1 Algebra: Rekurentas virknes

1.uzdevums

Fibonači virkne definēta ar sakarībām $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ (ja $n \geq 2$) – katru nākamo locekli iegūst, saskaitot divus iepriekšējos.
Šīs virknes locekļi no F_0 līdz F_{35} apkopoti tabulā (sk. zīmējumu).

Zināms, ka Fibonači skaitļu atlikumu virkne, dalot ar 5, ir periodiska: Katru nākamo atlikumu viennozīmīgi nosaka divi iepriekšējie atlikumi – tāpēc tie sāks atkārtoties. Daži pirmie atlikumu virknes locekļi ir $0, 1, 1, 2, 3, 0, 3, 3, 1, 4, \ldots$. Kāds ir šīs atlikumu virknes periods?

0	1	1	2
3	5	8	13
21	34	55	89
144	233	377	610
987	1597	2584	4181
6765	10946	17711	28657
46368	75025	121393	196418
317811	514229	832040	1346269
2178309	3524578	5702887	9227465

Atbilde: 20

Atrisinājums:
Ievērojam, ka $F_{20} = 6765$ (atlikums, dalot ar 5 ir 0),
$F_{21} = 10946$ (atlikums 1),
$F_{22} = 17711$ (atlikums 1),
$F_{23} = 28657$ (atlikums 2).
Kā redzam, sākot no F_{20} Fibonači virknes atlikumi (pēc 5 moduļa) sāk uzvesties tāpat kā atlikumi, sākot no F_0. Tātad visi atlikumi, dalot ar 5, atkārtojas ik pēc 20 Fibonači virknes skaitļiem.

Piezīme: Ievērojam, ka katrs piektais Fibonači skaitlis dalās ar 5 (atlikums ir 0), bet ar to vēl nepietiek, lai būtu periods, jo, teiksim, virkne 5,8,13,21,34... dod atlikumus 0,3,3,1,4,... kas atšķiras no tiem atlikumiem, kuri ir virknes pašā sākumā (0,1,1,2,3,...).

2.uzdevums

Kādam valdniekam bija n kvadrātiski lauciņi. Uz pirmā lauciņa viņš uzlika 1 rīsu graudu, uz otrā lauciņa viņš uzlika divreiz vairāk (2 rīsu graudus), uz nākamā viņš uzlika vēl divreiz vairāk (4 rīsu graudus) utt.

Lai varētu vieglāk saprast, cik graudi nepieciešami uz k-tā lauciņa, viņš definēja rekurentu virkni: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$ (ja $n \geq 3$). Cik rīsu graudiņu nepieciešami, lai noklātu pirmos 8 lauciņus šajā virknē?

Atbilde: 255

Atrisinājums:
Mums jāatrod summa $a_1 + a_2 + \ldots + a_8$. Varam saskaitīt $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7$ jeb $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128$. Šī summa ir 255.

Var ievērot arī, ka ģeometriskas progresijas summa $2^0 + \ldots + 2^{k-1} = 2^k - 1$ (t.i. rīsu graudu skaits uz pirmajiem k kvadrātiņiem ir par vienu mazāks nekā jāliek uz nākamā kvadrātiņa). Pie $k = 8$ iegūstam $2^8 - 1 = 256 - 1 = 255$.

3.uzdevums

Kosmiskie ceļotāji aizlidoja uz planētu, uz kuras gravitācija līdzīga Zemei (brīvās krišanas paātrinājums ir 10 m/s^2), bet nav gaisa pretestības. Ja no šīs planētas debesskrāpja jumta palaiž vaļā ķieģeli, tad pirmajā sekundē tas nolido 5 metrus uz leju, otrajā sekundē 15 metrus, trešajā sekundē 25 metrus utt.

Ķieģeļa nolidotais ceļš k-tajā sekundē ir a_k, kur $a_1 = 5$, $a_n = a_{n-1} + 10$ (ja $n \geq 2$). Zināms, ka tieši pēc 10 sekunžu lidojuma, ķieģelis atsitas pret planētas virsmu. Cik metru augsts bija debesskrāpis? (*Ierakstīt tikai skaitli bez mērvienības.*)

Atbilde: 500

Atrisinājums:
Ķieģeļa krišanas attālumi veido aritmētisku progresiju ar pirmo locekli 5 un diferenci 10. Tāpēc pēdējais (desmitais) loceklis būs $5 + 9 \cdot 10 = 95$.

Visu pirmo desmit locekļu summa $a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}$ ir pirmā un pēdējā locekļa aritmētiskais vidējais ($(5{+}95)/2 = 50$) reizināts ar locekļu skaitu 10. Tāpēc debesskrāpis tur bija $50 \cdot 10 = 500$ metrus augsts.

4.uzdevums

No mājām līdz ieejai dzīvoklī ir 10 pakāpieni. Naoko ar vienu soli
uzkāpj 2 vai 3 pakāpienus (vienu pakāpienu ar vienu soli viņa nekad nekāpj). Cik dažādos veidos var uzkāpt līdz dzīvoklim no ieejas? (Veidus uzskata par atšķirīgiem, ja atšķiras izdarīto soļu secība: $2 + 3$ ir cita secība nekā $3 + 2$.)

Atbilde: 7

Atrisinājums:
Apzīmēsim ar a_k to veidu skaitu, kuros Naoko var uzkāpt tieši k pakāpienus.

$a_1 = 0$ (ar atļautajiem gājieniem nevar uzkāpt pa trepēm, ja jākāpj tieši viens pakāpiens), $a_2 = 1$ (divus pakāpienus var pārvarēt tieši vienā veidā), $a_3 = 1$ (arī trīs pakāpienus var pārvarēt tieši vienā veidā).

Ja jākāpj $n \geq 4$ pakāpieni, tad vai nu vispirms vienā solī uzkāpj 2 pakāpienus un atlikušos $n-2$ varēs uzkāpt a_{n-2} veidos. Vai nu arī vispirms uzkāpj 3 pakāpienus vienā solī un atlikušos pārvar a_{n-3} veidos. Iegūstam $a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$ (katru nākamo locekli iegūst summējot otro un trešo, skatoties no virknes beigām).

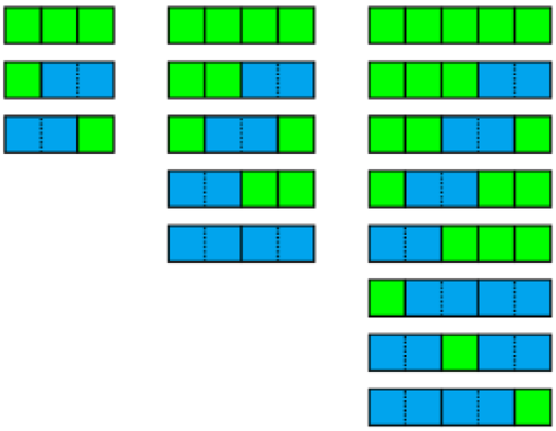
Virknes pirmie locekļi ir šādi:
$a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = a_2 + a_1 = 1 + 0 = 1, a_5 = 1 + 1 = 2.$

Tālākie locekļi:
$a_6 = 1 + 1 = 2, a_7 = 2 + 1 = 3, a_8 = 2 + 2 = 4, a_9 = 3 + 2 = 5, a_{10} = 4 + 3 = 7.$

5.uzdevums

Mums jāaizpilda ar krāsainām flīzēm taisnstūris 1×7. Ir pieejamas flīzes ar izmēru 1×1 (zaļas) un arī flīzes ar izmēru 1×2 (zilas). Dažādie veidi, kā aizpildīt taisnstūrus 1×3, 1×4 un 1×5 redzami zīmējumā.

Cik veidos ar šīm flīzēm var aizpildīt taisnstūri 1×7 (zilo un zaļo flīžu skaits un secība ir svarīgi).



Atbilde: 21

Atrisinājums:
Flīžu aizpildījumi veido Fibonači virkni. Taisnstūri 1×4 var aizpildīt 5 veidos, bet taisnstūri 1×5 jau 8 veidos. Katru nākamo var iegūt, saskaitot abus iepriekšējos (jo a_n var dabūt vai nu ieliekot vienu zaļo flīzi un atlikumu aizpildot a_{n-1} veidos vai arī ieliekot vienu zilo flīzi un atlikušo $1 \times (n-2)$ gabalu aizpildot a_{n-2} veidos).

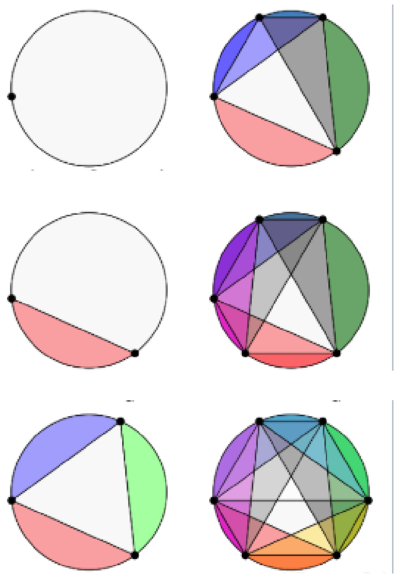
Iegūstam, ka $a_6 = 8 + 5 = 13$ un $a_7 = 13 + 8 = 21$.

6.uzdevums

Zīmējumā attēlota riņķa līnija, uz kuras atzīmēti n punkti. Starp visiem atzīmētajiem punktiem ir novilkti nogriežņi (riņķa hordas). Zināms, ka nekādas trīs hordas nekrustojas vienā punktā.

Ar a_n apzīmējam gabalu skaitu, kurās hordas sadala riņķi. Piemēram,
$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4;\ a_4 = 8.$

Atrast a_6 vērtību.



Atbilde: 31

Atrisinājums:

Saskaitot reģionus zīmējumā (labajā apakšējā stūrī), iegūstam, ka $a_6 = 31$. Šo skaitu var atrast arī rekurenti - pievienojot sesto punktu un saskaitot, cik daudzus gabalus sadala jaunizveidotās diagonāles.

Šis uzdevums ar apļa dalīšanu pazīstams kā Leo Mozera uzdevums. Tas ievērojams ar to, ka pirmās dažas vērtības veido ģeometrisku progresiju $1, 2, 4, 8, 16$, bet tālākie virknes locekļi vairs neseko šādai likumsakarībai.

7.uzdevums

Ar a_n (kur $n \geq 0$) apzīmējam atlikumu, kuru dod 3^n, dalot ar 7. Atrast virknes a_n periodu.

Atbilde: 6

Atrisinājums:

Skaitļa 3 pakāpes (sākot ar 0-to pakāpi) ir $1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, \ldots$. To atlikumi, dalot ar 7 ir attiecīgi $1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, \ldots$. Tā kā katru nākamo atlikumu viennozīmīgi nosaka iepriekšējais atlikums (kuram jāpiereizina 3), šī virkne kļūst periodiska tiklīdz kā tajā parādās divi vienādi locekļi. Mūsu gadījumā periods ir 6, jo $3^0 = 1$ un $3^6 = 729$ dod vienādus atlikumus, dalot ar 7.

8.uzdevums

Ar b_n (kur $n \geq 0$) apzīmējam atlikumu, kuru dod $12n$, dalot ar 27. Atrast virknes b_n periodu.

Atbilde: 9

Atrisinājums:
Pirmie virknes locekļi ir $0, 12, 24, 9, 21, 6, 18, 3, 15, 0, 12, 24, \ldots$. Kā redzam, tie sāk atkārtoties ik pēc 9 (jo $12 \cdot 9$ dalās ar 27). Tā kā katru nākamo atlikumu viennozīmīgi nosaka iepriekšējais atlikums (kuram jāpieskaita 12), tad virkne ir periodiska.

9.uzdevums

Ar c_n (kur $n \geq 0$) apzīmējam atlikumu, kuru dod $12n$, dalot ar 29. Atrast virknes c_n periodu.

Atbilde: 17

Atrisinājums:
Tā kā 12 un 17 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad būs jāgaida 17 locekļi (un jāiziet visi iespējamie atlikumi, dalot ar 17) pirms iestāsies periods.

Šie ir locekļi virknē c_n:
0, 12, 7, 2, 14, 9, 4, 16, 11, 6, 1, 13, 8, 3, 15, 10, 5, 0, ...

Tā kā katru nākamo atlikumu viennozīmīgi nosaka iepriekšējais atlikums (kuram jāpieskaita 12), tad virkne ir periodiska.

10.uzdevums

Definējam rekurentu virkni $a_n = 2a_{n-1} + 3$ $(n \geq 1)$, bet nenorādām tās pirmo locekli a_0. Var viegli izteikt dažus nākamos locekļus:

$a_1 = 2a_0 + 3$ un $a_2 = 2a_1 + 3 = 2(2a_0 + 3) + 3 = 4a_0 + 9$.

Ja mēs izsakām a_4 ar a_0 šādi: $a_4 = 16a_0 + C$, tad cik ir C?

Atbilde: 45

Atrisinājums:
Izsakām a_3 un a_4:
$a_3 = 2a_2 + 3 = 2(4a_0 + 9) + 3 = 8a_0 + 18 + 3 = 8a_0 + 21$.
$a_4 = 2a_3 + 3 = 2(8a_0 + 21) + 3 = 16a_0 + 42 + 3 = 16a_0 + 45$.