

5.uzdevuma (LV.AMO.2014.9.2) atrisinājums:

Dotos ciparus apzīmēsim ar a, b, c, d . No tiem var izveidot 16 dažādus divciparu skaitļus. Katrs no šiem cipariem četros skaitļos ir desmitu cipars un četros skaitļos- vienu cipars. Visu šo divciparu skaitļu summa ir $4 \cdot 10 \cdot (a+b+c+d) + 4 \cdot (a+b+c+d) = 44(a+b+c+d) = 1276$

tātad $a+b+c+d = 1276 : 44 = 29$. Vienīgā iespēja, ka četru dažādu nenulles ciparu summa ir 29, ir tad, ja šie cipari ir 5, 7, 8 un 9.

6.uzdevuma (LV.AMO.2023.7.1) atrisinājums:

(A) Var, piemēram, šādā veidā:

1; 2; 10; 3; 11; 4; 12; 5; 13; 22; 14; 7; 15; 8; 16; 20; 17; 9; 18; 23; 19; 6; 21.

(B) Nē, nevar. Pierādīsim, ka, lai kā arī šos skaitļus uzrakstītu rindā, vienmēr blakus atradīsies divi skaitļi, kas abi satur ciparu 1. Ievērosim, ka ir daudz skaitļu, kuros ir cipars 1, to skaits noteikti ir vismaz 1100, jo ir 1000 četruciparu skaitļu, kas sākas ar ciparu 1, un 100 trīsciparu skaitļu, kas sākas ar ciparu 1. Pieņemsim, ka dotie skaitļi kaut kādā secībā uzrakstīti rindā un sadalīsim tos blakusesošu skaitļu pāros, iegūsim 1012 pārus (pēdējam skaitlim nav pāra, tas savā “pārī” būs vienīgais skaitlis). Redzam, ka četruciparu un trīsciparu skaitļu, kas satur ciparu 1, ir vairāk nekā pāru, tātad pēc Dirihlē principa kādā pārī atradīsies divi skaitļi, kas abi satur ciparu 1.

7.uzdevums: Apskatām regulāru $(2n+1)$ -stūri. Cik ir trijstūru ar virsotnēm $(2n+1)$ -stūra virsotnēs, kuri satur $(2n+1)$ -stūra centru?

Atrisinājums: Fiksēsim vienu virsotni A . No tās uz dažādām pusēm atliksim lokus, kuru galapunktus uzskatīsim par trijstūra virsotnēm B, C . Par vienības loku uzskatīsim $2\pi/(2n+1)$.

Tātad lokus AB un AC raksturosim ar naturāliem skaitļiem x un y , kas parāda, cik vienības lokus tie satur. Lai trijstūris ABC saturētu daudzstūra centru, jāizpildās nevienādībām $x \leq n$, $y \leq n$, $x+y \geq n+1$. Šos nosacījumus apmierina šādi pāri: $(1, n)$, $(2, n-1)$, $(2, n)$, $(3, n-2)$, $(3, n-1)$, $(3, n)$, ..., (n, n) . Viegli aprēķināt, ka to skaits ir $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Tātad prasīto trijstūru skaits ir $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

8.uzdevums: Atrast cik ir nedeģenerētu trijstūru, kam visas virsotnes pieder kopai

$$\{(s, t) \in Z \mid 0 \leq s \leq 4, 0 \leq t \leq 4\}.$$

Atrisinājums: Trīs punktus norādītajā kvadrātā var izvēlēties C_{25}^3 veidos. Saskaitīsim, cik no šiem trijniekiem veido deģenerētu trijstūri, t.i., kur visi 3 punkti atrodas uz vienas taisnes.

Vertikālajā un horizontālajā virzienā tādu trijnieku ir $10 \cdot C_5^3$. Paralēli galvenajām diagonālēm ir vēl $2 \cdot (2 \cdot C_3^3 + 2 \cdot C_4^3 + C_5^3)$ trijnieki. Virzienos $(1, \pm 2)$, $(2, \pm 1)$ var izvēlēties vēl $4 \cdot 4 = 16$ trijniekus. Citos virzienos 3 punktus uz vienas taisnes izvēlēties nevar. Atņemot no kopīgā trijnieku skaita trijnieku skaitu, kas atrodas uz vienas taisnes, iegūstam kopējo nedeģenerētu trijstūru skaitu. Tas ir 2152.