2021.gada 27.marts

Iesniegšanas termiņš: 2021.g. 17.aprīlis

Kam iesūtīt: kalvis.apsitis, domēns gmail.com

Uzdevums 4.1: Polinomā $f(n) = n^2 + n + 41$ pēc kārtas ievieto veselos nenegatīvos skaitļus $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ un iegūst sekojošas vērtības:

 $41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151, 173, 197, 223, 251, 281, 313, 347, 383, 421, 461, \dots$

Izrakstām šīs virknes locekļu ciparus un iegūstam skaitli $\alpha=0.4143475361718397113...$ Pierādīt, ka skaitlis α ir iracionāls.

Uzdevums 4.2: Definējam virkni L_0, L_1, L_2, \ldots ar šādu formulu:

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

(a) Pierādīt, ka virknes L_n locekļi apmierina sakarību:

$$L_n^2 = 5F_n^2 + 4(-1)^n$$
 visiem $n = 0, 1, 2, \dots$ (1)

 F_n apzīmē Fibonači skaitļus $(F_0=0,\,F_1=1,\,{\rm un}\,\,F_n=F_{n-1}+F_{n-2},\,{\rm ja}\,\,n\geq 2).$

- (b) Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudzi pirmskaitļi p, kuri dala kādu virknes L_k locekli.
- (c) Pierādīt, ka L_k nedalās ar pirmskaitļiem p = 20m + 13 (piemēram p = 13, 53, 73, 113, ...) Ieteikums. Var izmantot formulu (1).

Uzdevums 4.3: Ar a_n apzīmējam n-to locekli virknē

 $1,2,2,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5,6,6,6,6,6,6,\dots$, ko veido, atkārtojot katru naturālu skaitli k tieši k reizes. Pierādīt, ka

$$a_n = \left| \sqrt{2n} + \frac{1}{2} \right|.$$

Uzdevums 4.4: Pieņemsim, ka γ, δ ir pozitīvi iracionāli skaiļi, turklāt $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} = 1$. Definējam divas virknes:

$$a_n = \lfloor n\gamma \rfloor, \quad b_n = \lfloor n\delta \rfloor.$$

Pierādīt, ka ikviens naturāls skaitlis parādās tieši vienā no abām virknēm a_n vai b_n (bet ne abās virknēs).

Uzdevums 4.5: Kopu A sauksim par $sanumur\bar{e}jamu$, ja $|A| \leq |\mathbf{N}|$, t.i. eksistē injektīva funkcija $f: A \to \mathbf{N}$. (Citiem vārdiem, kopas A elementiem var piekārtot numurus, kas ir naturāli skaitļi, tā, lai neviens numurs netiktu izmantots divreiz).

(a) Ar S apzīmējam visu naturālo skaitļu virkņu kopu (tās elementi ir bezgalīgas virknes no naturāliem skaitļiem, kur locekļi var arī atkārtoties). Vai kopa S ir sanumurējama?

- (b) Ar S_1 apzīmējam visu nedilstošo naturālo skaitļu virkņu kopu (tā satur bezgalīgas virknes x_1, x_2, x_3, \ldots , kurām $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots$). Vai kopa S_1 ir sanumurējama?
- (c) Ar S_2 apzīmējam visu neaugošo naturālo skaitļu virkņu kopu (tā satur bezgalīgas virknes x_1,x_2,x_3,\ldots , kurām $x_1\geq x_2\geq x_3\geq\ldots$). Vai kopa S_2 ir sanumurējama?

Ieteikums. Tām kopām, kuras nav sanumurējamas, var izmantot Kantora diagonalizāciju (sk. https://bit.ly/31Ye8cy); sanumurējamām kopām pietiek atrast veidu, kā sanumurēt.