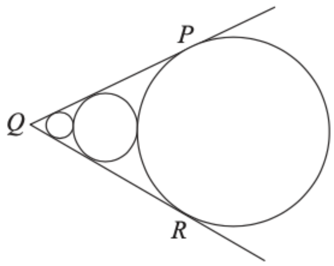
$$S = pr, \quad 60 = 18r, \quad r = 60/18 = 10/3.$$

Tā ir atbilde (**B**).



7.uzdevums

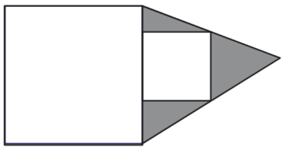
Trīs apļi un taisnes PQ un QR savstarpēji pieskaras, kā attēlots zīmējumā. Attālums starp mazākā un lielākā riņķa centriem ir 16 reizes lielāks par mazā riņķa rādiusu. Kāds ir leņķis $\sphericalangle PQR$? (**A**) 45°, (**B**) 60°, (**C**) 75°, (**D**) 90°, (**E**) 135°.



8.uzdevums

Zīmējumā attēloti divi kvadrāti: Vienam malas garums ir 20, un otram malas garums ir 10. Kāds ir ieēnotā apgabala laukums?

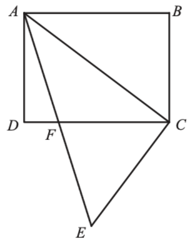
Ierakstīt atbildē veselu skaitli vai parastu daļu P/Q.



9.uzdevums

Attēlā redzams taisnstūris $ABCD$, kam $AB = 16$ un $BC = 12$. $\sphericalangle ACE$ ir taisns leņķis un $CE = 15$. Nogriežņi AE un CD krustojas punktā F. Kāds ir $\triangle ACF$ laukums?

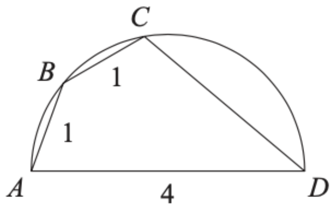
Ierakstīt atbildē veselu skaitli vai parastu daļu P/Q.



10.uzdevums

Riņķa diametra AD garums ir 4. Punkti B un C atrodas uz riņķa, kā attēlots zīmējumā, un $AB = BC = 1$. Atrast CD garumu.

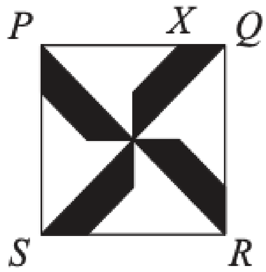
Ierakstīt atbildē veselu skaitli vai parastu daļu P/Q.



11.uzdevums

Četras vienādas vienādsānu trapeces novietotas tā, ka to garākās pamata malas veido kvadrāta $PQRS$ diagonāles, kā parādīts attēlā. Punkts X dala PQ attiecībā $3:1$. Kāda daļa no kvadrāta ir iekrāsota?

(**A**) $\frac{5}{16}$, (**B**) $\frac{3}{8}$, (**C**) $\frac{7}{16}$, (**D**) $\frac{5}{12}$, (**E**) $\frac{1}{2}$.



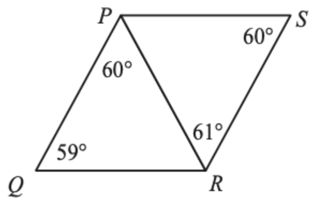
12.uzdevums

Trapeces perimetrs ir 5 vienības un katras malas garums ir vesels skaitlis. Kādi ir divi mazākie trapeces leņķi?

(**A**) 30° un 30°, (**B**) 60° un 60°, (**C**) 45° un 45°, (**D**) 30° un 60°, (**E**) 45° un 90°.

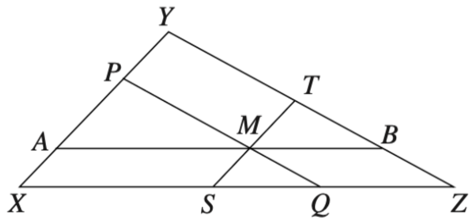
13.uzdevums

Četrstūrī $PQRS$, $\sphericalangle PQR = 59^\circ$, $\sphericalangle RPQ = 60^\circ$, $\sphericalangle PRS = 61^\circ$ un $\sphericalangle RSP = 60^\circ$, kā redzams attēlā. Kurš no nogriežņiem ir garākais? (**A**) PQ, (**B**) PR, (**C**) PS, (**D**) QR, (**E**) RS.



14.uzdevums

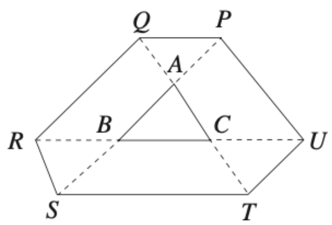
Attēlā redzams trijstūris XYZ. Malām XY, YZ un XZ ir attiecīgi garumi 2, 3 un 4. Taisnes AMB, PMQ un SMT vilktas paralēli trijstūra malām tā, ka nogriežņu AP, QS un BT garumi ir vienādi. Kāds ir AP garums? **(A)** $\frac{10}{11}$, **(B)** $\frac{11}{12}$, **(C)** $\frac{12}{13}$, **(D)** $\frac{13}{14}$, **(E)** $\frac{14}{15}$.



15.uzdevums

Attēlā dots trīsstūris ABC ar laukumu 12 cm^2. Trijstūra malas ir pagarinātas līdz punktiem P, Q, R, S, T un U tā, kā parādīts, tā ka $PA = AB = BS$, $QA = AC = CT$ un $RB = BC = CU$. Kāds ir sešstūra $PQRSTU$ laukums kvadrātcentimetros?

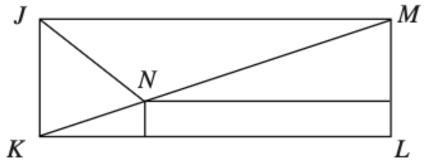
Ierakstīt atbildē veselu skaitli vai parastu daļu P/Q.



16.uzdevums

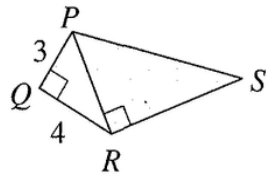
Taisnstūrī $JKLM$ leņķa $\angle KJM$ bisektrise krusto diagonāli KM punktā N, kā parādīts. Attālumi no N līdz malām LM un KL ir attiecīgi 8 cm un 1 cm. Malas KL garums ir $(a + \sqrt{b})$ cm. Kāda ir $a + b$ vērtība?

Ierakstīt atbildē veselu skaitli vai parastu daļu P/Q.



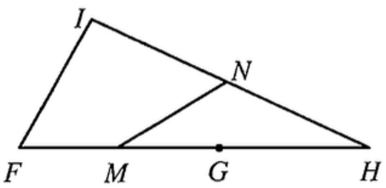
17.uzdevums

Attēlā dots četrstūris $PQRS$, kas veidots no diviem līdzīgiem taisnleņķa trīsstūriem PQR un PRS. Malas PQ garums ir 3, malas QR garums ir 4, un $\angle PRQ = \angle PSR$. Kāds ir četrstūra $PQRS$ perimetrs? (**A**) 22, (**B**) $22\frac{5}{6}$, (**C**) 27, (**D**) 32, (**E**) $45\frac{1}{3}$.



18.uzdevums

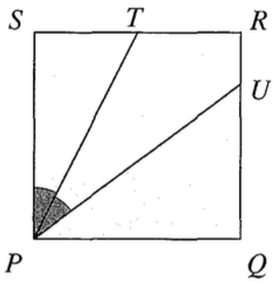
Attēlā dots trīsstūris FHI, un punkts G atrodas uz nogriežņa FH tā, ka $GH = FI$. Punkti M un N ir attiecīgi nogriežņu FG un HI viduspunkts. Leņķis $NMH = \alpha°$. Kurš no sekojošajiem dod izteiksmi leņķim $\angle IFH$?
(**A**) $2\alpha°$, (**B**) $(90 - \alpha)°$, (**C**) $(45 + \alpha)°$, (**D**) $\left(90 - \frac{1}{2}\alpha\right)°$, (**E**) $60°$.



19.uzdevums

Attēlā dots kvadrāts $PQRS$ ar malu garumu 2. Punkts T ir malas RS viduspunkts, un punkts U atrodas uz nogriežņa QR tā, ka $\angle SPT = \angle TPU$. Kāds ir nogriežņa UR garums?

Ierakstīt atbildē veselu skaitli vai parastu daļu P/Q.



20.uzdevums

Attēlā dots kvadrāts $ABCD$ un taisnleņķa trijstūris ABE. Malas BC garums ir 3. Malas BE garums ir 4. Kāds ir iekrāsotās daļas laukums? (**A**) $5\frac{1}{4}$, (**A**) $5\frac{3}{8}$, (**C**) $5\frac{1}{2}$, (**D**) $5\frac{5}{8}$, (**E**) $5\frac{3}{4}$.