ĀVĢ skolas olimpiāde (2025), 8.klases atrisinājumi

1. uzdevums: Kvadrātveida tabula sastāv no 4×4 rūtiņām. Katrā rūtiņā jāieraksta viens no skaitļiem $0, 1, -1$. Aprēķinot visas summas pa rindiņām un pa kolonnām, tām visām jābūt dažādām. Vai to var izdarīt?

Atrisinājums: Lielākā četru rūtiņu summa ir $1+1+1+1=4$. Mazākā četru rūtiņu summa ir $(-1)+(-1)+(-1)+(-1)=-4$. Tātad summas kvadrātā pa rindiņām un pa kolonnām var pieņemt deviņas dažādas vērtības: $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.

Aizpildīsim kvadrātu tā, lai iegūtu astoņas no šīm summām (visas, izņemot summu -4). Summām 4 un -3 jābūt paralēlos virzienos (abām horizontāli vai abām vertikāli). Ja tās krustotos, summu -3 nevarētu iegūt, ja kaut vienā no rūtiņām ir $+1$. Novietosim abas horizontāli:

1	1	1	1
.	.	.	.
.	.	.	.
0	-1	-1	-1

Ja arī summa $+3$ būs horizontāli, tad pa vertikāli nevarēs iegūt nevienu negatīvu skaitli; tāpēc šai summai jābūt vertikāli. Līdzīgi var pamatot, ka summai -2 jābūt vertikāli.

1	1	1	1
1	.	.	-1
1	.	.	-1
0	-1	-1	-1

Visbeidzot ieraksta trūkstošos skaitļus, lai iegūtu trūkstošās summas 2, 1, 0, -1:

1	1	1	1
1	1	1	-1
1	0	-1	-1
0	-1	-1	-1

Sk. arī **90.20** no https://ej.uz/1xwg jeb **LV.SOL.1990.8.5** NMS arhīvā.

Vērtēšanas kritēriji:

- **10 punkti** Iegūts atbildē esošais piemērs (vai variants, kurā nav summas $+4$, vai kādas rindiņas vai kolonnas apmainītas vietām).
- **5–6 punkti** Par eksperimentiem, ko tikai nedaudz izmainot, var dabūt derīgu piemēru.
- **2–3 punkti** Spriedumi, kuri parāda, kuras astoņas no deviņām summām ir jāizvēlas.

2. uzdevums: Pa apli izrakstīti 99 skaitļi. Katru triju pēc kārtas uzrakstītu skaitļu summa ir pozitīva. Kāds lielākais daudzums negatīvu skaitļu var būt starp uzrakstītajiem skaitļiem?

Atrisinājums:
1.daļa: Var būt 66 **negatīvi skaitļi:** Var panākt, lai būtu 66 negatīvi skaitļi, piemēram, izrakstot pa apli skaitļus $4, -1, -1, 4, -1, -1, \ldots$ – aiz katra skaitļa 4 seko divreiz -1. Tad jebkuru trīs pēc kārtas uzrakstītu skaitļu summa būs $4 + (-1) + (-1) = 1$ (viens no saskaitāmajiem noteikti būs 4, bet varbūt ar atšķirīgu saskaitāmo secību). Tātad visas summas būs pozitīvas.

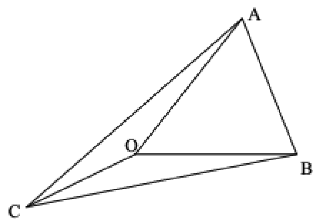
2.daļa: Nevar būt vairāk kā 66 **negatīvi skaitļi:** Pieņemsim no pretējā, ka var skaitļus izrakstīt pa apli tā, lai to vidū būtu vismaz 67 negatīvi; jeb ne vairāk kā $99 - 67 = 32$ skaitļi var būt pozitīvi. Sākot no kādas vietas, sadalām visus 99 skaitļus 33 nepārklājošās grupās pa 3 skaitļiem katrā. Tā kā grupiņu ir 33, bet ne vairāk kā 32 skaitļi no visiem var būt pozitīvi, tad atradīsies vismaz viena grupiņa, kurā nav neviena pozitīva skaitļa. Bet tad visu trīs skaitļu summa šajā grupiņā nevar būt pozitīva. Iegūta pretruna.

Sk. arī **95.19** no https://ej.uz/uwp8 jeb **LV.SOL.1995.8.4** NMS arhīvā.

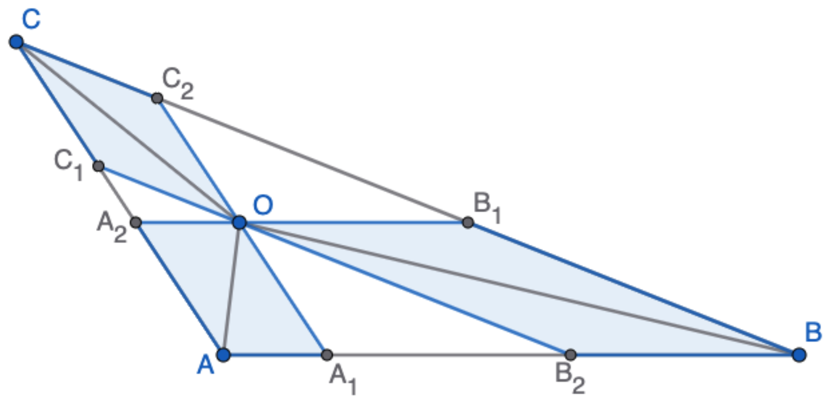
Vērtēšanas kritēriji:

- **2 punkti** Atrasts pozitīvo skaitļu skaits $99 : 3 = 33$, bet nav konkrēta piemēra, kā panākt, lai visi trīs pēc kārtas esošie skaitļi dotu pozitīvu summu.
- **5 punkti** Pamatots, ka 66 negatīvi skaitļi ir iespējami (piemēram, norādīta trīs skaitļu grupa, kuru var atkārtot).
- **5 punkti** Pamatots, ka vairāk kā 66 skaitļi nav iespējami.

3. uzdevums: Trijstūra ABC iekšpusē atrodas punkts O (skat. zīmējumu). Pierādīt, ka attālumu summa $AO + BO + CO$ ir mazāka par trijstūra ABC perimetru.



Atrisinājums #1: Caur punktu O novelk taisnes, kas paralēlas trijstūra malām. Tās sagriež sākotnējo trijstūri ABC trīs paralelogramos un trīs trijstūros. Sk. zīmējumu.



Iekrāsotajos paralelogramos, piemēram AA_1OA_2, diagonāle AO būs īsāka nekā paralelograma divu blakus malu summa $AA_1 + AA_2$ (jo $AA_2 = A_1O$ paralelograma pretējās malas ir vienādas un arī $AA_1 + A_1O > AO$ pēc trijstūra nevienādības).

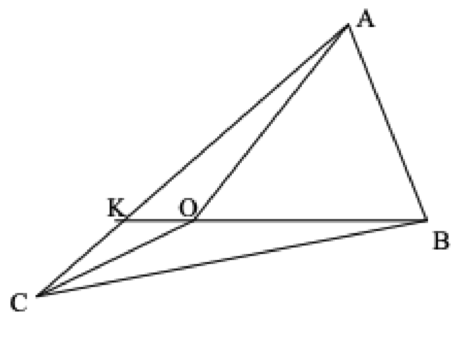
Līdzīgi arī divos atlikušajos paralelogramos pamato, ka $BO < BB_1 + BB_2$ un $CO < CC_1 + CC_2$ (diagonāle vienmēr ir īsāka nekā paralelograma divu blakusesošo malu summa). Izrakstām visas trīs nevienādības:

$$\begin{aligned} AO &< AA_1 + AA_2 \\ BO &< BB_1 + BB_2 \\ CO &< CC_1 + CC_2 \end{aligned}$$

Saskaitot tās, iegūsim: $AO + BO + CO < AA_1 + AA_2 + BB_1 + BB_2 + CC_1 + CC_2$.

Nogriežņi AA_1, AA_2, BB_1, BB_2, CC_1, CC_2 visi atrodas uz trijstūra ABC perimetra un nepārklājas. Uz lielā trijstūra perimetra ir vēl daži neizmantoti nogriežņi A_1B_2, B_1C_2 un C_1A_2 – tāpēc perimetrs P ir vēl lielāks. Esam pamatojuši, ka $AO + BO + CO < P$.

Atrisinājums #2: Apzīmēsim ar K taisnes OB krustpunktu ar AC (skat. zīmējumu):



No trijstūra nevienādības seko

$$BO + AO < BO + OK + AK = BK + AK < BC + CK + AK = BC + AC.$$

Līdzīgi pierāda nevienādības $BO + CO < BA + CA$, $CO + AO < CB + AB$. Summējot šīs trīs nevienādības un dalot abas puses ar 2 iegūstam prasīto.

Sk. arī **92.20** no https://ej.uz/mbg6 jeb **LV.SOL.1992.8.5** NMS arhīvā.

Vērtēšanas kritēriji:

- **2 punkti** Kāda nogriežņu garumu attiecība pareizi pamatota ar trijstūra nevienādību.
- **3 punkti** Formulēta nevienādība $BO + AO < BC + AC$ vai kāda līdzīga.
- **6 punkti** Iegūts kāds noderīgs novērtējums no augšas izteiksmēm AO vai $BO + AO$ vai līdzīgām.

4. uzdevums: Uzrādīt kaut vienu 100-ciparu skaitli, kas nesatur nevienu ciparu 0 un dalās ar savu ciparu summu.

Atrisinājums #1: Izveidosim 100-ciparu skaitli, kas dalās ar $11 \cdot 12 = 132$. Lai kaut kas dalītos ar 132, sadalām pirmreizinātājos: $132 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11$, t.i. skaitlim jādalās ar $2^2 = 4$, ar 3 un ar 11.

Izmantosim dalāmības pazīmes ar visiem minētajiem skaitļiem:

- Ar 4 dalās tie skaitļi, kuru pēdējie divi cipari dalās ar 4.
- Ar 3 dalās tie skaitļi, kuru ciparu summa dalās ar 3.
- Ar 11 dalās tie skaitļi, kuriem ciparu summa visās pāru pozīcijās mīnus ciparu summa visās nepāru pozīcijās dalās ar 11. (Piemēram, ar 11 dalās visi tie skaitļi, kuriem katrs cipars tiek atkārtots tieši divas reizes – tādi kā 334455, jo 33, 44 un 55 dalās ar 11)

100-ciparu skaitlī visus ciparus rakstīsim pa pāriem, lai dalītos ar 11. Skaitļa beigās rakstām divus četriniekus: 44, lai dalītos ar 4. Visbeidzot, lai atlikušie 98 cipari kopā ar $4+4$ dotu ciparu summu 132, no tiem ņemam 72 vieniniekus un 26 divniekus. Šeit ir uzkonstruētais skaitlis:

$$N = \underbrace{1111\ldots1111}_{72 \text{ vieninieki}}\underbrace{2222\ldots2222}_{26 \text{ divnieki}}44.$$

Pārbaudām visas dalāmības pazīmes:
Dalās ar 4, jo 44 dalās ar 4.
Dalās ar 3, jo ciparu summa $72 \cdot 1 + 26 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 132$ dalās ar 3.
Dalās ar 11, jo pa pāriem sarakstīti vienādi cipari.
Tā kā 4, 3 un 11 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad N dalīsies arī ar reizinājumu $4 \cdot 3 \cdot 11 = 132$ jeb pats ar savu ciparu summu.

Atrisinājums #2: Cita ciparu summa, ko ērti pārbaudīt ar dalāmības pazīmēm ir $198 = 2 \cdot 9 \cdot 11$. Šajā gadījumā pietiek panākt, lai pēdējais cipars būtu pāra skaitlis, lai ciparu summa dalītos ar 9 un lai ciparu summas pāra un nepāra pozīcijās sakristu (vai vismaz to starpība dalītos ar 11). Der, piemēram, šāds skaitlis ar ciparu summu 198:

$$M = 11\underbrace{2222\ldots2222}_{98 \text{ divnieki}}.$$

Atrisinājums #3: To var izdarīt, piemēram, šādi: uzrakstīt skaitli, kura ciparu summa ir 125 un kurš dalās ar 125. Dalāmība ar 125 ir atkarīga tikai no skaitļa trim pēdējiem cipariem, jo 1000 dalās ar 125.

Var, piemēram, izvēlēties skaitli

$$K = \underbrace{1111\ldots1111}_{94 \text{ vieninieki}}995125.$$

Sk. arī **89.15** no https://ej.uz/yo7y jeb **LV.SOL.1989.8.5** NMS arhīvā.

Vērtēšanas kritēriji:

- **1–2 punkti** Paskaidroti daži novērojumi – kādus skaitļus un kādas ciparu summas vispār var izvēlēties. Piemēram, ciparu summai jābūt vismaz 100, nedrīkst beigties ar 0, jo citādi 100-ciparu skaitlis, kura pierakstā nav nuļļu, ar to nedalīsies.
- **4 punkti** Izraudzīta ciparu summa $m > 100$ un paskaidrota dalāmības pārbaude ar m.
- **4 punkti** Konstruēts skaitlis, kas dalās ar izvēlēto ciparu summu m.