

Uzdevums 1.1: Atrast moduli, pie kura dotajam uzdevumam nav (vai ir tikai galīgs skaits) atrisinājumu.

Atrisinājumā minēt moduli m , kuriem atlikumiem $(\text{mod } m)$ var būt kongruenta kreisā puse, kuriem var būt kongruenta labā puse.

(A) $x^2 - 5y^2 = 6$

(B) $15x^2 - 7y^2 = 9$

(C) $x^2 - 2y^2 + 8z = 19$

(D) $x^3 + y^3 + z^3 = 1969^2$

(E) $x^2 + y^2 = 8z + 6$

(F) $x^2 + 8z = 2y^2 + 3$

(G) $x^4 - 12y^4 = 24$. (H) $11^x - 8^y = 1$.

Atbildes:

(A) 4, (B) 5, (C) 8, (D) 9. (E) 8. (F) 8. (G) 13. (H) 8.

Uzdevums 1.2: Visiem naturāliem skaitļiem $m > n$ pierādīt, ka

$$\text{MKD}(m, n) + \text{MKD}(m + 1, n + 1) > \frac{2mn}{\sqrt{m - n}}.$$

(Ar $\text{MKD}(a, b)$ apzīmē naturālu skaitļu a un b mazāko kopīgo dalāmo – mazāko skaitli, kas dalās gan ar a , gan ar b .)

Uzdevums 1.3: Vai eksistē bezgalīga stingri augoša naturālu skaitļu virkne $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$, ka jebkuram fiksētam naturālam skaitlim a virknē

$$a_1 + a < a_2 + a < a_3 + a < \dots$$

ir ne vairāk kā galīgs skaits pirmskaitļu?

Uzdevums 1.4: Pierādīt, ka virkne $1, 11, 111, \dots$ satur bezgalīgu apakšvirkni, kuras katri divi locekļi ir savstarpēji pirmskaitļi.

Uzdevums 1.5: Pierādīt vai apgāzt sekojošus apgalvojumus:

1. Jebkuram $k \geq 2$, un jebkuriem k pēc kārtas sekojošiem naturāliem skaitļiem atradīsies skaitlis, kurš nedalās ne ar vienu pirmskaitli, kas mazāks par k .
2. Jebkuram $k \geq 2$, un jebkurai k pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu virknei atradīsies skaitlis, kas ir savstarpējs pirmskaitlis ar visiem citiem virknes locekļiem.

(1) Galīgas ģeometriskas progresijas summa. Ģeometrisku progresiju ar pirmo locekli b_0 un kvocientu q definē ar formulu: $b_k = b_0 \cdot q^k$ (naturāliem $k > 0$), t.i. katru nākamo locekli iegūst, reizinot iepriekšējo ar q . Šādas progresijas pirmo k locekļu summu izsaka ar formulu:

$$\sum_{j=0}^{k-1} b_0 q^j = b_0 + b_0 \cdot q + b_0 \cdot q^2 + \dots + q^{k-1} = b_0 \frac{q^k - 1}{q - 1}.$$

(2) Pakāpju starpības dalīšana reizinātājos. Ja naturāls skaitlis k dalās ar naturālu skaitli m , bet a, b ir jebkādi (reāli vai naturāli) mainīgie, tad algebrisku izteiksmi $a^k - b^k$ var sadalīt reizinātājos tā, ka viens no reizinātājiem ir $a^m - b^m$.

Piemērs: Ja $k = 6$ un $m = 2$, tad var lietot kubu starpības formulu:

$$a^6 - b^6 = (a^2)^3 - (b^2)^3 = (a^2 - b^2) (a^4 + a^2 b^2 + b^4).$$

(3) Nevienādība par aritmētisko un ģeometrisku vidējo. Ja a, b ir jebkuri pozitīvi (reāli) skaitļi, tad ir spēkā nevienādība: $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{a \cdot b}$.

(4) Divi blakusesoši skaitļi ir savstarpēji pirmskaitļi. Ja n ir jebkurš naturāls skaitlis, tad lielākais kopīgais dalītājs $\text{LKD}(n, n+1) = 1$.

(5) LKD un MKD īpašības.

(a) Ja $\text{LKD}(a, b) = (a, c) = 1$, tad $\text{LKD}(a, bc) = 1$.

(b) Ja $\text{LKD}(a, b) = 1$ un $c \mid a$, tad $\text{LKD}(b, c) = 1$.

(c) Ja $\text{LKD}(a, b) = 1$, tad $\text{LKD}(ac, b) = \text{LKD}(c, b)$.

(d) Ja $\text{LKD}(a, b) = 1$ un $c \mid (a+b)$, tad $\text{LKD}(a, c) = \text{LKD}(b, c) = 1$.

(e) Ja $\text{LKD}(a, b) = 1$, $d \mid ac$ un $d \mid bc$, tad $d \mid c$.

(f) Ja $\text{LKD}(a, b) = 1$, tad $\text{LKD}(a^2, b^2) = 1$.

(g) $\text{LKD}(a, b) \cdot \text{MKD}(a, b) = a \cdot b$.

(h) Distributivitātes likumi abām operācijām vienai pret otru:

$$\text{MKD}(a, \text{LKD}(b, c)) = \text{LKD}(\text{MKD}(a, b), \text{MKD}(a, c)),$$

$$\text{LKD}(a, \text{MKD}(b, c)) = \text{MKD}(\text{LKD}(a, b), \text{LKD}(a, c)).$$

(i) Ja p ir pirmskaitlis, tad $\text{LKD}(p, m)$ ir p vai 1 .

(j) Ja $\text{LKD}(m, n) = d$, tad m/d un n/d ir savstarpēji pirmskaitļi.

(k) Ja m/d^* un n/d^* abi ir veseli un savstarpēji pirmskaitļi, tad $\text{LKD}(m, n) = d^*$.

(l) $\text{LKD}(m, n) = \text{LKD}(m-n, n)$. LKD nemainās, ja no viena skaitļa atņem otru skaitli (arī divkāršotu, trīskāršotu utt. otru skaitli).

(6) Ķīniešu atlikumu teorēma.

Ja a, b, c ir naturāli skaitļi, kuri ir pa pāriem savstarpēji pirmskaitļi ($\text{LKD}(a, b) = 1$, $\text{LKD}(a, c) = 1$, $\text{LKD}(b, c) = 1$), tad jebkuriem trim skaitļiem

$$a_1 \in [0, a-1], \quad b_1 \in [0, b-1], \quad c_1 \in [0, c-1],$$

atradīsies tāds M , kurš dod šos atlikumus a_1, b_1, c_1 , dalot attiecīgi ar a, b, c . (Līdzīgu rezultātu var vispārināt; nav noteikti jāņem trīs savstarpēji pirmskaitļi a, b, c , bet var būt divi, četri, pieci vai vairāk.)

Piemērs: Atrast skaitli, kas dod atlikumu 9, dalot ar 11, atlikumu 3, dalot ar 13 un atlikumu 1, dalot ar 17. (11, 13, 17 ir savstarpēji pirmskaitļi, tāpēc mūsu atlikumu vēlnes nav pretrunīgas.)

Visi skaitļi formā $11k + 9$ dod atlikumu 9, dalot ar 11:

9, 20, 31, 42, 53, 64, 75, 86, 97, 108, 119, 130, 141, ... Starp tiem ir skaitlis 42, kas dod ar atlikumu 3, dalot ar 13.

Vispārīgā formā visi skaitļi $11 \cdot 13 \cdot k + 42$ dos vēlamos atlikumus, gan dalot ar 11, gan, dalot ar 13. Visbeidzot, ievērojām, ka ievietojot $k = 16$, iegūstam $11 \cdot 13 \cdot k + 42 = 2330$, kas dod sākumā izraudzītos atlikumus 9, 3, 1, dalot attiecīgi ar 11, 13, 17.