Rekurentas virknes, Skaitļu teorija (2025-10-18)

- Rekurentai virknei definēts pirmais loceklis (vai daži locekļi) un formula, ar kuru no iepriekšējiem locekļiem izrēķināt nākamos. Ar to var saskaitīt variantus tad, ja citas metodes (*reizināšanas likums*) būtu par grūtu. Risinājuma secība:
  - Aprēķināt locekļus a_n dažiem maziem n. Rekurentai virknei nepieciešami pirmie locekļi (sākot ar a_0 vai ar a_1 vai tml.).
  - Apskatīt a_n un mēģināt izteikt ar a_{n-1} (vai citiem iepriekšējiem locekļiem). Pierakstīt prasību, ka $n \geq 2$ (vai tml., no kuras vietas šo formulu lietot).
  - Pārliecināties, ka rekurentajā izteiksmē bez atkārtošanās iekļauti visi varianti.
  - Ja uzdevumā prasīts, izveidot virknes locekļu tabuliņu līdz kādai vērtībai un pierakstīt secinājumus.

1.uzdevums: Ar R_n apzīmējam gabalu skaitu, kuros n taisnes sadala plakni, ja nekādas divas taisnes nav paralēlas un nekādas trīs taisnes neiet caur vienu punktu. Atrast rekurentu sakarību, lai rēķinātu R_n virknes locekļus.

2.uzdevums: Ir uzrakstīta izteiksme ar $n+1$ skaitļiem vai burtiem un operāciju $\circ$ (aplītis), kuru raksta starp diviem skaitļiem vai divām izteiksmēm, kas liktas iekavās. Ar C_n apzīmē atšķirīgo veidu skaitu, kuros var salikt iekavas. (Iekavu salikšanas veidus uzskata par atšķirīgiem, ja tie izraisa citādu darbību secību.) Ievērojam, ka $C_0 = C_1 = 1$ (ja ir tikai viens skaitlis vai arī ir divi skaitļi, tad iekavas var salikt tikai vienā veidā). Bet, piemēram, $C_3 = 5$, jo ir pavisam pieci veidi, kā salikt iekavas, ja izteiksmē ir 3 aplīši:

$$((a \circ b) \circ c) \circ d, \quad (a \circ (b \circ c)) \circ d, \quad (a \circ b) \circ (c \circ d), \quad a \circ ((b \circ c) \circ d), \quad a \circ (b \circ (c \circ d)).$$

(A) Atrast rekurentu sakarību, kā izteikt C_n, izmantojot $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$.
(B) Izveidot tabulu ar vērtībām $C_0, \cdots, C_6$.

3.uzdevums (LV.AMO.2019.12.4): Sporta nometnē ir 100 skolēni. Ar N apzīmējam, cik veidos šos 100 skolēnus var sadalīt 50 pāros (pāru secība un arī skolēnu secība pārī nav svarīga). Ar kādu lielāko trijnieka pakāpi dalās N?

Ieteikums: Lai atrastu N, var apzīmēt ar a_n veidu skaitu, kuros var sadalīt pāros n skolēnus (ja n ir nepāra, uzskatām, ka $a_n = 0$).
Var atrast, cik ir a_2 un tad arī izteikt a_n ar iepriekšējiem virknes locekļiem.

4.uzdevums: Monētu met n reizes un katrreiz pieraksta rezultātu “C” (cipars) vai “Ģ” (ģerbonis). Pirmais spēlētājs uzvar, ja visu metienu virknītē nekad nav divi ģerboņi pēc kārtas (virknīte nesatur “ĢĢ”). Apzīmējam ar a_n, cik dažādos veidos 1.spēlētājs var uzvarēt.
Atrast varbūtību, ar kuru pirmais spēlētājs uzvar, ja monētu met tieši 6 reizes.
Piezīme: Par varbūtību šeit apzīmē attiecību starp to monētas uzmešanas veidu skaitu, kuros uzvar 1.spēlētājs, pret visu iespējamo monētu uzmešanas veidu skaitu.

5.uzdevums: Kādā programmēšanas valodā visi vārdi satur tieši n burtus; katrs burts ir “A”, “B” vai “C”. Ar a_n apzīmējam, cik ir vārdu garumā n, kuri satur divus “A” no vietas.
(A) Uzrakstīt a_n kā rekurentu virkni, norādot sākuma nosacījumus un rekurento sakarību, kas ļauj izrēķināt a_n no iepriekšējiem locekļiem.
(B) Atrast a_6 vērtību.

6.uzdevums (No gatavošanās materiāla): Rindā salikti 10 krēsli, uz katra no tiem sēž pa skolēnam. Skolēni vienu reizi pieceļas un tad apsēžas, pie tam katrs drīkst apsēsties vai nu uz sava agrākā krēsla, vai uz cita krēsla, kurš ir tieši blakus agrākajam krēslam. Cik dažādi skolēnu izvietojumi iespējami pēc pārsēšanās?

7.uzdevums: Ciparu virknīti sauksim par “labu”, ja tajā ir pāra skaits nuļļu. Piemēram, “11” vai “0407869” ir labas virknītes, bet “0” vai “120987045608” nav labas.
Ar a_n apzīmējam, cik ir “labu” virkņu ar tieši n cipariem.
(A) Uzrakstīt a_2, a_3, a_4 ar reizināšanas likumu. **(B)** Atrast rekurentu sakarību virknei a_n.

8**.uzdevums:** Dota josla, kuras izmērs ir $2 \times n$ rūtiņas. Ar a_n apzīmē, cik veidos to var pārklāt ar flīzēm, kuru izmēri ir vai nu 2×1 (domino figūras) vai arī 2×2 (kvadrāti).
(A) Izteikt a_n ar *rekurentu sakarību.*
(B) Atrast a_8 - cik veidos taisnstūri 2×8 var pārklāt ar šīm flīzēm.
(C) Pārbaudīt, ka ir spēkā formula $a_n = \dfrac{2^{n+1} + (-1)^{n+1}}{3}$. (Parasti izmantot formulu ir ērtāk, jo katru a_n var izrēķināt tieši, neveidojot tabulu.)

- Apzīmējums $a \equiv b \pmod m$ nozīmē, ka a un b dod vienādus atlikumus, dalot ar m. Piemēram, $2026 \equiv 6 \pmod{10}$.
  $1^2 = 1 \equiv 1 \pmod 8$, $3^2 = 9 \equiv 1 \pmod 8$, $5^2 = 25 \equiv 1 \pmod 8$.
- Dalāmības pazīmes ar $2, 4, 8, \ldots$: Skaitlis dalās ar 2, ja pēdējais cipars dalās ar 2. Skaitlis dalās ar 4, ja pēdējo divu ciparu veidotais skaitlis dalās ar 4, utt.
- Dalāmības pazīmes ar $5, 25, 125, \ldots$: Skaitlis dalās ar 5, ja pēdējais cipars dalās ar 5. Skaitlis dalās ar 25, ja pēdējo divu ciparu veidotais skaitlis dalās ar 25, utt.
- Dalāmības pazīmes ar 3 un 9: Skaitlis dalās ar 3 vai ar 9, tad un tikai tad, ja tā ciparu summa dalās ar 3 vai ar 9.
- Dalāmības pazīme ar 11: Skaitlis dalās ar 11 tad un tikai tad, ja tā ciparu summas, kas atrodas nepāra pozīcijās, un ciparu summas, kas atrodas pāra pozīcijās, starpība dalās ar 11. Piemēram, 108647 dalās ar 11, jo $(1+8+4)-(0+6+7)=0$ un 0 dalās ar 11.
- Skaitlis n dalās ar divu savstarpēju pirmskaitļu reizinājumu $a \cdot b$ tad un tikai tad, ja n dalās ar a un n dalās ar b.

Iesildīšanās vingrinājumi:

- Uzrakstīt virkni $a_n = 3n \mod 7$.
- Uzrakstīt virkni $a_n = n^3 \mod 7$.
- Kā bez reizināšanas (ar saskaitīšanu un atņemšanu) uzzināt, kādu atlikumu dod skaitlis $\overline{abcdef}$ dalot ar 9?
- Kā bez reizināšanas (ar saskaitīšanu un atņemšanu) uzzināt, kādu atlikumu dod skaitlis $\overline{abcdef}$ dalot ar 11?

9.uzdevums (LV.AMO.2023.9.2): Ja divciparu skaitlim $\overline{ab}$ galā pieraksta divciparu skaitli $\overline{cd}$, tad iegūtais četrciparu skaitlis dalās ar 13. Zināms, ka $12a + 9b$ dalās ar 13. Kāds var būt skaitlis $\overline{cd}$?

10.uzdevums (LV.AMO.2019.9.4): Ja naturāla sešciparu skaitļa visus nepāra ciparus aizvietotu ar 7, iegūtu skaitli, kas ir par 5998 lielāks nekā sākotnējais skaitlis. Savukārt, ja sākotnējā skaitlī ar 7 aizvietotu visus pāra ciparus, tad iegūtais skaitlis būtu par 500290 lielāks nekā sākotnējais. Atrast doto sešciparu skaitli!

11.uzdevums (LV.AMO.2018.9.4): Atrast lielāko naturālo skaitli, kas dalās ar 7, kura ciparu summa ir 100 un kuram neviens cipars nav 0.

12.uzdevums (LV.AMO.2018.8.2): Naturālu skaitļu virknes $1;\ 8;\ 8;\ 64;\ 192;\ 432;\ \ldots$ katrs loceklis, sākot ar trešo, ir vienāds ar divu iepriekšējo locekļu nenulles ciparu reizinājumu. Kāds ir šīs virknes 2018. loceklis?

13.uzdevums (LV.AMO.2014.8.1): Skaitli $\frac{1}{13}$ pārveidoja par bezgalīgu decimāldaļu un tajā izsvītroja 2014. ciparu aiz komata. Kurš skaitlis lielāks – sākotnējais vai iegūtais?

14.uzdevums (LV.AMO.2022B.11.1) Vai skaitli 2022 var izteikt kā divu veselu skaitļu kubu summu?