Uzdevumu lapa
ATV

Dažādas tēmas

2022-01-(18|20)

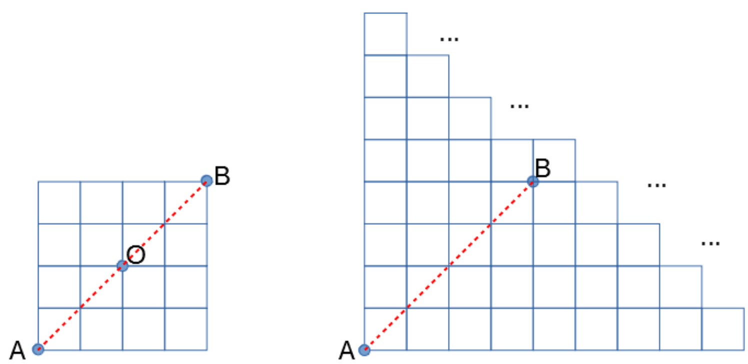
Varbūtību atkārtojums

Uzdevums 1.1: (Par bērnu dzimumiem.) Pieņemsim, ka zēni un meitenes piedzimst ar vienādām varbūtībām $p = 0.5$. Šajos piemēros mūs interesēs tās ģimenes, kurās ir tieši divi bērni (bez papildus viltībām: pieņemam, ka abi bērni ir atšķirami, nav dvīņi un dzīvo kopā ar abiem vecākiem). Noskaidrosim, ar kādām varbūtībām tajās sastopami bērnu dzimumi.

1. Pirmajā eksperimentā no lielas valsts iedzīvotāju reģistra atlasīja ģimenes ar tieši diviem bērniem, turklāt no tām izvēlējās tikai tās, kurās ir vismaz viens zēns. Ar kādu varbūtību, nejauši izvēloties ģimeni no šādi atfiltrēta saraksta, abi bērni būs zēni?

2. Otrajā eksperimentā pētnieki devās uz masu pasākumu, kurā epidemioloģisko ierobežojumu dēļ ielaiž tikai vienu no bērniem. Pieņemsim, ka līdzi ņemamo bērnu vecāki izvēlas nejauši ar vienādām varbūtībām. Kādā sastaptajā ģimenē bija līdzi paņemts zēns – un sastaptie cilvēki apstiprināja, ka viņu ģimenē ir tieši vēl viens bērns, kurš palicis mājās. Ar kādu varbūtību šajā ģimenē abi ir zēni?

Uzdevums 1.2: (Par nejaušo klaiņošanu.) Iedomāsimies, ka pilsētā ielas veido kvadrātveida režģi: 5 ielas ziemeļu-dienvidu virzienā, 5 ielas rietumu-austrumu virzienā, ar 4×4 kvartāliem starp tām: Sk. zīmējumu pa kreisi.



1. Ceļotājs vēlas no punkta A nonākt punktā B; turklāt doties pa kādu no īsākajiem ceļiem, ejot tikai uz ziemeļiem vai austrumiem. Nonākot kādā no krustojumiem, kurā ir izvēle – doties uz ziemeļiem vai austrumiem, ceļotājs met monētu un izvēlas virzienu ar vienādām varbūtībām 0.5. (Iziet ārpus pilsētas ārējā kvadrāta nedrīkst.) Noskaidrot ar kādu varbūtību ceļotājs nonāks pašā pilsētas centrā, krustojumā O.

2. Ceļotājs nejauši pārvietojas pa 4×4 pilsētu – tāpat kā iepriekšējā piemērā. Atrast, ar kādu varbūtību viņš nekad nenonāks zem (uz dienvidiem) no nogriežņa AB.

3. Cits ceļotājs pārvietojas pa lielāku pilsētu ar kvadrātveida kvartāliem, kura izveidota kā bezgalīgs kvadrants, kurš neierobežoti plešas uz ziemeļiem un uz austrumiem. Ceļojums sākas kvadranta kreisajā apakšējā virsotnē – punktā A. Katrā krustojumā viņš met monētu un izvēlas virzienu (uz ziemeļiem vai uz austrumiem) ar vienādām varbūtībām 0.5. Noskaidrot ar kādu varbūtību viņš pirmajos 8 sava ceļa posmos nenonāks zem (uz dienvidiem) no nogriežņa AB, ja zināms, ka viņš nonāca krustojumā B.

Kombinatorikas atkārtojums

Uzdevums 1.3: (Par bitu virknēm.) Dots naturāls skaitlis n ($n \geq 4$). Cik ir tādu virkņu garumā n, kas satur tikai ciparus "0" un "1"; turklāt fragments "01" sastopams tieši divās vietās?

Uzdevums 1.4: (Par konfekšu virknēm.) Aģents X 30 dienu laikā apēda 45 konfektes – katru dienu vismaz vienu konfekti. Pierādīt, ka var atrast dažas pēc kārtas sekojošas dienas, kurās X apēda tieši 14 konfektes.

Ģeometrijas atkārtojums

Uzdevums 1.5: Trijstūrī ABC novilkti augstumi AA_1 un BB_1; malas AB viduspunkts ir M. Pierādīt, ka $MA_1 = MB_1$.

Uzdevums 1.6: Izliektā četrstūrī $ABCD$ leņķi A un C ir taisni. Pierādīt, ka

$$AC = BD \cdot \sin(\sphericalangle ABC).$$

Uzdevums 1.7: Riņķa līnijā ievilkta sešstūra diagonāles AD, BE un CF krustojas vienā punktā. pierādīt, ka $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot AF$.

Uzdevums 1.8: Riņķa līnijas ar centriem O_1 un O_2 krustojas punktos A un B. Taisne O_1A krusto riņķa līniju ar centru O_2 punktā N. Pierādīt, ka punkti O_1, O_2, B un N atrodas uz vienas riņķa līnijas.

Uzdevums 1.9: Riņķa līniju S_1 un S_2 centri ir attiecīgi O_1 un O_2. Tās krustojas punktos A un B. Taisne MN pieskaras riņķa līnijai S_1 punktā M un riņķa līnijai S_2 punktā N. Ar A apzīmēts tas riņķa līniju krustošanās punkts, kas atrodas tālāk no taisnes MN. Pierādīt, ka $\sphericalangle O_1AO_2 = 2\sphericalangle MAN$.

Uzdevums 1.10: Dots četrstūris $ABCD$, kas ievilkts riņķa līnijā, turklāt $AB = BC$. Pierādīt, ka $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(DA + CD) \cdot h_b$, kur h_b ir augstums trijstūrī ABD, kas novilkts no virsotnes B.

Uzdevums 1.11: Četrstūris $ABCD$ ievilkts riņķa līnijā, turklāt AC ir leņķa DAB bisektrise. Pierādīt, ka $AC \cdot BD = AD \cdot DC + AB \cdot BC$.

Uzdevums 1.12: Taisnleņķa trijstūrī ABC no taisnā leņķa virsotnes C novilktas bisektrise CM un augstums CH. HD un HE ir attiecīgi trijstūru AHC un CHB bisektrises. Pierādīt, ka punkti C, D, H, E, M atrodas uz vienas riņķa līnijas.

Uzdevums 1.13: Trijstūris BHC, kur H ir trijstūra ABC augstumu centrs, tiek papildināts līdz paralelogramam $BHCD$. Pierādīt, ka $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAH$.

Uzdevums 1.14: Pierādīt, ka tad, ja četrstūris ar perpendikulārām diagonālēm ir gan ievilkts (kāda riņķa līnijā), gan arī apvilkts (ap kādu citu riņķa līniju), tad tas ir simetrisks attiecībā pret vienu no savām diagonālēm.