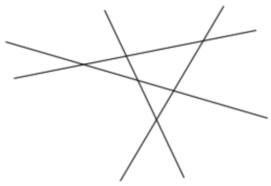
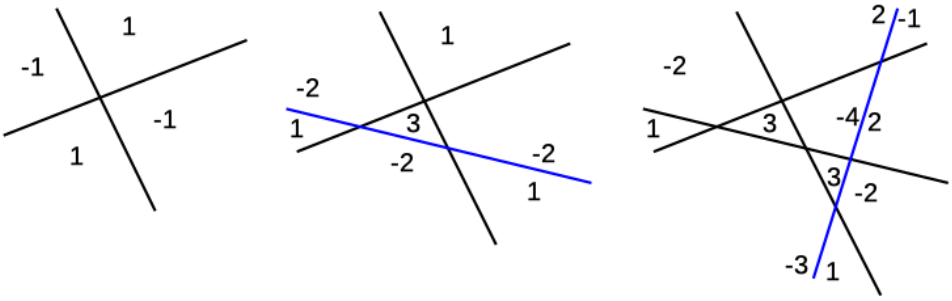
ĀVĢ skolas olimpiāde (2025), 7.klases atrisinājumi

1. uzdevums: Četras taisnes, kas parādītas zīmējumā, sadala plakni 11 daļās. Ierakstiet katrā no daļām veselu skaitli, kas nav 0, tā, lai gan vienā, gan otrā pusē katrai taisnei visu ierakstīto skaitļu summa būtu 0. Starp ierakstītajiem skaitļiem var būt arī vienādi.



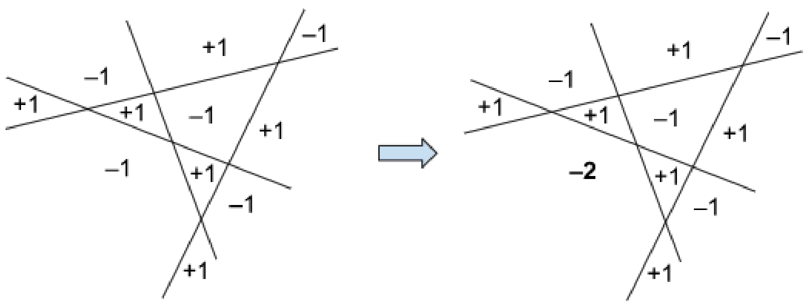
Atrisinājums #1: Skaitļus var ierakstīt, piemēram, šādi:

Lai atrastu kādu derīgu veidu, taisnes var pievienot pakāpeniski:
1.solis: Vispirms novelk tikai divas no četrām taisnēm. Divām taisnēm un 4 daļām nenulles skaitļus var viegli iegūt (vienu skaitli ieraksta un tad izsaka trīs atlikušos).
2.solis: Novelk trešo taisni, kas krusto abas iepriekšējās jeb sagriež trīs no iepriekš iegūtajām daļām. Katrā sagrieztajā daļā "jāsagriež" arī tur ierakstītais skaitlis kā divu nenulles skaitļu summa. Divus skaitļus -1 no iepriekšējā soļa izsaka kā $-1 = (-2) + 1$ un $-1 = (-2) + 1$. Atlikušo skaitli 1 jāizsaka kā $1 = 3 + (-2)$, jo citādi jaunajai taisnei abās pusēs nav summa 0.
3.solis: Visbeidzot novelk ceturto taisni. Tā šķērso četras no iepriekšējā solī iegūtajām daļām. Arī šoreiz kaut kā "jāsagriež" šajās daļās ierakstītie skaitļi tā, lai neparādītos nulles, bet skaitļu summas abās pusēs jaunajai taisnei būtu 0.



Sk. arī **90.15** no https://ej.uz/1xwg jeb **LV.SOL.1990.7.5** NMS arhīvā.

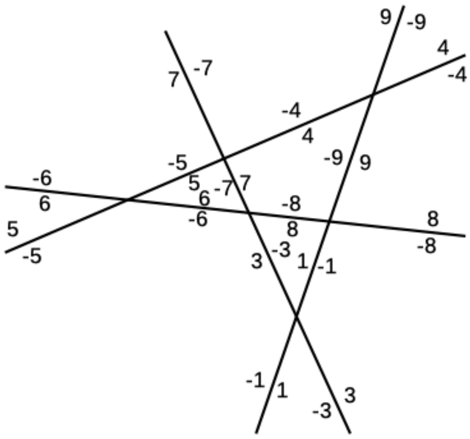
Atrisinājums #2: Vispirms ieraksta -1 un $+1$ kā šaha galdiņā (lai blakus reģionos būtu ierakstīti pretēji skaitļi). Skaidrs, ka šis atrisinājums neder, jo katrai taisnei vienā pusē summa ir 0, bet otrā pusē summa ir 1. Bet šo var izlabot, ja vienu no skaitļiem -1 aizstāj ar -2. Tad visas summas katrā taisnes pusē kļūst 0.

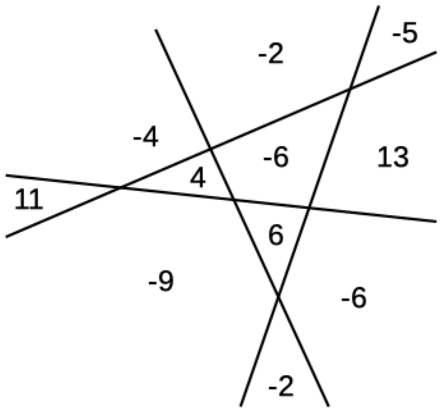


Atrisinājums #3: Ievērojam, ka katru no 4 taisnēm tās krustpunkti ar atlikušajām taisnēm sadala četros posmos. Pie katras taisnes raksta skaitlīšus taisnei abās pusēs tā, lai taisnei vienā pusē ierakstīto skaitļu summa būtu 0 (un lai otrā pusē būtu tādi paši četri skaitļi – tikai ar pretēju zīmi). Šādi konstruējot, iegūsim attēlu, kur katrā no 11 daļām būs ierakstīti vairāki skaitļi (pie katras taisnes pa vienam). Tie apmierina prasību, ka katrā taisnes pusē skaitļu summa ir 0, bet katrā daļā ir vairāki skaitļi. Nav svarīgi, kādus skaitļus ieraksta, bet ir svarīgi, lai summas tieši virs un tieši zem katras taisnes būtu 0. Piemēram,

$$\begin{aligned}
(-6)+6+(-8)+8 &= 0\\
5+(-5)+(-4)+4 &= 0\\
(-7)+7+(-3)+3 &= 0\\
(-1)+1+(-9)+9 &= 0
\end{aligned}$$

Lai iegūtu uzdevuma prasībām atbilstošu attēlu, katrā daļā ierakstītos skaitļus saskaita kopā.





Šis atrisinājums nebija LU NMS arhīvā; aizgūts no Olīvijas S. (7.b) olimpiādes darba.

Vērtēšanas kritēriji
0 punkti, ja pārprasts uzdevums (nav mēģināts katras taisnes abās pusēs dabūt 0).
1–2 punkti, ja ir daži derīgi novērojumi – par to, cik katras taisnes pusē ir daļu, cik daudziem skaitļiem jābūt pozitīviem vai negatīviem utt., bet novērojumi nav novesti līdz labam piemēram.
4–6 punkti, ja risinājumam nepilnības (jāmaina viens skaitlis vai kādā daļā atstāta 0).
8–9 punkti, ja ir parādīts, kā konstruēt derīgu piemēru, bet tas nav pilnīgi pabeigts (piemēram, atstāti daži nesaskaitīti skaitļi).

2. uzdevums: Dotas 1000 kartiņas. Daļa no tām nokrāsotas zilas, pārējās — sarkanas. Uz katras kartiņas uzrakstīts vesels pozitīvs skaitlis, kas mazāks par 1000. Zināms, ka nekādi divi skaitļi, kas uzrakstīti uz zilajām kartiņām, nav savā starpā vienādi, un nekādi divi skaitļi, kas uzrakstīti uz sarkanajām kartiņām, arī nav savā starpā vienādi. Pierādiet, ka var atrast vienu zilu un vienu sarkanu kartiņu tā, ka uz tām uzrakstīto skaitļu summa ir 1000.

Atrisinājums: Aplūkosim veselu pozitīvu (jeb naturālu) skaitļu pārīšus, kur abi skaitļi ir mazāki par 1000, bet abi kopā dod summu 1000. Pagaidām par krāsām nedomājam – vienkārši aprakstām visus veidus, kādos var 1000 izteikt kā divu naturālu skaitļu summu.

$$\underbrace{(1;999),\ (2;998),\ \ldots,\ (499;501),\ (500;500),\ (501;499),\ \ldots,\ (998;2),\ (999;1)}_{999\ \text{pārīši}}.$$

Ja izrādās, ka ir sarkana kartiņa, uz kuras uzrakstīts skaitlis a, tad to liekam virsū pārītim $(a; 1000-a)$ (t.i. pārītim, kur skaitlis a ir pirmajā vietā), bet ja uz zilas kartiņas ir uzrakstīts skaitlis b, tad to liekam virsū pārītim $(1000-b; b)$ (t.i. pārītim, kurā skaitlis b ir otrajā vietā).

Tā kā visām sarkanajām kartiņām ir dažādi skaitļi, tad negadīsies, ka vairākas kartiņas uzliktas tam pašam pārītim – visi pirmie skaitļi ir dažādi. Tāpat arī zilajām kartiņām – jo arī visi otrie skaitļi ir dažādi. Tā kā kartiņu pavisam ir 1000, bet pārīšu tikai 999, tad pēc Dirihlē principa noteikti atradīsies tāds pārītis, uz kura uzliktas vairākas kartiņas. Tās nevar abas būt sarkanas (jo visi sarkanie skaitļi ir dažādi). Tās nevar arī abas būt zilas (jo arī visi zilie skaitļi ir dažādi). Atliek vienīgi iespēja, ka abas kartītes, kas uzliktas pārītim $(a; b)$ ir dažādās krāsās – bet tad esam atraduši sarkanu a un zilu b, kas summā dod 1000.

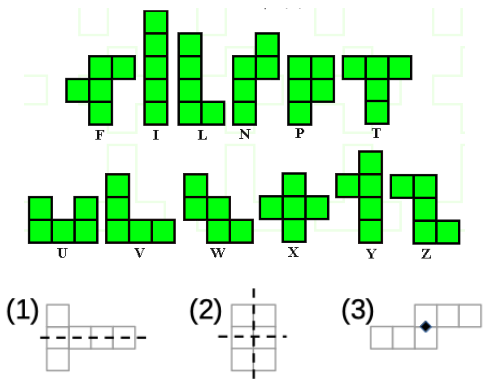
Sk. arī **88.20** no https://ej.uz/inpr jeb **LV.SOL.1988.7.5** NMS arhīvā.

Vērtēšanas kritēriji:

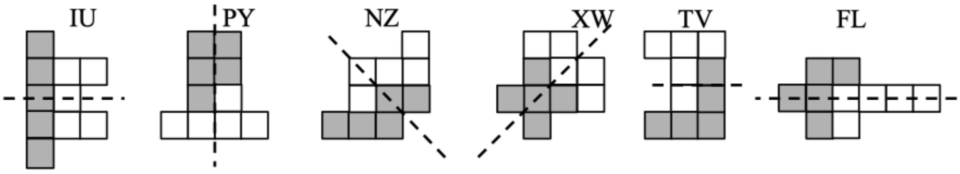
- **0 punkti**, ja spriedums balstās uz vienu vai dažiem piemēriem ar konkrētiem skaitļiem (pieņēmumi par to, kas tieši rakstīts uz zilajām un sarkanajām kartiņām).
- **1–2 punkti**, ja mērķtiecīgi mēģina atrast pretpiemēru. Piemēram, uz zilajām kartiņām tikai nepāra skaitļi, uz sarkanajām kartiņām tikai pāra skaitļi (un tad zilās+sarkanās summa būs nepāra skaitlis un nevar būt 1000). Diemžēl, pāra skaitļu mazāku par 1000 ir tikai 499 (un kopā nesanāk 1000 abu krāsu kartiņas, bet drusku mazāk) – tāpēc šāds pretpiemērs neizdodas.
- **2–3 punkti**, ja spriedums ir patvaļīgam skaitam kartiņu, be papildus pieņem, ka skaitļi ir visi pēc kārtas (var ņemt maksimālo zilo un maksimālo sarkano).
- **4–6 punkti** par nepilnīgi uzrakstītu spriedumu, kas līdzīgs Dirihlē principam (piemēram, ir pavisam 500 dažādu summu, kas dod 1000, bet uz kartiņām esot jābūt vismaz 500 dažādiem skaitļiem). Šādu spriedumu grūti novest līdz galam, jo vienā no krāsām var būt arī mazāk par 500 un mums vajag pāri, kur ir abas krāsas.

3. uzdevums: Dots komplekts ar 12 pentomino figūriņām (zīmējumā). Tās kaut kā sagrupē pāros, un no katra pāra saliek lielāku figūru ar laukumu 10, kas uzzīmējama pa rūtiņu līnijām bez "caurumiem". Kāds lielākais skaits no iegūtajām sešām figūrām var būt simetriskas? Katru pentomino izmanto tikai vienreiz, bet to var pagriezt vai lietot spoguļattēlu.

Piezīme. Figūra ir simetriska gan tad, ja tai ir viena simetrijas ass (1), gan divas perpendikulāras simetrijas asis (2), gan simetrijas centrs (3).



Atrisinājums: Var izveidot maksimālo skaitu – sešas simetriskas figūras, iesaistot visus 12 pentomino. Pievienojam pentomino burtus, lai redzētu, ka tie neatkārtojas. Sk. zīmējumu:

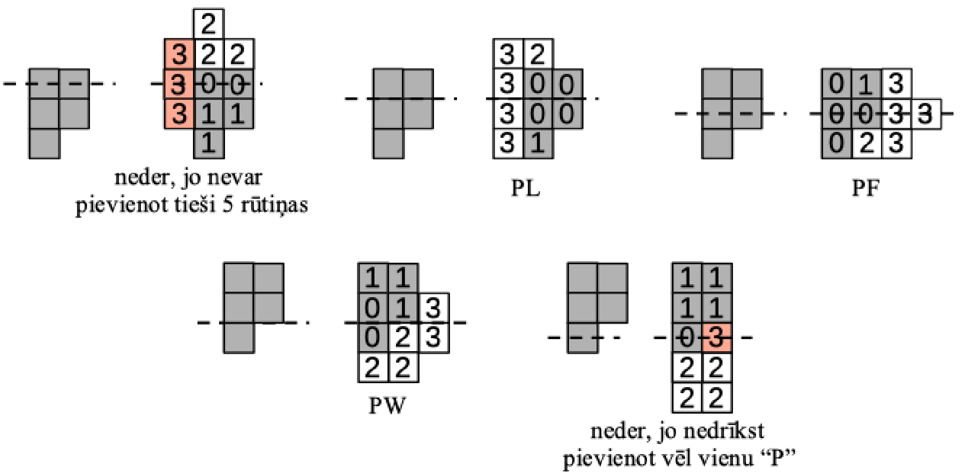


Kā atrod šos pārus? Apgrozīt abus pentomino pa visu perimetru var būt ilgi, tāpēc var sākt ar vienu pentomino, novilkt vēlamo simetrijas asi un skatīties, kuru pentomino pievienot sākotnējam. Var lietot, piemēram, šādu procedūru:

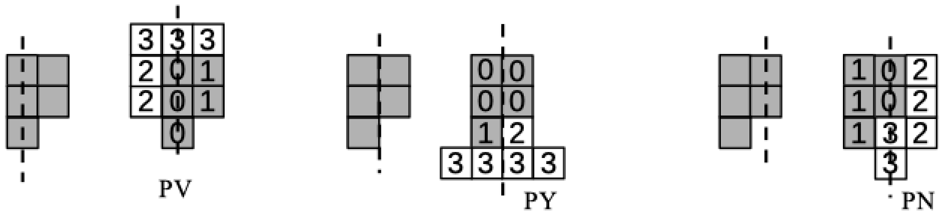
- **1.solis:** Sākotnējā pentomino rūtiņas, kas jau ir simetriskas ar kaut ko, apzīmē ar ciparu 0.
- **2.solis:** Tās iekrāsotās rūtiņas, kam taisnes otrā pusē nav simetriskās, apzīmē ar 1 un piezīmē taisnes otrā pusē tām simetriskas jaunas rūtiņas, ko apzīmē ar 2.
- **3.solis:** Mēģina papildināt jaunās rūtiņas līdz 5-rūtiņu pentomino figūriņai, joprojām simetriski pret doto asi – apzīmē šīs jaunās rūtiņas ar ciparu 3. Ja to var izdarīt, tad esam atraduši jaunu pāri. Ja neizdodas (būtu jāpievieno pārāk daudzas rūtiņas vai arī otrs pentomino iznāk tāds pats kā sākotnējais), tad šāda simetrijas ass neder.

Lietojot šos soļus, izrādās, ka pentomino figūriņas veido diezgan daudzus simetriskus pārus.

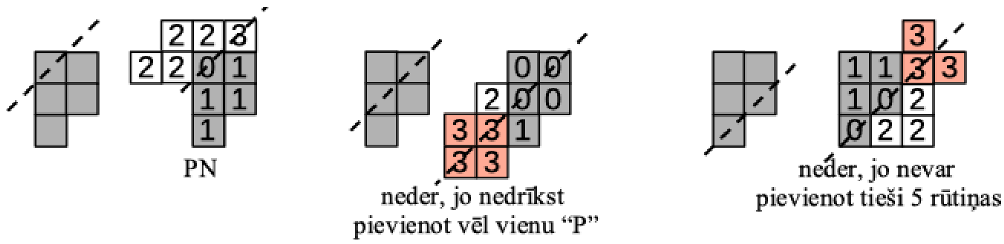
Horizontālas simetrijas asis:

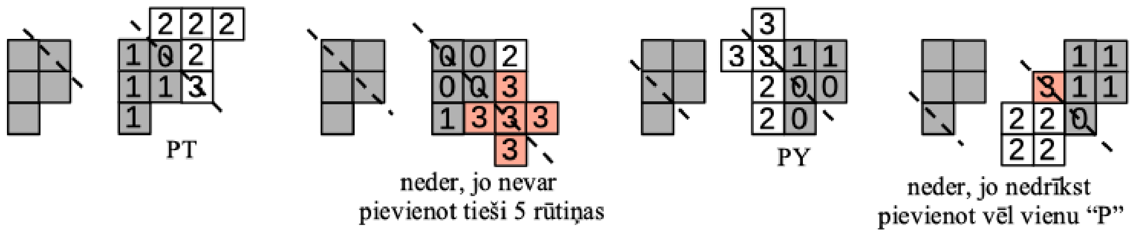


Vertikālas simetrijas asis:



Diagonālas simetrijas asis:





Zīmējumos redzam, ka pentomino "P" veido šādus pārus: PL, PF, PW, PV, PY, PN, PT (pie tam PN un PY var apvienot simetriskās figūrās divos atšķirīgos veidos.) "P" var būt jebkurā no šiem pāriem, bet jāizvēlas tā, lai "P" neatņemtu pāri kādam citam pentomino.

Vērtēšanas kritēriji:

- **2 punkti** par katru jaunu simetrisku figūru, kura iesaista divus jaunus pentomino.
- **1 punkts** tiek atņemts no risinājumiem, kuri parāda simetriskas figūriņas, kas iegūstamas no pentomino, bet nepasaka skaidri, kā tās iegūstamas.
- **12 punkti** par visiem sešiem pārīšiem; tie visi bija atrasti Marka B. (7.b), Olīvijas S. (7.b), Emmas H. (7.c) olimpiādes darbos. (Iespējami vairāki atrisinājumi ar 6 pārīšiem.)

4. uzdevums: Dots, ka a un b ir naturāli skaitļi un $a + b = 210$. Pierādīt, ka ab nedalās ar 210.

Atrisinājums #1 (tiešs pierādījums):
Skaitlis 210 ir četru pirmskaitļu reizinājums: $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Tas vienlaikus ir arī mazākais naturālais skaitlis, kas dalās ar skaitļiem $2, 3, 5, 7$. Skaitli ar šo īpašību sauc par $\text{MKD}(2, 3, 5, 7)$ jeb par skaitļu 2, 3, 5 un 7 *mazāko kopigo dalāmo.*

Naturāls skaitlis $a < 210$ noteikti nedalās ar kādu no pirmskaitļiem 2, 3, 5, vai 7 (jo 210 ir mazākais, kas dalās ar tiem visiem). Bet tad arī $(210 - a)$ nedalās ar to pašu pirmskaitli. (Piemēram, ja a nedalās ar 3, tad $b = 210 - a$ arī nedalās ar 3.) Tādēļ arī reizinājums ab nedalīsies ar to pašu pirmskaitli un tas nevar dalīties arī ar 210.

Atrisinājums #2 (pierādījums no pretējā):
Pieņemsim pretējo, ka $a \cdot b$ dalās ar 210. Ievērosim, ka $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Ar p apzīmēsim jebkuru no pirmskaitļiem $2, 3, 5, 7$. Tad $a \cdot b$ dalās ar p. Tātad vismaz viens no skaitļiem a, b dalās ar p. Tā kā $a + b = 210$ dalās ar p, tad arī otrs skaitlis dalās ar p. Tātad gan a, gan b dalās ar $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, bet tādā gadījumā $a \geq 210$, $b \geq 210$ un $a + b > 210$. Iegūta pretruna.

Sk. arī **92.13** no https://ej.uz/mbg6 jeb **LV.SOL.1992.7.3** NMS arhīvā.

Vērtēšanas kritēriji:

- **0 punkti:** Ja ir "pretpiemērs" $a = 0$, $b = 210$ (tad ab dalās ar 210, bet 0 nav naturāls skaitlis).
- **1 punkts:** Ja ir korekti pārbaudīts viens pārītis a, b, kam $a + b = 210$ un kam $a \cdot b$ nedalās ar 210.
- **2–3 punkti:** Skaitlis 210 sadalīts pirmreizinātājos: $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.
- **3 punkti:** Minēts apgalvojums, ka skaitlis dalās ar 210 tikai tad, ja tas dalās ar visiem skaitļiem $2, 3, 5, 7$.
- **3 punkti:** Ja ir pareizi analizēta kāda lielāka variantu grupa – piemēram, pamatots, ka nepāra skaitļiem a, b reizinājums $a \cdot b$ ir nepāra (un nevar dalīties ar 210). T.i. paliek gadījumi, ja a, b ir abi pāra skaitļi.
- **5-6 punkti:** Ja ir pareizi analizēts lielais vairums gadījumu, piemēram, pamatots, ka reizinājumam $a \cdot b$ būtu jābeidzas ar ciparu 0, lai tas dalītos ar 210.