Skaitļu teorija
NMS juniori

Mājasdarbs #1

2021./2022.m.g.

1.nodarbība (2021-09-18). Dalāmība

Iesniegšanas termiņš: 2021.g. 2.oktobris
Kam iesūtīt: `kalvis.apsitis`, domēns `gmail.com`

Uzdevums 1.1: Dots naturāls skaitlis d. Pierādīt, ka eksistē pirmskaitlis p un stingri augoša bezgalīga naturālu skaitļu virkne $k_1, k_2, k_3, \ldots$, kuriem virkne

$$p + k_1 \cdot d,\ p + k_2 \cdot d,\ p + k_3 \cdot d,\ \ldots$$

sastāv tikai no pirmskaitļiem.

Uzdevums 1.2: Doti divi dažādi naturāli skaitļi m, n, kas apmierina sakarību:

$$\mathrm{MKD}(m,n) + \mathrm{LKD}(m,n) = m + n.$$

Pierādīt, ka viens no skaitļiem dalās ar otru.

Uzdevums 1.3: Skaitļi a, b ir jebkādi divi naturāli skaitļi. Pierādīt, ka skaitlis $(36a+b)(a+36b)$ nevar būt skaitļa 2 pakāpe.

Uzdevums 1.4: Doti n naturāli skaitļi ar šādu īpašību: Ja izvēlas jebkurus $n-1$ no šiem skaitļiem, sareizina tos visus un atņem atlikušo skaitli, tad rezultāts dalās ar n. Pierādīt vai apgāzt: Visu šo skaitļu kvadrātu summa arī dalās ar n.

Uzdevums 1.5: Doti naturāli skaitļi a, m un n. Pierādīt, ka

$$\mathrm{LKD}\left(a^m - 1, a^n - 1\right) = a^{\mathrm{LKD}(m,n)} - 1.$$

(1) Galīgas ģeometriskas progresijas summa. Ģeometrisko progresiju ar pirmo locekli b_0 un kvocientu q definē ar formulu: $b_k = b_0 \cdot q^k$ (naturāliem $k > 0$), t.i. katru nākamo locekli iegūst, reizinot iepriekšējo ar q. Šādas progresijas pirmo k locekļu summu izsaka ar formulu:

$$\sum_{j=0}^{k-1} b_0 q^j = b_0 + b_0 \cdot q + b_0 \cdot q^2 + \ldots + q^{k-1} = b_0 \frac{q^k - 1}{q - 1}.$$

(2) Pakāpju starpības dalīšana reizinātājos. Ja naturāls skaitlis k dalās ar naturālu skaitli m, bet a, b ir jebkādi (reāli vai naturāli) mainīgie, tad algebrisku izteiksmi $a^k - b^k$ var sadalīt reizinātājos tā, ka viens no reizinātājiem ir $a^m - b^m$.
Piemērs: Ja $k = 6$ un $m = 2$, tad var lietot kubu starpības formulu:

$$a^6 - b^6 = (a^2)^3 - (b^2)^3 = \left(a^2 - b^2\right)\left(a^4 + a^2b^2 + b^4\right).$$

(3) Nevienādība par aritmētisko un ģeometrisko vidējo. Ja a, b ir jebkuri pozitīvi (reāli) skaitļi, tad ir spēkā nevienādība: $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{a \cdot b}$.
(4) Divi blakusesoši skaitļi ir savstarpēji pirmskaitļi. Ja n ir jebkurš naturāls skaitlis, tad lielākais kopīgais dalītājs $\text{LKD}(n, n+1) = 1$.
(5) LKD un MKD īpašības.
(a) Ja $\text{LKD}(a,b) = (\,a,c) = 1$, tad $\text{LKD}(a,bc) = 1$.
(b) Ja $\text{LKD}(a,b) = 1$ un $c \mid a$, tad $\text{LKD}(b,c) = 1$.
(c) Ja $\text{LKD}(a,b) = 1$, tad $\text{LKD}(ac,b) = \text{LKD}(c,b)$.
(d) Ja $\text{LKD}(a,b) = 1$ un $c \mid (a+b)$, tad $\text{LKD}(a,c) = \text{LKD}(b,c) = 1$.
(e) Ja $\text{LKD}(a,b) = 1$, $d \mid ac$ un $d \mid bc$, tad $d \mid c$.
(f) Ja $\text{LKD}(a,b) = 1$, tad $\text{LKD}\left(a^2, b^2\right) = 1$.
(g) $\text{LKD}(a,b) \cdot \text{MKD}(a,b) = a \cdot b$.
(h) Distributivitātes likumi abām operācijām vienai pret otru:
$\text{MKD}(a, \text{LKD}(b,c)) = \text{LKD}(\text{MKD}(a,b), \text{MKD}(a,c))$,
$\text{LKD}(a, \text{MKD}(b,c)) = \text{MKD}(\text{LKD}(a,b), \text{LKD}(a,c))$.
(i) Ja p ir pirmskaitlis, tad $\text{LKD}(p,m)$ ir p vai 1.
(j) Ja $\text{LKD}(m,n) = d$, tad m/d un n/d ir savstarpēji pirmskaitļi.
(k) Ja m/d^* un n/d^* abi ir veseli un savstarpēji pirmskaitļi, tad $\text{LKD}(m,n) = d^*$.
(l) $\text{LKD}(m,n) = \text{LKD}(m-n,n)$. LKD nemainās, ja no viena skaitļa atņem otru skaitli (arī divkāršotu, trīskāršotu utt. otru skaitli).
(6) Ķīniešu atlikumu teorēma.
Ja a, b, c ir naturāli skaitļi, kuri ir pa pāriem savstarpēji pirmskaitļi ($\text{LKD}(a,b) = 1$, $\text{LKD}(a,c) = 1$, $\text{LKD}(b,c) = 1$), tad jebkuriem trim skaitļiem

$$a_1 \in [0, a-1], \quad b_1 \in [0, b-1], \quad c_1 \in [0, c-1],$$

atradīsies tāds M, kurš dod šos atlikumus a_1, b_1, c_1, dalot attiecīgi ar a, b, c. (Līdzīgu rezultātu var vispārināt; nav noteikti jāņem trīs savstarpēji pirmskaitļi a, b, c, bet var būt divi, četri, pieci vai vairāk.)
Piemērs: Atrast skaitli, kas dod atlikumu 9, dalot ar 11, atlikumu 3, dalot ar 13 un atlikumu 1, dalot ar 17. ($11, 13, 17$ ir savstarpēji pirmskaitļi, tātad mūsu atlikumu vēlmes nav pretrunīgas.)
Visi skaitļi formā $11k + 9$ dod atlikumu 9, dalot ar 11:
$9, 20, 31, 42, 53, 64, 75, 86, 97, 108, 119, 130, 141, \ldots$ Starp tiem ir skaitlis 42, kas dod ar atlikumu 3, dalot ar 13.
Vispārīgā formā visi skaitļi $11 \cdot 13 \cdot k + 42$ dos vēlamos atlikumus, gan dalot ar 11, gan, dalot ar 13. Visbeidzot, ievērojam, ka ievietojot $k = 16$, iegūstam $11 \cdot 13 \cdot k + 42 = 2330$, kas dod sākumā izraudzītos atlikumus $9, 3, 1$, dalot attiecīgi ar $11, 13, 17$.