Dažāda skaitļu teorija

Sacensības 2021/2022 #01

2021-09-20

Par šo LU NMS atbalstīto pasākumu
atbild `kalvis.apsitis@gmail.com`.

Uzdevums 1.1:
Dots taisnstūra paralēlskaldnis $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ar izmēriem $30 \times 72 \times 100$, tas salikts no vienības kubiņiem ar izmēriem $1 \times 1 \times 1$. Cik daudzus no šiem kubiņiem šķērso diagonāle AC_1? (Ja diagonāle tikai pieskaras vienības kubiņa virsotnei vai šķautnei, to neuzskata par šķērsošanu.)

Atbilde. 186
LKD(30,72,100) = 2, tāpēc lielā paralēlskaldņa vietā var aplūkot divus divreiz mazākus ar izmēriem $15 \times 36 \times 50$. Ja visi skaitļi (15, 36, 50) būtu savstarpēji pirmskaitļi, tad diagonālei vajadzētu šķērsot $(15 + 36 + 50) - 2 = 99$ kubiņus, lai no kreisā, apakšējā, priekšējā kubiņa tiktu līdz labajam, augšējam, aizmugurējam kubiņam (var saskaitīt, cik reizes jāpalielina kāda no koordinātēm x, y, vai z, lai to izdarītu).
Tomēr ir lielākie kopīgie dalītāji: $\text{LKD}(15, 36) = 3$, $\text{LKD}(15, 50) = 5$, $\text{LKD}(36, 50) = 2$ (toties $\text{LKD}(15, 36, 50) = 1$).

Uzdevums 1.2:

Aplūkosim 700 skaitļu reizinājumu $(2 - 1)(4 - 1) \ldots (2^{700} - 1)$:

$$N = \prod_{k=1}^{700} \left(2^k - 1\right).$$

Apzīmēsim ar $\nu_5(N) = a$ lielāko skaitļa 5 pakāpi, ar ko dalās N (t.i. N dalās ar 5^a, bet vairs nedalās ar 5^{a+1}). Līdzīgi apzīmējam ar $\nu_7(N)$ lielāko skaitļa 7 pakāpi, ar ko dalās N (to sauc par skaitļa N 7-valuāciju).
Atrast starpību:

$$\Delta = \nu_5(N) - \nu_7(N).$$

Atbilde. -52
Pamatosim, ka $\Delta = \nu_5(N) - \nu_7(N) = 218 - 270 = -52$.
Rakstām kāpinātāja pacelšanas lemmu:
Lemma.
Šis testa jautājums ir atsauce uz 2019.g. Starpautiskās olimpiādes uzdevumu:
IMO2019.P4. Atrast visus naturālo skaitļu (k, n) pārus, kuriem izpildās

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}). \tag{1}$$

Zinot kāpinātāja pacelšanas lemmu, var pamanīt, ka vienādības (1) labajā pusē ir izteiksme, kas (pietiekami lieliem n) dalās ar augstāku skaitļa 7 pakāpi nekā skaitļa 5 pakāpi. Tāpēc šīs izteiksmes vērtība nevar būt $k!$ nevienam pietiekami lielam k, jo faktoriālam $\nu_5(n) \geq \nu_7(n)$ katram n. Pateicoties Ležandra formulai - `https://bit.ly/3ON0EtL`.