1. SKAITĻU TEORIJAS LAPA, 2022-10-22

1.1 Iesildīšanās

1.piemērs: Atrast vismaz 13 pēc kārtas sekojošus saliktus skaitļus. Vai var atrast N pēc kārtas sekojošus saliktus skaitļus jebkuram naturālam N?

Dirihlē Teorēma (Dirichlet): Ja a un d ir savstarpēji pirmskaitļi, tad bezgalīgā aritmētiskā progresijā $a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots$ ir bezgalīgi daudz pirmskaitļu.

2.piemērs: Pamatot, ka ir bezgalīgi daudzi pirmskaitļi formā $4n+3$ (un arī formā $6n+5$).

3.piemērs: Kādā no Eratostena režģa veidošanas soļiem tiek izsvītroti visi tie saliktie skaitļi, kuri ir pirmskaitļa 13 daudzkārtņi. Kurš no šajā solī izsvītrotajiem skaitļiem ir pirmais?

4.piemērs:

(A) Pamatot pakāpju starpības formulu visiem $n \geq 2$. Formula ir sekojoša:

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b^1 + \ldots + a^1 b^{n-2} + b^{n-1}\right).$$

(B) Pamatot pakāpju summas formulu visiem $n \geq 1$:

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)\left(a^{2n} - a^{2n-1}b^1 + a^{2n-2}b^2 - \cdots - a^1 b^{2n-1} + b^{2n}\right).$$

5.piemērs: Pamatot, ka jebkuriem diviem naturāliem m, n ir spēkā vienādība: $m \cdot n = \gcd(m,n) \cdot \mathrm{lcm}(m,n)$.

6.piemērs: Par Gausa veselajiem skaitļiem sauc skaitļus formā $a + bi$. Daži no tiem ir pirmskaitļi (tos nevar izteikt kā divu Gausa veselo skaitļu reizinājumu, ja vien kāds no reizinātājiem nav 1, -1, i vai $-i$). Piemēram $1+i$ ir Gausa pirmskaitlis. Bet 2 nav Gausa pirmskaitlis, jo $2 = (1+i)(1-i)$.

Pamatot, ka ir Gausa pirmskaitļu ir bezgalīgi daudz.

Ieteikums 1: Pietiek aplūkot tos Gausa pirmskaitļus, kuri ir vienlaikus naturāli skaitļi.

Ieteikums 2: Ja apzīmējam $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$, tad komplekso skaitļu reizināšanai izpildās sakarība:

$$|(a+bi)(c+di)| = |a+bi| \cdot |c+di|.$$

1.2 Klases uzdevumi

1.jautājums Rindā novietoti 30 slēdži ar numuriem no 1 līdz 36. Katrs slēdzis var būt ieslēgts vai izslēgts; sākumā tie visi ir izslēgti. Pirmajā solī pārslēdz pretējā stāvoklī visus slēdžus, kuru numuri dalās ar 1. Otrajā solī pārslēdz visus tos, kuru numuri dalās ar 2. Un tā tālāk - līdz 30.solī pārslēdz pretējā stāvoklī slēdžus, kuru numuri dalās ar 30. Cik daudzi slēdži kļūst ieslēgti pēc visu soļu pabeigšanas?

2.jautājums: Dots skaitlis $N = 60$. Atrast visu pozitīvo dalītāju skaitu, visu pozitīvo dalītāju summu un visu pozitīvo dalītāju kvadrātu summu.

3.jautājums: Atrast mazāko naturālo skaitli M, kam ir tieši 16 dalītāji.

4.jautājums: Naturālam skaitlim n ir tieši 125 pozitīvi dalītāji (ieskaitot 1 un pašu n). Kādu visaugstākās pakāpes sakni noteikti var izvilkt no n, iegūstot naturālu rezultātu?

Definīcija: Par n-to Fermā skaitli ($n \geq 0$) sauc $F_n = 2^{2^n} + 1$.

5.jautāums: Pierādīt, ka naturāliem skaitļiem m un n, kam $m > n$, Fermā skaitlis $F_m - 2$ noteikti dalās ar F_n.

6.jautājums (BW.TST.2016.16): Kāda ir izteiksmes

$$\text{LKD}\left(n^2 + 3, (n+1)^2 + 3\right)$$

lielākā iespējamā vērtība naturāliem n?

1.3 Mājasdarba uzdevumi

Iesniegšanas termiņš: 2022.g. 5.novembris.

Kam iesūtīt: `kalvis.apsitis`, domēns `gmail.com`

1.uzdevums: Naturālu skaitli sauksim par *elegantu*, ja tā decimālajā pierakstā nav nevienas nulles un šis skaitlis dalās ar savu ciparu summu. (Eleganti ir visi viencipara skaitļi, kā arī, piemēram, skaitļi 36 un 322.) Pierādīt, ka ir bezgalīgi daudz elegantu skaitļu!

2.uzdevums: Zināms, ka trīsciparu skaitlis $\overline{abc}$ ir pirmskaitlis un ka vienādojumam $ax^2 + bx + c = 0$ ir divas reālas saknes. Vai var gadīties, ka šīs saknes ir **(a)** veseli skaitļi, **(b)** racionāli skaitļi?

3.uzdevums: Divi spēlētāji pamīšus raksta uz tāfeles naturāla skaitļa N naturālos dalītājus. Katrā gājienā jāievēro šādi noteikumi:

- nedrīkst atkārtoti rakstīt jau uzrakstītu dalītāju;
- nedrīkst rakstīt dalītāju, kurš ir tieši 2 vai 3 reizes lielāks vai mazāks nekā kāds jau uzrakstītais dalītājs.

Zaudē tas spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt?

Pamatot atbildi šādām vērtībām: $N = 144$ un $N = 216$.

4.uzdevums: Skaitļi p, q ir pirmskaitļi un $p > q$. Definējam $t = \gcd(p! - 1, q! - 1)$. Pierādīt, ka $t \leq p^{\frac{p}{3}}$.

5.uzdevums:

A. Atrast visus naturālos skaitļus n, ka jebkuram nepāra skaitlim a izpildās $4 \mid a^n - 1$.

B. Atrast visus naturālos skaitļus n, ka jebkuram nepāra skaitlim a, izpildās $2^{2017} \mid a^n - 1$.

6.uzdevums: Atrast visus veselo skaitļu trijniekus (a, b, c), kas apmierina vienādojumu:

$$5a^2 + 9b^2 = 13c^2.$$