IMO IZLASE, DARBA LAPA, 2022-06-13

Frobēniusa monētu (pastmarku problēma): Ja ir divu veidu monētas ar vērtībām attiecīgi a un b, kas ir savstarpēji pirmskaitļi, tad lielākā summa, kuru nevar izteikt formā $ax + by$ (kur $x, y \geq 0$ ir veseli skaitļi) ir $ab - a - b$. Turklāt ir tieši $\frac{(a-1)(b-1)}{2}$ pozitīvi veseli skaitļi, kurus nevar šādi samaksāt.

Kāpinātāja pacelšanas lemma 3: Dots naturāls n un nepāra skaitļi a, b. Ir spēkā vienādība:

$$\nu_2(a^n - b^n) = \nu_2(a-b) + \nu_2(a+b) + \nu_2(n) - 1.$$

Polinoma racionālo sakņu teorēma: Dots vienādojums $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ ar veseliem koeficientiem, kur $a_0, a_n \neq 0$. Ja $x = p/q$ ir kāda šī polinoma racionāla sakne uzrakstīta kā nesaīsināma daļa, tad skaitītājs p dala brīvo koeficientu a_0, bet saucējs q dala vecāko koeficientu a_n.

Mēbiusa funkcija: Naturāliem skaitļiem n definējam funkciju:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{ja } n = 1 \text{ vai } n \text{ nesatur pirmskaitļu kvadrātus un tam ir pāra skaits pirmreizinātāju,} \\ -1, & \text{ja } n \text{ nesatur pirmskaitļu kvadrātus un tam ir nepāra skaits pirmreizinātāju,} \\ 0, & \text{ja } n \text{ satur kādu pirmskaitļa kvadrātu.} \end{cases}$$

Mēbiusa inversijas formula: Ja $n = g(n) = \sum_{d|n} f(d)$, tad $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot g\left(\frac{n}{d}\right)$

Piemērs (Eilera funkcija): $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ un vienlaikus $\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot \frac{n}{d} = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \cdot d$

Piemērs (Dalītāju skaita funkcija): $\sigma_0(n) = \sum_{d|n} 1$ un vienlaikus $1 = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot \sigma_0\left(\frac{n}{d}\right)$

Lemma par polinoma vērtību summu: Dots pirmskaitlis p un polinoms ar veseliem koeficientiem $P(x)$, kura pakāpe $\deg(F) \leq p - 2$. Tad polinoma p pēc kārtas ņemtu vērtību summa $\sum\limits_{k=1}^{p} P(k)$ dalās ar p.

2.1 Ievaduzdevumi

1. Kuras nesaīsināmas racionālas daļas $r = p/q$ izpilda secinājumu polinoma racionālo sakņu teorēmai, ja algebriskais vienādojums ir šāds: $3r^3 + r^2 - 7r - 5 = 0$. Sadalīt šo izteiksmi reizinātājos.
2. Kādu atlikumu, dalot ar 7, dod $1^4 + 2^4 + \ldots + 100^4$?
3. Dots pirmskaitlis p un vesels skaitlis $k \in [1; p-1]$. Pierādīt, ka
$$\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod{p}.$$
4. Dots pirmskaitlis p. Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudzi naturāli n, kuriem p dala $2^n - n$.
5. Nogrieznī $[0; 77]$ atzīmē tos veselos punktus n, kas nav savstarpēji pirmskaitļi ar 77, tādējādi sadalot to īsākos nogriežņos. Atrast visu šo nogriežņu garumu kvadrātu summu.

Ieteikums: Ja $X = [a; b]$ ir nogrieznis ar veseliem galapunktiem, tad tā garuma kvadrātu $(b-a)^2$ var aprēķināt arī, saskaitot šādu summu:

$$s_1 + 2 \cdot (s_2 + s_3 + \ldots + s_{b-a}),$$

kur s_i ir to veselo nogriežņu $[c, d] \subseteq [a, b]$ skaits, kuru garums $d - c = i$ un kuri pilnībā atrodas $[a, b]$ iekšpusē. (Piemēram, $s_1 = b - a$, $s_2 = b - a - 1$, $s_{b-a} = 1$).

Atliek sākotnējā nogrieznī $[0; 77]$ atrast, cik ir tādu nogriežņu ar veselu garumu i, kuros neatrodas neviens atzīmētais punkts un visu sasummēt, piereizinot šos skaitus ar svariem 1 vai 2.

2.2 Sacensību uzdevumi

2.1. uzdevums: Dots naturāls skaitlis $n \geq 2$, kuram definējam kopu A_n sekojoši:

$$A_n = \left\{2^n - 2^k \mid k \in \mathbb{Z},\ 0 \leq k < n\right\}.$$

Atrast lielāko naturālo skaitli, kuru nevar uzrakstīt kā viena vai vairāku kopas A_n elementu summu (vairāki elementi var arī sakrist).

2.2. uzdevums: Atrast visus naturālu skaitļu pārus (x, y), kuriem

$$\sqrt[3]{7x^2 - 13xy + 7y^2} = |x - y| + 1.$$

2.3. uzdevums: Dots naturāls skaitlis $n > 1$. Definējam virkni $(a_k)_{k \geq 1}$ sekojoši:

$$a_k = \left\lfloor \frac{n^k}{k} \right\rfloor.$$

Pierādīt, ka bezgalīgi daudzi šīs virknes locekļi ir nepāra skaitļi. (Reālam skaitlim x ar $\lfloor x \rfloor$ apzīmējam lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz x.)

2.4. uzdevums: Doti naturāli skaitļi, no kuriem katri divi ir savstarpēji pirmskaitļi: $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Pie tam a_1 ir pirmskaitlis un $a_1 \geq n + 2$. Uz reālu skaitļu nogriežņa $I = [0, a_1 a_2 \cdots a_n]$ atzīmējam visus tos veselos skaitļus, kuri dalās vismaz ar vienu no skaitļiem $a_1, \ldots, a_n$. Šie punkti sadala nogriezni I vairākos mazākos nogriežņos. Pierādīt ka visu nogriežņu garumu kvadrātu summa dalās ar a_1.