1. SKAITĻU TEORIJAS LAPA, 2022-10-22

1.1 Iesildīšanās

1.uzdevums:

(A) Atrast vismaz 13 pēc kārtas sekojošus saliktus skaitļus.

(B) Vai var atrast N pēc kārtas sekojošus saliktus skaitļus jebkuram naturālam N?

Atbilde:

(A) Var sareizināt visus pirmskaitļus no 2 līdz 13:

$$N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 30030.$$

Izrakstām skaitļus $N + 2, \ldots, N + 14$:

$$\begin{array}{ll} N+2 = 30032 & \text{dalās ar 2} \\ N+3 = 30033 & \text{dalās ar 3} \\ N+4 = 30034 & \text{dalās ar 2} \\ \ldots & \ldots \\ N+13 = 30043 & \text{dalās ar 13} \\ N+14 = 30044 & \text{dalās ar 2 un ar 7} \end{array}$$

Piemēram $N + 13$ dalās ar 13, jo gan N, gan 13 dalās ar 13.

Šī konstrukcija intervālam $[30032; 30044]$ negarantē, ka skaitļi ir iespējami mazi, jo eksistē daudzi citi intervāli, kuros ir 13 pēc kārtas sekojoši salikti skaitļi. Piemēram, intervāls $[114; 126]$ arī satur 13 pēc kārtas sekojošus saliktus skaitļus.

(B) Arī patvaļīgam N var atrast N pēc kārtas sekojošus saliktus skaitļus. Var izvēlēties naturālu skaitļu intervālu $[(N + 1)! + 2; (N + 1)! + (N + 1)]$.

Dirihlē Teorēma (Dirichlet): Ja a un d ir savstarpēji pirmskaitļi, tad bezgalīgā aritmētiskā progresijā $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots$ ir bezgalīgi daudz pirmskaitļu.

2.uzdevums: Pamatot, ka ir bezgalīgi daudzi pirmskaitļi formā $4n + 3$ (un arī formā $6n + 5$), neizmantojot Dirihlē teorēmu.

Atbilde:

Veidojam Eiklīda pierādījuma variantu. Pieņemsim, ka pirmskaitļu, kuri ir formā $4n + 3$ ir tikai galīgs skaits. Apzīmējam tos ar $p_1, p_2, \ldots, p_k$ kādam galīgam k.

(Ja tagad burtiski atkārtotu Eiklīda pierādījumu, tad būtu jāveido visu šo pirmskaitļu reizinājums plus 1. Bet tā kā tas ir pāra skaitlis, mums to nebūs ērti aplūkot, jo pāra skaitļi dalās ar pirmskaitli 2, un varbūt visi citi pirmreizinātāji tiem ir formā $4n + 1$). Tai vietā aplūkojam šādu skaitli:

$$N = 2 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k + 1.$$

Viegli redzēt, ka tas ir nepāra skaitlis. Turklāt, tā kā visu p_i reizinājums arī ir nepāra skaitlis, ko apzīmējam ar $2n^* + 1$. Tad $N = 2 \cdot (2n^* + 1) + 1 = 4n^* + 2 + 1 = 4n^* + 3$.

Skaitlis N nedalās ne ar vienu pirmskaitli p_i no mūsu saraksta (kas pēc pieņēmuma satur visus pirmskaitļus formā $4n + 1$) – visi dalīšanas atlikumi ar p_i vienādi ar 1. Ja N pats būtu pirmskaitlis, tad tā uzreiz ir pretruna, jo tas arī ir formā $4n^* + 1$, bet nav mūsu sarakstā.

Atliek iespēja, ka N ir salikts skaitlis. Bet arī šādā gadījumā nav iespējams, ka visi tā pirmreizinātāji ir formā $4n+1$ (jo sareizinot divus skaitļus $4n+1$ un $4m+1$, iegūtais rezultāts arī dod atlikumu 1, dalot ar 4). Tātad, kāds no skaitļa N pirmreizinātājiem ir pirmskaitlis formā $4n+3$, kas tomēr nav mūsu sarakstā. Arī šī ir pretruna ar pieņēmumu, ka visu šo pirmskaitļu ir tikai galīgs skaits un visus tos var sareizināt.

3.uzdevums:

(A) Pirmos desmit pirmskaitļus p, kas dod atlikumu 1, dalot ar 4, izteikt formā $p = a^2 + b^2$, kur $a, b \in \mathbb{N}$. Piemēram, $5 = 2^2 + 1^2$. (Fermā Ziemassvētku teorēma apgalvo, ka visus pirmskaitļus $p = 4n + 1$ var izteikt kā divu kvadrātu summu – turklāt tieši vienā veidā.)

(B) Pamatot, ka nevienu pirmskaitli p, kas dod atlikumu 3, dalot ar 4, nevar izteikt kā divu kvadrātu summu.

Atbilde:

(A)

$$\begin{aligned}
5 &= 2^2 + 1^2,\\
13 &= 3^2 + 2^2,\\
17 &= 4^2 + 1^2,\\
29 &= 5^2 + 2^2,\\
37 &= 6^2 + 1^2,\\
41 &= 5^2 + 4^2,\\
53 &= 7^2 + 2^2,\\
61 &= 6^2 + 5^2,\\
73 &= 8^2 + 3^2,\\
89 &= 8^2 + 5^2,\\
97 &= 9^2 + 4^2.
\end{aligned}$$

(B) Ja nepāra pirmskaitlis ir izsakāms formā $4n + 3$, tad tas var būt divu pilnu kvadrātu summa $a^2 + b^2$ tikai tad, ja viens no skaitļiem a, b ir pāra skaitlis, bet otrs – nepāra skaitlis. Bet pāra skaitļa kvadrāts vienmēr dod atlikumu 0, dalot ar 4, un nepāra skaitļa kvadrāts $b^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ vienmēr dod atlikumu 1, dalot ar 1.

Tādēļ abu šo kvadrātu summa vienmēr dos atlikumu 1, dalot ar 4; atlikums nevar būt vienāds ar 3.

4.uzdevums: Par *Gausa veselajiem skaitļiem* sauc skaitļus formā $a + bi$ (kur $a, b \in \mathbb{Z}$ ir veseli). Par *Gausa pirmskaitļiem* sauc tādus Gausa veselos skaitļus, kurus nevar izteikt kā divu Gausa veselo skaitļu reizinājumu (ja vien kāds no reizinātājiem nav 1, -1, i vai $-i$). Piemēram, 2 nav Gausa pirmskaitlis, jo $2 = (1 + i)(1 - i)$.

Vai skaitļi $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + i$, $z_3 = 3$, $z_4 = 5$ ir Gausa pirmskaitļi?

Ieteikums: Ja apzīmējam $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (kompleksā skaitļa modulis), tad komplekso skaitļu reizināšanai izpildās sakarība:

$$|(a + bi)(c + di)| = |a + bi| \cdot |c + di|.$$

Atbilde:

(A) $|z_1| = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Šo skaitli var izteikt kā divu citu komplekso skaitļu moduļu reizinājumu tikai tad, ja viens no moduļiem arī ir $\sqrt{2}$, bet otrs ir 1. (Ievērosim, ka ikviena Gausa skaitļa modulis ir kāda vesela skaitļa kvadrātsakne.) Tā kā viens no reizinātājiem ir ar moduli 1, tad šis reizinātājs noteikti ir 1, -1, i vai $-i$. Tādēļ $z_1 = 1 + i$ ir Gausa pirmskaitlis.

(B) $|z_2| = |2+i| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$. Arī šo skaitli var izteikt kā divu veselu skaitļu kvadrātsakņu reizinājumu tikai tad, ja viena no kvadrātsaknēm ir vienāda ar 1. Līdzīgi kā iepriekš iegūstam, ka $z_2 = 2+i$ ir Gausa pirmskaitlis.

(C) $z_3 = 3$ arī ir Gausa pirmskaitlis. Jo $|z_3| = |3+0i| = \sqrt{3^2+0^2} = 3$. Šo skaitli var izteikt kā divu veselu skaitļu kvadrātsakņu reizinājumu vai nu kā $\sqrt{3}\cdot\sqrt{1}$, vai nu kā $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$. Pirmajā gadījumā viens no reizinātājiem ir $1, -1, i$ vai $-i$. Bet otrais gadījums nav iespējams, jo $a^2+b^2 \neq 3$ nekādiem veseliem skaitļiem a, b (izriet no iepriekšējā uzdevuma, jo skaitlis 3 dod atlikumu 3, dalot ar 4.)

(D) $z_4 = 5$ nav Gausa pirmskaitlis, jo to iespējams izteikt kā reizinājumu: $5 = (2+i)(2-i) = 4 - i^2 = 4-(-1)$.

5.uzdevums:

(A) Pamatot šādu pakāpju starpības formulu visiem $n \geq 2$:

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b^1 + \ldots + a^1b^{n-2} + b^{n-1}\right).$$

(B) Pamatot pakāpju summas formulu visiem $n \geq 1$:

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)\left(a^{2n} - a^{2n-1}b^1 + a^{2n-2}b^2 - \cdots - a^1b^{2n-1} + b^{2n}\right).$$

Atbilde:

Par minēto algebrisko identitāšu pareizību var pārliecināties, atverot iekavas abās izteiksmēs. Starp citu, pirmajai no identitātēm ir tiešs sakars ar ģeometriskas progresijas summas formulu:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

jeb

$$(q-1)\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}\right) = q^n - 1$$

Tā ir tā pati formula, ja ievieto $a = q$ un $b = 1$.

6.uzdevums: Pamatot, ka jebkuriem diviem naturāliem m, n ir spēkā vienādība: $m \cdot n = \gcd(m,n) \cdot \mathrm{lcm}(m,n)$.

Atbilde:

Šis ir svarīgs teorijas rezultāts – tas ļauj efektīvi izteikt mazāko kopīgo dalāmo tad, ja zināms lielākais kopīgais dalītājs (piemēram, atrasts ar Eiklīda algoritmu). Vai arī otrādi – lielāko kopīgo dalītāju $\gcd(m,n)$ var izteikt, ja zināms mazākais kopīgais dalāmais $\mathrm{lcm}(m,n)$. Sk. https://math.stackexchange.com/questions/470807/prove-that-gcdm-n-times-mboxlcmm-n-m-times-n.

Šis pats pierādījums (ar ilustrāciju skaitļiem $m = 300$ un $n = 630$) dots mūsu mācību grāmatā, 16.lpp. Sk. http://www.dudajevagatve.lv/training/numtheory/ntjun01-divisibility.pdf.

1.2 Klases uzdevumi

1.uzdevums Rindā novietoti 36 slēdži ar numuriem no 1 līdz 36. Katrs slēdzis var būt ieslēgts vai izslēgts; sākumā tie visi ir izslēgti. Pirmajā solī pārslēdz pretējā stāvoklī visus slēdžus, kuru numuri dalās ar 1. Otrajā solī pārslēdz visus tos, kuru numuri dalās ar 2. Un tā tālāk - līdz 36.solī pārslēdz pretējā stāvoklī slēdžus, kuru numuri dalās ar 36. Cik daudzi slēdži kļūst ieslēgti pēc visu soļu pabeigšanas?

Atbilde:

Ieslēgti kļūst tie slēdži, kurus pārslēdz nepāra skaitu reižu (t.i. visi tie slēdžu numuri, kuriem ir nepāra skaits pozitīvu dalītāju). Jebkura naturāla skaitļa n dalītāji ir sagrupējami pa pāriem (dalītājam a atbilst otrs dalītājs $b = n/a$, kuram $a \cdot b = n$).

Vienīgie skaitļi, kuriem ir nepāra skaits dalītāju ir tie, kuriem kāds no dalītājiem d nonāk pārī pats ar sevi, t.i. $d = n/d$ jeb $d^2 = n$. Skaitļi ar nepāra skaitu dalītāju ir tieši visi pilnie kvadrāti.

Intervālā $[1;36]$ ir pavisam seši pilni kvadrāti: $\{1,4,9,16,25,36\}$. Tie arī ir tie slēdži, kuri pēc visu soļu pabeigšanas paliek ieslēgti.

2.uzdevums: Dots skaitlis $N = 420$. Atrast visu N pozitīvo dalītāju skaitu, visu pozitīvo dalītāju summu un visu pozitīvo dalītāju kvadrātu summu.

Atbilde:

Sadalām skaitli pirmreizinātājos:

$$420 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1.$$

(A) Dalītāju skaits šim skaitlim ir $\sigma_0(420) = (2+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 24$. To var iegūt kombinatoriski (katrs skaitļa 420 dalītājs d satur tos pašus pirmreizinātājus: $d = 2^{k_1}3^{k_2}5^{k_3}7^{k_4}$, kur k_1, k_2, k_3, k_4 nevar pārsniegt attiecīgo pirmskaitļu pakāpes skaitlī 420. Tātad k_1 var izvēlēties trīs veidos (0,1,2), bet visus pārējos kāpinātājus k_i var izvēlēties tikai divos veidos.)

(B) Dalītāju summa šim skaitlim ir

$$\sigma_1(420) = \left(1+2+2^2\right) \cdot (1+3) \cdot (1+5) \cdot (1+7) = 1344.$$

Atverot iekavas šajā izteiksmē, iegūsim 24 saskaitāmos – katrs saskaitāmais atbilst citam skaitļa 420 dalītājam.

(C) Dalītāju kvadrātu summa šim skaitlim ir

$$\sigma_2(420) = \left(1+2^2+2^4\right) \cdot \left(1+3^2\right) \cdot \left(1+5^2\right) \cdot \left(1+7^2\right) = 273000.$$

Arī par šo var pārliecināties, atverot iekavas.

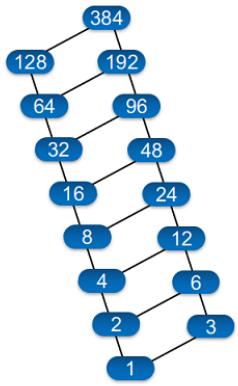
3.uzdevums: Atrast mazāko naturālo skaitli M, kam ir tieši 16 dalītāji.

Atbilde:

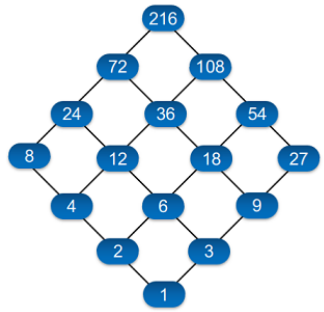
Skaitlim M nevar būt vairāk kā četri pirmreizinātāji. Ja $M = p_1^a p_2^b p_3^c p_4^d$, tam ir $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)$ dalītāji. Var iegūt rezultātu 16, ja $a = b = c = d = 1$. Savukārt, ja dažādo M pirmreizinātāju ir vairāk kā četri, tad M būtu vismaz $2^5 = 32$ dalītāji.

Šķirosim dažādus gadījumus, kā 16 var izteikt ne vairāk kā četru dažādu pirmskaitļu (vai to pakāpju) reizinājumu. Dalītāju skaitu nosaka pirmreizinātāju pakāpes, nevis tas, kā izvēlēti paši pirmreizinātāji. Tāpēc sadalījumus pirmreizinātājos šķirosim pēc pirmreizinātāju pakāpēm, veicot pirmreizinātāju izvēli nedaudz vēlāk.

(A)



(B)

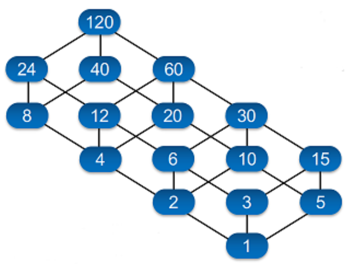


(C)

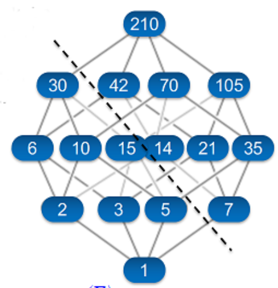
(A) gadījums: $16 = (15+1)$ jeb p^{15}, kur p ir pirmskaitlis. Mazākais šāds skaitlis ir $M = 2^{15} = 32768$.

(B) gadījums: $16 = (7+1)(1+1)$ jeb p^7q, kur p, q ir pirmskaitļi. Mazākais šāds skaitlis ir $2^7 \cdot 3 = 128 \cdot 3 = 384$.

(C) gadījums: $16 = (3+1)(3+1)$ jeb p^3q^3, kur p, q ir pirmskaitļi. Mazākais šāds skaitlis ir $2^3 \cdot 3^3 = 216$.



(D)



(E)

(D) gadījums: $(3+1)(1+1)(1+1)$ jeb p^3qr, kur p, q, r ir pirmskaitļi. Mazākais šāds skaitlis ir $2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$.

(E) gadījums: $(1+1)(1+1)(1+1)(1+1)$ jeb skaitlis formā $pqrs$, kur p, q, r, s ir pirmskaitļi. Mazākais šāds skaitlis ir $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$.

Mazākais no apskatītajiem pieciem rezultātiem ir 120 ((D) gadījums). Tā kā ikvienā no gadījumiem izvēlējāmies mazākos iespējamos pirmreizinātājus, tātad šo rezultātu nevar uzlabot.

4.uzdevums: Naturālam skaitlim n ir tieši 125 pozitīvi dalītāji (ieskaitot 1 un pašu n). Kādu visaugstākās pakāpes sakni noteikti var izvilkt no n, iegūstot naturālu rezultātu?

Atbilde:

125 var izteikt kā reizinājumu vairākiem skaitļiem (kas pārsniedz 1) sekojošos veidos:

- $125 = 124 + 1$.
- $125 = 25 \cdot 5 = (24+1) \cdot (4+1)$.
- $125 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = (4+1) \cdot (4+1) \cdot (4+1)$.

Tādēļ skaitli n var sadalīt pirmreizinātājos vienā no sekojošiem veidiem:

$$n = p^{124}, \quad n = p^{24}q^4 \quad \text{vai} \quad n = p^4q^4r^4,$$

kur p, q, r ir pirmskaitļi. Visos gadījumos var izvilkt 4.pakāpes sakni.

Definīcija: Par n-to Fermā skaitli ($n \geq 0$) sauc $F_n = 2^{2^n} + 1$.

5.uzdevums: Pierādīt, ka naturāliem skaitļiem m un n, kam $m > n$, Fermā skaitlis $F_m - 2$ noteikti dalās ar F_n.

Atbilde:

Atkārtoti lietojam kvadrātu starpības formulu dalīšanai reizinātājos:

$$F_m - 2 = 2^{2^m} + 1 - 2 = 2^{2^m} - 1 =$$

$$= \left(2^{2^{m-1}} - 1\right)\left(2^{2^{m-1}} + 1\right) = \left(F_{m-1} - 2\right) F_{m-1}.$$

Ja arī $m - 1 > n$, tad līdzīgu spriedumu atkārto vēlreiz, dalot reizinātājos $F_{m-1} - 2$ utt. Katrā solī redzam, ka uzrodas reizinātāji F_{m-1}, F_{m-2} utt. Kāds no šiem reizinātājiem būs tieši F_n.

6.uzdevums (BW.TST.2016.16): Kāda ir izteiksmes

$$\text{LKD}\left(n^2 + 3, (n+1)^2 + 3\right)$$

lielākā iespējamā vērtība naturāliem n?

Atbilde:

Lietojam Eiklīda algoritmu polinomiem no mainīgā n:

$$\text{LKD}\left(n^2 + 3, (n+1)^2 + 3\right) = \text{LKD}\left(n^2 + 3, n^2 + 2n + 4\right) =$$

no otrā argumenta atņem pirmo:

$$= \text{LKD}\left(n^2 + 3, 2n + 1\right) =$$

pirmo argumentu var piereizināt ar 2, jo otrais ir nepāru:

$$= \text{LKD}\left(2n^2 + 6, 2n + 1\right) =$$

no pirmā argumenta atņem n-kāršotu otro:

$$= \text{LKD}\left(2n^2 + 6 - n(2n+1), 2n + 1\right) = \text{LKD}(6 - n, 2n + 1) =$$

otrajam argumentam pieskaita divkāršotu pirmo:

$$= \text{LKD}(6 - n, 2n + 1 + 2(6 - n)) = \text{LKD}(n - 6, 13).$$

Secinājums: $\text{LKD}\left(n^2 + 3, (n+1)^2 + 3\right) = \text{LKD}(n - 6, 13)$ var būt vai nu 1 vai 13.

Vērtību 13 (vai kādu daudzkārtni) tas sasniedz, ja $n - 6$ dalās ar 13, piemēram, ja $n-6 = 0$ jeb $n=6$.

Pārbaude: Ievietojam $n = 6$:

$$\text{LKD}\left(6^2 + 3, (6+1)^2 + 3\right) = \text{LKD}(39, 52) = 13.$$

1.3 Mājasdarba uzdevumi

Iesniegšanas termiņš: 2022.g. 12.novembris.

Kam iesūtīt: `kalvis.apsitis`, domēns `gmail.com`

1.uzdevums: Naturālu skaitli sauksim par *elegantu*, ja tā decimālajā pierakstā nav nevienas nulles un šis skaitlis dalās ar savu ciparu summu. (Eleganti ir visi viencipara skaitļi, kā arī, piemēram, skaitļi 36 un 322.) Pierādīt, ka ir bezgalīgi daudz elegantu skaitļu!

2.uzdevums: Zināms, ka trīsciparu skaitlis $\overline{abc}$ ir pirmskaitlis un ka vienādojumam $ax^2 + bx + c = 0$ ir divas reālas saknes. Vai var gadīties, ka šīs saknes ir **(A)** veseli skaitļi, **(B)** racionāli skaitļi?

3.uzdevums: Divi spēlētāji pamīšus raksta uz tāfeles naturāla skaitļa N naturālos dalītājus. Katrā gājienā jāievēro šādi noteikumi:

- nedrīkst atkārtoti rakstīt jau uzrakstītu dalītāju;
- nedrīkst rakstīt dalītāju, kurš ir tieši 2 vai 3 reizes lielāks vai mazāks nekā kāds jau uzrakstītais dalītājs.

Zaudē tas spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt?

Pamatot atbildi šādām vērtībām: **(A)** $N = 144$, **(B)** $N = 216$.

4.uzdevums: Skaitļi p, q ir pirmskaitļi un $p > q$. Definējam $t = \gcd(p! - 1, q! - 1)$. Pierādīt, ka $t \leq p^{\frac{p}{3}}$.

5.uzdevums:

(A) Atrast visus naturālos skaitļus n, ka jebkuram nepāra skaitlim a izpildās $4 \mid a^n - 1$.

(B) Atrast visus naturālos skaitļus n, ka jebkuram nepāra skaitlim a, izpildās $2^{2017} \mid a^n - 1$.

6.uzdevums: Atrast visus veselo skaitļu trijniekus (a, b, c), kas apmierina vienādojumu:

$$5a^2 + 9b^2 = 13c^2.$$