

## 8 Kombinatoriskā optimizācija (2025-11-08)

### 1.uzdevums

- (A) Vai jebkuram sešciparu skaitlim, kas sākas ar ciparu 5, var pievienot vēl 6 ciparus tā, lai iegūtais 12-ciparu skaitlis būtu pilns kvadrāts?
- (B) Tas pats jautājums par skaitli, kas sākas ar 1.
- (C) Atrodiet katram  $n$  tādu mazāko  $k = k(n)$ , ka jebkuram  $n$ -ciparu skaitlim var pievienot vēl  $k$  ciparus tā, lai iegūtais  $(n + k)$ -ciparu skaitlis būtu pilns kvadrāts.
- Piezīme:* Pieraksts  $k = k(n)$  uzsver, ka  $k$  ir *funkcija* no  $n$  (skaitlis  $k$  ir atkarīgs no  $n$  un to var izrēķināt katram dotajam naturālam skaitlim  $n$ ).

### 2.uzdevums

Rotaslietu veikala vitrīnā novietoti 15 dimanti. Blakus katram no tiem atrodas plāksnītes ar norādītām masām, uz kurām rakstīts 1, 2, ..., 15 karāti. Pārdevējam ir svari ar diviem svaru kausiem un četri atsvari ar masām 1, 2, 4 un 8 karāti. Pircējam atļauts uz viena kausa uzlikt kādu no dimantiem, un uz otra kausa - atsvarus, lai pārliecinātos, ka uz plāksnītes norādītā masa ir pareiza.

Par katru paņemto atsvaru ir jāsamaksā pārdevējam 1 EUR. Ja atsvaru noņem no svariem un nākamajā svēršanā vairs neizmanto, tas atgriežas pie pārdevēja (un par tā atkārtotu paņemšanu jāmaksā vēlreiz 1 EUR). Kāda ir minimālā summa, kas pircējam jāsamaksā, lai pārbaudītu visu dimantu masas?

### 3.uzdevums

No 19 skaitļiem 2, 3, ..., 20 izvēlējās  $k$  skaitlus, ko sadalīja divās grupās tā, ka skaitļu reizinājumi abās grupās ir vienādi. Kādam lielākajam  $k$  to var izdarīt?

### 4.uzdevums

Starp piecām ārēji vienādām monētām ir 3 īstas un 2 viltotas. Viltotās ir savstarpēji vienādas pēc svara, bet nav zināms, vai viltotas monētas masa ir lielāka vai mazāka par īstas monētas masu. Kā ar vismazāko svēršanu skaitu var atrast vismaz vienu īstu monētu?

(Svēršanā atļauts uz diviem svaru kausiem uzlikt jebkādu skaitu monētu un noskaidrot, vai pirmais kauss ir mazāks, vienāds vai lielāks par otro.)

### 5.uzdevums

Summā  $+1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729$  var izsvītrot jebkurus saskaitāmos un mainīt pirms atlikušajiem saskaitāmajiem darbību zīmes no “+” uz “-”. Marija vēlas šādā veidā iegūt dažādas izteiksmes ar vērtībām 1, 2, 3 utt., ikreiz sākot izsvītrošanu un zīmju maiņu no sākuma. Kuram vislielākajam  $n$  var šādi izteikt visus skaitlus no 1 līdz  $n$ , nevienu neizlaižot?

## 6.uzdevums

Aplī stāv 99 bērni, katram sākumā ir balons. Katru minūti katrs bērns, kuram ir balons, met to kādam no diviem saviem kaimiņiem. Ja pie viena bērna vienlaikus nonāk divi baloni, tad viens no tiem neatgriezeniski pazūd. Kāds ir mazākais minūšu skaits, pēc kura bērniem var palikt tikai viens balons?

## 7.uzdevums

Viesnīcā naktī ieradās 100 tūristi. Viņi zina, ka viesnīcā ir vienvietīgi numuri ar numuriem  $1, 2, \dots, n$ , no kuriem  $k$  ir remontā (bet nav zināms, kuri); pārējie numuri ir pieejami. Tūristi var iepriekš vienoties par savām darbībām, pēc tam viņi pa vienam dodas apmetes: katrs pārbauda numurus jebkādā secībā, atrod pirmo brīvo numuru, kas nav remontā, un paliek tur pa nakti. Tūristiem nav atļauts traucēt citam citu: nav atļauts pārbaudīt numuru, kurā jau kāds apmeties. Katram  $k$  norādīt mazāko  $n$ , pie kura tūristi garantēti varēs apmeties, netraucējot viens otru.

## 8.uzdevums

Karalis nolēma apbalvot grupu ar  $n$  padomniekiem. Viņus nostādīs rindā vienu aiz otra, lai visi skatās vienā virzienā. Katram uzvilks melnu vai baltu cepuri. Katrs redzēs visu priekšā stāvošo cepures (bet ne savējo vai cepures sev aiz muguras). Padomnieki pēc kārtas (no pēdējā līdz pirmajam) nosauc krāsu (balta vai melna) un jebkuru pašu izvēlētu naturālu skaitli. Beigās saskaita, cik padomnieku ir nosaukuši krāsu, kas sakrīt ar viņu cepures krāsu: tieši tik daudz eiro katram no viņiem izmaksās kā prēmiju. Padomnieki var iepriekš vienoties, kā atbildēt. Turklat viņi zina, ka tieši  $k$  no padomniekiem ir provokatori (kuri tieši – viņi nezina). Provokators var nosaukt balto vai melno krāsu un skaitli neatkarīgi no vienošanās. Kādu maksimālo prēmijas apjomu var garantēt neatkarīgi no provokatoru atrašanās rindā?

## 9.uzdevums

Burvju mākslinieks ar palīgu gatavojas demonstrēt šādu triku. Skatītājs uz tāfeles uzraksta virkni no  $N$  cipariem. Burvju mākslinieka palīgs aizklāj divus blakus esošus ciparus ar melnu apli. Tad ienāk burvju mākslinieks. Viņa uzdevums – uzminēt abus aizklātos ciparus (un to secību). Pie kāda mazākā  $N$  burvju mākslinieks var ar palīgu vienoties tā, ka triks noteikti izdosies?

## 10.uzdevums

Uz katras no 2013 kartītēm ir uzrakstīts skaitlis, visi šie 2013 skaitli ir dažādi. Kartītes ir apgrieztas ar skaitli uz leju. Vienā gājienā drīkst norādīt uz desmit kartītēm, un kā atbildi paziņo vienu no tām uzrakstīto skaitli (nav zināms, kuru tieši). Kādam lielākajam  $t$  noteikti varēs atrast  $t$  kartītes, par kurām būs zināms, kāds skaitlis uz katras no tām ir uzrakstīts?