IMO IZLASE, DARBA LAPA, 2022-06-06

Aritmētiskais un ģeometriskais vidējais: Pozitīviem reāliem $a_1, \ldots, a_n$ ir spēkā $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$.

p-valuācija: Katram pirmskaitlim p par naturāla skaitļa n p-valuāciju sauc lielāko veselo nenegatīvo pakāpi k, kurai n dalās ar p^k. To apzīmē $k = \nu_p(n)$ (grieķu ν (nī)).

Divnieka pakāpes atdalīšana: Naturālu skaitli n var tieši vienā veidā izteikt kā reizinājumu $s \cdot 2^k$, kur s ir pozitīvs nepāra skaitlis, bet $k \geq 0$ ir jebkurš vesels nenegatīvs skaitlis. ($s = 1$ t.t.t., ja n ir skaitļa 2 pakāpe.)

Ležandra formula: $\nu_p(n!) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \dfrac{n}{p^k} \right\rfloor$. No šejienes arī $\nu_p(n!) < \dfrac{n}{p} + \dfrac{n}{p^2} + \ldots = \dfrac{n}{p-1}$.

Kāpinātāja pacelšanas lemma 1: Dots nepāra pirmskaitlis p un naturāls kāpinātājs n. Ja neviens no veseliem skaitļiem a, b nedalās ar p, bet $a - b$ dalās ar p tad $\nu_p(a^n - b^n) = \nu_p(a-b) + \nu_p(n)$.

Kāpinātāja pacelšanas lemma 2: Dots nepāra pirmskaitlis p un naturāls kāpinātājs n. Ja neviens no veseliem skaitļiem a, b nedalās ar p, bet $a + b$ dalās ar p tad $\nu_p(a^n + b^n) = \nu_p(a+b) + \nu_p(n)$.

Stirlinga tuvinājums: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, kur $f(n) \sim g(n)$ ir *asimptotiska ekvivalence*: $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 1$.

1.1 Ievaduzdevumi

1. Ar cik nullēm beidzas skaitļa $1000!$ decimālpieraksts? (Pietiek atrast aptuvenu atbildi; pieļaujamā kļūda ir ± 4).
2. Atrast tos naturālos skaitļus, kuriem $\nu_2(n!) = n - 1$.
3. Apzīmējam $N = \left(2^1 - 1\right)\left(2^2 - 1\right) \cdots \left(2^{120} - 1\right)$. Kurš skaitlis lielāks: $\nu_5(N)$ vai $\nu_7(N)$?
4. Doti naturāli skaitļi a, b. Pierādīt, ka izteiksme $(36a + b)(a + 36b)$ nevar būt skaitļa 2 pakāpe.

Atbilde:

1. Nuļļu skaits vienāds ar $\nu_5(1000!)$, jo 5-valuācija jebkuram faktoriālam nepārsniedz 2-valuāciju. Tuvinot Ležandra formulu kā bezgalīgu ģeometrisku progresiju, iegūstam $\nu_5(n!) \approx \frac{n}{5-1} = 250$. Faktiskā 5-valuācija ir $\nu_5(1000!) = 249$. Tas arī ir faktiskais nuļļu skaits skaitlim $1000!$.
2. Tās ir visas veselās skaitļa divi pakāpes: $n = 2^k$; tad Ležandra formula:
$$\nu(2^k) = 2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 2 + 1 = 2^k - 1.$$
Aplūkojot jebkuru citu n, daži no dalījumiem Ležandra formulā apaļosies uz leju un rezultāts sanāks mazāks.
3. Ar 5 dalās $(2^4 - 1) = 15$, $(2^8 - 1)$, ..., $(2^{120} - 1)$ (pavisam 30 reizinātāji). Starp tiem ir seši tādi, kam kāpinātājs dalās ar 5 un viens tāds, kam kāpinātājs dalās ar 25. Tāpēc $\nu_5(N) = 30 + 6 + 1 = 37$.

   Ar 7 dalās $(2^3 - 1) = 7$, $(2^6 - 1)$, ..., $(2^{120} - 1)$ (pavisam 40 reizinātāji). Starp tiem ir arī pieci tādi, kam kāpinātājs dalās ar 7, bet nav tādu, kam kāpinātājs dalās ar 49. Tāpēc $\nu_7(N) = 40 + 5 = 45$.

```
>>> import math
>>> NList = [2**n - 1 for n in range(1,121)]
>>> N = math.prod(NList)
>>> N % (5**37)
0
>>> N % (5**38)
72759576141834259033203125
>>> N % (7**45)
0
>>> N % (7**46)
321020713270794100069068901154813354421
```

4. Atrodam 2-valuācijas mainīgajiem a un b – apzīmējam tās attiecīgi ar k un ℓ. Tad eksistē nepāra skaitļi s un t, ka $a = 2^k \cdot s$ un $b = 2^\ell \cdot t$. Pieņemsim arī, ka $k \leq \ell$ (jo burti a, b ir simetriski). Mums vajag, lai kaut kāda divnieka pakāpe 2^m būtu vienāda ar reizinājumu:

$$2^m = (36a+b)(a+36b) = \left(36 \cdot 2^k \cdot s + 2^\ell \cdot t\right)\left(2^k \cdot s + 36 \cdot 2^\ell \cdot t\right) = \\ = 2^{2k}\left(36 \cdot s + 2^{\ell-k} \cdot t\right)\left(s + 36 \cdot 2^{\ell-k} \cdot t\right).$$

Pēdējais no reizinātājiem $(s + 36 \cdot 2^{\ell-k} \cdot t)$ ir nepāra skaitlis, kas lielāks par 1, jo arī s ir nepāra. Šāda izteiksme nevar būt vienāda ar divnieka pakāpi 2^m. Pretruna.

1.2 Sacensību uzdevumi

1.1. uzdevums: Atrast visus naturālos skaitļus n, kuriem var atrast naturālu skaitļu pāri (a, b) tādu, ka $a^2 + b + 3$ nedalās ne ar viena pirmskaitļa kubu un izpildās vienādība:

$$\frac{ab + 3b + 8}{a^2 + b + 3} = n.$$

1.2. uzdevums: Atrast visus naturālos skaitļus n ar sekojošu īpašību: skaitlim n ir k pozitīvi dalītāji, kuriem eksistē tāda permutācija $(d_1, d_2, \ldots, d_k)$, ka jebkuram $i = 1, 2, \ldots, k$ skaitlis $d_1 + \cdots + d_i$ ir pilns kvadrāts.

1.3. uzdevums: Dots racionāls skaitlis $r > 1$ un taisne ar diviem punktiem $B \neq R$, kur punktā R ir sarkana lodīte, bet punktā B ir zila lodīte. Alise izdara virkni gājienu. Katrā gājienā viņa izvēlas veselu skaitli k (ne obligāti pozitīvu) un lodīti, kuru pārvietot. Ja izvēlētā lodīte ir punktā X, bet otras krāsas lodīte atrodas punktā Y, tad Alise izvēlēto lodīti pārvieto uz X', kur $\overrightarrow{YX'} = r^k \overrightarrow{YX}$.

Alises mērķis ir pārvietot sarkano lodīti uz punktu B. Atrast visus racionālos skaitļus $r > 1$, kuriem Alise var sasniegt šo mērķi ne vairāk kā 2021 gājienos.

1.4. uzdevums: Pierādīt, ka eksistē tikai galīgs skaits naturālu skaitļu četrinieku (a, b, c, n), kuriem izpildās vienādība

$$n! = a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}.$$