3. SKAITĻU TEORIJAS LAPA, 2022-01-23

3.1 Iesildīšanās

1.uzdevums: Ar $\gcd(\ldots)$ apzīmējam skaitļu kopīgo dalītāju. Vai var atrast tādus naturālus a, b, c, kuri ir savstarpēji pirmskaitļi: $\gcd(a, b, c) = 1$, bet nekādi divi no tiem nav *pa pāriem savstarpēji pirmskaitļi*, t.i. $\gcd(a, b) > 1$, $\gcd(b, c) > 1$ un $\gcd(a, c) > 1$.

2.uzdevums: Atrast kādu veselu skaitli x, kas apmierina šādas sakarības:

$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{6}, \\ x \equiv 3 \pmod{8}. \end{cases}$$

3.uzdevums: Naudas lādē glabājas monētas. Ja tās vienādi sadala sešiem draugiem, paliek pāri četras monētas. Ja tās vienādi sadala pieciem draugiem, paliek pāri trīs monētas.

Pieņemot, ka naudas lādē ir mazākais monētu skaits, kas atbilst šiem nosacījumiem, atrast, cik monētu paliks pāri, ja tās vienādi sadalīs septiņiem draugiem.

4.uzdevums:

Aplūkojam visas bezgalīgās naturālu skaitļu virknes

$$f(1), f(2), f(3), \ldots.$$

Formāli runājot, tās ir funkcijas no naturāliem skaitļiem uz naturāliem skaitļiem: Katra virkne ir funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, where $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Atrast, kvantoru izteiksmēm atbilstošos vārdiskos aprakstus. (*Tulkošana no predikātu un kvantoru valodas uz cilvēku valodu.*)

(A) $\exists a \in \mathbb{N}\, \exists b \in \mathbb{N}\, \forall c \in \mathbb{N}\, (c \geq a \;\to\; f(c+b) = f(c))$

(B) $\exists a \in \mathbb{N}\, \exists b \in \mathbb{N}\, \forall c \in \mathbb{N}\; (f(c+b) = f(c) \;\to\; c \geq a)$

(C) $\forall a \in \mathbb{N}\, \exists b \in \mathbb{N}\, \forall c \in \mathbb{N}\, (c \geq a \;\to\; f(c+b) = f(c))$.

(D) $\forall c \in \mathbb{N}\, \forall a \in \mathbb{N}\, \exists b \in \mathbb{N}\, (c > a \;\to f(c+b) = f(c))$.

(E) $\exists a \in \mathbb{N}\, \forall b \in \mathbb{N}\, \forall c \in \mathbb{N}\; (b \leq a \to f(c+b) = f(c))$.

(F) $\forall a \in \mathbb{N}\, \forall c \in \mathbb{N}\, \exists b \in \mathbb{N}\, (c \geq a \;\to\; f(c+b) = f(c))$.

(G) $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists i \in \mathbb{N}\, \exists j \in \mathbb{N}\Big(a_i = n \wedge a_j = n \wedge i \neq j \bigwedge \forall k \in \mathbb{N}\big(a_k = n \to (k = i \vee k = j)\big)\Big)$.

(H) $\forall n \in \mathbb{N}\, \forall i \in \mathbb{N}\, \Big(a_i = n \to \forall M \in \mathbb{N}\, \exists k \in \mathbb{N}\, \big(k > M \wedge a_k = n\big)\Big)$.

(I) $\exists b_0 \in \mathbb{Z}\, \exists d \in \mathbb{N}\, \exists M \in \mathbb{N}\, \forall k \in \mathbb{N}\big(k > M \to a_k = b_0 + k \cdot d\big)$.

Daži atbilžu varianti: Atbildes uz iepriekšējiem punktiem var izskatīties, piemēram, šādi (dažreiz virkņu apraksti nav doti; tad tie jāformulē no jauna).

1. Virknes, kurās katrs naturāls skaitlis ir sastopams vismaz divas reizes.
2. Virknes, kurās katrs naturāls skaitlis ir sastopams bezgalīgi daudzas reizes.
3. Virknes, kurās katrs naturāls skaitlis ir sastopams tieši divas reizes.
4. Virknes, kuras vai nu vispār nesatur attiecīgo naturālo skaitli kā locekli, vai arī satur to bezgalīgi daudzas reizes.
5. Virknes, kuras sakrīt ar kādu aritmētisku progresiju (izņemot, varbūt, galīgu skaitu locekļu).
6. Virknes, kuras, sākot ar kādu vietu ir periodiskas.
7. Visas naturālo skaitļu virknes
8. Virknes, kuras ir konstantas.
9. Virknes, kuras ir konstantas (izņemot, varbūt, galīgu skaitu locekļu).
10. Virknes, kuras ir injektīvas (katrs naturāls skaitlis tajās sastopams ne vairāk kā vienreiz jeb nekādas divas vērtības tajās neatkārtojas).
11. Virknes, kuras ir sirjektīvas (katrs naturāls skaitlis tajās sastopams vismaz vienreiz).
12. Virknes, kuras ir bijektīvas (katrs naturāls skaitlis tajās sastopams tieši vienreiz).
13. Tukša kopa (attiecīgajai definīcijai neatbilst neviena virkne).
14. Virknes, kuras ir stingri augošas (katrs nākamais loceklis lielāks par iepriekšējo).
15. Virknes, kuras ir neaugošas (katrs nākamais loceklis nepaŗsniedz iepriekšējo).
16. Virknes, kurām ir robeža, ja n tiecas uz bezgalību.
17. Stingri augošas virknes, kurās bezgalīgi bieži var atrast blakusesošus locekļus, kuru starpība ir 2 (kā *dvīņu pirmskaitļu* hipotēzē).
18. Virknes, kuras ir neperiodiskas (neeksistē tāds periods, ka virkne no kādas vietas ir periodiska ar šo periodu).

3.2 Klases uzdevumi

1.Uzdevums (LT.VUMIF.2016.10.3):

Atrodiet mazāko naturālo skaitli n, kuram skaitļi $\sqrt[5]{5n}$, $\sqrt[6]{6n}$, $\sqrt[7]{7n}$ ir naturāli.

2.Uzdevums Pierādīt, ka eksistē 99 pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_{99}$, kuriem a_i dalās ar kāda naturāla skaitļa kubu, kas lielāks par 1.

3.Jautājums: Kāds ir atlikums, ja skaitli $12^{34^{56^{78}}}$ dala ar 90?

4.uzdevums: Let n be a positive integer. Determine, in terms of n, the number of $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$ for which $x^2 \equiv x \pmod{n}$.

5.Uzdevums (USAMO.2008.1): Pierādīt, ka jebkuram naturālam n, eksistē $n + 1$ savstarpēji pirmskaitļi $k_0, k_1, \ldots, k_n$, kas visi lielāki par 1, kuriem $k_0 \cdot k_1 \cdot \ldots \cdot k_n - 1$ ir divu pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu reizinājums.

6.Uzdevums (BW.2016.2): Pierādīt vai apgāzt sekojošus apgalvojumus:

(a) Jebkuram $k \geq 2$, un jebkuriem k pēc kārtas sekojošiem naturāliem skaitļiem atradīsies skaitlis, kurš nedalās ne ar vienu pirmskaitli, kas mazāks par k.

(b) Jebkuram $k \geq 2$, un jebkurai k pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu virknei atradīsies skaitlis, kas ir savstarpējs pirmskaitlis ar visiem citiem virknes locekļiem.

Vingrinājumi/Ieteikumi:

1. Pierakstīt abus izteikumus ar kvantoriem.
2. Vai pretpiemērs gadījumam **(a)** ļautu iegūt pretpiemēru gadījumam **(b)** (vai otrādi)? Vai var uzskatāmi pamatot, ka **(a)** $\Rightarrow$ **(b)** vai arī **(b)** $\Rightarrow$ **(a)**.
3. Kāds varētu izskatīties pretpiemērs **(b)** gadījumā, ja $k = 7$? Gadījumā, ja $k = 17$? Vai tos var uzzīmēt?

3.3 Mājasdarba uzdevumi

Iesniegšanas termiņš: 2023.g. 11.februāris.

Kam iesūtīt: `kalvis.apsitis`, domēns `gmail.com`

1.uzdevums (US.MPGO.2010.2): Pierādīt, ka jebkuram naturālam n, eksistē veseli skaitļi a un b, kuriem $4a^2+9b^2-1$ dalās ar n.

2.uzdevums: Atrast pēdējos divus nenulles ciparus skaitļa 2023! decimālpierakstā.

3.uzdevums: Ar n apzīmēts naturāls skaitlis un $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ (kur $k \geq 2$) ir dažādi naturāli skaitļi no kopas $\{1, 2, \ldots, n\}$ ar šādu īpašību: n dala visus $a_i\,(a_{i+1}-1)$, kur $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Pierādīt, ka n nedala skaitli $a_k(a_1-1)$.

4.uzdevums: Pierādīt, ka jebkuram naturālam k eksistē aritmētiska progresija

$$\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \ldots,\ \frac{a_k}{b_k}$$

ar racionāliem skaitļiem, kur visas daļas $\frac{a_i}{b_i}$ ir nesaīsināmas un visi skaitļi $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k$ ir dažādi.