# 3. SKAITĻU TEORIJAS LAPA, 2022-01-23

## 3.1 Iesildīšanās

**1.uzdevums:** Dots naturāls skaitlis $m$. Atrisināt kongruenču vienādojumu:

$$x^2 \equiv 1 \pmod{m}.$$

**2.uzdevums:** Izvēlēties jebkuru pirmskaitli $p < 41$ un pamatot, ka $n^2 + n + 41$ noteikti nedalās ar $p$ nekādam naturālam $n$.

**3.uzdevums:** Skaitli $1234567891011\ldots2022$ veido, izrakstot pēc kārtas visu naturālo skaitļu decimālpierakstus no $1$ līdz $2022$. Atrast šī skaitļa atlikumu, dalot ar $9$.

**4.uzdevums:** Kādiem naturāliem $a$ un $b$ vienādojumam $ax \equiv 1 \pmod{b}$ eksistē atrisinājums? (Šādu atrisinājumu $x$ sauc par skaitļa $a$ *inverso* pēc moduļa $b$ un apzīmē $x = a^{-1}$.)

Ieteikums: Izmantot Bezū identitāti (*Bézout's identity*).

**5.uzdevums:** Cikliski pārvietojot ciparus bezgalīgas decimāldaļas $1/7 = 0.(142857)$ periodā, var iegūt dažādas citas racionālas daļas – piemēram, $3/7 = 0.(428571)$, $2/7 = 0.(285714)$ utt.

Atrast līdzīgu piecu dažādu ciparu virknīti $0.(abcde)$, kurā cikliski pārvietojot ciparus var iegūt racionālas daļas $\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}, \frac{k_3}{n}, \frac{k_4}{n}, \frac{k_5}{n}$, kurām visām ir viens un tas pats saucējs $n < 100$.

**6.uzdevums:** Dots kalkulators, kurš māk reizināt divus naturālus skaitļus $a, b < 97$ un atrod šī reizinājuma atlikumu $r \in \{0, \ldots, 96\}$, dalot $ab$ ar $m = 97$. Cik reizināšanas darbības uz šī kalkulatora noteikti ir pietiekamas, lai atrastu atlikumu

$$r \equiv x^y \pmod{97}, \text{ kur } x, y < 97 \text{ ir naturāli skaitļi.}$$

Atbildei jābūt iespējami mazai, bet nav jāpamato, ka tā ir optimāla. Saskaitīt nepieciešamās reizināšanas, ja jāatrod atlikums, dalot ar 97 skaitlim $79^{73}$.

## 3.2 Klases uzdevumi

**1.uzdevums** Pierādīt, ka sekojošiem vienādojumiem nav atrisinājumu veselos skaitļos:

**(A)** $y^2 - 5x^2 = 6$.

**(B)** $15x^2 - 7y^2 = 9$.

**(C)** $x^2 - 2y^2 + 8z = 19$.

**(D)** $x^3 + y^3 + z^3 = 1969^2$.

**2.uzdevums:** Kuriem pirmskaitļiem $p$ var atrisināt kongruenču vienādojumu $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ veselos skaitļos?

**3.uzdevums:** Pirmskaitlis $p$ ir dalītājs izteiksmei $M = (N!)^2 + 1$. Pamatot, ka izpildās vienādība:

$$1 = (-1)^{\frac{p-1}{2}}.$$

Secināt no šejienes, ka eksistē bezgalīgi daudzi pirmskaitļi $p \equiv 1 \pmod{4}$.

**4.uzdevums:**

**(A)** Fibonači skaitļu virkni definē ar sakarībām: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ un $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ (ja $n \geq 2$). Pamatot, ka ikvienam naturālam $m$ var atrast bezgalīgi daudzus tādus $n$, ka $F_n$ dalās ar $m$.

**(B)** Atrast visus tos $n$, kam $F_n \equiv 0 \pmod{100}$.

**5.Uzdevums (BW.2018.18):** Dots tāds naturāls skaitlis $n \geq 3$, ka $4n + 1$ ir pirmskaitlis. Pierādiet, ka $n^{2n} - 1$ dalās ar $4n + 1$.

**6.Uzdevums (BW.2016.1):** Atrast visus pirmskaitļu pārus $(p, q)$, kuriem

$$p^3 - q^5 = (p + q)^2.$$

## 3.3 Mājasdarba uzdevumi

**Iesniegšanas termiņš:** 2022.g. 10.decembris.

**Kam iesūtīt:** `kalvis.apsitis`, domēns `gmail.com`

**1.uzdevums:** Regulāra $n$-stūra virsotnes savienotas ar slēgtu lauztu līniju, kurai ir $n$ posmi.

**(A)** Pierādīt, ka jebkuram pāra skaitlim $n \geq 4$, lauztajai līnijai ir vismaz divi paralēli posmi.

**(B)** Pierādīt, ka jebkuram nepāra skaitlim $n > 3$ nav iespējams, ka lauztajai līnijai ir tieši divi paralēli posmi (t.i. divi posmi ir paralēli, bet nekādi citi nav šiem diviem paralēli, vai arī paralēli savā starpā).

**2.uzdevums:** Dots pirmskaitlis $p$ un naturāli skaitļi $a \geq 2$, $m \geq 1$. Zināms, ka $a^m \equiv 1 \pmod{p}$ un $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$.

**(A)** Pierādīt, ka $a^m \equiv 1 \pmod{p^2}$.

**(B)** Atrast kādu pirmskaitli $p > 10$ un naturālus skaitļus $a, m$, kam minētie apgalvojumi izpildās.

**3.uzdevums:** Vai var atrast piecus tādus pirmskaitļus $p, q, r, s, t$, ka $p^3 + q^3 + r^3 + s^3 = t^3$?

**4.uzdevums:** Dots nepāra vesels skaitlis $a$. Pierādīt, ka $a^{2^n} + 2^{2^n}$ un $a^{2^m} + 2^{2^m}$ ir savstarpēji pirmskaitļi visiem naturāliem $n$ un $m$, kam $n \neq m$.

**Piezīme:** Pieraksts $a^{b^c}$ nozīmē $a^{(b^c)}$ nevis $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$, t.i.darbību locekļus "daudzstāvu" pakāpēs grupē no labās puses uz kreiso, nevis no kreisās uz labo.

**5.uzdevums:** Dots pirmskaitlis $p \geq 5$. Atrast, cik dažādi atlikumi pēc moduļa $p$ var rasties, ja reizina trīs pēc kārtas sekojošus naturālus skaitļus.

**6.uzdevums:** Atrast visus naturālos skaitļus $n$ are sekojošu īpašību: Dotajam $n$ var izveidot divas netukšas galīgas veselu skaitļu kopas $A$ un $B$, kuras jebkuram veselam skaitlim $m$ apmierina tieši vienu no sekojošiem 3 apgalvojumiem:

**(A)** Eksistē $a \in A$, kuram $m \equiv a \pmod{n}$,

**(B)** Eksistē $b \in B$, kuram $m \equiv b \pmod{n}$,

**(C)** Eksistē $a \in A$ un $b \in B$, kuriem $m \equiv a + b \pmod{n}$.