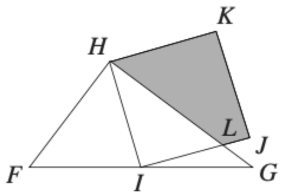
Ģeometrija: Līdzīgi trijstūri

1.uzdevums

Zīmējumā attēlots trijstūris FHG, kur $FH = 6$, $GH = 8$ un $FG = 10$. Punkts I ir FG viduspunkts un $HIJK$ ir kvadrāts. Nogriežņi IJ un GH krustojas punktā L. Cik liels ir iekrāsotā četrstūra laukums? (**A**) 124/8, (**B**) 125/8, (**C**) 126/8, (**D**) 127/8, (**E**) 128/8.



Atbilde: `B`

Atrisinājums:
Trijstūris ar malu garumiem $6, 8, 10$ ir taisnleņķa, jo $6^2 + 8^2 = 10^2$. No taisnā leņķa virsotnes H vilkta mediāna HI – un tā sadala taisnleņķa trijstūri divos vienādsānu trijstūros jeb mediānas garums ir puse no hipotenūzas.

Pierādījums apgalvojumam par taisnleņķa trijstūra mediānu: Taisnleņķa trijstūrim FGH piezīmējam klāt otru tādu pašu simetriski pret centru I, iegūstam taisnstūri. Taisnstūrī abas diagonāles ir vienāda garuma, tās krustpunktā dalās uz pusēm. Tāpēc HI ir puse no taisnstūra diagonāles un $HI = HG/2 = 5$.

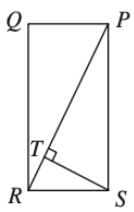
Kvadrāta $HIJK$ laukums ir $5 \cdot 5 = 25$. No tā jāatņem $\triangle HIL$ laukums. Ievērojam, ka $\triangle FGH \sim \triangle LHI$ (abi ir taisnleņķa trijstūri un šaurie leņķi $\sphericalangle IHL = \sphericalangle HGF$, jo trijstūris HGI ir vienādsānu). $\triangle LHI$ un $\triangle FGH$ līdzības koeficients ir $k = 5/8$, jo LHI garākā katete $HI = 5$, bet FGH garākā katete $GH = 8$.

Izsakām abu trijstūru laukumus, izmantojot līdzības koeficientu: $S_{FGH} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$ un $S_{LHI} = 24 \cdot k^2 = 24 \cdot \frac{25}{64} = \frac{75}{8}$.

Visbeidzot iekrāsotās figūras laukums:
$S_{HKJL} = 25 - \frac{75}{8} = \frac{200-75}{8} = \frac{125}{8}$, kas ir atbilde (**B**).

2.uzdevums

Attēlā dots taisnstūris $PQRS$, kurā $PQ : QR = 1 : 2$. Punkts T atrodas uz PR tā, ka ST ir perpendikulārs taisnei PR. Kāda ir trijstūra RST laukuma un taisnstūra $PQRS$ laukuma attiecība? (**A**) $1 : (4\sqrt{2})$, (**B**) $1 : 6$, (**C**) $1 : 8$, (**D**) $1 : 10$, (**E**) $1 : 12$.



Atbilde: `D`

Atrisinājums. Pēc Pitagora teorēmas, taisnstūra diagonāle $PR = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$. Tā ir hipotenūza taisnleņķa trijstūrim $\triangle PQR$. Trijstūris $\triangle RST$ ir līdzīgs $\triangle PRQ$ un tam hipotenūza ir 1. Tādēļ $\triangle RST$ līdzības koeficients attiecībā pret $\triangle PRQ$ ir $\frac{1}{\sqrt{5}}$ – trijstūra $\triangle RST$ elementi (malas, augstumi) ir apmēram 2.236 reizes īsāki par atbilstošajiem elementiem trijstūrī PRQ.

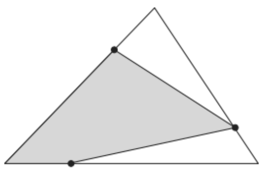
Laukumu attiecība abiem trijstūriem:

$$\frac{S_{RST}}{S_{PRQ}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{5}.$$

Tā kā taisnstūra laukums S_{PQRS} ir divreiz lielāks nekā trijstūra laukums S_{PRQ}, tad $\triangle RST$ laukuma attiecība pret taisnstūra laukumu ir puse no $1/5$ jeb $\frac{1}{10}$, kas ir atbilde **(D)**.

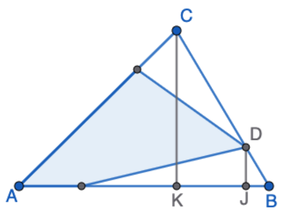
3.uzdevums

Uz katras trijstūra malas ir atzīmēts punkts, kas atrodas vienu ceturtdaļu no malas garuma (sk. attēlu). Kāda daļa no trijstūra laukuma ir iekrāsota? **(A)** $\frac{7}{16}$, **(B)** $\frac{1}{2}$, **(C)** $\frac{9}{16}$, **(D)** $\frac{5}{8}$, **(E)** $\frac{11}{16}$.



Atbilde: `D`

Atrisinājums:
Katram no abiem baltajiem trijstūriem pamats ir $3/4$ no sākotnējā trijstūra pamata, bet augstums ir četrreiz īsāks par sākotnējā trijstūra augstumu. Šo pēdējo faktu var pamatot, aplūkojot līdzīgus trijstūrus (piemēram, $\triangle BDJ$ un $\triangle BCK$ zīmējumā).



Ja sākotnējā trijstūra laukumu apzīmē ar $S = \frac{1}{2}ah$, tad katram no baltajiem trijstūriem laukums:

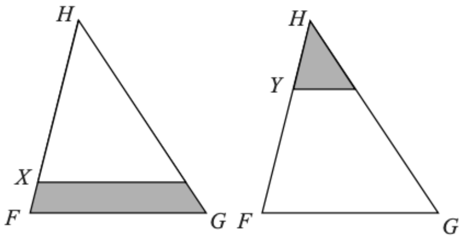
$$S' = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}a\right)\left(\frac{1}{4}h\right) = \frac{3}{16}S.$$

Atņemot divus šādus trijstūrus, iegūstam $S - \frac{3}{16}S - \frac{3}{16}S = \frac{5}{8}S$, kas ir atbilde **(D)**.

Piezīme: Ja izmanto trijstūra laukuma formulu $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, tad balto trijstūrīšu laukumus var izteikt uzreiz (pamatot, ka tie ir $3/16$ no sākotnējā trijstūra laukuma), neizmantojot spriedumus par līdzīgiem trijstūriem.

4.uzdevums

Trijstūrī FGH var novilkt taisni, kas ir paralēla tā pamatnei FG, caur punktu X vai Y. Ieēnoto daļu laukumi ir vienādi. Dotā attiecība ir $HX : XF = 4 : 1$. Kāda ir attiecība $HY : YF$?
(**A**) $1 : 1$, (**B**) $2 : 1$, (**C**) $3 : 1$, (**D**) $3 : 2$, (**E**) $4 : 3$



Atbilde: `D`

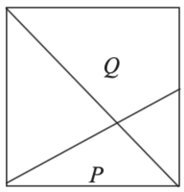
Atrisinājums:
Apzīmējam trijstūra pamata malu ar a un augstumu ar h. Tad kreisā attēla trapecei apakšējais pamats ir a, bet augšējais pamats ir $\frac{4}{5}a$; trapeces augstums ir $\frac{1}{5}h$. Tad trapeces laukums:

$$S = \frac{a + \frac{4}{5}a}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}h\right) = \left(1 + \frac{4}{5}\right) \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{ah}{2} = \frac{9}{25} \cdot \frac{ah}{2}.$$

Iekrāsotās trapeces laukums ir $\frac{9}{25}$ no trijstūra laukuma. Lai labajā pusē iekrāsotajam trijstūrim arī būtu tāds laukums, vajag, lai līdzības koeficients būtu $\frac{3}{5}$. Tad $\frac{HY}{YF} = \frac{3}{5}$, kas ir atbilde (**D**).

5.uzdevums

Zīmējumā dots kvadrāts ar diagonāli un nogriezni, kas savieno virsotni ar malas viduspunktu. Kāda ir P un Q laukumu attiecība? (**A**) $1 : \sqrt{2}$, (**B**) $2 : 3$, (**C**) $1 : 2$, (**D**) $2 : 5$, (**E**) $1 : 3$.



Atbilde: `D`

Atrisinājums-1:
Apzīmējam kvadrāta malu ar 1. Novelkam GE – trijstūra ABC viduslīniju; tās garums ir $1/2$. Trapeces $ABEG$ laukums ir viduslīnijas un augstuma reizinājums:

$$S_{ABEG} = \frac{1 + 1/2}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

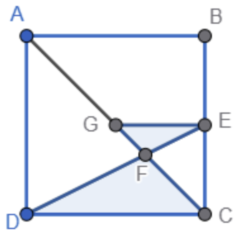
Trijstūri CDF un GEF ir līdzīgi, jo tiem visi leņķi ir pa pāriem vienādi. Līdzības koeficients ir 2, jo CD ir divreiz garāks nogrieznis nekā GE. Abu šo trijstūru vertikālajiem augstumiem jābūt $1/3$ un $1/6$ (vienīgie skaitļi, kuru summa ir $1/2$ un pirmais ir divreiz lielāks kā otrais). Trijstūra FDC laukums – puse no pamata un augstuma reizinājuma:

$$S_{CDF} = \frac{DC \cdot \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{6}.$$

Savukārt $S_{GEF} = \frac{1}{24}$, jo tas ir četras reizes mazāks. Meklējamā laukumu attiecība:

$$\frac{P}{Q} = \frac{S_{CDF}}{S_{ABEG} + S_{GEF}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{8} + \frac{1}{24}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{10}{24}} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}.$$

Tā ir atbilde (**D**)

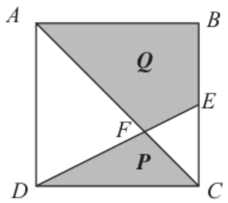


Atrisinājums-2:
Apzīmējam trijstūra CEF laukumu ar S. Ievērojam, ka $\sphericalangle AFD = \sphericalangle CFE$ (krustleņķi) un $\sphericalangle DAF = \sphericalangle ECF$ (iekšējie šķērsleņķi), tādēļ trijstūri ADF un CEF ir līdzīgi. Līdzības koeficients $k = 2$, jo mala AD ir divreiz garāka par attiecīgo malu CE. Tātad:

i. trijstūrim ADF ir laukums $k^2 \cdot S = 4S$,
ii. mala AF ir divreiz garāka nekā attiecīgā mala CF.

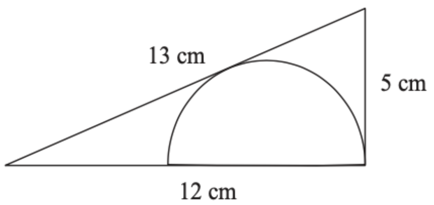
Apskatām AF un CF kā trijstūru ADF un CDF pamatus (tiem ir vienāds augstums). Saskaņā ar (ii), trijstūrim ADF ir divreiz lielāks laukums nekā trijstūrim CDF (laukums P), tātad tas ir $2S$.

Trijstūra ACD laukums ir $6S$; tātad arī trijstūra ABC laukums ir $6S$, bet Q ir $6S - S = 5S$. Tātad meklētā attiecība ir $2 : 5$, kas ir atbilde (**D**).



6.uzdevums

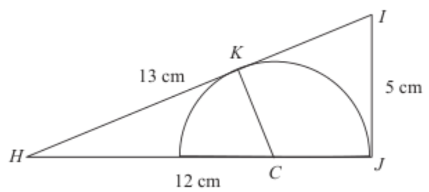
Zīmējumā attēlotajā taisnleņķa trijstūrī malu garumi ir 5 cm, 12 cm un 13 cm. Kāds ir ievilktā pusriņķa rādiuss centimetros, ja tā diametrs atrodas uz malas ar garumu 12 cm?
(**A**) $8/3$, (**B**) $10/3$, (**C**) $11/3$, (**D**) 4, (**E**) $13/3$.



Ieteikums: Ja neesat pazīstami ar formulu $S = pr$ ievilktā riņķa rādiusa atrašanai, var savienot riņķa centru ar pieskaršanās punktu uz hipotenūzas un aplūkot līdzīgus trijstūrus.

Atbilde: B

Atrisinājums-1:
Apzīmējam trijstūra virsotnes ar H, I, J, ar C – riņķa centru un K ir punkts, kur pusriņķis pieskaras malai HI, kā redzams zīmējumā. Leņķis $\sphericalangle CKH$ ir taisns, jo nogrieznis HI pieskaras riņķim un tādēļ ir perpendikulārs rādiusam CK. Trijstūri HKC un HJI ir līdzīgi, jo tiem ir katram taisns leņķis un arī kopīgs leņķis virsotnē H. Apzīmējam pusriņķa rādiusu ar r; tad $CK = r$ un $CH = 12 - r$. No trijstūru līdzības iegūstam $\dfrac{12-r}{r} = \dfrac{13}{5}$.



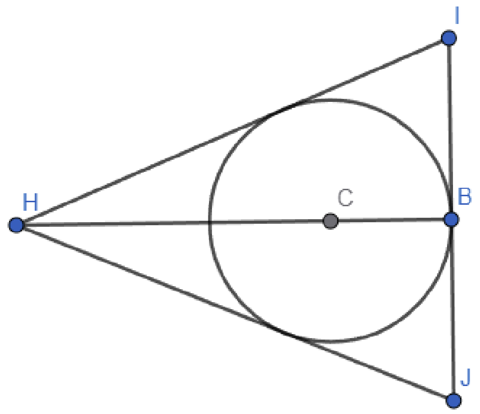
Tātad $5(12 - r) = 13r$ un $60 - 5r = 13r$. No šejienes $18r = 60$, tātad $r = \dfrac{10}{3}$, kas ir atbilde (**B**).

Atrisinājums-2:
Simetriski pret kateti garumā 12 uzzīmējam otru taisnleņķa trijstūri. Esam ieguvuši jaunu vienādsānu trijstūri HIJ, kurā ievilkta riņķa līnija. Šī trijstūra laukums ir divkāršots $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$, tātad 60.

No otras puses, trijstūra laukumu var izteikt ar formulu $S = pr$, kur p ir pusperimetrs un r - ievilktā riņķa līnija. Trijstūra HIJ pusperimetrs ir $(13 + 13 + 10)/2 = 18$. Tāpēc pielīdzinām:

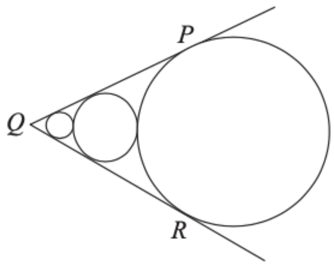
$$S = pr, \quad 60 = 18r, \quad r = 60/18 = 10/3.$$

Tā ir atbilde (**B**).



7.uzdevums

Trīs apļi un taisnes PQ un QR savstarpēji pieskaras, kā attēlots zīmējumā. Attālums starp mazākā un lielākā riņķa centriem ir 16 reizes lielāks par mazā riņķa rādiusu. Kāds ir leņķis $\sphericalangle PQR$? **(A)** 45°, **(B)** 60°, **(C)** 75°, **(D)** 90°, **(E)** 135°.



Atbilde: B

Atrisinājums:
Apļu rādiusus no mazākā līdz lielākajam apzīmējam attiecīgi ar r_1, r_2 un r_3. Tātad

$$16r_1 = r_3 + 2r_2 + r_1,\ \text{tāpēc}\ r_3 = 15r_1 - 2r_2 \qquad (1).$$

Ar $r_1 + x$ apzīmē attālumu no Q līdz mazākā apļa centram. Trijstūru līdzības dēļ

$$\frac{r_1}{r_1 + x} = \frac{r_2}{x + 2r_1 + r_2} = \frac{r_3}{16r_1 + r_1 + x} \qquad (2).$$

Tad $r_1(x + 2r_1 + r_2) = r_2(r_1 + x)$. Tāpēc

$$r_2 = \frac{r_1 x + 2r_1^2}{r_1} \qquad (3).$$

No (1) un (2)

$$\frac{r_1 x}{r_1 + x} = \frac{(15r_1 - 2r_2)x}{17r_1 + x}\ \text{tātad}\ \frac{r_1 x}{r_1 + x} = \frac{15r_1 x - 2(r_1 x + 2r_1^2)}{17r_1 + x}.$$

Izdalot visur ar r_1 un vienkāršojot, iegūst $12x^2 - 8r_1x - 4r_1^2 = 0$. Tātad $(3x + r_1)(x - r_1) = 0$, un, tā kā $r_1 > 0$, $x = r_1$. Tāpēc

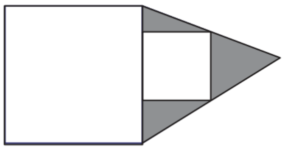
$$\sin \frac{\sphericalangle PQR}{2} = \frac{r_1}{r_1 + x} = \frac{r_1}{2r_1} = \frac{1}{2}.$$

Tātad $\frac{1}{2}\sphericalangle PQR = 30^\circ$, līdz ar to $\sphericalangle PQR = 60^\circ$.

8.uzdevums

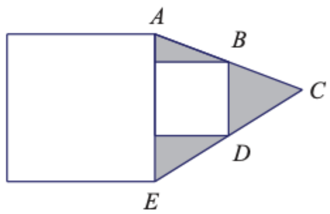
Zīmējumā attēloti divi kvadrāti: Vienam malas garums ir 20, un otram malas garums ir 10. Kāds ir ieēnotā apgabala laukums?

Ierakstīt atbildē veselu skaitli vai parastu daļu P/Q.



Atbilde: `100`

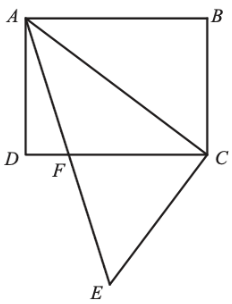
Atrisinājums:
Ieviešot burtu apzīmējumus, redzam, ka $\triangle ACE$ un $\triangle BCD$ ir līdzīgi un to garumu attiecība ir $2 : 1$. Tā kā $\triangle ACE$ augstums ir 10 + $\triangle BCD$ augstums, $\triangle ACE$ augstums ir 20, un tā laukums ir $\frac{1}{2} \times 20 \times 20 = 200$. Mazākā kvadrāta laukums ir 100, tāpēc iekrāsotās daļas laukums ir $200 - 100 = 100$.



9.uzdevums

Attēlā redzams taisnstūris $ABCD$, kam $AB = 16$ un $BC = 12$. $\sphericalangle ACE$ ir taisns leņķis un $CE = 15$. Nogriežņi AE un CD krustojas punktā F. Kāds ir $\triangle ACF$ laukums?

Ierakstīt atbildē veselu skaitli vai parastu daļu P/Q.



Atbilde: `75`

Atrisinājums:
Izmantojot Pitagora teorēmu vispirms $\triangle ABC$ un pēc tam $\triangle ACE$, iegūstam $AC = 20$ un $AE = 25$. No tā izriet, ka $\triangle ABC$ ir līdzīgs $\triangle ACE$, jo atbilstošo malu attiecība abos trijstūros ir $3 : 4 : 5$ (pazīme mmm). Tāpēc $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAE$. Arī $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACF$, izmantojot iekšējos šķērsleņķus, tātad $\sphericalangle CAF = \sphericalangle ACF$ un $\triangle AFC$ ir vienādsānu. Lai M ir nogriežņa AC viduspunkts un savienojam M ar F. Tas dod vēl divus taisnleņķa trijstūrus, $\triangle AMF$ un $\triangle CMF$, kas arī ir līdzīgi $\triangle ABC$. Tātad

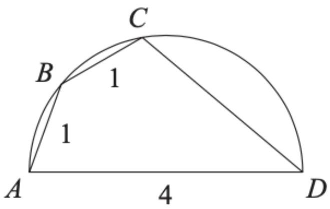
$$\frac{MF}{MA} = \frac{BC}{BA}$$

no kurienes $MF = \frac{MA \cdot BC}{BA} = \frac{10 \cdot 12}{16} = \frac{15}{2}$. Tāpēc $S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{2} \cdot 20 = 75$.

10.uzdevums

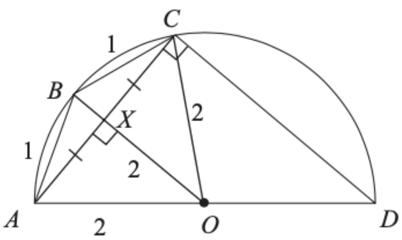
Riņķa diametra AD garums ir 4. Punkti B un C atrodas uz riņķa, kā attēlots zīmējumā, un $AB = BC = 1$. Atrast CD garumu.

Ierakstīt atbildē veselu skaitli vai parastu daļu P/Q.



Atbilde: 7/2

Atrisinājums-1:
Lai O ir apļa centrs, tā ka $OA = OB = OC = 2$, un lai horda AC un rādiuss OB krustojas punktā X.



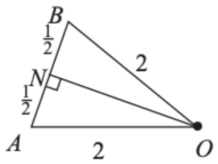
Trijstūris OAC ir vienādsānu, un OB pārgriež leņķi AOC uz pusēm (jo hordas AB un BC ir vienādas un tāpēc apļa centrā nogriež vienādus leņķus). Tātad OB ir vienādsānu trijstūra AOC pamata AC perpendikulārais dalītājs. Citiem vārdiem, $AX = XC$ un $\sphericalangle AXO = 90^\circ$, kā parādīts iepriekšējā zīmējumā.

Tā kā leņķis ACD ir 90° (leņķis pusaplī), trijstūris ACD ir taisnleņķa trijstūris, kurā viena mala ir CD, un tās garums mums jāatrod. Zinām, ka $AD = 4$, tāpēc CD var atrast, izmantojot Pitagora teorēmu:

$$CD^2 = AD^2 - AC^2, \qquad (4.1)$$

ja vien varam noteikt nogriežņa AC garumu. To darīsim, izmantojot laukumus, bet pastāv arī citas metodes.

Tagad aplūkosim vienādsānu trijstūri OAB un lai N ir nogriežņa AB viduspunkts, tā ka trijstūris ANO ir taisnleņķa.



Tad pēc Pitagora teorēmas

$$NO^2 = 2^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{4},$$

tāpēc $NO = \frac{\sqrt{15}}{2}$. Tātad trijstūra AOB laukums ir

$$\frac{1}{2} \times AB \times NO = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Bet trijstūra OAB laukums ir arī $\frac{1}{2} \times OB \times AX$. Tāpēc $AX = \frac{\sqrt{15}}{4}$ un tādēļ

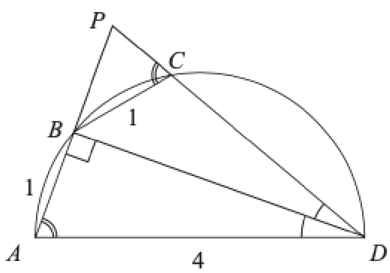
$$AC = 2AX = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Ievietojot šo vērtību vienādojumā (4.1)., iegūstam

$$CD^2 = AD^2 - AC^2 = 4^2 - \frac{15}{4} = \frac{49}{4}$$

un līdz ar to $CD = \frac{7}{2}$.

Atrisinājums-2:
Lai P ir pagarināto taisņu AB un DC krustpunkts.



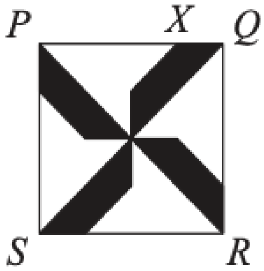
Leņķi ADB un BDC abi ir riņķī ievilkti leņķi, ko balsta hordas ar garumu 1. Tāpēc šie leņķi ir vienādi. Cits ievilkts leņķis $\sphericalangle ABD = 90^\circ$, jo balstās uz diametru. Tāpēc trijstūri ABD un PBD ir kongruenti (pazīme $\ell m \ell$). Tātad $BP = 1$ un $PD = 4$.

Turklāt trijstūros BCP un DAP leņķis pie P ir kopīgs un $\sphericalangle BCP = \sphericalangle DAP$ (ievilkta četrstūra ārējais leņķis). Tāpēc šie trijstūri ir līdzīgi, un no tā seko $PC : 1 = 2 : 4$. Tātad $PC = \frac{1}{2}$ un $CD = PD - PC = 4 - \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$.

11.uzdevums

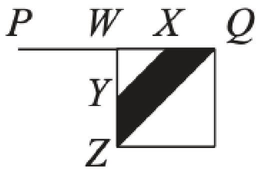
Četras vienādas vienādsānu trapeces novietotas tā, ka to garākās pamata malas veido kvadrāta $PQRS$ diagonāles, kā parādīts attēlā. Punkts X dala PQ attiecībā $3 : 1$. Kāda daļa no kvadrāta ir iekrāsota?

(A) $\frac{5}{16}$, **(B)** $\frac{3}{8}$, **(C)** $\frac{7}{16}$, **(D)** $\frac{5}{12}$, **(E)** $\frac{1}{2}$.



Atbilde: B

Atrisinājums:
Zīmējumā parādīta kvadrāta labā augšējā ceturtdaļa. Iekrāsotais trapecveida četrstūris ir apzīmēts ar $QXYZ$, un W ir punkts, kurā pagarinājums ZY krustojas ar PQ.



Tā kā $QXYZ$ ir vienādsānu trapece, $\sphericalangle QZY = \sphericalangle ZQX = 45^\circ$. Taisnes YX un ZQ ir paralēlas, un $\sphericalangle XYW = \sphericalangle WXY = 45^\circ$. Tātad WYX un WZQ abi ir vienādsānu taisnleņķa trijstūri. Tā kā $\sphericalangle ZWQ = 90^\circ$ un Z atrodas kvadrāta $PQRS$ centrā, secinām, ka W ir nogriežņa PQ viduspunkts. Tāpēc $WX = XQ = \frac{1}{4}PQ$. Tātad līdzīgo trijstūru WYX un WZQ malu garumu attiecība ir $1 : 2$, un līdz ar to šo trijstūru laukumu attiecība ir $1 : 4$.

Tāpēc trapeces laukums $S_{QXYZ} = \frac{3}{4} \cdot S_{ZWQ} = \frac{3}{32} \cdot S_{PQRS}$, jo trijstūris ZWQ ir viena astotā daļa no $PQRS$. Tātad iekrāsotā daļa no kvadrāta ir $4 \times \frac{3}{32} = \frac{3}{8}$.

12.uzdevums

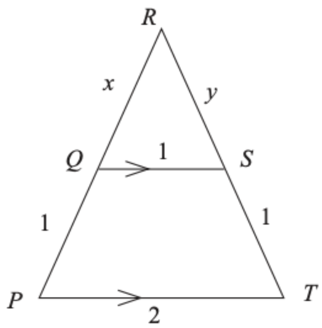
Trapeces perimetrs ir 5 vienības un katras malas garums ir vesels skaitlis. Kādi ir divi mazākie trapeces leņķi?

(A) 30° un 30°, **(B)** 60° un 60°, **(C)** 45° un 45°, **(D)** 30° un 60°, **(E)** 45° un 90°.

Atbilde: B

Atrisinājums:
Aprakstītā situācija atbilst vienādsānu trapecei ar trim malām, kuru garums ir viena vienība, un

vienu malu, kuras garums ir divas vienības. Pagarinām abas trapeces sānu malas, lai izveidotu trijstūri, kā parādīts zīmējumā.



Taisnes PT un QS ir paralēlas. Tāpēc, izmantojot atbilstošos leņķus, zinām, ka $\sphericalangle TPR = \sphericalangle SQR$ un $\sphericalangle PTR = \sphericalangle QSR$. Tas parāda, ka trijstūriem PRT un QRS ir vienādi leņķi, tātad tie ir līdzīgi. Tāpēc

$$\frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

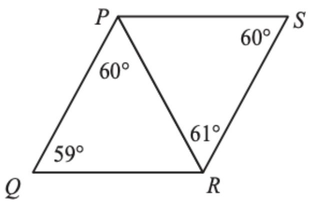
no kā iegūst $x = 1$, un

$$\frac{y}{y+1} = \frac{1}{2}$$

no kā iegūst $y = 1$. Tātad trijstūris QRS ir vienādmalu, un tā visi leņķi ir 60°. Tas nozīmē, ka arī leņķi pie trapeces pamata ir 60°.

13.uzdevums

Četrstūrī $PQRS$, $\sphericalangle PQR = 59^\circ$, $\sphericalangle RPQ = 60^\circ$, $\sphericalangle PRS = 61^\circ$ un $\sphericalangle RSP = 60^\circ$, kā redzams attēlā. Kurš no nogriežņiem ir garākais? (**A**) PQ, (**B**) PR, (**C**) PS, (**D**) QR, (**E**) RS.

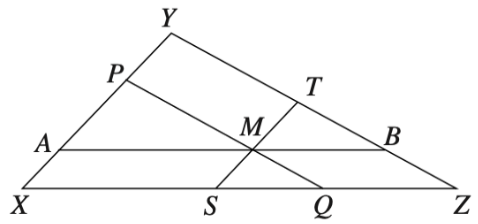


Atbilde: `A`

Atrisinājums:
Trijstūri ir līdzīgi, jo abos ir leņķi 59°, 60°, 61°. Trijstūrī īsākā mala vienmēr atrodas pretī mazākajam leņķim, tāpēc nogrieznis PR ir īsākā mala trijstūrī PQR, lai gan tas nav īsākā mala trijstūrī PRS; tātad trijstūris PQR ir lielāks nekā trijstūris PRS un tam jāietver garākais nogrieznis. Trijstūrī garākā mala atrodas pretī lielākajam leņķim, tāpēc mala PQ ir garākā (pretī $\sphericalangle PRQ$, kas ir 61°).

14.uzdevums

Attēlā redzams trijstūris XYZ. Malām XY, YZ un XZ ir attiecīgi garumi 2, 3 un 4. Taisnes AMB, PMQ un SMT vilktas paralēli trijstūra malām tā, ka nogriežņu AP, QS un BT garumi ir vienādi. Kāds ir AP garums? (**A**) $\frac{10}{11}$, (**B**) $\frac{11}{12}$, (**C**) $\frac{12}{13}$, (**D**) $\frac{13}{14}$, (**E**) $\frac{14}{15}$.



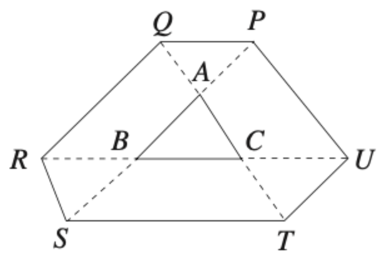
Atbilde: C

Atrisinājums:
Visi diagrammā redzamie trijstūri ir līdzīgi, jo tiem ir vienādi leņķi. Tāpēc katra trijstūra malu attiecība ir $2 : 3 : 4$. Vispirms aplūkosim trijstūri APM. Apzīmējam $AP = x$, tad $AM = 2x$. Aplūkojot trijstūri TBM, no $BT = x$ seko $BM = \frac{4x}{3}$. Četrstūris $AMSX$ ir paralelograms, jo AM ir paralēls XS un MS ir paralēls AX. Tātad $AM = XS = 2x$. Līdzīgi $QZ = BM = \frac{4x}{3}$. Aplūkojot trijstūra XYZ pamatu, $XS + SQ + QZ = 4$. Tātad $2x + x + \frac{4x}{3} = 4$ un līdz ar to $x = \frac{12}{13}$.

15.uzdevums

Attēlā dots trīsstūris ABC ar laukumu 12 cm^2. Trijstūra malas ir pagarinātas līdz punktiem P, Q, R, S, T un U tā, kā parādīts, tā ka $PA = AB = BS$, $QA = AC = CT$ un $RB = BC = CU$. Kāds ir sešstūra $PQRSTU$ laukums kvadrātcentimetros?

Ierakstīt atbildē veselu skaitli vai parastu daļu P/Q.



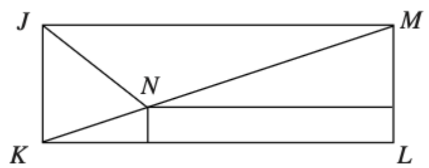
Atbilde: 156

Atrisinājums:

16.uzdevums

Taisnstūrī $JKLM$ leņķa $\sphericalangle KJM$ bisektrise krusto diagonāli KM punktā N, kā parādīts. Attālumi no N līdz malām LM un KL ir attiecīgi 8 cm un 1 cm. Malas KL garums ir $(a + \sqrt{b})$ cm. Kāda ir $a + b$ vērtība?

Ierakstīt atbildē veselu skaitli vai parastu daļu P/Q.

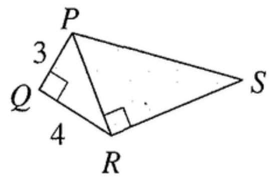


Atbilde: 156

Atrisinājums:
Apskatīsim trijstūrus ABC un AST. Leņķi CAB un TAS ir vienādi, jo tie ir viens un tas pats leņķis; $SA = 2BA$ un $TA = 2CA$. Tātad trijstūri ABC un AST ir līdzīgi. To malu attiecība ir $1 : 2$, un tāpēc to laukumu attiecība ir $1 : 2^2 = 1 : 4$. Tāpēc trijstūra AST laukums ir 4×12 cm^2 = 48 cm^2, un līdz ar to $BSTC$ laukums ir $(48 - 12)$ cm^2 = 36 cm^2. Līdzīgā veidā var parādīt, ka gan $CUPA$, gan $AQRB$ laukums arī ir 36 cm^2. Tālāk apskatīsim trijstūrus ABC un APQ. Leņķi BAC un PAQ ir vienādi kā vertikālie leņķi, $AB = AP$ un $AC = AQ$. Tātad trijstūri ABC un APQ ir kongruenti (SAS), un līdz ar to trijstūra APQ laukums ir 12 cm^2. Līdzīgā veidā var parādīt, ka trijstūru BRS un CTU laukumi arī ir 12 cm^2. Tādēļ sešstūra $PQRSTU$ kopējais laukums cm^2 ir $(3 \times 36 + 4 \times 12) = 156$.

17.uzdevums

Attēlā dots četrstūris $PQRS$, kas veidots no diviem līdzīgiem taisnleņķa trīsstūriem PQR un PRS. Malas PQ garums ir 3, malas QR garums ir 4, un $\sphericalangle PRQ = \sphericalangle PSR$. Kāds ir četrstūra $PQRS$ perimetrs? (**A**) 22, (**B**) $22\frac{5}{6}$, (**C**) 27, (**D**) 32, (**E**) $45\frac{1}{3}$.

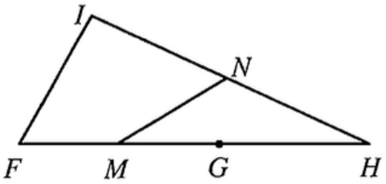


Atbilde: `A`

Atrisinājums:
Pitagora teorēma rāda, ka $PR = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Tātad trijstūra PQR perimetrs ir 12. Tā kā trijstūri ir līdzīgi un $PR : PQ = 5 : 3$, redzam, ka trijstūra PRS perimetrs ir 20. Tādēļ $PQRS$ perimetrs ir $12 + 20 - 2 \times PR = 32 - 10 = 22$.

18.uzdevums

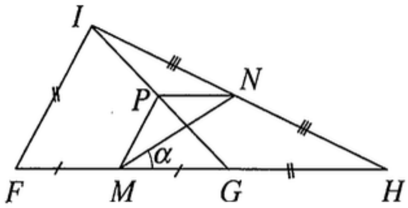
Attēlā dots trīsstūris FHI, un punkts G atrodas uz nogriežņa FH tā, ka $GH = FI$. Punkti M un N ir attiecīgi nogriežņu FG un HI viduspunkts. Leņķis $NMH = \alpha$. Kurš no sekojošajiem dod izteiksmi leņķim $\sphericalangle IFH$?
(**A**) 2α, (**B**) $90^{\circ} - \alpha$, (**C**) $45^{\circ} + \alpha$, (**D**) $90^{\circ} - \frac{1}{2}\alpha$, (**E**) 60°.



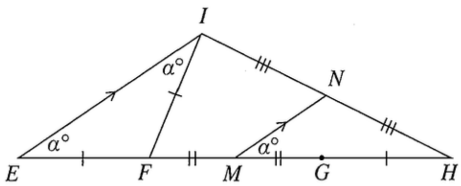
Atbilde: `A`

Atrisinājums-1:
Novelkam nogriezni IG. Ar P apzīmējam tādu punktu uz IG, ka PN ir paralēls FH. Leņķi PNM un NMH ir iekšējie šķērsleņķi, tāpēc $\sphericalangle PNM = \alpha$. Turklāt trijstūris PNI ir līdzīgs trijstūrim GHI (abu trijstūru leņķi ir vienādi); tā kā N ir nogriežņa HI viduspunkts, tad

$PN = \frac{1}{2}GH$. Arī $IP = \frac{1}{2}IG$, tātad $PG = \frac{1}{2}IG$. Tā kā $MG = \frac{1}{2}FG$, trijstūris PMG ir līdzīgs IFG, un jo īpaši $PM = \frac{1}{2}IF$. Tā kā $IF = GH$, tāpēc $PN = \frac{1}{2}GH = \frac{1}{2}IF = PM$, tātad trijstūris MNP ir vienādsānu un $\sphericalangle PMN = \sphericalangle PNM = \alpha$. Tā kā trijstūri PMG un IFG ir līdzīgi, iegūstam $\sphericalangle IFG = \sphericalangle PMG = \alpha + \alpha = 2\alpha$.



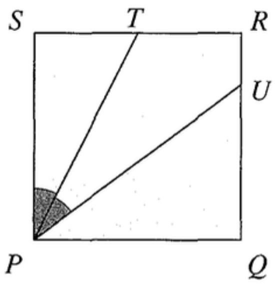
Atrisinājums-2:
Pagarinām taisni HF līdz punktam E tā, lai $EF = GH$. Zināms, ka $FM = MG$, tāpēc punkts M ir nogriežņa EH viduspunkts. Tā kā N ir nogriežņa IH viduspunkts, trijstūri IHE un NHM ir līdzīgi. Tātad $\sphericalangle IEH = \sphericalangle NMH = a^\circ$. Tā kā $EF = GH = FI$, trijstūris EFI ir vienādsānu. Tāpēc $\sphericalangle FIE = \sphericalangle IEF = a^\circ$. Tādēļ pēc ārējā leņķa teorēmas $\sphericalangle IFG = \sphericalangle IEF + \sphericalangle FIE = a^\circ + a^\circ = 2a^\circ$.



19.uzdevums

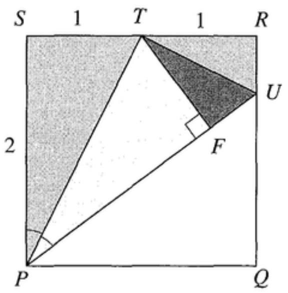
Attēlā dots kvadrāts $PQRS$ ar malu garumu 2. Punkts T ir malas RS viduspunkts, un punkts U atrodas uz nogriežņa QR tā, ka $\sphericalangle SPT = \sphericalangle TPU$. Kāds ir nogriežņa UR garums?

Ierakstīt atbildē veselu skaitli vai parastu daļu P/Q.



Atbilde: 1/2

Atrisinājums:
Ar F apzīmējam punktu uz PU, kuram $\sphericalangle TFP = 90^\circ$, un savieno T ar F un U, kā parādīts zīmējumā.



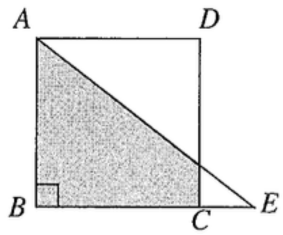
Tad trijstūri PTS un PTF ir kongruenti (pazīme $\ell m \ell$), tātad $TF = 1$. Tāpēc trijstūri TUR un TUF ir kongruenti (kā taisnleņķa trijstūri ar vienādu hipotenūzu un kateti), tātad $\sphericalangle RTU = \sphericalangle UTF$. Četri leņķi pie T ir leņķi uz taisnes RTS, tāpēc to summa ir $180°$. No šejienes seko, ka $\sphericalangle RTU = \sphericalangle SPT$. Tādēļ trijstūri RTU un SPT ir līdzīgi (pazīme $\ell\ell$), un

$$\frac{UR}{RT} = \frac{TS}{SP} = \frac{1}{2}.$$

Tātad $UR = \frac{1}{2}$.

20.uzdevums

Attēlā dots kvadrāts $ABCD$ un taisnleņķa trījstūris ABE. Malas BC garums ir 3. Malas BE garums ir 4. Kāds ir iekrāsotās daļas laukums? **(A)** $5\frac{1}{4}$, **(A)** $5\frac{3}{8}$, **(C)** $5\frac{1}{2}$, **(D)** $5\frac{5}{8}$, **(E)** $5\frac{3}{4}$.



Atbilde: D

Atrisinājums:
Lai F ir līniju AE un CD krustpunkts. Lai nogriežņa CF garums ir h. Tad, izmantojot līdzīgus trijstūrus,

$$\frac{CF}{CE} = \frac{BA}{BE},$$

tātad

$$\frac{h}{1} = \frac{3}{4},$$

no kā iegūst $h = \frac{3}{4}$.

Iekrāsotais apgabals $ABCF$ ir trapece, tāpēc tā laukums ir

$$\frac{1}{2}\left(3 + \frac{3}{4}\right) \times 3 = \frac{45}{8},$$

kas ir $5\frac{5}{8}$.