Kvadrātfunkcija

Kvadrātfunkcijas īpašības:

- Kvadrātfunkcijas $f(x) = ax^2 + bx + c$ grafiks ir parabola, ja $a \neq 0$;
  - parabolas zaru virziens un "saspiestums" raksturo a zīmi un vērtību
  - grafika krustpunkts ar vertikālo asi parāda brīvo locekli c
  - parabolas virsotnes x koordināte ir $\dfrac{-b}{2a}$

Kvadrātvienādojuma saknes:

- Kvadrātvienādojuma $ax^2 + bx + c = 0$ sakņu formula $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- Vjeta teorēma: $x_1 + x_2 = -p$ (jeb $-b/a$), $x_1 \cdot x_2 = q$ (jeb $-c/a$).
- Saistītās izteiksmes saknēm $x = u + \sqrt{v}$.
- Kvadrāttrinoma dalīšana reizinātājos: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Nevienādības ar kvadrātfunkciju:

- Pilnā kvadrāta atdalīšana:
- Nevienādības **QM-AM-GM-HM** (kvadrātiskais-aritmētiskais-ģeometriskais-harmoniskais vidējais). Visiem $x_1, x_2 > 0$ ir spēkā nevienādības:

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} \geq \frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt[2]{x_1 \cdot x_2} \geq \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}.$$

1.uzdevums (LV.AMO.2018.9.1): Dots vienādojums $(a-3)x^2 + 5x - 2 = 0$.
(A) Kādām a vērtībām vienādojumam ir tieši viena sakne?
(B) Kādām a vērtībām vienādojumam ir divas dažādas reālas saknes?

2.uzdevums (LV.AMO.2015.9.1): No visiem tādiem skaitļiem, kuru starpība ir 2015, noteikt tos divus, kuru reizinājums ir vismazākais!

3.uzdevums (LV.AMO.2011.9.3): Dots vienādojums $\#x^2 - \#x + \# = 0$. Divi rūķīši spēlē spēli - pirmais nosauc trīs dažādus skaitļus, bet otrais tos kaut kādā secībā saliek

“#” vietās. Vai pirmais rūķītis vienmēr var panākt, lai vienādojumam būtu vismaz viena racionāla sakne?

4.uzdevums (LV.AMO.2012.9.3): Kvadrātvienādojuma $x^2 - 507x + a = 0$ saknes ir p^2 un q, kur p un q ir pirmskaitļi. Aprēķini a skaitlisko vērtību.

5.uzdevums (LV.AMO.2019.9.5): Vai eksistē tāds kvadrātvienādojums ar veseliem koeficientiem, kuram ir sakne

$$(\sqrt{2020} - 2\sqrt{2019} + \sqrt{2018})(\sqrt{2020} + \sqrt{2019})(\sqrt{2019} + \sqrt{2018})(\sqrt{2020} + \sqrt{2018})?$$

6.uzdevums (LV.AMO.2019.8.1): Atjaunojot taisnu žogu, Raimonds izraka vecos žoga stabus, kuri atradās 8 metru attālumā viens no otra un kuru skaits bija nepāra skaitlis. Raimonds sanesa visus stabus pie vidējā, nesdams tos pa vienam un sākdams ar vienu no malējiem stabiem. Cik bija stabu, ja viņš nostaigāja 840 m?

7.uzdevums (LV.AMO.2022B.9.2): Vai noteikti $x + \frac{9}{x} > y + \frac{9}{y}$, ja

(A) $x > y > 0$, **(B)** $x > y > 3$?

8.uzdevums (LV.AMO.2017.9.2): Pierādīt, ka $x^6 + y^6 + \frac{2}{x^3y^3} - 4 \geq 0$, ja $x > 0$, $y > 0$.