IMO IZLASE, DARBA LAPA, 2022-06-06

Aritmētiskais un ģeometriskais vidējais: Pozitīviem reāliem $a_1, \ldots, a_n$ ir spēkā $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$.

p-valuācija: Katram pirmskaitlim p par naturāla skaitļa n p-valuāciju sauc lielāko veselo nenegatīvo pakāpi k, kurai n dalās ar p^k. To apzīmē $k = \nu_p(n)$ (grieķu ν (nī)).

Divnieka pakāpes atdalīšana: Naturālu skaitli n var tieši vienā veidā izteikt kā reizinājumu $s \cdot 2^k$, kur s ir pozitīvs nepāra skaitlis, bet $k \geq 0$ ir jebkurš vesels nenegatīvs skaitlis. ($s = 1$ t.t.t., ja n ir skaitļa 2 pakāpe.)

Ležandra formula: $\nu_p(n!) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$. No šejienes arī $\nu_p(n!) < \dfrac{n}{p} + \dfrac{n}{p^2} + \ldots = \dfrac{n}{p-1}$.

Polinoma racionālo sakņu teorēma: Dots vienādojums $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ ar veseliem koeficientiem, kur $a_0, a_n \neq 0$. Ja $x = p/q$ ir kāda šī polinoma racionāla sakne uzrakstīta kā nesaīsināma daļa, tad skaitītājs p dala brīvo koeficientu a_0, bet saucējs q dala vecāko koeficientu a_n.

Kāpinātāja pacelšanas lemma 1: Dots nepāra pirmskaitlis p un naturāls kāpinātājs n. Ja neviens no veseliem skaitļiem a, b nedalās ar p, bet $a - b$ dalās ar p tad $\nu_p(a^n - b^n) = \nu_p(a - b) + \nu_p(n)$.

Kāpinātāja pacelšanas lemma 2: Dots nepāra pirmskaitlis p un naturāls kāpinātājs n. Ja neviens no veseliem skaitļiem a, b nedalās ar p, bet $a + b$ dalās ar p tad $\nu_p(a^n + b^n) = \nu_p(a + b) + \nu_p(n)$.

Stirlinga tuvinājums: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, kur $f(n) \sim g(n)$ ir *asimptotiska ekvivalence*: $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 1$.

1.1 Ievaduzdevumi

1. Ar cik nullēm beidzas skaitļa $1000!$ decimālpieraksts? (Pietiek atrast aptuvenu atbildi; pieļaujamā kļūda ir ± 4).
2. Atrast tos naturālos skaitļus, kuriem $\nu_2(n!) = n - 1$.
3. Apzīmējam $N = \left(2^1 - 1\right)\left(2^2 - 1\right) \cdots \left(2^{120} - 1\right)$. Kurš skaitlis lielāks: $\nu_5(N)$ vai $\nu_7(N)$?
4. Doti naturāli skaitļi a, b. Pierādīt, ka izteiksme $(36a + b)(a + 36b)$ nevar būt skaitļa 2 pakāpe.

1.2 Sacensību uzdevumi

1.1. uzdevums: Atrast visus naturālos skaitļus n, kuriem var atrast naturālu skaitļu pāri (a, b) tādu, ka $a^2 + b + 3$ nedalās ne ar viena pirmskaitļa kubu un izpildās vienādība:

$$\frac{ab + 3b + 8}{a^2 + b + 3} = n.$$

1.2. uzdevums: Atrast visus naturālos skaitļus n ar sekojošu īpašību: skaitlim n ir k pozitīvi dalītāji, kuriem eksistē tāda permutācija $(d_1, d_2, \ldots, d_k)$, ka jebkuram $i = 1, 2, \ldots, k$ skaitlis $d_1 + \cdots + d_i$ ir pilns kvadrāts.

1.3. uzdevums: Dots racionāls skaitlis $r > 1$ un taisne ar diviem punktiem $B \neq R$, kur punktā R ir sarkana lodīte, bet punktā B ir zila lodīte. Alise izdara virkni gājienu. Katrā gājienā viņa izvēlas veselu skaitli k (ne obligāti pozitīvu) un lodīti, kuru pārvietot. Ja izvēlētā lodīte ir punktā X, bet otras krāsas lodīte atrodas punktā Y, tad Alise izvēlēto lodīti pārvieto uz X', kur $\overrightarrow{YX'} = r^k \overrightarrow{YX}$.

Alises mērķis ir pārvietot sarkano lodīti uz punktu B. Atrast visus racionālos skaitļus $r > 1$, kuriem Alise var sasniegt šo mērķi ne vairāk kā 2021 gājienos.

1.4. uzdevums: Pierādīt, ka eksistē tikai galīgs skaits naturālu skaitļu četrinieku (a, b, c, n), kuriem izpildās vienādība

$$n! = a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}.$$