Kombinatorika: Reizināšanas likums

1.uzdevums

Tipisks telefona numurs Latvijā izskatās šādi: `+371 DDDD DDDD` (valsts kods, kam seko kaut kādi 8 cipari).
Kāds ir lielākais telefona numuru skaits, ko var šādi pierakstīt?

Atbilde: `100000000`

Atrisinājums:
Saskaņā ar reizināšanas likumu, katru nākamo ciparu var izvēlēties 10 veidos - tāpēc telefona numuru skaits ir $10^8 = 100000000$ (100 miljoni jeb aptuveni 55 reizes vairāk nekā Latvijas iedzīvotāju skaits 1.8 miljoni).
Valsts kods šo skaitu neiespaido, jo pirmie cipari vienmēr ir "371" (noteiktā secībā), tāpēc tos var izvēlēties tieši 1 veidā.

2.uzdevums

Cik daudzos veidos četri cilvēki A, B, C, D var iesēsties divos auto (zilajā un sarkanajā) tā, lai katrā auto būtu vismaz viens cilvēks?

Atbilde: `14`

Atrisinājums:
Ja mums neinteresē, vai katrā auto sēž vismaz viens cilvēks, tad katram no četriem cilvēkiem ir divas izvēles - pavisam būtu $2^4 = 16$ veidi kā sasēsties. Bet starp šiem veidiem ir divi "slikti" veidi (ja visi sasēžas zilajā vai visi sasēžas sarkanajā). Tāpēc tie jāatņem. Iegūstam, ka derīgo veidu ir $16 - 2 = 14$.

3.uzdevums

Fibonači virkni F_i definē šādi:
$F_0 = 0$, $F_1 = 1$ un $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ (ja $n \geq 2$). Tās pirmie locekļi ir šādi:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

Ievērosim, ka katrs trešais loceklis šajā virknē ir pāra skaitlis. Katrs piektais loceklis dalās ar 5.
Atrast mazāko $n > 0$, kuram F_n beidzas ar ciparu 0.
Ierakstīt atbildē locekļa kārtas numuru n.

Atbilde: `15`

Atrisinājums:
Fibonači virknē visi F_{3k} dalās ar 2, un visi F_{5m} dalās ar 5.
Mazākais kārtas numurs n, kuram vienlaikus $n = 3k$ un $n = 5m$ (t.i. mazākais skaitlis, kas dalās gan ar 3, gan ar 5) ir $n = 15$.
Tādēļ katrs piecpadsmitais Fibonači virknes loceklis dalīsies gan ar 2, gan ar 5 jeb ar $2 \cdot 5 = 10$.
Mazākais šāds loceklis ir $F_{15} = 610$.

4.uzdevums

Pieņemsim, ka Jums jākāpj lejup 6 pakāpieni - vienā solī var kāpt lejup 1 pakāpienu vai 2 pakāpienus. Secība, kādā to dara ir svarīga (piemēram, $1+1+1+1+2$ un $1+1+1+2+1$ ir divi atšķirīgi veidi). Atrast, cik veidos var nokāpt pa šiem pakāpieniem (Ir zināms, ka tas ir Fibonači skaitlis.)

Atbilde: 13

Atrisinājums:
Vienu pakāpienu var nokāpt vienā veidā, bet divus pakāpienus - divos veidos (vai nu kā $1+1$ vai uzreiz kā 2). Apzīmējam ar a_n virkni, kas pasaka, cik veidos var nokāpt lejup n pakāpienus. Zinām, ka $a_1 = 1$ un $a_2 = 2$.
Ja $n \geq 2$, tad mums jau pašā sākumā ir divas alternatīvas:
(**A**) Kāpt lejup vienu soli, un atlikušos $n-1$ pakāpienus pārvarēt a_{n-1} veidos.
(**B**) Kāpt lejup vienu soli, un atlikušos $n-2$ pakāpienus pārvarēt a_{n-2} veidos.
Saskaitot abas iespējas, iegūstam $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Izrakstām virknes locekļus:

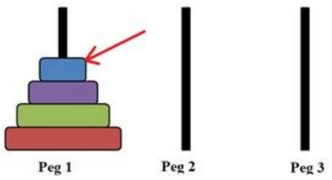
$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3,\ a_4 = 5,\ a_5 = 8,\ a_6 = 13.$$

Tātad atbilde ir 13.
Starp citu, virkne a_n ir līdzīga Fibonači skaitļu virknei, vienīgi $a_n = F_{n+1}$, jo Fibonači virknē $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, bet tālāk - tāpat katru nākamo locekli iegūst, saskaitot divus iepriekšējos.

5.uzdevums

Hanojas tornī diskus atļauts pārcelt pa vienam - tos var pārvietot starp visiem stieņiem (#1, #2, un #3), bet ir ierobežojums - nedrīkst lielāku disku likt virsū mazākam diskam. Kā zināms, lai pārvietotu 4 diskus no Stieņa #1 uz Stieni #3 vajag 15 gājienus.

Cik daudzi no šiem gājieniem tiek izdarīti ar pašu augšējo disku (zilo disku - sk. zīmējumā)?



Detalizētāku Hanojas torņa spēles aprakstu sk. Vikipēdijā.

Atbilde: 8

Atrisinājums:
Augšējais disks pārvietojas 8 reizes, nākamais disks - 4 reizes, nākamais disks - 2 reizes, bet disks pašā apakšā tikai 1 reizi.

6.uzdevums

Cik daudzas virknītes var uzrakstīt no 5 burtiem "A" un "B", ja katrai virknītei ir jāsākas ar "A" vai jābeidzas ar "B"?
(Tā kā jautājumā rakstīts "**vai**" nevis "**vai nu**", tad der arī virknītes ar abiem nosacījumiem - kas gan sākas ar "A", gan beidzas ar "B").

Ierakstīt atbildē derīgo virknīšu skaitu.

Atbilde: 24

Atrisinājums:
16 virknītes sākas ar "A", jo pēc reizināšanas likuma to ir $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.
16 virknītes beidzas ar "B", jo pēc reizināšanas likuma to ir $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 16$.

Varētu abas iespējas saskaitīt kā $16 + 16$, bet mums ir arī tādas virknītes, kas gan sākas ar "A", gan beidzas ar "B. Tādu ir pavisam $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 8$ (abus malējos burtus var izvēlēties tikai vienā veidā; citus burtus divos veidos).

Tā kā šīs virknītes tika pieskaitītas divreiz, tad tās ir vienreiz jāatņem. Iegūstam $16 + 16 - 8 = 24$.

7.uzdevums

Cik daudzos veidos var uz gredzena malas izkārtot četrus burtus (E,L,Z,A)? Pieņemam, ka tie varianti, kas iegūstami ar gredzena pagriešanu (jeb burtu ciklisku pārkārtošanu) ir uzskatāmi par vienādiem: `AELZ=ELZA=LZAE=ZAEL`.

Atbilde: 6

Atrisinājums:
Ir pavisam $4! = 24$ veidi, kā izkārtot burtus vārdā "ELZA". Bet rotāciju dēļ, katrs no pagrieztajiem variantiem tiek ieskaitīts četras reizes. Tāpēc iegūstam tikai $24/4 = 6$ iespējas.

Varam, teiksim, pieņemt, ka gredzens tiek vienmēr pagriezts tā, lai lasīšana sāktos ar burtu "E". Tad atšķirīgie veidi (kas vairs nav iegūstami cits no cita ar pagriešanu) ir šādi:
EALZ, EAZL, ELAZ, ELZA, EZAL, EZLA.

8.uzdevums

Cik daudzus 5 burtu vārdus var izveidot, izmantojot 5 klucīšus, uz kuriem rakstītie burti K, A, N, S, A, S.
Abi klucīši ar burtu "A" un arī abi klucīši ar burtu "S" ir neatšķirami: ja tos samaina, tad vārds nemainās.

Atbilde: 30

Atrisinājums:
Pavisam būtu $5! = 120$ veidi, kā izkārtot 5 dažādus burtus.
Katrs vārds, kas atšķiras tikai ar burtu "A" secību tad tiek ieskaitīts divreiz. Bet tā kā var apmainīt vietām arī klucīšus ar burtu "S", tad būtiski atšķirīgos variantus iegūst 120 dalot ar $2 \cdot 2 = 4$.
Iegūstam $120/4 = 30$.

Piemēram, visi šie vārdi ir vienādi (tāpēc “KANSAS” tika pieskaitīts izteiksmē 5!=120 tieši 4 reizes):

$$KA_1NS_1A_2S_2,\quad KA_1NS_2A_2S_1,\quad KA_2NS_1A_1S_2,\quad KA_2NS_2A_1S_1.$$

9.uzdevums

Dota skaitļu virkne $1; 1; 2; 5; 9; 6; \ldots$. To veido šādi: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, bet katrs nākamais loceklis ir divu iepriekšējo virknes locekļu kvadrātu summas pēdējo ciparu.
Atrast a_{1000} - virknes 1000.locekli.

Atbilde: `5`

Atrisinājums:
Tā kā ciparu ir galīgs skaits (un katru nākamo ciparu nosaka divi iepriekšējie), tad pēc kāda laika divi cipari virknē atkārtosies un no tās vietas virkne kļūs periodiska. Turpinot virkni tālāk, iegūsim, ka tā ir šāda:

$$1; \mathbf{1}; \mathbf{2}; 5; 9; 6; 7; 5; 4; 1; 7; 0; 9; \mathbf{1}; \mathbf{2}; 5; \ldots$$

Redzam, ka virknē cipari 1 un 2 atkārtojas - un sākot no tās vietas virkne ir periodiska, jo katru nākamo locekli nosaka divi iepriekšējie. Tās periods ir 12 (tik daudzi locekļi jāizraksta, kamēr sākas kārtējais identiskais virknes posms).

Skaitli 1000 dala ar 12 un iegūst atlikumu 4, tāpēc $a_4 = a_{16} = a_{28} = a_{40} = a_{1000}$.
Virknes ceturtais loceklis ir “5” (un periods šajā virknes vietā jau ir sācies), tāpēc arī 1000.loceklis $a_{1000} = 5$.

10.uzdevums

Starp kādas ģimnāzijas skolēniem
(1) tieši $1/2$ no viņiem apgūst vācu valodu,
(2) tieši $1/3$ no viņiem dzied korī,
(3) tieši $1/12$ no viņiem gan apgūst vācu valodu, gan dzied korī.

Atrast, kāda daļa no visiem skolēniem ir tādi, kuri apgūst vismaz vienu no šiem priekšmetiem (vācu valodu vai kori). Ierakstīt Jūsu atbildi kā saīsinātu parastu daļskaitli `K/N`.

Atbilde: `3/4`

Atrisinājums:
Ar N apzīmējam visu skolēnu skaitu, kas ir ģimnāzijā.
Ar A apzīmējam to skolēnu skaitu, kas apgūst vācu valodu, bet ar B apzīmējam to skolēnu skaitu, kas dzied korī.

Pēc ieslēgšanas/izslēgšanas principa, iegūstam šādu izteiksmi abu kopu A un B apvienojumam (tiem, kuri dara vismaz vienu lietu):

$$\frac{1}{2} \cdot N + \frac{1}{3} \cdot N - \frac{1}{12} \cdot N = \frac{9}{12} \cdot N.$$

Izteiksmē atņēmām $\frac{1}{12} \cdot N$, jo tie, kuri piedalās abās aktivitātēs, tika pieskaitīti divreiz. Tādēļ to skolēnu daļa, kuri apgūst vismaz vienu no priekšmetiem ir $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.