Algebra: Funkcijas

1.uzdevums

Dota funkcija $f(x) = \frac{k-x}{1+x}$. Atrast tādu funkcijas f kompozīciju pašai ar sevi, kur visiem x (izņemot varbūt galīgu skaitu x, kam izteiksmes nav definētas), kompozīcija identiski vienāda ar x. (Ja tādas ir vairākas, izvēlēties īsāko kompozīciju.)

(A) $f(f(x)) = x$,
(B) $f(f(f(x))) = x$,
(C) $f(f(f(f(x)))) = x$,
(D) $f(f(f(f(f(x))))) = x$,
(E) Neviena no minētajām kompozīcijām nav x.

Atbilde: `A`

Atrisinājums:
Ievietojam $f(f(x))$, lai izrēķinātu funkciju kompozīciju:

$$f(f(x)) = \frac{k - f(x)}{1 + f(x)} = \frac{k - \frac{k-x}{1+x}}{1 + \frac{k-x}{1+x}}.$$

Pareizinām skaitītāju un saucēju ar $1 + x$:

$$\frac{k - \frac{k-x}{1+x}}{1 + \frac{k-x}{1+x}} = \frac{k + kx - k + x}{1 + x + k - x} = \frac{(k+1)x}{k+1} = x.$$

Tātad jau $f(f(x))$ ir identiski vienāds ar x, kas ir atbilde **(A)**.

2.uzdevums

Dota funkcija $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Atrast tādu funkcijas f kompozīciju pašai ar sevi, kur visiem x (izņemot varbūt galīgu skaitu x, kam izteiksmes nav definētas), kompozīcija identiski vienāda ar x. (Ja tādas ir vairākas, izvēlēties īsāko kompozīciju.)

(A) $f(f(x)) = x$,
(B) $f(f(f(x))) = x$,
(C) $f(f(f(f(x)))) = x$,
(D) $f(f(f(f(f(x))))) = x$,
(E) Neviena no minētajām kompozīcijām nav x.

Atbilde: `B`

Atrisinājums:
Vispirms ievietojam $f(f(x))$. Iegūstam

$$f(f(x)) = \frac{1}{1 - f(x)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{1-x-1} = \frac{x-1}{x}.$$

Tālāk, ievietojam šo $f(f(x))$ izteiksmi funkcijā f:

$$f(f(f(x))) = \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = \frac{x}{x - x + 1} = \frac{x}{1} = x.$$

Esam ieguvuši, ka $f(f(f(x)))$ ir identiski vienāds ar x (atskaitot punktus $x = 0$, $x = 1$, kur izteiksmes $f(x)$ vai $f(f(x))$ nav definētas). Tā ir atbilde (**B**).

3.uzdevums

Kīrs uzrakstīja sešus dažādus pirmskaitļus p, q, r, s, t, u, kas visi mazāki par 20, un $p + q = r + s = t + u$. Kāda ir $p + q$ vērtība?

Atbilde: `24`

Atrisinājums:
Pirmskaitli 2 nevar izmantot, jo tad viena no summām būtu nepāra skaitlis, bet citas būtu pāra skaitļi (pretruna).

Nepāra pirmskaitļu ir pavisam 7: $\{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$. Ja atmet arī pirmskaitli 3 un saliek pāros atlikušos - vismazāko ar vislielāko utt., tad iegūst $5 + 19 = 7 + 17 = 11 + 13 = 24$.

4.uzdevums

Zināms, ka $4x - y = 5$, $4y - z = 7$ un $4z - x = 18$. Kāda ir izteiksmes $x + y + z$ vērtība?

(**A**) 8, (**B**) 9, (**C**) 10, (**D**) 11, (**E**) 12.

Atbilde: `10`

Atrisinājums:
Saskaitām visas vienādības:
$(4x - y) + (4y - z) + (4z - x) = 5 + 7 + 18$, jeb $3(x + y + z) = 30$. Iegūstam, ka $x + y + z = 10$.

5.uzdevums

Pozitīvi skaitļi x un y apmierina sakarības $x^4 - y^4 = 2009$ un $x^2 + y^2 = 49$. Kāda ir y vērtība?

(**A**) 1, (**B**) 2, (**C**) 3, (**D**) 4, (**E**) nepietiek informācijas.

Atbilde: `B`

Atrisinājums:
Sadalām reizinātājos $x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$. Tā kā $2009 = 49 \cdot 41$, tad $x^2 - y^2 = 41$, kas kopā ar vienādību $x^2 + y^2 = 49$ ļauj secināt, ka $y^2 = (49 - 41)/2 = 4$. Tādēļ $y = \pm 2$, bet y var būt tikai pozitīvs, tāpēc $y = 2$.

6.uzdevums

Reāli skaitļi x un y abi ir lielāki par 1. Kurai no daļām ir vislielākā vērtība?

(A) $\dfrac{x}{y+1}$,
(B) $\dfrac{x}{y-1}$,
(C) $\dfrac{2x}{2y+1}$,
(D) $\dfrac{2x}{2y-1}$,
(E) $\dfrac{3x}{3y+1}$.

Atbilde: B

Atrisinājums:
Ja divām daļām ir vienādi skaitītāji, tad lielākā ir tā, kurai mazāks saucējs. Tāpēc $\frac{x}{y-1} > \frac{x}{y+1}$ un $\frac{2x}{2y-1} > \frac{2x}{2y+1}$. Secinām, ka lielākā daļa ir viena no $\frac{x}{y-1}, \frac{2x}{2y-1}$. (Daļa $\dfrac{3x}{3y+1}$ nevar būt lielākā, jo tā ir mazāka par $\frac{3x}{3y} = \frac{x}{y}$.)

Pamatojam, ka $\frac{x}{y-1} > \frac{2x}{2y-1}$. Sareizinot daļas krustiski un noīsinot, iegūstam, ka jāpābauda, vai $-x > -2x$. Tas tiešām izpildās pozitīviem x. Tātad $\frac{x}{y-1}$ ir lielākā no visām uzrakstītajām daļām, kas ir atbilde **(B)**.

7.uzdevums

Kura no izteiksmēm ir ekvivalenta izteiksmei $(x+y+z)(x-y-z)$?

(A) $x^2 - y^2 - z^2$,
(B) $x^2 - y^2 + z^2$,
(C) $x^2 - xy - xz - z^2$,
(D) $x^2 - (y+z)^2$,
(E) $x^2 - (y-z)^2$.

Atbilde: B

Atrisinājums:
Pārveidojam $(x+y+z)(x-y-z) = (x+(y+z))(x-(y+z)) = x^2 - (y+z)^2$, kas ir atbilde **(D)**.

8.uzdevums

Divi skaitļi x un y ir tādi, ka $x+y = 20$ un $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$. Kāda ir izteiksmes $x^2y + xy^2$ vērtība?

(A) 80,
(B) 200,
(C) 400,
(D) 640,
(E) 800.

Atbilde: B

Atrisinājums:
Saskaitām daļas: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$.

Ja $x + y = 20$, tad $xy = 40$. No šejienes var izteikt:

$$x^2y + xy^2 = xy(x + y) = 40 \cdot 20 = 800,$$

kas ir atbilde **(E)**.

9.uzdevums

Ir zināms, ka $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 6$ un $a^3 + \frac{1}{a^3} = N\sqrt{6}$ un $a > 0$. Kāda ir N vērtība?

Atbilde: `B`

Atrisinājums:

10.uzdevums

Ir zināms, ka $x + y + z = 1$, $x + y - z = 2$ un $x - y - z = 3$. Kāda ir xyz vērtība?

(A) -2 **(B)** $-\frac{1}{2}$ **(C)** 0 **(D)** $\frac{1}{2}$ **(E)** 2

11.uzdevums

Zināms, ka $a + b = 5$ un $ab = 3$. Kāda ir izteiksmes $a^4 + b^4$ vērtība?

12.uzdevums

Ja dots, ka $\frac{3x+y}{x-3y} = -1$, tad kāda ir izteiksmes $\frac{x+3y}{3x-y}$ vērtība?

(A) -1 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 7

13.uzdevums

Skaitļi x, y un z apmierina vienādojumus $x + y + z = 15$ un $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Kāda ir izteiksmes $x^2 + y^2 + z^2$ vērtība?

14.uzdevums

Dota funkcija $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{x - \sqrt{x^2+1}}$. Atrast vērtību $f(2015)$.

(A) -1 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** $\sqrt{2016}$ **(E)** 2015

15.uzdevums

Izteiksmi $1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}}$ pārveidoja par daļu $\frac{a}{b}$, kur a un b ir naturāli skaitļi, kuru lielākais kopīgais dalītājs ir 1. Atrast $a + b$ vērtību.

16.uzdevums

Skaitļi a, b un c ir tādi, ka $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = k$. Cik dažādas k vērtības ir iespējamas?

17.uzdevums

Kādā virknē n-to locekli iegūst, sareizinot visus skaitļus $\sqrt{1+\frac{1}{k}}$, kur k pieņem visas vērtības no 2 līdz $n+1$ ieskaitot. Piemēram, šīs virknes trešais loceklis ir

$$\sqrt{1+\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{4}}.$$

Kurai mazākajai n vērtībai, n-tais loceklis šajā virknē būs vesels skaitlis?

(**A**) 3 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) more than 7

18.uzdevums

Kvadrāta virsotnes ir punkti ar koordinātēm $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ un $(0,1)$. Tajā pašā koordinātu sistēmā doti arī vairāku vienādojumu grafiki:

$$x^2+y^2=1, \quad y=x+1, \quad y=-x^2+1, \quad y=x, \quad y=\frac{1}{x}.$$

Cik daudzi no grafikiem iet cauri tieši divām kvadrāta virsotnēm?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

19.uzdevums

Reāli skaitļi x, y un z ir atrisinājums (x,y,z) vienādojumam $(x^2-9)^2+(y^2-4)^2+(z^2-1)^2=0$. Cik dažādas vērtības var būt izteiksmei $x+y+z$?

20.uzdevums

Divu pozitīvu skaitļu x, y aritmētisko vidējo A definē ar formulu $A=\frac{1}{2}(x+y)$, un ģeometrisko vidējo G definē ar formulu $G=\sqrt{xy}$. Kaut kādiem diviem skaitļiem x un y, kur $x>y$, izrādījās, ka attiecība $A:G=5:4$. Kāda var būt dalījuma $x:y$ vērtība?

(**A**) $5:4$ (**B**) $2:1$ (**C**) $5:2$ (**D**) $7:2$ (**E**) $4:1$