NMS SKAITĻU TEORIJA #4: MULTIPLIKATĪVAS FUNKCIJAS

Vidusskolas matemātikas kursā parasti runā par funkcijām, kas vienam reālam skaitlim piekārto citu reālu skaitli. Piemēram, attēlo skaitli x par $x^2 + px + q$ (kvadrātfunkcija), vai par $\sqrt{x}$ (kvadrātsakne, kas definēta, ja $x \geq 0$), vai kāda no trigonometriskajām funkcijām.

Vispārīgākā nozīmē funkcija ir jebkurš attēlojums, kas kopas A elementam $x \in A$ piekārto elementu no kopas B, ko pieraksta kā $f(x) \in B$.

Šajā nodaļā aplūkosim funkcijas, kurām vai nu definīcijas apgabals vai vērtību apgabals ir veselie (vai naturālie) skaitļi, ja šīs funkcijas izmantojamas skaitļu teorijā.

4.1 Ievaduzdevumi

Definīcija: Apzīmēsim ar $\lfloor x \rfloor$ skaitļa x apakšējo veselo daļu – lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz x.

1. Pieņemsim, ka reāls skaitlis $x \in \mathbb{R}$ ir nevesels. Atrast $\lfloor -x \rfloor + \lfloor x \rfloor$.
2. Izteikt skaitļa n dalāmo skaitu starp naturāliem skaitļiem intervālā $(0; x)$, kur x ir reāls pozitīvs skaitlis. (Var uzrakstīt formulu, kurā ietilpst veselā daļa.)
3. Dota augoša aritmētiska progresija ar pirmo locekli a un diferenci d. Cik daudzi šīs progresijas locekļi būs intervālā $[b; c)$. (Var pieņemt, ka visi a, b, c, d ir naturāli skaitļi un $a < b < c$.)
4. Katriem diviem reāliem x, y pierādīt nevienādības:
$$\lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor \;\leq\; \lfloor x + y \rfloor \;\leq\; \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor + 1$$
5. Pierādīt, ka jebkuram reālam $x \in \mathbb{R}$ un jebkuram naturālam $n \in \mathbb{N}$ ir spēkā vienādība
$$\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor .$$
6. Pierādīt, ka jebkuram reālam $x \in \mathbb{R}$ ir spēkā vienādības:
$$\begin{cases} \lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor. \\ \lfloor 3x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{3} \rfloor + \lfloor x + \frac{2}{3} \rfloor. \end{cases}$$
7. Kādā skolā ir $n = 600$ skolēni. No viņiem $n_a = 300$ mācās angļu valodu, $n_v = 200$ mācās vācu valodu, bet $n_{av} = 100$ mācās angļu **un** vācu valodas (šīs kopas var pārklāties). Cik ir tādu skolēnu, kuri nemācās nevienu no šīm valodām?

4.2 Mazā Fermā un Eilera Teorēma

Mazā Fermā teorēma: Doti naturāli skaitļi a un p, kur p ir pirmskaitlis. Ja a nedalās ar p, tad ir spēkā sakarība

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Sekas: Jebkuram naturālam skaitlim a izteiksme $a^p - a$ dalās ar a. (Iznesam a pirms iekavām: $a^p - a = a \cdot (a^{p-1} - 1)$. Ja pats a dalās ar p, tad pirmais reizinātājs dalīsies ar p. Ja a nedalās ar p, tad pēc Fermā teorēmas otrais reizinātājs $a^{p-1} - a$ dalās ar p.

Piemēri:

- Ja $a = 2$, bet $p = 7$, tad $2^6 = 64 \equiv 1 \pmod{7}$, jo 63 dalās ar 7 bez atlikuma.
- Cik deviņnieki pēc kārtas jāuzraksta, lai iegūtais skaitlis dalītos ar 7?
- Cik deviņnieki pēc kārtas jāuzraksta, lai skaitlis dalītos ar 41? Kāds ir mazākais deviņnieku skaits, lai skaitlis dalītos ar 41?

Šo teorēmu nelieliem pirmskaitļiem var skaitliski pārbaudīt ar Python:

```
[x**2 for x in range(0,7)]
[x**2 % 7 for x in range(0,7)]
[x**3 % 7 for x in range(0,7)]
[x**6 % 7 for x in range(0,7)]
```

Pēdējā no rindiņām parāda, ka visi iespējamie atlikumi jeb kongruenču klases $(0, \ldots, 6)$, kāpinot 6.pakāpē dod atlikumu 1, dalot ar 7. (Vienīgais izņēmums ir atlikums 0, kurš pats dalās ar 7.)

Definīcija: Ar $\varphi(n)$ apzīmējam *Eilera funkciju* – to veselo skaitļu skaitu intervālā $[1; n]$, kas ir savstarpēji pirmskaitļi ar n.

Piemēri:

- Ja p ir pirmskaitlis, tad $\varphi(p) = p - 1$.
- Ja p^k ir pirmskaitļa pakāpe, tad $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k \cdot \left(1 = \frac{1}{p}\right)$.

Eilera teorēma: Ja a un n ir savstarpēji pirmskaitļi, tad

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Piemēri:

- Kuram n skaitlis $2^n - 1$ noteikti dalīsies ar 9?
- $\varphi(10) = 4$, tādēļ katram no skaitļiem $1, 3, 7, 9$ ir spēkā sakarība $a^4 \equiv 1 \pmod{10}$. Teiksim, skaitļa \$3\$ pakāpes ir $1, 3, 9, 27, 81, \ldots$. Iegūstam, ka 3^4 beidzas ar to pašu ciparu, ar ko $3^0 = 1$.

Note: Protams, cikls var iestāties arī ātrāk. Piemēram, kāpinot skaitļus, kuri beidzas ar ciparu 1, periods (pēdējā cipara atkārtošanās) notiek uzreiz. Ja skaitlis beidzas ar ciparu 9, tad pēdējā cipara atkārtošanās notiek katrā otrajā solī. Bet tas nemaina faktu, ka $a^4 \equiv 1 \pmod{10}$. Pēdējā cipara periods tātad var būt $1, 2, 4$, jo Eilera teorēma neapgalvo, ka $\varphi(n)$ būs *mazākais* kāpinātājs k, kuram a^k ir kontruents ar 1. Toties no Eilera teorēmas seko, ka arī mazākais periods ir skaitļa $\varphi(n)$ dalītājs.

4.2.1 Skaitliski piemēri

1.Jautājums Ar kādiem pēdējiem diviem cipariem var beigties naturāla skaitļa n pakāpe n^{20}?

2.Jautājums Aplūkojam naturālu skaitli $n = 561$. Tas nav pirmskaitlis, jo $n = 561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$. Pierādīt, ka jebkuram naturālam a skaitlis $a^n - a$ dalās ar n.

Note: Šī pati īpašība piemīt arī visiem pirmskaitļiem – tiešas sekas no Fermā teorēmas. Nepirmskaitļus, kam arī tā izpildās, sauc par Kārmaikla (*Carmichael*) skaitļiem. $n = 561$ ir mazākais no Kārmaikla skaitļiem.

4.2.2 Sacensību uzdevumi

1.Jautājums Aplūkojam virkni $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$, kur $n = 1, 2, \ldots$. Pierādīt, ka jebkuram pirmskaitlim p atradīsies tāds a_n, ka a_n dalās ar p.

2.Jautājums Atrast tādu bezgalīgi augošu aritmētisku progresiju no naturāliem skaitļiem, ka neviens no tās locekļiem nav divu pilnu kubu summa.

3.Jautājums Naturālam skaitlim n atrodam visus tos naturālos skaitļus $a_i \in [1; n]$, kuri ir savstarpēji pirmskaitļi ar n. Pamatot, ka visu šo a_i summa

$$a_1 + \ldots + a_k = \frac{n \cdot \varphi(n)}{2}.$$

4.Jautājums Katram naturālam skaitlim n pierādīt vienādību:

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

4.3 Multiplikatīvas funkcijas

Eilera funkcija $\varphi(n)$ ir tipisks piemērs vispārīgākai veselo skaitļu funkciju kopai, ko sauc par *multiplikatīvām funkcijām*.

Definīcija Funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sauc par multiplikatīvu, ja katriem diviem naturāliem $a, b \in \mathbb{N}$, kuri ir savstarpēji pirmskaitļi, ir spēkā sakarība:

$$f(ab) = f(a) \cdot f(b).$$

Īpašības:

- Multiplikatīvām funkcijām jābūt spēkā: $f(1) = 1$.
- Multiplikatīvai funkcijai pietiek zināt vērtības $f(p^k)$ pirmskaitļu pakāpēm. Citas vērtības var iegūt ar reizināšanu.

Piemēri:

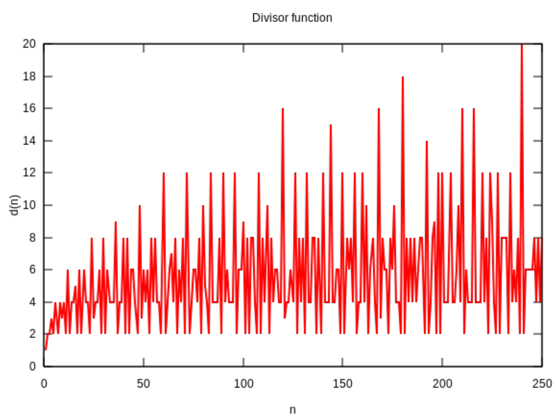
- $\gcd(n, k)$: divu skaitļu lielākais kopīgais dalītājs, kur n ir arguments, bet k ir konstante.
- $\varphi(n)$: Eilera funkcija –- cik ir naturālu $k \in [0; n]$, kas ir savstarpēji pirmskaitļi ar n.
- $\sigma_0(n) = d(n)$ – skaitļa n dalītāju skaits.
- $\sigma_1(n) = \sigma(n)$ - skaitļa n dalītāju summa.

4.3.1 Dalītāju skaita funkcija

Definīcija: Naturālam skaitlim n visu pozitīvo dalītāju skaitu apzīmējam ar

$$d(n) = \sum_{d|n} 1.$$

Attēlā parādīta dalītāju skaita funkcija $\sigma_0(n) = d(n)$ skaitļiem intervālā $[1; 250]$:



Šajā grafikā redzama virkne ar naturāliem skaitļiem, kuri pirmo reizi sasniedz noteiktas dalītāju skaita vērtības:

n	1	2	4	6	12	16	24	36	48	60	64	120	144	180	240
$d(n)$	1	2	3	4	6	5	8	9	10	12	7	16	15	18	20

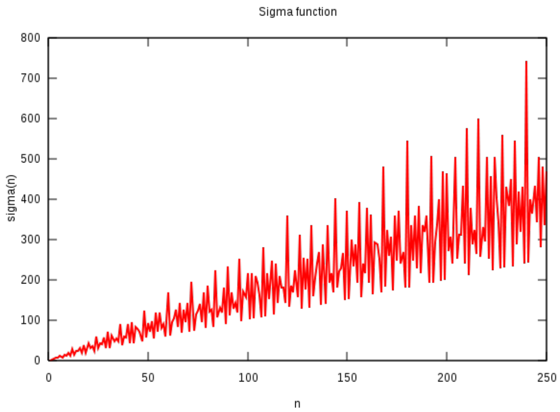
Teorēma: Ja zināms skaitļa sadalījums pirmreizinātājos: $n = p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}$, tad dalītāju skaita funkciju nosaka ar formulu:

$$d(n) = \prod_{i=1}^{m} (k_i + 1) = (1 + k_1)(1 + k_2) \cdot \ldots \cdot (1 + k_m).$$

Pierādījums: Šī formula iegūstama no fakta, ka visi skaitļa n dalītāji ir iekodējami ar veselu skaitļu vektoriņiem: $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$, kur $0 \leq x_i \leq k_i$, t.i. skaitļa n dalītājam d var uzrakstīt līdzīgu sadalījumu pirmreizinātājos: $d = p_1^{x_1} \cdots p_m^{x_m}$, kur katru no kāpinātājiem x_i var izvēlēties $(k_i + 1)$ dažādos veidos. $\square$

4.3.2 Dalītāju summas funkcija

Piemērs: Attēlā parādīta dalītāju summas funkcija $\sigma_1(n) = \sigma(n)$ skaitļiem intervālā $[1; 250]$:



Teorēma: Ja zināms skaitļa sadalījums pirmreizinātājos: $n = p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}$, tad dalītāju skaita funkciju nosaka ar formulu:

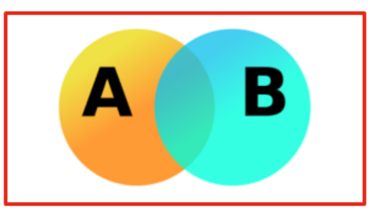
$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{m} \left(1 + p_i^1 + p_i^2 + \ldots + p_i^{k_1}\right) = \left(1 + p_1 + \ldots p_1^{k_1}\right)\left(1 + p_2^1 + \ldots + p_2^{k_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + p_m^1 + \ldots + p_m^{k_m}\right).$$

Pierādījums: Atverot iekavas pēdējā izteiksmē, iegūsim $d(n)$ saskaitāmos – katrs izrādīsies kāds no n dalītājiem. □

4.3.3 Ieslēgšanas-Izslēgšanas princips

Piemērs: Skolā pavisam ir ap 1000 bērni. 300 mācās vācu valodu, 250 mācās franču valodu, 150 mācās abas. Cik daudzi nemācās nevienu?

Pierādījums: Divām kopām var izmantot ieslēgšanas izslēgšanas principu:



Divām kopām ieslēgšanas-izslēgšanas metode izskatītos sekojoši:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

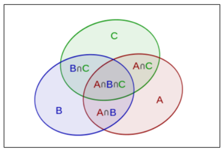
Ievietojam uzdevumā dotos skaitļus, lai atrastu, cik ir skolēnu, kuri mācās vismaz vienu svešvalodu (vācu vai franču):

$$|A \cup B| = 300 + 250 - 150 = 400.$$

Tātad to, kuri nemācās nevienu no šīm svešvalodām ir $1000 - 400 = 600$.

□

Piemērs: Zīmējumā attēlota kopa U (universs) un trīs tā apakškopas A, B, C. Zināms elementu skaits katrā no kopām (un arī to šķēlumos pa divām vai trim). Atrast elementu skaitu visu trīs kopu apvienojumā.



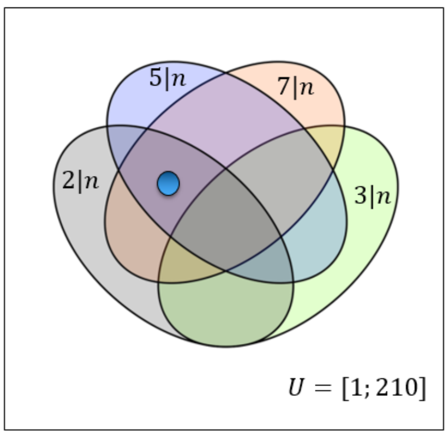
Risinājums:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

4.3.4 Eilera funkcija

Skaitļu teorijā bieži ir vieglāk noteikt dažādu skaitļu kopu šķēlumu nevis apvienojumu. Apvienojuma elementu saskaitīšanai var noderēt ieslēgšanas-izslēgšanas princips.

Piemērs: Zīmējumā attēloti veselie skaitļi :math:{1,2,ldots,210}`. Krāsaino ovālu iekšpusē ir skaitļi, kuri dalās attiecīgi ar 2, 3, 5, 7. Skaitlis $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ ir pirmo četru pirmskaitļu reizinājums.



- Atrast skaitļu piemērus apgabalā ar zilo bumbulīti.
- Cik ir pelēkā un zaļā ovāla šķēlumā?
- Cik ir ārpus visiem ovāliem? Cik no veselajiem skaitļiem intervālā $[1; 100]$ ir tādi, kas nedalās ne ar 2, ne ar 3, ne ar 5, ne ar 7?

Risinājums:

$$\begin{aligned} & 210 - \frac{210}{2} - \frac{210}{3} - \frac{210}{5} - \frac{210}{7} + \frac{210}{2 \cdot 3} + \frac{210}{2 \cdot 5} + \frac{210}{2 \cdot 7} + \frac{210}{3 \cdot 5} + \frac{210}{3 \cdot 7} + \frac{210}{5 \cdot 7} - \frac{210}{2 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{210}{2 \cdot 3 \cdot 7} - \frac{210}{2 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{210}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{210}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = \\ = \; & 210 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{7}\right). \end{aligned}$$

Piemērs: Pieņemsim, ka skaitlim n ir tikai 3 pirmskaitļu dalītāji p, q, r. Ar M_a apzīmēsim, cik intervālā $[1; n]$ ir skaitļa a daudzkārtņu.

Iegūsim, šādu sakarību:

$$\begin{aligned} \varphi(n) = \quad & n - (M_p + M_q + M_r) + (M_{pq} + M_{pr} + M_{qr}) - M_{pqr} = \\ = \quad & n - \left(\frac{n}{p} + \frac{n}{q} + \frac{n}{r}\right) + \left(\frac{n}{pq} + \frac{n}{pr} + \frac{n}{qr}\right) - \frac{n}{pqr} = n\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)\left(1 - \frac{1}{r}\right). \end{aligned}$$

Teorēma: Eilera funkcija $\varphi(n)$ ir multiplikatīva.

Piemēri: Eilera funkcijas multiplikativitāti var izmantot, lai to praktiski aprēķinātu tad, ja zināms skaitļa n sadalījums pirmreizinātājos:

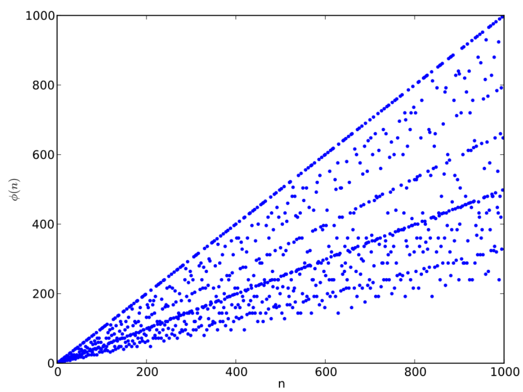
$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}.$$

Tad Eilera funkciju aprēķina katra pirmskaitļa pakāpei atsevišķi un rezultātus sareizina:

$$\varphi(n) = p_1^{k_1}\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}\left(1 - \frac{1}{p_m}\right) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_m}\right).$$

$\varphi(10) = \varphi(5) \cdot \varphi(2) = (5-1)(2-1) = 4.$
$\varphi(70) = \varphi(2) \cdot \varphi(5) \cdot \varphi(7) = (2-1)(5-1)(7-1) = 24.$
$\varphi(100) = \varphi(25) \cdot \varphi(4) = (25-5)(4-2) = 40.$
$\varphi(2012) = \varphi(4) \cdot \varphi(503) = (2^2 - 2^1)(503-1) = 2 \cdot 502 = 1004.$

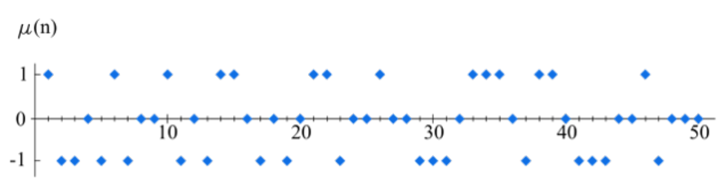
Piemērs: Attēlā dots Eilera funkcijas grafiks. Tās īpašības analizētas arī https://mathworld.wolfram.com/TotientFunction.html.



4.3.5 Mēbiusa funkcija

Definīcija: Mēbiusa (Möbius) funkciju definē šādi:

- -1, ja n ir nepāra skaita pirmskaitļu reizinājums,
- $+1$, ja n ir pāra skaita pirmskaitļu reizinājums,
- 0, ja n sadalījums pirmreizinātājos satur kāda pirmskaitļa pakāpi, kas augstāka par pirmo.



Teorēma: Mēbiusa funkcija ir multiplikatīva.

Apgalvojums: Katram naturālam n ir spēkā sekojoša formula:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{ja n=1} \\ 0, & \text{ja n>1} \end{cases}$$

Ieteikums: Ja $n > 1$, to izsaka kā pirmskaitļu reizinājumu (daži no pirmskaitļiem var arī sakrist):

$$n = p_1 p_2 \cdots p_k.$$

Jāpamato, ka šī izteiksme vienāda ar 0:

$$\begin{array}{ll} & \mu(1)+ \\ + & (\mu(p_1) + \mu(p_2) + \ldots + (p_k)) + \\ + & (\mu(p_1 p_2) + \ldots + \mu(p_{k-1} p_k)) + \\ + & \ldots + \\ + & \mu(p_1 p_2 \cdots p_k). \end{array}$$

Apgalvojums: Ir spēkā izteiksme

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}.$$

Pierādījums: Šajā izteiksmē paliek pāri tikai nedaudzi reizinātāji – kur n dala ar dažādiem pirmskaitļiem (vai atšķirīgu pirmskaitļu reizinājumiem), šo to pieskaita, šo to atņem.

4.3.6 Perfekti skaitļi

Ar dalītāju summas funkciju saistīta neparasta skaitļu kategorija – *perfekti skaitļi*.

Definīcija: Skaitļus n, kas vienādi ar visu savu dalītāju summu (atskaitot pašu n):

$$n = \sum_{d|n \wedge d<n} d$$

sauc par *perfektiem skaitļiem*

Piemēri: Perfekti skaitļi ir: $6 = 1 + 2 + 3$, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$, utt.

Eiklīda teorēma: Ja $2^p - 1$ ir pirmskaitlis, tad $2^{p-1}(2^p - 1)$ ir perfekts.

Piemēri:

- Ja $p = 2$, tad $p^2 - 1 = 3$ ir Mersenna pirmskaitlis.
- $2^p - 1$ var būt pirmskaitlis tikai tad, ja p ir pirmskaitlis. Pirmskaitļus šādā formā $2^p - 1$ sauc par Mersenna skaitļiem. (Zināmi 50 šādi pirmskaitļi.) Nav zināms, vai Mersenna pirmskaitļu ir bezgalīgi daudz. Un arī nav zināms, vai neeksistē perfekti skaitļi kādā citā formā (tsk.vai ir iespējami nepāra perfekti skaitļi).

4.3.7 Skaitliski piemēri

1.jautājums: Pierādīt, ka neeksistē tāds n, kuram Eilera funkcijas vērtība $\varphi(n) = 14$.

2.jautājums: Atrisināt vienādojumu naturālos skaitļos:

$$\varphi(2x) = \varphi(3x).$$

3.jautājums: Zināms, ka naturālam skaitlim A ir tieši 62 naturāli dalītāji. Pierādīt, ka A nedalās ar 36.

4.jautājums: Atrast tādu naturālu n, kuram visu dalītāju apgriezto lielumu summa ir 2. Citiem vārdiem, atrast skaitli n, kuram

$$\sum_{d|n} \frac{1}{d} = 2.$$

5.jautājums: Atrast tādu n, kuram

$$\mu(n) + \mu(n+1) + \mu(n+2) = 3.$$

4.3.8 Sacensību uzdevumi

1.jautājums: Parādīt, ka

$$d(1) + d(2) + \ldots + d(n) = \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor.$$

2.jautājums: Parādīt, ka

$$\sigma(1) + \sigma(2) + \ldots + \sigma(n) = 1 \cdot \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + 2 \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \ldots + n \cdot \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor.$$

3.jautājums: Dots naturāls skaitlis n. Noteikt atkarībā no n, cik ir skaitļu $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$, kuriem $x^2 \equiv x \pmod{n}$.

Piemēri: Divi atrisinājumi acīmredzami der arī ja n ir pirmskaitlis:

$$\begin{cases} 1^2 \equiv 1 \pmod{n} \\ n^2 \equiv n \pmod{n} \end{cases}$$

Ja $n = 10$, tad ir četri atrisinājumi:

$$\begin{cases} 1^2 \equiv 1 \pmod{10} \\ 5^2 \equiv 5 \pmod{10} \\ 6^2 \equiv 6 \pmod{10} \\ 10^2 \equiv 10 \pmod{10} \end{cases}$$

Ieteikums: Meklēto atrisinājumu skaitu var vispirms atrast vienkāršākajiem gadījumiem. Apzīmējam meklēto atrisinājumu skaitu vienādojumam $x^2 \equiv x \pmod{n}$ (no kopas $\{1, \ldots, n\}$ ar $f(n)$. Atradīsim to sekojošiem n:

- $n = 1$.
- $n = p$, kur p ir pirmskaitlis.
- $n = p^k$, kur p^k ir pirmskaitļa pakāpe.
- $n = pq$, kas ir divu pirmskaitļu reizinājums.

Hipotēze: $f(n) = 2^{\omega(n)}$, kur ar $\omega(n)$ apzīmē skaitļa n dažādo pirmskaitļu dalītāju skaitu, neņemot vērā to, kādā pakāpē tie ietilpst skaitlī n.