1. SKAITĻU TEORIJAS LAPA, 2022-11-12

Teoriju šai sadaļai sk. http://www.dudajevagatve.lv/training/numtheory/ntjun02-modular-arithmetic.pdf.

Izmantojam apzīmējumu $a \equiv b \pmod{m}$ (skaitļi a, b ir kongruenti pēc moduļa m), ja skaitļi a, b dod vienādus atlikumus, dalot ar m (jeb starpība $a - b$ dalās ar m)

2.1 Iesildīšanās

1.uzdevums: Dots naturāls skaitlis m. Atrisināt kongruenču vienādojumu:

$$x^2 \equiv 1 \pmod{m}.$$

2.uzdevums: Izvēlēties jebkuru pirmskaitli $p < 41$ un pamatot, ka n^2+n+41 noteikti nedalās ar p nekādam naturālam n.

3.uzdevums: Skaitli $1234567891011\ldots2022$ veido, izrakstot pēc kārtas visu naturālo skaitļu decimālpierakstus no 1 līdz 2022. Atrast šī skaitļa atlikumu, dalot ar 9.

4.uzdevums: Kādiem naturāliem a un b vienādojumam $ax \equiv 1 \pmod{b}$ eksistē atrisinājums? (Šādu atrisinājumu x sauc par skaitļa a *inverso* pēc moduļa b un apzīmē $x = a^{-1}$.)

Ieteikums: Izmantot Bezū identitāti (*Bézout's identity*).

5.uzdevums: Cikliski pārvietojot ciparus bezgalīgas decimāldaļas $1/7 = 0.(142857)$ periodā, var iegūt dažādas citas racionālas daļas – piemēram, $3/7 = 0.(428571)$, $2/7 = 0.(285714)$ utt.

Atrast līdzīgu piecu dažādu ciparu virknīti $0.(abcde)$, kurā cikliski pārvietojot ciparus var iegūt racionālas daļas $\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}, \frac{k_3}{n}, \frac{k_4}{n}, \frac{k_5}{n}$, kurām visām ir viens un tas pats saucējs $n < 100$.

6.uzdevums: Dots kalkulators, kurš māk reizināt divus naturālus skaitļus $a, b < 97$ un atrod šī reizinājuma atlikumu $r \in \{0, \ldots, 96\}$, dalot ab ar $m = 97$. Cik reizināšanas darbības uz šī kalkulatora noteikti ir pietiekamas, lai atrastu atlikumu

$$r \equiv x^y \pmod{97}, \quad \text{kur } x, y < 97 \text{ ir naturāli skaitļi.}$$

Atbildei jābūt iespējami mazai, bet nav jāpamato, ka tā ir optimāla. Saskaitīt nepieciešamās reizināšanas, ja jāatrod atlikums, dalot ar 97 skaitlim 79^{73}.

2.2 Klases uzdevumi

1.uzdevums Pierādīt, ka sekojošiem vienādojumiem nav atrisinājumu veselos skaitļos:

(A) $y^2 - 5x^2 = 6$.

(B) $15x^2 - 7y^2 = 9$.

(C) $x^2 - 2y^2 + 8z = 19$.

(D) $x^3 + y^3 + z^3 = 1969^2$.

2.uzdevums: Kuriem pirmskaitļiem p var atrisināt kongruenču vienādojumu $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ veselos skaitļos?

3.uzdevums: Pirmskaitlis p ir dalītājs izteiksmei $M = (N!)^2 + 1$. Pamatot, ka izpildās vienādība:

$$1 = (-1)^{\frac{p-1}{2}}.$$

Secināt no šejienes, ka eksistē bezgalīgi daudzi pirmskaitļi $p \equiv 1 \pmod{4}$.

4.uzdevums:

(A) Fibonači skaitļu virkni definē ar sakarībām: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ un $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ (ja $n \geq 2$). Pamatot, ka ikvienam naturālam m var atrast bezgalīgi daudzus tādus n, ka F_n dalās ar m.

(B) Atrast visus tos n, kam $F_n \equiv 0 \pmod{100}$.

5.Uzdevums (BW.2018.18): Dots tāds naturāls skaitlis $n \geq 3$, ka $4n + 1$ ir pirmskaitlis. Pierādiet, ka $n^{2n} - 1$ dalās ar $4n + 1$.

6.Uzdevums (BW.2016.1): Atrast visus pirmskaitļu pārus (p, q), kuriem

$$p^3 - q^5 = (p + q)^2.$$

2.3 Mājasdarba uzdevumi

Iesniegšanas termiņš: 2022.g. 10.decembris.

Kam iesūtīt: `kalvis.apsitis`, domēns `gmail.com`

1.uzdevums: Regulāra n-stūra virsotnes savienotas ar slēgtu lauztu līniju, kurai ir n posmi.

(A) Pierādīt, ka jebkuram pāra skaitlim $n \geq 4$, lauztajai līnijai ir vismaz divi paralēli posmi.

(B) Pierādīt, ka jebkuram nepāra skaitlim $n > 3$ nav iespējams, ka lauztajai līnijai ir tieši divi paralēli posmi (t.i. divi posmi ir paralēli, bet nekādi citi nav šiem diviem paralēli, vai arī paralēli savā starpā).

2.uzdevums: Dots pirmskaitlis p un naturāli skaitļi $a \geq 2$, $m \geq 1$. Zināms, ka $a^m \equiv 1 \pmod{p}$ un $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$.

(A) Pierādīt, ka $a^m \equiv 1 \pmod{p^2}$.

(B) Atrast kādu pirmskaitli $p > 10$ un naturālus skaitļus a, m, kam minētie apgalvojumi izpildās.

3.uzdevums: Vai var atrast piecus tādus pirmskaitļus p, q, r, s, t, ka $p^3 + q^3 + r^3 + s^3 = t^3$?

4.uzdevums: Dots nepāra vesels skaitlis a. Pierādīt, ka $a^{2^n} + 2^{2^n}$ un $a^{2^m} + 2^{2^m}$ ir savstarpēji pirmskaitļi visiem naturāliem n un m, kam $n \neq m$.

Piezīme: Pieraksts a^{b^c} nozīmē $a^{(b^c)}$ nevis $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$, t.i.darbību locekļus "daudzstāvu" pakāpēs grupē no labās puses uz kreiso, nevis no kreisās uz labo.

5.uzdevums: Dots pirmskaitlis $p \geq 5$. Atrast, cik dažādi atlikumi pēc moduļa p var rasties, ja reizina trīs pēc kārtas sekojošus naturālus skaitļus.

6.uzdevums: Atrast visus naturālos skaitļus n are sekojošu īpašību: Dotajam n var izveidot divas netukšas galīgas veselu skaitļu kopas A un B, kuras jebkuram veselam skaitlim m apmierina tieši vienu no sekojošiem 3 apgalvojumiem:

(A) Eksistē $a \in A$, kuram $m \equiv a \pmod{n}$,

(B) Eksistē $b \in B$, kuram $m \equiv b \pmod{n}$,

(C) Eksistē $a \in A$ un $b \in B$, kuriem $m \equiv a + b \pmod{n}$.