

1. Skaitļu teorijas mājasdarbs

1. SKAITĻU TEORIJAS MĀJASDARBS

Iesniegšanas termiņš: 2022.g. 12.novembris.

Kam iesūtīt: kalvis.apsitis, domēns gmail.com

1.uzdevums: Naturālu skaitli saucim par *elegantu*, ja tā decimālajā pierakstā nav nevienas nulles un šis skaitlis dalās ar savu ciparu summu. (Eleganti ir visi viencipara skaitļi, kā arī, piemēram, skaitļi 36 un 322.) Pierādīt, ka ir bezgalīgi daudz elegantu skaitļu!

2.uzdevums: Zināms, ka trīsciparu skaitlis \overline{abc} ir pirmskaitlis un ka vienādojumam $ax^2 + bx + c = 0$ ir divas reālas saknes. Vai var gadīties, ka šīs saknes ir **(A)** veseli skaitļi, **(B)** racionāli skaitļi?

3.uzdevums: Divi spēlētāji pamīšus raksta uz tāfeles naturāla skaitļa N naturālos dalītājus. Katrā gājienā jāievēro šādi noteikumi:

- nedrīkst atkārtoti rakstīt jau uzrakstītu dalītāju;
- nedrīkst rakstīt dalītāju, kurš ir tieši 2 vai 3 reizes lielāks vai mazāks nekā kāds jau uzrakstītais dalītājs.

Zaudē tas spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt?

Pamatot atbildi šādām vērtībām: **(A)** $N = 144$, **(B)** $N = 216$.

4.uzdevums: Skaitļi p, q ir pirmskaitļi un $p > q$. Definējam $t = \gcd(p! - 1, q! - 1)$. Pierādīt, ka $t \leq p^{\frac{p}{3}}$.

5.uzdevums:

(A) Atrast visus naturālos skaitļus n , ka jebkuram nepāra skaitlim a izpildās $4 \mid a^n - 1$.

(B) Atrast visus naturālos skaitļus n , ka jebkuram nepāra skaitlim a , izpildās $2^{2017} \mid a^n - 1$.

6.uzdevums: Atrast visus veselo skaitļu trijniekus (a, b, c) , kas apmierina vienādojumu:

$$5a^2 + 9b^2 = 13c^2.$$