5. SKAITĻU TEORIJAS LAPA, 2022-02-11

Šajā nodarbībā aplūkojamas dažādas funkcijas, kam argumenti vai vērtības ir veseli skaitļi.

Definīcija: Apzīmēsim ar $\lfloor x \rfloor$ skaitļa x apakšējo veselo daļu – lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz x.

Definīcija: Par skaitļa $x \in \mathbb{R}$ *daļveida daļu* (*fractional part*) sauc vērtību, par kuru skaitlis x pārsniedz savu veselo daļu:

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor.$$

Definīcija: Par skaitļa *augšējo veselo daļu* (*ceiling function*) sauc mazāko veselo skaitli, kas nav mazāks par x. To apzīmē ar $\lceil x \rceil$.

Apakšējās/augšējās veselās daļas īpašības: Patvaļīgam reālam skaitlim $x \in \mathbb{R}$ un veselam skaitlim $n \in \mathbb{Z}$ ir spēkā šādi apgalvojumi:

1. $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$ un $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$.
2. Ja $a = qb + r$ ir veselu skaitļu a un b dalījums ar atlikumu un $b > 0$, tad šo skaitļu dalījums $q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ un atlikums $r = \left\{ \frac{a}{b} \right\} \cdot b$.
3. Funkcija $f(x) = \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$ izsaka reāla skaitļa $x \in \mathbb{R}$ noapaļošanu pēc skolas algoritma – noapaļo līdz tuvākajam veselajam skaitlim (un tad, ja daļveida daļa ir precīzi puse, tad apaļo uz augšu).
4. $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.
5. Skaitļa n pozitīvo daudzkārtņu skaits, kas nepārsniedz x, ir $\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$.
6. $\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$.
7. Naturālā skaitļa n decimālpierakstā ciparu skaits ir tieši $\lfloor \log_{10} n \rfloor + 1$.

Ermita identitāte (Charles Hermite identity): Visiem reāliem x un visiem naturāliem n ir spēkā vienādība:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor.$$

Definīcija: Ar $\varphi(n)$ apzīmējam *Eilera funkciju* – to veselo skaitļu skaitu intervālā $[1; n]$, kas ir savstarpēji pirmskaitļi ar n.

Piemēri:

- Ja p ir pirmskaitlis, tad $\varphi(p) = p - 1$.

- Ja p^k ir pirmskaitļa pakāpe, tad $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k \cdot \left(1 = \frac{1}{p}\right)$.

Eilera teorēma: Ja a un n ir savstarpēji pirmskaitļi, tad

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Definīcija Funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sauc par multiplikatīvu, ja katriem diviem naturāliem $a, b \in \mathbb{N}$, kuri ir savstarpēji pirmskaitļi, ir spēkā sakarība:

$$f(ab) = f(a) \cdot f(b).$$

Īpašības:

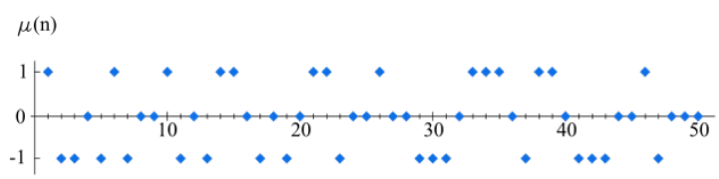
- Multiplikatīvām funkcijām jābūt spēkā: $f(1) = 1$.
- Multiplikatīvai funkcijai pietiek zināt vērtības $f(p^k)$ pirmskaitļu pakāpēm. Citas vērtības var iegūt ar reizināšanu.

Piemēri:

- $\gcd(n, k)$: divu skaitļu lielākais kopīgais dalītājs, kur n ir arguments, bet k ir konstante.
- $\varphi(n)$: Eilera funkcija –- cik ir naturālu $k \in [0; n]$, kas ir savstarpēji pirmskaitļi ar n.
- $\sigma_0(n) = d(n)$ – skaitļa n dalītāju skaits.
- $\sigma_1(n) = \sigma(n)$ - skaitļa n dalītāju summa.

Definīcija: Mēbiusa (Möbius) funkciju definē šādi:

- -1, ja n ir nepāra skaita pirmskaitļu reizinājums,
- $+1$, ja n ir pāra skaita pirmskaitļu reizinājums,
- 0, ja n sadalījums pirmreizinātājos satur kāda pirmskaitļa pakāpi, kas augstāka par pirmo.



Teorēma: Mēbiusa funkcija ir multiplikatīva.

Apgalvojums: Katram naturālam n ir spēkā sekojoša formula:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{ja n=1} \\ 0, & \text{ja n>1} \end{cases}$$

Ieteikums: Ja $n > 1$, to izsaka kā pirmskaitļu reizinājumu (daži no pirmskaitļiem var arī sakrist):

$$n = p_1 p_2 \cdots p_k.$$

Jāpamato, ka šī izteiksme vienāda ar 0:

$$\begin{array}{ll} & \mu(1)+ \\ + & (\mu(p_1) + \mu(p_2) + \ldots + \mu(p_k)) + \\ + & (\mu(p_1 p_2) + \ldots + \mu(p_{k-1} p_k)) + \\ + & \ldots + \\ + & \mu(p_1 p_2 \cdots p_k). \end{array}$$

Apgalvojums: Ir spēkā izteiksme

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}.$$

Mēbiusa inversijas formula:

Dotas divas funkcijas $f(n), g(n)$, kas definētas naturāliem skaitļiem un pieņem reālas vērtības. Ja katram naturālam n izpildās vienādība:

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d),$$

tad izpildās arī vienādība:

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d),$$

5.1 Iesildīšanās

1.uzdevums: Pierādīt, ka jebkuram reālam $x \in \mathbb{R}$ un jebkuram naturālam $n \in \mathbb{N}$ ir spēkā vienādība

$$\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor.$$

2.uzdevums: Pierādīt, ka jebkuram reālam $x \in \mathbb{R}$ ir spēkā vienādības:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor. \\ \lfloor 3x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{3} \rfloor + \lfloor x + \frac{2}{3} \rfloor. \end{array} \right.$$

3.Jautājums Atrast tādu bezgalīgi augošu aritmētisku progresiju no naturāliem skaitļiem, ka neviens no tās locekļiem nav divu pilnu kubu summa.

4.Jautājums Aplūkojam naturālu skaitli $n = 561$. Tas nav pirmskaitlis, jo $n = 561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$. Pierādīt, ka jebkuram naturālam a skaitlis $a^n - a$ dalās ar n.

Note: Šī pati īpašība piemīt arī visiem pirmskaitļiem – tiešas sekas no Fermā teorēmas. Nepirmskaitļus, kam arī tā izpildās, sauc par Kārmaikla (*Carmichael*) skaitļiem. $n = 561$ ir mazākais no Kārmaikla skaitļiem.

5.uzdevums: Pierādīt, ka neeksistē tāds n, kuram Eilera funkcijas vērtība $\varphi(n) = 14$.

6.uzdevums: Zināms, ka naturālam skaitlim A ir tieši 62 naturāli dalītāji. Pierādīt, ka A nedalās ar 36.

5.2 Klases uzdevumi

1.uzdevums Aplūkojam virkni $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$, kur $n = 1, 2, \ldots$. Pierādīt, ka jebkuram pirmskaitlim p atradīsies tāds a_n, ka a_n dalās ar p.

2.uzdevums Naturālam skaitlim n atrodam visus tos naturālos skaitļus $a_i \in [1; n]$, kuri ir savstarpēji pirmskaitļi ar n. Pamatot, ka visu šo a_i summa

$$a_1 + \ldots + a_k = \frac{n \cdot \varphi(n)}{2}.$$

3.uzdevums Katram naturālam skaitlim n pierādīt vienādību:

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

4.uzdevums: Atrisināt vienādojumu naturālos skaitļos:

$$\varphi(2x) = \varphi(3x).$$

5.uzdevums: Atrast tādu n, kuram

$$\mu(n) + \mu(n+1) + \mu(n+2) = 3.$$

6.uzdevums: Divi naturāli skaitļi p un q ir savstarpēji pirmskaitļi. Pierādīt sekojošu sakarību:

$$\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

5.3 Mājasdarba uzdevumi

Iesniegšanas termiņš: 2023.g. 4.marts.

Kam iesūtīt: `kalvis.apsitis`, domēns `gmail.com`

1.uzdevums: Parādīt, ka

$$d(1) + d(2) + \ldots + d(n) = \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor.$$

2.uzdevums: Parādīt, ka

$$\sigma(1) + \sigma(2) + \ldots + \sigma(n) = 1 \cdot \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + 2 \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \ldots + n \cdot \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor.$$

3.uzdevums: Dots naturāls skaitlis n. Noteikt atkarībā no n, cik ir skaitļu $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$, kuriem $x^2 \equiv x \pmod{n}$.

4.uzdevums:

(A) Izmantojot matemātiskus spriedumus (nevis datorprogrammu), atrast cik dažādu primitīvo sakņu ir pirmskaitlim $p = 41$? (Viena no tām ir $a = 6$, bet ir arī citas.)

(B) Pamatot, ka patvaļīgam nepāra pirmskaitlim p, primitīvo sakņu skaits ir $\varphi(p-1)$, kas ir Eilera funkcijas vērtība.

5.uzdevums: Dots naturāls skaitlis m un pirmskaitlis p, kas ir skaitļa $m^2 - 2$ dalītājs. Zināms, ka eksistē tāds naturāls skaitlis a, ka $a^2 + m - 2$ dalās ar p. Pierādīt, ka eksistē tāds naturāls skaitlis b, ka $b^2 - m - 2$ dalās ar p.