IMO IZLASE, DARBA LAPA, 2022-06-13

Polinoma racionālo sakņu teorēma: Dots vienādojums $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ ar veseliem koeficientiem, kur $a_0, a_n \neq 0$. Ja $x = p/q$ ir kāda šī polinoma racionāla sakne uzrakstīta kā nesaīsināma daļa, tad skaitītājs p dala brīvo koeficientu a_0, bet saucējs q dala vecāko koeficientu a_n.

Lemma par polinoma vērtību summu: Dots pirmskaitlis p un polinoms ar veseliem koeficientiem $P(x)$, kura pakāpe deg $F \leq p - 2$. Tad polinoma p pēc kārtas ņemtu vērtību summa, piemēram, $\sum\limits_{k=1}^{p} P(k)$ dalās ar p.

2.1 Ievaduzdevumi

1. Kuras nesaīsināmas racionālas daļas $r = p/q$ izpilda secinājumu polinoma racionālo sakņu teorēmai, ja algebriskais vienādojums ir šāds: $3r^3 + r^2 - 7r - 5 = 0$. Sadalīt šo izteiksmi reizinātājos.
2. Kādu atlikumu, dalot ar 7, dod $1^4 + 2^4 + \ldots + 100^4$?
3. Dots pirmskaitlis p un vesels skaitlis $k \in [1; p-1]$. Pierādīt, ka
$$\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod{p}.$$
4. Dots pirmskaitlis p. Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudzi naturāli n, kuriem p dala $2^n - n$.

Atbilde:

1. Sadalījums reizinātājos ir $(r+1)^2(3r-5) = 0$
2. Pēc lemmas par polinoma vērtību summu var atmest pirmos 98 saskaitāmos, jo 98 dalās ar 7. Paliek pāri $99^4 + 100^4 \equiv 1^4 + 2^4 \equiv 17 \equiv 3 \pmod{7}$.

2.2 Sacensību uzdevumi

2.1. uzdevums: Dots naturāls skaitlis $n \geq 2$, kuram definējam kopu A_n sekojoši:
$$A_n = \left\{ 2^n - 2^k \mid k \in \mathbb{Z},\ 0 \leq k < n \right\}.$$
Atrast lielāko naturālo skaitli, kuru nevar uzrakstīt kā viena vai vairāku kopas A_n elementu summu (vairāki elementi var arī sakrist).

2.2. uzdevums: Atrast visus naturālu skaitļu pārus (x, y), kuriem
$$\sqrt[3]{7x^2 - 13xy + 7y^2} = |x - y| + 1.$$

2.3. uzdevums: Dots naturāls skaitlis $n > 1$. Definējam virkni $(a_k)_{k\geq 1}$ sekojoši:

$$a_k = \left\lfloor \frac{n^k}{k} \right\rfloor.$$

Pierādīt, ka bezgalīgi daudzi šīs virknes locekļi ir nepāra skaitļi. (Reālam skaitlim x ar $\lfloor x \rfloor$ apzīmējam lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz x.)

2.4. uzdevums: Doti naturāli skaitļi, no kuriem katri divi ir savstarpēji pirmskaitļi: $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Pie tam a_1 ir pirmskaitlis un $a_1 \geq n + 2$. Uz reālu skaitļu nogriežņa $I = [0, a_1 a_2 \cdots a_n]$ atzīmējam visus tos veselos skaitļus, kuri dalās vismaz ar vienu no skaitļiem $a_1, \ldots, a_n$. Šie punkti sadala nogriezni I vairākos mazākos nogriežņos. Pierādīt ka visu nogriežņu garumu kvadrātu summa dalās ar a_1.