Dirihlē princips - 2

1.uzdevums

Klasē mācās 20 skolēni. Katram skolēnam ir tieši divi vectētiņi; turklāt katriem diviem skolēniem vismaz viens vectētiņš ir kopīgs. (Zināms arī, ka neeksistē visiem skolēniem kopīgs vectētiņš.) Kāds ir lielākais iespējamais šīs klases skolēnu vectētiņu skaits?

Atbilde: 3

Atrisinājums:
Trīs vectētiņi A, B, C, acīmredzot, ir iespējami - ja katram skolēnam vectētiņu pāris ir vai nu (A, B), vai (A, C), vai (B, C), tad katriem diviem skolēniem kāds no vectētiņiem sakritīs.

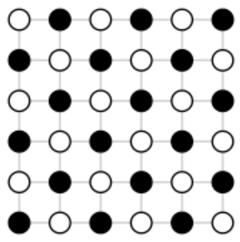
Visi vectētiņu pāri $(A, B), (A, C), (B, C)$ noteikti tiek izmantoti (eksistē bērni, kam ir pāris (A, B), un arī (A, C) un arī (B, C)), jo ir zināms, ka nevar būt visiem kopīgais vectētiņš. Bet ceturto vectētiņu pievienot vairs nav iespējams, jo tad, ja parādās vēl kāds bērns, tad viņam nevar piešķirt jaunu vectētiņu D, jo tad viņam var būt ne vairāk kā viens vectētiņš no saraksta (A, B, C) – un tātad ar kādu no bērniem viņam nebūs kopīga vectētiņa.

2.uzdevums

Katrs no 36 punktiem kvadrātiskā režģī 6×6, nejauši izvēloties, nokrāsots vai nu melns vai balts. Kāds mazākais punktu skaits jānokrāso melni, lai noteikti atrastos horizontāla vai vertikāla taisne, uz kuras ir vismaz 4 melni punkti?

Atbilde: 19

Atrisinājums:
Ja 19 punkti ir melni, tad tos kaut kā sazīmējot uz 6 paralēlām taisnēm režģī (piemēram, horizontālajām) atradīsies $\lceil 19/6 \rceil = 4$ punkti uz vienas horizontālās taisnes (19/6 noapaļojam uz augšu.)
Ja izvēlas tikai 18 baltos punktus, tad arī melno būs 18 un tos režģī 6×6 varēs iekrāsot pārmaiņus līdzīgi šaha galdiņa krāsojumam. Uz katras horizontālas vai vertikālas taisnes nonāks tikai 3 melni punkti.



3.uzdevums

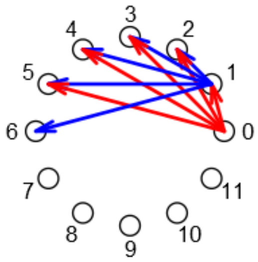
Klasē ir 12 skolēni. Katrs no viņiem kaut kā izvēlas n klasesbiedrus un nosūta katram no viņiem Jaungada apsveikumu. Kādam mazākajam n var apgalvot, ka noteikti atradīsies divi tādi klasesbiedri, kas nosūtījuši apsveikumus viens otram?

Atbilde: 6

Atrisinājums:
Attēlosim klasesbiedrus kā punktus, kas izvietoti uz riņķa līnijas. Pavisam tos savieno $C_{12}^2 = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$ šķautnes jeb vēstuļu sūtīšanas "kanāli". (Tik daudz diagonāļu ir 12-stūrī, kas savieno kaut kādas divas virsotnes).

Ja tiek sūtītas $12 \cdot 6 = 72$ vēstules, tad katrai vēstulei nepietiek sava "kanāla"; divām jātiek sūtītām starp tām pašām virsotnēm - t.i. klasesbiedri nosūta vēstules viens otram.

Ja katrs sūta tikai 5 apsveikumus, tad savstarpēju apsveikumu var arī nebūt. Pretpiemēra veidošanai iztēlosimies, ka skolēni izrakstīti pa apli un katrs sūta vēstules pieciem nākamajiem skolēniem, skaitot pa apli pretēji pulksteņa rādītāju virzienam (sk. zīmējumu, kur divu skolēnu izsūtītie apsveikumi atzīmēti attiecīgi ar zilām un sarkanā bultiņām). Šādā gadījumā uz apļa neatradīsies divi skolēni, kurus savieno bultiņas abos virzienos vienlaikus.



1.zīm.

4.uzdevums

Istabā ir 10 cilvēki; katri divi vai nu pazīst viens otru vai arī nepazīst. (Pazīšanās ir simetriska: ja A pazīst B, tad arī B pazīst A.) Izvēlamies cilvēku X starp šiem 10 cilvēkiem.
Kāds ir lielākais skaits cilvēku, kas vai nu visi pazīst X, vai arī visi nepazīst X?

Atbilde: 5

Atrisinājums:
Cilvēkam X ir pavisam 9 dažādi citi cilvēki. Katru no tiem var pazīt vai nepazīt. Vismaz 5 no šiem cilvēkiem būs attiecībā "pazīst" vai arī attiecībā "nepazīst". 9 cilvēkus dala divu veidu "būrīšos" - un vismaz pieciem jābūt savstarpēji vienādiem.

5.uzdevums

Vecmāmiņa kāpj pa trepēm 49 pakāpienus, ar vienu soli pārvarot vienu, divus vai trīs pakāpienus. Pavisam viņai nepieciešami 30 soļi augšup. Ja vecmāmiņa piecreiz uzkāpj pa šīm trepēm, cik reižu viņa bijusi uz tā pakāpiena, uz kura viņa bijusi visbiežāk
(neskaitot pašu apakšējo - 0-to un pašu augšējo - 49-to)?

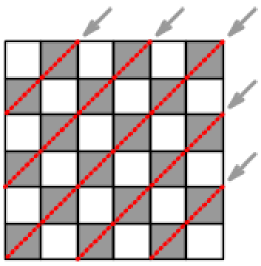
Atbilde: 4

Atrisinājums:
Pavisam ir 48 pakāpieni (neskaitot apakšējo un augšējo). 0-tajā solī vecmāmiņa ir uz apakšējā pakāpiena, bet 30-tajā solī - uz augšējā. Tādēļ viņai katrā uzkāpšanas reizē ir 29 soļi uz pakāpieniem kaut kur pa vidu. Iegūstam, $29 \cdot 5 = 145$. Sadalot 145 uz 48 "būrīšiem" iegūstam, ka vismaz vienā būrītī būs vismaz $\lceil 145/48 \rceil = \lceil 3.02 \rceil = 4$ objekti. (Noapaļo uz augšu.)

Piezīme: Spēja kāpt tieši pa 1, 2 vai 3 pakāpieniem nav būtiska - varētu atļaut kāpt arī lielāku skaitu pakāpienu, saglabājot tieši 30 soļus augšup. Atbilde no tā nemainītos.

6.uzdevums

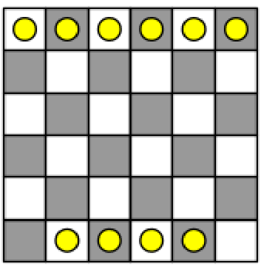
Kādu lielāko skaitu laidņu var izvietot uz šaha galdiņa 6×6 tā, lai tie viens otru neapdraud (t.i. neatrodas uz vienas diagonāles)? Laidņu gājienus sk. zīmējumā - ja tie pārvietojas pa melnajiem laucinjiem. Ir arī laidņi, kas pārvietojas pa baltajiem laucinjiem.


1.zīm.

Atbilde: 4

Atrisinājums:
Ir divu veidu laidņi - uz melnajām un uz baltajām diagonālēm. Ja aplūkojam melnās diagonāles, tad tām eksistē divi virzieni (no kreisā augšējā uz labo apakšējo stūri un no labā augšējā uz kreiso apakšējo). Dirihlē principa lietošanai izdevīgāks tas virziens uz kura ir mazāk diagonāļu (5 diagonāles nevis 6). Uz katras no 5 diagonālēm var novietot ne vairāk par vienu laidni.

Tas pats sakāms arī par baltajām diagonālēm. Tādēļ laidņu nevar būt vairāk par $5 + 5 = 10$. Viens piemērs, kā novietot tieši 10 laidņus tā, lai tie viens otru neapdraud, attēlots zīmējumā.


2.zīm.

7.uzdevums

Uz 36 kartītēm uzrakstīti naturāli skaitļi $(1, 3$ vai $9)$ un tās saliktas lielā taisnstūrī 4×9, kur katrā rindā skaitļu summa ir 27, bet katrā kolonnā skaitļu summa ir 12 - sk. zīmējumu. Pasjansa cienītājs Pāvils vēlas šīs pašas kartītes izkārtot taisnstūrī 6×6 tā, lai visās rindās skaitļu summas būtu vienādas, bet viņam tas neizdodas.

Kāda ir vismazākā iespējamā skaitļu summa "maksimālajā rindā" (t.i. rindā, par kuru nav lielāka neviena cita rinda)?

Atbilde: 22

Atrisinājums:
Tabulā ir astoņas kartītes ar skaitli "9". Ja tās sadala 6 rindās, tad vismaz vienā no tām atradīsies vismaz divi skaitļi "9". Tā kā katrā rindā ir tieši 6 kartītes, tad "maksimālajā rindā" (kurā ir divi deviņnieki) ir jāliek vēl četras kartītes ar skaitli "1", jo mazāku skaitļu uz kartītēm nav. Iegūstam mazāko iespējamo summu rindā ar diviem deviņniekiem: $9 + 9 + 1 + 1 + 1 + 1 = 22$. To var sasniegt, ja izkārto skaitļus šādi:

$9 + 9 + 1 + 1 + 1 + 1 = 22;$
$9 + 9 + 1 + 1 + 1 + 1 = 22;$
$9 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 16;$
$9 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 16;$
$9 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 16;$
$9 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 16.$

8.uzdevums

Naturālo skaitļu kubi no 1 līdz 7 ir $1, 8, 27, 64, 125, 216, 343$, bet to atlikumi, dalot ar 7 ir attiecīgi $1, 1, 6, 1, 6, 6, 0$.

Cik skaitļu no 1 līdz 100 ir jāuzraksta uz tāfeles, lai starp tiem noteikti atrastos divi skaitļi, kuru kubu starpība dalās ar 7?

Atbilde: 4

Atrisinājums:
Ja drīkst uzrakstīt tikai 3 skaitļus, tad var izvēlēties, piemēram, 1, 3 un 7. Visu skaitļu kubi dod dažādus atlikumus, dalot ar 7 un tātad neviena kubu starpība $3^3 - 1^3 = 26$, vai $7^3 - 1^3 = 342$, vai 7 nedalās ar 7.

Ja, savukārt, izvēlas četrus skaitļus (jebkurus naturālus skaitļus no 1 līdz 100 vai pat vēl lielākus), tad vismaz diviem no tiem kubi dos vienādus atlikumus, dalot ar 7. Jo iespējamie kubu atlikumi, dalot ar 7 ir tikai trīs: 0, 1 vai 6 (un pēc Dirihlē principa vismaz viens no šiem atlikumiem atkārtosies).

9.uzdevums

Latviešu alfabētā ir 33 burti. Kādā skolā katrs skolēns parakstās ar iniciāļiem - tieši diviem latviešu alfabēta burtiem (abi burti var būt arī vienādi, piemēram, "A.A." vai "Ž.Ž"). Kāds var būt vismazākais skolēnu skaits skolā, lai noteikti atrastos divi skolēni ar vienādiem iniciāļiem, kurus viņi raksta tieši tanī pašā secībā?

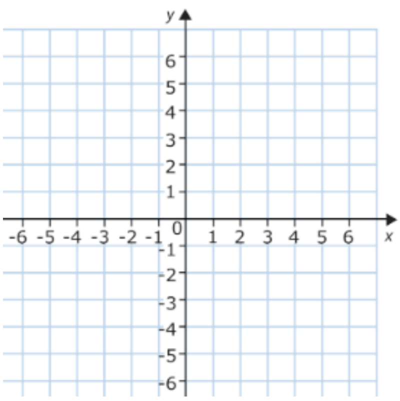
Atbilde: `1090`

Atrisinājums:
Iespējamo iniciāļu pāru (t.i. Dirihlē principa "būrīšu") ir $33 \cdot 33 = 1089$. Ja skolēnu būs par vienu vairāk, tad diviem no viņiem būs jānonāk vienā "būrītī", t.i. jāizmanto tie paši iniciāļi tanī pašā secībā.

Ja skolēnu ir 1089 vai mazāk, tad katram var būt cits iniciāļu pāris.

10.uzdevums

Koordinātu plaknē atzīmēti vairāki punkti ar veselām koordinātēm (tie atrodas rūtiņu režģa virsotnēs - sk. zīmējumu). Kāds mazākais skaits punktu jāatzīmē, lai starp tiem noteikti atrastos divi tādi punkti A, B, ka nogriežņa AB viduspunkts arī ir punkts ar veselām koordinātēm?



Atbilde: `1090`

Atrisinājums:
Punktus ar koordinātēm (x, y) var iedalīt četrās kategorijās atkarībā no tā, vai x un y ir pāra vai nepāra skaitļi – apzīmēsim šīs kategorijas ar $\{(n, n)\}$, $\{(n, p)\}$, $\{(p, n)\}$ un $\{(p, p)\}$. Piemēram, $(1, 2) \in \{(n, p)\}$, jo 1 ir nepāra, bet 2 ir pāra skaitlis.

Saliekot piecus punktus šajās četrās kategorijās, pēc Dirihlē principa iegūsim, ka vismaz divi punkti nonāk tajā pašā kategorijā. Piemēram, $(1, 2) \in \{(n, p)\}$ un arī $(3, 8) \in \{(n, p)\}$. Bet tad arī to viduspunkts $((1 + 3)/2; (2 + 8)/2) = (2; 5)$ būs punkts ar abām veselām koordinātēm.

Ar 4 punktiem nepietiek: Ja, piemēram, tos izvēlas kā viena mazā kvadrātiņa virsotnes $((0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1))$, tad visi to viduspunkti saturēs vismaz vienu skaitli, kas nav vesels.