ĀVĢ skolas olimpiāde (2025), 10.klases atrisinājumi

1. uzdevums: Atrodiet
(A) trīs,
(B) divpadsmit
dažādus racionālus skaitļus tā, ka neviens no tiem nav vesels, bet katru divu skaitļu reizinājums ir vesels skaitlis. (Abos gadījumos pietiek uzrādīt piemēru).

Atrisinājums

(A) Piemēram, $\frac{6}{5}, \frac{10}{3}, \frac{15}{2}$. Tad visi veidi, kā tos sareizināt pa pāriem:

$$\frac{6}{5} \cdot \frac{10}{3} = \frac{60}{15} = 4, \quad \frac{6}{5} \cdot \frac{15}{2} = \frac{90}{10} = 9, \quad \frac{10}{3} \cdot \frac{15}{2} = \frac{150}{6} = 25.$$

(B) Apzīmēsim pirmos 12 pirmskaitļus ar $p_1, p_2, \ldots, p_{12}$:

$$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11, p_6 = 13, p_7 = 17, p_8 = 19, p_9 = 23, p_{10} = 29, p_{11} = 31, p_{12} = 37.$$

Izveidojam racionālus skaitļus Q_i $(i = 1, \ldots, 12)$ tā, ka skaitītājā ir sareizināti visi pirmskaitļi, izņemot p_i, bet saucējā ir tikai pirmskaitlis p_i. Piemēram, $Q_7 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37}{17}$.

Visi šie skaitļi Q_i nav veseli, jo skaitītājā neviens reizinātājs nedalās ar p_i. Piemēram Q_7 skaitītājā neviens reizinātājs nedalās ar 17, jo dažādi pirmskaitļi nedalās viens ar otru. Šādas daļas saīsināt nevar. (Var arī atsaukties uz Eiklīda lemmu.)

Sareizinot divus dažādus Q_i un Q_j to skaitītājos būs sareizināti visi pirmskaitļi no p_1 līdz p_{12} – katrs vismaz vienu reizi (un tie, kuri nav p_i un p_j pat divas reizes). Bet saucējā būs tikai $p_i \cdot p_j$. Tāpēc daļu reizinājumā $Q_i \cdot Q_j$ saucējs $p_i p_j$ pilnībā noīsināsies – lai kā arī neizvēlētos divus dažādus i, j no kopas $\{1, 2, \ldots, 12\}$. Saucējā paliks skaitlis 1 – tātad $Q_i \cdot Q_j$ būs vesels.

Sk. arī uzdevumu **99.22** no https://ej.uz/4533 – uzdevumu **LV.SOL.1999.9.2** NMS arhīvā.

Vērtēšanas kritēriji

(A) **4 punkti**. Ja skaitļi atrasti, bet ir kļūdas aritmētikā vai pamatojumos, tad var noņemt 1 punktu.

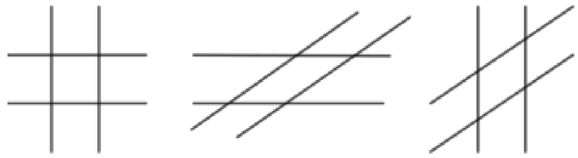
(B) **6 punkti**. Ja trūkst pamatojuma, kāpēc katrs no racionālajiem skaitļiem ir nevesels (vai arī – pamatojuma, kāpēc katram no daudzajiem pārīšiem reizinājums ir vesels), tad var noņemt par katru no tiem vēl pa 1 punktam.

2. uzdevums: Plaknē novilktas 5 vertikālas, 4 horizontālas un 3 savstarpēji paralēlas slīpas taisnes. Cik paralelogramu izveido šīs taisnes?

Atrisinājums

Par paralelogramiem te pietiek ar definīciju: "Paralelograms ir četrstūris, kuram pretējās malas ir pa pāriem paralēlas"(t.i. atrodas uz savstarpēji paralēlām taisnēm).

Aplūkotajā situācijā mums ir vairāki paralēlu taišņu kūļi - ir 5 vertikālās, 4 horizontālās un arī 3 (vienā virzienā) slīpās taisnes. Jebkurā veidā izvēloties divas paralēlas taisnes no viena kūļa, un divas citas paralēlas taisnes no otra kūļa, izveidosies paralelograms (arī taisnstūris ir paralelograms pēc paralelograma definīcijas).



2 taisnes no 5 vertikālajām taisnēm var izvēlēties $C_5^2 = 10$ veidos.
2 taisnes no 4 horizontālajām taisnēm var izvēlēties $C_4^2 = 6$ veidos.
2 taisnes no 3 slīpajām taisnēm var izvēlēties $C_3^2 = 3$ veidos.

Arī paralelograma malas var izvēlēties trīs dažādos veidos:

Vertikālas un horizontālas malas: $10 \cdot 6 = 60$ veidos (pēc reizināšanas likuma – ja divas vertikālās malas no piecām varēja atrast 10 veidos; un neatkarīgi var arī izvēlēties divas horizontālās malas no četrām 6 veidos, tad pavisam ir $10 \cdot 6$ veidi).
Vertikālas un slīpas malas: $10 \cdot 3 = 30$ veidos,
Horizontālas un slīpas malas: $6 \cdot 3 = 18$ veidos.

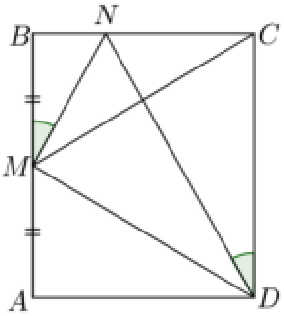
Pavisam izveidojami $60 + 30 + 18 = 108$ paralelogrami.
Sk. arī https://ej.uz/zxzn jeb **LV.AMO.2019.9.1** NMS arhīvā.

Vērtēšanas kritēriji

- **2 punkti** Par paralelograma definīcijas korektu izmantošanu. (Ja risinātājs neuzskata taisnstūrus par paralelogramiem, var noņemt punktu.)
- **3 punkti** Par kombināciju pareizu izrēķināšanu. Risinājumā nav obligāti jāizmanto formulas $C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!}$ vai līdzīgas. Var saskaitīt arī citādi – piemēram, no piecām taisnēm sistemātiski izrakstīt 10 pārīšus ($ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de$) vai tml.
- **5 punkti** Pareizi izmantots reizināšanas likums un pēc tam rezultāti korekti saskaitīti kopā (saskaitīšanas likums) un noformēta atbilde.

3. uzdevums: Dots taisnstūris $ABCD$. Malas AB viduspunkts ir M. Zināms, ka uz malas BC var izvēlēties tādu punktu N, ka $\sphericalangle BMN = \sphericalangle CDN = 30°$. Pierādīt, ka trijstūris CDM ir vienādmalu!

Atrisinājums



Tā kā M ir AB viduspunkts, tad simetrijas dēļ $CM = MD$ (sk. attēlu). Tad pietiek pierādīt, ka $MD = CD$. Trijstūri BMN un CDN ir līdzīgi pēc pazīmes $\ell\ell$, jo $\sphericalangle MBN = \sphericalangle DCN = 90°$ un $\sphericalangle BMN = \sphericalangle CDN$ pēc dotā. Trijstūru līdzības koeficients ir $\frac{BM}{CD} = \frac{1}{2}$, tāpēc $CN = 2BN$. Bet $MN = 2BN$, jo katete pret $30°$ leņķi ir puse no hipotenūzas. Tāpēc $MN = CN$. Tā kā $\sphericalangle BNM = \sphericalangle CND = 90° - 30° = 60°$, tad $\sphericalangle MND = 180° - \sphericalangle BNM - \sphericalangle CND = 60°$. Ievērojot, ka ND ir trijstūru MND un CND kopīga mala, iegūstam, ka $\triangle MND = \triangle CND$ pēc pazīmes $m\ell m$. Tad $MD = CD$. Līdz ar to esam pierādījuši, ka $MD = CD = CM$ jeb trijstūris CDM ir vienādmalu.

Piezīme. Apzīmējot $BM = x, CD = 2x$ un izmantojot trigonometriskās sakarības, var izteikt, $BN = \frac{x\sqrt{3}}{3}$ un $CN = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$. Lietojot Pitagora teorēmu $\triangle MBC$, iegūstam, ka $CM = 2x$.

Citēts no https://ej.uz/bvam, sk. **LV.AMO.2016.9.3** NMS arhīvā.

Vērtēšanas kritēriji

- **2 punkti** Uzdevuma aprakstam atbilstošs zīmējums. Var noņemt punktu, ja zīmējums ļoti šķībs vai nelabā mērogā (un CDM neizskatās pēc vienādmalu trijstūra).
- **2 punkti** par novērojumu, ka katete pret $30°$ leņķi ir puse no hipotenūzas. Vai izteiksmi $CN = DN \sin 30°$ vai līdzīgu trigonometrisku izteiksmi.
- **2 punkti** Pamatots, ka trijstūri BMN un CDN ir līdzīgi ar līdzības koeficientu $\frac{1}{2}$; vai par punktu mazāk, ja teikts, ka tie ir vienkārši līdzīgi.
- **2 punkti** Pamatots, ka trijstūri DMN un DCN ir vienādi.
- **2 punkti** Visi augšminētie spriedumi izklāstīti loģiskā secībā un veido lasāmu tekstu.

Var būt arī 1-2 punkti par citām pamanītām sakarībām uzdevuma situācijā tad, ja tās varētu noderēt, iegūstot pierādāmo apgalvojumu.

4. uzdevums: Pierādīt, ka skaitļa 2^n ciparu summa nevar būt ne 3, ne 4, ja n ir naturāls skaitlis ($n > 2$).

Atrisinājums

Skaitļa 2^n ciparu summa nevar būt 3, jo skaitļi, kuru ciparu summa dalās ar 3 arī paši dalās ar 3, bet 2^n nevar dalīties ar 3 nevienam n (tas iegūts atkārtoti reizinot tikai pirmskaitli 2 pašu ar sevi; skaitlis 3 neietilpst šajos reizinātājumos).

Pamatosim, ka 2^n ciparu summa nevar būt 4, ja prasām, lai $n > 2$. Skaitļi $2^3 = 8$ kā arī 16, 32 un 64 nedod ciparu summu 4. Tātad pieņemsim no pretējā, ka 2^n ar ciparu summu 4 eksistē un tas ir vismaz trīsciparu skaitlis.

Pēdējam ciparam skaitlī 2^n jābūt pāra ciparam un tas nedrīkst būt 0 (jo citādi 2^n dalītos ar 5, kas nevar būt). Tas nedrīkst būt arī 4 (jo skaitlī ir arī citi cipari un visa 2^n ciparu summa noteikti pārsniegs 4).

Vienīgais cipars, kas būtu iespējams 2^n beigās ir 2. Priekšpēdējais cipars noteikti ir 1. Jo skaitlis 2^n nevar beigties ar cipariem "02"(tas neizpildītu dalāmības pazīmi ar 4).

Tāpēc skaitlis 2^n beidzas ar cipariem "12". Trešais no beigām nevar būt cipars "0", jo citādi skaitlis, kas beidzas ar "012" nedalīsies ar 8. Atliek iespēja, ka 2^n beidzas ar cipariem "112", bet pats 112 nav divnieka pakāpe 2^n; tam jau ciparu summa vienāda ar 4 – tātad nekādus jaunus ciparus tam pierakstīt vairs nevar. Tātad šāds skaitlis, kas ir 2^n un ciparu summu 4 nevar eksistēt.

Sk. arī **88.20** no https://ej.uz/yo7y jeb **LV.SOL.1989.9.5** NMS arhīvā.

Vērtēšanas kritēriji

(A) **4 punkti** par pamatojumu, ka 2^n ciparu summa nevar būt 3 (ar dalāmības pazīmi ar 3 vai jebkuru citu metodi).

(B) **6 punkti** par pamatojumu, ka 2^n ciparu summa nevar būt 4 pie $n > 2$. "Pretpiemērs" $2^2 = 4$ nekādus punktus nedod, jo prasīts $n > 2$. Ir iespējami daļēji vērtējumi:

- **2 punkti** par pamatojumu, ka 2^n pēdējais cipars ir 2 (ja 2^n ciparu summa ir 4).
- **2 punkti** par pamatojumu, ka 2^n priekšpēdējais cipars ir 1 (ja 2^n ciparu summa ir 4).