1 Skaitļu teorija: Dalāmība - 1

1.uzdevums

Cik daudzi pozitīvi trīsciparu skaitļi dalās gan ar 11, gan ar 5?

Atbilde: 17

Atrisinājums:
Ar 11 un ar 5 dalās visi tie skaitļi, kas dalās ar $11 \cdot 5 = 55$, jo 11 un 5 ir savstarpēji pirmskaitļi. Mazākais trīsciparu skaitlis, kas dalās ar 55 ir $2 \cdot 55 = 110$, bet lielākais šāds skaitlis ir $18 \cdot 55 = 990$.
Tātad 55 var reizināt ar jebko intervālā $[2; 18]$, lai iegūtu trīsciparu skaitli. Šādu reizinājumu būs $18 - 2 + 1 = 17$.

2.uzdevums

Kurš ir mazākais pozitīvais skaitļa 25 daudzkārtnis, kura ciparu reizinājums arī ir pozitīvs skaitļa 25 daudzkārtnis?
(*Piezīme:* Par skaitļa 25 *daudzkārtni* sauc skaitli, kas dalās ar 25.)

Atbilde: 525

Atrisinājums:
Skaitļi, kuri dalās ar 25, var beigties ar cipariem "00", "25", "50" vai "75". (Mums neder "00" un "50", jo tad ciparu reizinājums ir "0", kas nav pozitīvs.)

Ja skaitlis beidzas ar cipariem "25", tad tam vajag vēl vismaz vienu ciparu, kas dalās ar 5, lai reizinājums dalītos ar $5 \cdot 5 = 25$. Tāds ir skaitlis 525.
(Līdzīgi der arī 575, bet 525 ir mazākais.)

3.uzdevums

Atrast mazāko naturālo skaitli, kas ir skaitļa 120 dalītājs, bet nav skaitļa 300 dalītājs.

Atbilde: 8

Atrisinājums:
Sadalām abus pirmreizinātājos: $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ un $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$.
Skaitlī 300 visi pirmreizinātāji ir ar lielākām pakāpēm, izņemot, divnieka pakāpi (jo 120 dalās ar $2^3 = 8$, bet 300 dalās tikai ar $2^2 = 4$).

Iegūstam, ka mazākais skaitlis, kas dala 120, bet ne 300 ir 8.

4.uzdevums

Visi skaitļa 175 pozitīvie dalītāji, izņemot 1, ir izrakstīti pa apli tā, ka jebkuriem diviem skaitļiem blakus uz apļa ir kopīgs reizinātājs, kas lielāks par 1. Kāda ir summa abiem skaitļiem, kuri uzrakstīti blakus skaitlim 7?

Atbilde: 210

Atrisinājums:
Lai kādam skaitlim būtu kopīgs reizinātājs ar 7 (kas lielāks par 1), pašam skaitlim ir jādalās ar 7, jo 7 ir pirmskaitlis un citu reizinātāju, izņemot sevi, viņam nav.

Ar 7 dalās vēl vienīgi $7 \cdot 5 = 35$ un $7 \cdot 25 = 175$, jo skaitlim $175 = 5^2 \cdot 7$ ir pavisam seši dalītāji $(1, 5, 7, 35, 35, 175)$ un tikai trīs no tiem satur pirmreizinātāju 7.
Iegūstam, ka skaitlim 7 blakus uzrakstīto skaitļu summa ir $175 + 35 = 210$.

5.uzdevums

Orķestrī spēlē 72 skolēni, kuri visi soļos dziesmu svētku gājienā. Viņiem jāsoļo rindās – ar vienādu skolēnu skaitu katrā rindā. Vienā rindā jābūt no 5 līdz 20 skolēniem. Cik dažādus rindu garumus orķestra dalībnieki var izveidot?

Atbilde: 5

Atrisinājums:
Skaitlim $72 = 2^3 \cdot 3^2$ ir pavisam $(3 + 1)(2 + 1) = 12$ dažādi pozitīvi dalītāji – tie ir visi skaitļi formā $2^a \cdot 3^b$, kur $a \leq 3$ un $b \leq 2$.

Starp visiem divpadsmit skaitļa 72 dalītājiem pirmie seši ir "mazie" dalītāji: $1, 2, 3, 4, 6, 8$.
Atlikušie seši ir "lielie" dalītāji (ko iegūst 72 izdalot ar kādu no "mazajiem"): $72, 36, 24, 18, 12, 9$.

Starp visiem šiem dalītājiem ir tikai $6, 8, 9, 12, 18$ ir tādi, kas atrodas intervālā $[5; 20]$. Tāpēc var izveidot piecus dažādus rindu garumus.

6.uzdevums

Pieņemsim, ka a un b ir veseli pozitīvi skaitļi, kur skaitlim a ir 3 pozitīvi dalītāji, bet skaitlim b ir a pozitīvi dalītāji. Ja b dalās ar a, tad kāda var būt skaitļa b mazākā iespējamā vērtība?

Atbilde: 8

Atrisinājums:
Ja skaitlim a ir 3 dažādi dalītāji, tad tas ir kāda pirmskaitļa kvadrāts p^2 (dalītāji ir $1, p, p^2$). Mazākais šāds skaitlis ir $2^2 = 4$.
Tālāk jāatrod skaitlis, kuram ir tieši 4 dažādi dalītāji un kurš dalās ar 4.

Tas nevar būt 2 reizinājums ar kādu citu pirmskaitli (piemēram $2 \cdot 3 = 6$), jo tādam ir četri dalītāji, bet tas nedalās ar 4. Vienīgā iespēja ir izvēlēties b kā divnieka pakāpi: $b = 2^3 = 8$. Šim skaitlim ir četri dalītāji $(1, 2, 4, 8)$ un tas dalās ar 4.

7.uzdevums

Kāds ir lielākais veselais skaitlis, ar kuru dalās jebkuru trīs pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu reizinājums?

Atbilde: 6

Atrisinājums:
Šāds skaitlis ir 6. Lielāka šāda skaitļa nav, jo trīs pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu reizinājums $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ nedalās ne ar kādu lielāku skaitli.

Kāpēc arī katrs cits reizinājums $n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$ dalās ar 6? Starp skaitļiem $n, n+1, n+2$ viens vai divi ir pāra skaitļi, tāpēc reizinājums noteikti dalās ar 2.
Un arī starp skaitļiem $n, n+1, n+2$, kuri seko pēc kārtas, tieši viens dalās ar 3. Tāpēc reizinājums dalās arī 3.

Ja skaitlis dalās ar 2 un ar 3, tad tas dalās ar 6.

8.uzdevums

Naturāli skaitļi A, B, $A - B$ un $A + B$ visi ir pirmskaitļi. Atrast šo četru pirmskaitļu summu.

Atbilde: 17

Atrisinājums:
Skaitļi $A - B$, A, $A + B$ veido aritmētisku progresiju. Tā kā visi pirmskaitļi (izņemot pašu mazāko) ir nepāra skaitļi, tad A un $A + B$ abi ir nepāra skaitļi. Tādēļ to starpība B ir pāra skaitlis un tas var būt vienīgi $B = 2$.

Vienīgā aritmētiskā progresija no trim pirmskaitļiem ar diferenci 2 ir $3, 5, 7$. (Neviena cita nevar būt, jo tieši viens skaitlis šādā progresijā dalās ar 3 – un vienīgais pirmskaitlis, kurš var dalīties ar 3 ir pats 3.) Esam ieguvuši, ka progresijas vidējais loceklis ir $A = 5$.

Esam ieguvuši, ka $A = 5$, $B = 2$, $A - B = 3$, $A + B = 7$. To summa ir 17.

9.uzdevums

Ar m un n apzīmējam attiecīgi lielāko un mazāko skaitļa 7 daudzkārtni starp visiem trīsciparu skaitļiem. Kāda ir $m + n$ vērtība?
(*Piezīme:* Par skaitļa 7 *daudzkārtni* sauc skaitli, kas dalās ar 7.)

Atbilde: 1099

Atrisinājums:
Mazākais trīsciparu daudzkārtnis skaitlim 7 ir $105 = 15 \cdot 7$, bet lielākais trīsciparu daudzkārtnis ir $994 = 142 \cdot 7$. To summa ir $105 + 994 = 1099$.

10.uzdevums

Pirms priekšnesuma 105 orķestra dalībnieki sastājās "Taisnstūrī A" (visās rindās vienāds skaits dalībnieku). Pēc tam viņi pārkārtojās "Taisnstūrī B", kam rindu ir par 6 vairāk, bet katrā no rindām ir par diviem dalībniekiem mazāk. Cik rindu ir "Taisnstūrī A"?

Atbilde: 15

Atrisinājums:
Sadalām 105 pirmreizinātājos: $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. No skaitļiem 3, 5 un 7 (un to savstarpējiem reizinājumiem) var iegūt visus 105 dalītājus. Izrakstīsim visus šos dalītājus:

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 15,\ 21,\ 35,\ 105.$$

Vienīgie divi dalītāji, kuri atšķiras par 6 ir 15 un 21. Tāpēc taisnstūrī A bija 15 rindas (pa 7 dalībniekiem katrā), bet taisnstūrī B bija 21 rindas (pa 5 dalībniekiem katrā).