

# Rekurentas virknes, Skaitļu teorija (6A: 2025-10-16)

- Rekurentai virknei definēts pirmais loceklis (vai daži locekļi) un formula, ar kuru no iepriekšējiem locekļiem izrēķināt nākamos. Ar to var saskaitīt variantus tad, ja citas metodes (*reizināšanas likums*) būtu par grūtu. Risinājuma secība:
  - Aprēķināt locekļus  $a_n$  dažiem maziem  $n$ . Rekurentai virknei nepieciešami pirmie locekļi (sākot ar  $a_0$  vai ar  $a_1$  vai tml.).
  - Apskatīt  $a_n$  un mēģināt izteikt ar  $a_{n-1}$  (vai citiem iepriekšējiem locekļiem). Pierakstīt prasību, ka  $n \geq 2$  (vai tml, no kuras vietas šo formulu lietot).
  - Pārliecināties, ka rekurentajā izteiksmē bez atkārtotā iekļauti visi varianti.
  - Ja uzdevumā prasīts, izveidot virknes locekļu tabuliņu līdz kādai vērtībai un pierakstīt secinājumus.
- Apzīmējums  $a \equiv b \pmod{m}$  nozīmē, ka  $a$  un  $b$  dod vienādus atlikumus, dalot ar  $m$ . Piemēram,  $2026 \equiv 6 \pmod{10}$ .  
 $1^2 = 1 \equiv 1 \pmod{8}$ ,  $3^2 = 9 \equiv 1 \pmod{8}$ ,  $5^2 = 25 \equiv 1 \pmod{8}$ .
- Virkne, kas iegūstama, rakstot arvien jaunus decimālciparus  $x_1 = \overline{a}$ ,  $x_2 = \overline{ab}$ ,  $x_3 = \overline{abc}$ ,  $x_4 = \overline{abcd}$ , ... ir izsakāma ar rekurentu sakarību:  
 $x_1 = a$ ,  $x_2 = 10 \cdot x_1 + b$ ,  $x_3 = 10 \cdot x_2 + c$ ,  $x_4 = 10 \cdot x_3 + d$ .  
Var rakstīt arī uzreiz:  $x_4 = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$ .

## 0.uzdevums:

(A) Uzrakstīt virkni  $a_n = 3n \pmod{7}$ .

(B) Uzrakstīt virkni  $a_n = n^3 \pmod{7}$ .

(C) Kā bez reizināšanas (ar saskaitīšanu un atņemšanu) uzzināt, kādu atlikumu dod skaitlis  $abcdef$  dalot ar 9?

(D) Kā bez reizināšanas (ar saskaitīšanu un atņemšanu) uzzināt, kādu atlikumu dod skaitlis  $abcdef$  dalot ar 11?

**1.uzdevums:** Ar  $a_n$  apzīmē, cik dažādos veidos  $n$  atšķiramus cilvēkus var sagrupēt pāros (cilvēku secība pārī nav svarīga). Ja  $n$  ir nepāra, tad  $a_n = 0$ .

(A) Izteikt  $a_n$ , izmantojot reizināšanas likumu,

(B) Izteikt  $a_n$  kā rekurentu virkni.

**2.uzdevums:** Ar  $R_n$  apzīmējam gabalu skaitu, kuros  $n$  taisnes sadala plakni, ja nekādas divas taisnes nav paralēlas un nekādas trīs taisnes neiet caur vienu punktu. Atrast rekurentu sakarību, lai rēķinātu  $R_n$  virknes locekļus.

**3.uzdevums (LV.AMO.2019.12.4):** Sporta nometnē ir 100 skolēni. Ar  $N$  apzīmējam, cik veidos šos 100 skolēnus var sadalīt 50 pāros (pāru secība un arī skolēnu secība pāri nav svarīga). Ar kādu lielāko trijnieka pakāpi dalās  $N$ ?

**4.uzdevums:** Monētu met  $n$  reizes un katreiz pieraksta rezultātu “C” (cipars) vai “Ģ” (ģerbonis). Pirmais spēlētājs uzvar, ja visu metienu virknītē nekad nav divi ģerboņi pēc kārtas (virknītē nesatur “ĢĢ”). Apzīmējam ar  $a_n$  to, cik ir virknīšu garumā  $n$  bez “ĢĢ” (jeb cik dažādos veidos 1.spēlētājs var uzvarēt).

**(A)** Atrast rekurentu sakarību, kas  $a_n$  izsaka ar iepriekšējiem virknes locekļiem.

**(B)** Atrast varbūtību, ar kuru pirmais spēlētājs uzvar, ja monētu met tieši 6 reizes (par varbūtību saucam dalījumu starp to monētas uzmešanas veidu skaitu, kuros uzvar 1.spēlētājs, pret visu iespējamo monētu uzmešanas veidu skaitu).

**5.uzdevums:** Kādā programmēšanas valodā visi vārdi satur tieši  $n$  burtus; un katrs burts ir “A”, “B” vai “C”. Ar  $a_n$  apzīmējam, cik ir vārdu garumā  $n$ , kuri satur divus “A” no vietas.

**(A)** Uzrakstīt  $a_n$  kā rekurentu virkni, norādot sākuma nosacījumus un rekurento sakarību, kas ļauj izrēķināt  $a_n$  no iepriekšējiem locekļiem.

**(B)** Atrast  $a_6$  vērtību.

**6.uzdevums (LV.AMO.2023.9.2):** Ja divciparu skaitlim  $\overline{ab}$  galā pieraksta divciparu skaitli  $\overline{cd}$ , tad iegūtais četr ciparu skaitlis dalās ar 13. Zināms, ka  $12a + 9b$  dalās ar 13. Kāds var būt skaitlis  $\overline{cd}$ ?

**7.uzdevums (LV.AMO.2019.9.4):** Ja naturāla sešciparu skaitļa visus nepāra ciparus aizvietotu ar 7, iegūtu skaitli, kas ir par 5998 lielāks nekā sākotnējais skaitlis. Savukārt, ja sākotnējā skaitlī ar 7 aizvietotu visus pāra ciparus, tad iegūtais skaitlis būtu par 500290 lielāks nekā sākotnējais. Atrast doto sešciparu skaitli!

**8.uzdevums (LV.AMO.2018.9.4):** Atrast lielāko naturālo skaitli, kas dalās ar 7, kura ciparu summa ir 100 un kuram neviens cipars nav 0.

**9.uzdevums (LV.AMO.2018.8.2):** Naturālu skaitļu virknes 1; 8; 8; 64; 192; 432; ... katrs loceklis, sākot ar trešo, ir vienāds ar divu iepriekšējo locekļu nenulles ciparu reizinājumu. Kāds ir šīs virknes 2018. loceklis?

**10.uzdevums (LV.AMO.2014.8.1):** Skaitli  $\frac{1}{13}$  pārveidoja par bezgalīgu decimāldaļu un tajā izsvītvoja 2014. ciparu aiz komata. Kurš skaitlis lielāks – sākotnējais vai iegūtais?