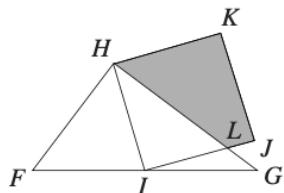


Geometrija: Līdzīgi trijstūri

1.uzdevums

Zīmējumā attēlots trijstūris FHG , kur $FH = 6$, $GH = 8$ un $FG = 10$. Punkts I ir FG viduspunkts un HJK ir kvadrāts. Nogriežņi IJ un GH krustojas punktā L . Cik liels ir iekrāsotā četrstūra laukums? (A) $124/8$, (B) $125/8$, (C) $126/8$, (D) $127/8$, (E) $128/8$.



Atbilde: B

Atrisinājums:

Trijstūris ar malu garumiem $6, 8, 10$ ir taisnleņķa, jo $6^2 + 8^2 = 10^2$. No taisnā leņķa virsotnes H vilkta mediāna HI – un tā sadala taisnleņķa trijstūri divos vienādsānu trijstūros jeb mediānas garums ir puse no hipotenūzas.

Pierādījums apgalvojumam par taisnleņķa trijstūra mediānu: Taisnleņķa trijstūrim FGH piezīmējam klāt otru tādu pašu simetriski pret centru I , iegūstam taisnstūri. Taisnstūri abas diagonāles ir vienāda garuma, tās krustpunktā dalās uz pusēm. Tāpēc HI ir puse no taisnstūra diagonāles un $HI = HG/2 = 5$.

Kvadrāta $HJKL$ laukums ir $5 \cdot 5 = 25$. No tā jāatņem $\triangle HIL$ laukums. Ievērojam, ka šie trijstūri ir līdzīgi: $\triangle FGH \sim \triangle LHI$ (abi ir taisnleņķa trijstūri un šaurie leņķi $\angle IHL = \angle HGF$, jo trijstūris HGI ir vienādsānu). $\triangle LHI$ un $\triangle FGH$ līdzības koeficients ir $k = 5/8$, jo LHI garākā katete $HI = 5$, bet FGH garākā katete $GH = 8$.

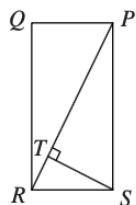
Izsakām abu trijstūru laukumus, izmantojot līdzības koeficientu: $S_{FGH} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$ un $S_{LHI} = 24 \cdot k^2 = 24 \cdot \frac{25}{64} = \frac{75}{8}$.

Visbeidzot iekrāsotās figūras laukums:

$$S_{HKJL} = 25 - \frac{75}{8} = \frac{200-75}{8} = \frac{125}{8}, \text{ kas ir atbilde (B).}$$

2.uzdevums

Attēlā dots taisnstūris $PQRS$, kurā $PQ : QR = 1 : 2$. Punkt T atrodas uz PR tā, ka ST ir perpendikulārs taisnei PR . Kāda ir trijstūra RST laukuma un taisnstūra $PQRS$ laukuma attiecība? (A) $1 : (4\sqrt{2})$, (B) $1 : 6$, (C) $1 : 8$, (D) $1 : 10$, (E) $1 : 12$.



Atbilde: D

Atrisinājums. Pēc Pitagora teorēmas, taisnstūra diagonāle $PR = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Tā ir hipotenūza taisnlenķa trijstūrim $\triangle PQR$. Trijstūris $\triangle RST$ ir līdzīgs $\triangle PRQ$ un tam hipotenūza ir 1. Tādēļ $\triangle RST$ līdzības koeficients attiecībā pret $\triangle PRQ$ ir $\frac{1}{\sqrt{5}}$ – trijstūra $\triangle RST$ elementi (malas, augstumi) ir $\sqrt{5} \approx 2.236$ reizes īsāki par atbilstošajiem elementiem trijstūrī PRQ .

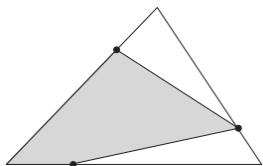
Laukumu attiecība abiem trijstūriem:

$$\frac{S_{RST}}{S_{PRQ}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{5}.$$

Tā kā taisnstūra laukums S_{PQRS} ir divreiz lielāks nekā trijstūra laukums S_{PRQ} , tad $\triangle RST$ laukuma attiecība pret taisnstūra laukumu ir puse no $1/5$ jeb $\frac{1}{10}$, kas ir atbilde (D).

3.uzdevums

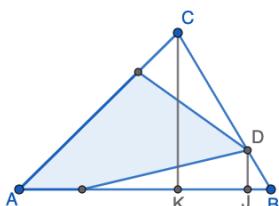
Uz katras trijstūra malas ir atzīmēts punkts, kas atrodas vienu ceturtdaļu no malas garuma (sk. attēlu). Kāda daļa no trijstūra laukuma ir iekrāsota? (A) $\frac{7}{16}$, (B) $\frac{1}{2}$, (C) $\frac{9}{16}$, (D) $\frac{5}{8}$, (E) $\frac{11}{16}$.



Atbilde: D

Atrisinājums:

Katram no abiem baltajiem trijstūriem pamats ir $3/4$ no sākotnējā trijstūra pamata, bet augstums ir četrreiz īsāks par sākotnējā trijstūra augstumu. Šo pēdējo faktu var pamatot, aplūkojot līdzīgus trijstūrus (piemēram, $\triangle BDJ$ un $\triangle BCK$ zīmējumā).



Ja sākotnējā trijstūra laukumu apzīmē ar $S = \frac{1}{2}ah$, tad katram no baltajiem trijstūriem laukums:

$$S' = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}a\right) \left(\frac{1}{4}h\right) = \frac{3}{16}S.$$

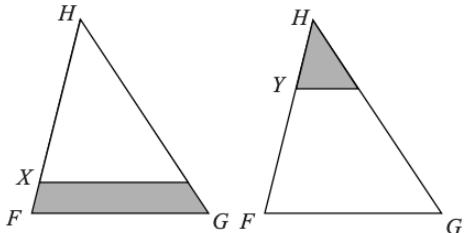
Atņemot divus šādus trijstūrus, iegūstam $S - \frac{3}{16}S - \frac{3}{16}S = \frac{5}{8}S$, kas ir atbilde (D).

Piezīme: Ja izmanto trijstūra laukuma formulu $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$, tad balto trijstūrišu laukumus var izteikt uzreiz (pamatot, ka tie ir $3/16$ no sākotnējā trijstūra laukuma), neizmantojot spriedumus par līdzīgiem trijstūriem.

4.uzdevums

Trijstūrī FGH var novilktaisni, kas ir paralēla tā pamatam FG , gan caur punktu X , gan caur Y . Ieēnoto daļu laukumi abos gadījumos ir vienādi. Zināms, ka attiecība $HX : XF = 4 : 1$. Kāda ir attiecība $HY : YF$?

- (A) 1 : 1, (B) 2 : 1, (C) 3 : 1, (D) 3 : 2, (E) 4 : 3



Atbilde: D

Atrisinājums:

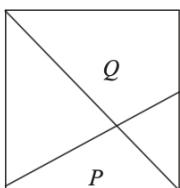
Apzīmējam trijstūra pamata malu ar a un augstumu ar h . Tad kreisā attēla trapeci apakšējais pamats ir a , bet augšējais pamats ir $\frac{4}{5}a$; trapeces augstums ir $\frac{1}{5}h$. Tad trapeces laukums:

$$S = \frac{a + \frac{4}{5}a}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}h\right) = \left(1 + \frac{4}{5}\right) \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{ah}{2} = \frac{9}{25} \cdot \frac{ah}{2}.$$

Iekrāsotās trapeces laukums ir $\frac{9}{25}$ no trijstūra laukuma. Lai labajā pusē iekrāsotajam trijstūrim arī būtu tāds laukums, vajag, lai līdzības koeficients būtu $\frac{3}{5}$. Tad $\frac{HY}{HF} = \frac{3}{5}$, un līdz ar to $\frac{HY}{YF} = \frac{3}{2}$, kas ir atbilde (D).

5.uzdevums

Zīmējumā dots kvadrāts ar diagonāli un nogriezni, kas savieno virsotni ar malas viduspunktu. Kāda ir figūru P un Q laukumu attiecība? (A) $1 : \sqrt{2}$, (B) $2 : 3$, (C) $1 : 2$, (D) $2 : 5$, (E) $1 : 3$.



Atbilde: D

Atrisinājums-1:

Apzīmējam kvadrāta malu ar 1. Novelkam GE – trijstūra ABC vidusliniju; tās garums ir $1/2$. Trapeces $ABEG$ laukums ir viduslinijas un augstuma reizinājums:

$$S_{ABEG} = \frac{1 + 1/2}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

Trijstūri CDF un GEF ir līdzīgi, jo tiem visi leņķi ir pa pāriem vienādi. Līdzības koeficients ir 2, jo CD ir divreiz garāks nogrieznis nekā GE . Abu šo trijstūru vertikālajiem augstumiem

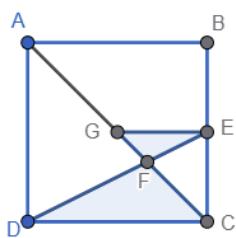
jābūt $1/3$ un $1/6$ (vienīgie skaitļi, kuru summa ir $1/2$ un pirmais ir divreiz lielāks kā otrs). Trijstūra FDC laukums – puse no pamata un augstuma reizinājuma:

$$S_{CDF} = \frac{DC \cdot \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{6}.$$

Savukārt $S_{GEF} = \frac{1}{24}$, jo tas ir četras reizes mazāks. Meklējamā laukumu attiecība:

$$\frac{P}{Q} = \frac{S_{CDF}}{S_{ABEG} + S_{GEF}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{8} + \frac{1}{24}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{10}{24}} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}.$$

Tā ir atbilde (D)



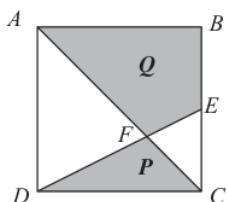
Atrisinājums-2:

Apzīmējam trijstūra CEF laukumu ar S . Ievērojam, ka $\angle AFD = \angle CFE$ (krustlenķi) un $\angle DAF = \angle ECF$ (iekšējie šķērslenķi), tādēļ trijstūri ADF un CEF ir līdzīgi. Līdzības koeficients $k = 2$, jo mala AD ir divreiz garāka par atbilstošo malu CE . Tātad:

- i. trijstūrim ADF ir laukums $k^2 \cdot S = 4S$,
- ii. mala AF ir divreiz garāka nekā attiecīgā mala CF .

Apskatām AF un CF kā trijstūru ADF un CDF pamatus (tiem ir vienāds augstums). Saskaņā ar (ii), trijstūrim ADF ir divreiz lielaks laukums nekā trijstūrim CDF (laukums P), tātad tas ir $2S$.

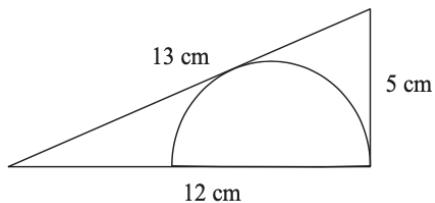
Trijstūra ACD laukums ir $6S$; tātad arī trijstūra ABC laukums ir $6S$, bet Q ir $6S - S = 5S$. Tātad meklētā attiecība ir $2 : 5$, kas ir atbilde (D).



6.uzdevums

Zīmējumā attēlotajā taisnlenķa trijstūrī malu garumi ir 5 cm, 12 cm un 13 cm. Kāds ir ievilkta pusriņķa rādiuss centimetros, ja tā diametrs atrodas uz malas ar garumu 12 cm?

- (A) $8/3$, (B) $10/3$, (C) $11/3$, (D) 4, (E) $13/3$.

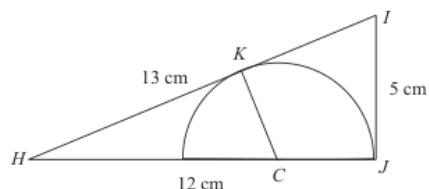


Ieteikums: Ja neesat pazīstami ar formulu $S = pr$ (laukums ir pusperimetrs reiz ievilkta riņķa rādiuss), var savienot riņķa centru ar pieskaršanās punktu uz hipotenūzas un aplūkot līdzīgus trijstūrus.

Atbilde: B

Atrisinājums-1:

Apzīmējam trijstūra virsotnes ar H, I, J , ar C – riņķa centru un K ir punkts, kur pusriņķis pieskaras malai HI , kā redzams zīmējumā. Lenķis $\angle CKH$ ir taisns, jo nogrieznis HI pieskaras riņķim un tādēļ ir perpendikulārs rādiusam CK . Trijstūri HKC un HJI ir līdzīgi, jo tiem ir katram taisns lenķis un arī kopīgs lenķis virsotnē H . Apzīmējam pusriņķa rādiusu ar r ; tad $CK = r$ un $CH = 12 - r$. No trijstūru līdzības iegūstam $\frac{12 - r}{r} = \frac{13}{5}$.



Tātad $5(12 - r) = 13r$ un $60 - 5r = 13r$. No šejienes $18r = 60$, tātad $r = \frac{10}{3}$, kas ir atbilde **(B)**.

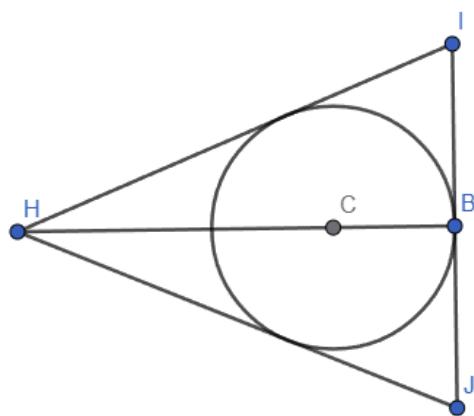
Atrisinājums-2:

Simetriski pret kateti garumā 12 uzzīmējam otru taisnlenķa trijstūri. Esam ieguvuši jaunu vienādsānu trijstūri HIJ , kurā ievilkta riņķa līnija. Šī trijstūra laukums ir divkāršots $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$, tātad 60.

No otras puses, trijstūra laukumu var izteikt ar formulu $S = pr$, kur p ir pusperimetrs un r – ievilkta riņķa līnija. Trijstūra HIJ pusperimetrs ir $(13 + 13 + 10)/2 = 18$. Tāpēc pielīdzinām:

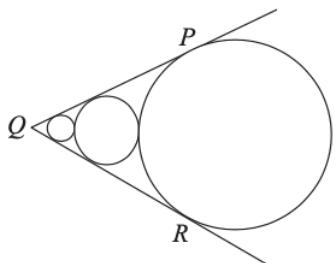
$$S = pr, \quad 60 = 18r, \quad r = 60/18 = 10/3.$$

Tā ir atbilde **(B)**.



7.uzdevums

Trīs apli un taisnes PQ un QR savstarpēji pieskaras, kā attēlots zīmējumā. Attālums starp mazākā un lielākā riņķa centriem ir 16 reizes lielāks par mazā riņķa rādiusu. Kāds ir leņķis $\angle PQR$? (A) 45° , (B) 60° , (C) 75° , (D) 90° , (E) 135° .



Atbilde: B

Atrisinājums:

Apļu rādiusus no mazākā līdz lielākajam apzīmējam attiecīgi ar r_1 , r_2 un r_3 . Tātad

$$16r_1 = r_3 + 2r_2 + r_1, \text{ tāpēc } r_3 = 15r_1 - 2r_2 \quad (1).$$

Ar $r_1 + x$ apzīmē attālumu no Q līdz mazākā apļa centram. Trijstūru līdzības dēļ

$$\frac{r_1}{r_1 + x} = \frac{r_2}{x + 2r_1 + r_2} = \frac{r_3}{16r_1 + r_1 + x} \quad (2).$$

Tad $r_1(x + 2r_1 + r_2) = r_2(r_1 + x)$. Tāpēc

$$r_2 = \frac{r_1 x + 2r_1^2}{r_1} \quad (3).$$

No (1) un (2)

$$\frac{r_1 x}{r_1 + x} = \frac{(15r_1 - 2r_2)x}{17r_1 + x} \text{ tātad } \frac{r_1 x}{r_1 + x} = \frac{15r_1 x - 2(r_1 x + 2r_1^2)}{17r_1 + x}.$$

Izdalot visur ar r_1 un vienkāršojot, iegūst $12x^2 - 8r_1x - 4r_1^2 = 0$. Tātad $(3x + r_1)(x - r_1) = 0$, un, tā kā $r_1 > 0$, $x = r_1$. Tāpēc

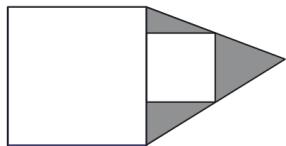
$$\sin \frac{\angle PQR}{2} = \frac{r_1}{r_1 + x} = \frac{r_1}{2r_1} = \frac{1}{2}.$$

Tātad $\frac{1}{2}\angle PQR = 30^\circ$, līdz ar to $\angle PQR = 60^\circ$, kas ir atbilde (B).

8.uzdevums

Zīmējumā attēloti divi kvadrāti: Vienam malas garums ir 20, un otram malas garums ir 10. Kāds ir ieēnotā apgabala laukums?

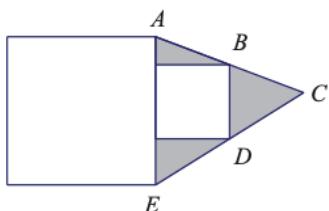
Ierakstīt atbildē veselu skaitli vai parastu noīsinātu daļu P/Q.



Atbilde: 100

Atrisinājums:

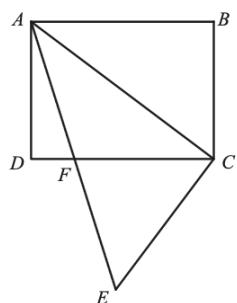
Ieviešot burtu apzīmējumus, redzam, ka $\triangle ACE$ un $\triangle BCD$ ir līdzīgi un to garumu attiecība ir $2 : 1$. Tā kā $\triangle ACE$ augstums ir 10 plus trijstūra BCD augstums, $\triangle ACE$ augstums ir 20, un tā laukums ir $\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 20 = 200$. Mazākā kvadrāta laukums ir 100, tāpēc iekrāsotās daļas laukums ir $200 - 100 = 100$.



9.uzdevums

Attēlā redzams taisnstūris $ABCD$, kam $AB = 16$ un $BC = 12$. $\angle ACE$ ir taisns leņķis un $CE = 15$. Nogriežni AE un CD krustojas punktā F . Kāds ir $\triangle ACF$ laukums?

Ierakstīt atbildē veselu skaitli vai parastu noīsinātu daļu P/Q.



Atbilde: 75

Atrisinājums:

Izmantojot Pitagora teorēmu vispirms $\triangle ABC$ un pēc tam $\triangle ACE$, iegūstam $AC = 20$ un $AE = 25$. No tā izriet, ka $\triangle ABC$ ir līdzīgs $\triangle ACE$, jo atbilstošo malu attiecība abos trijstūros ir $3 : 4 : 5$ (pazīme mmm). Tāpēc $\angle BAC = \angle CAE$. Arī $\angle BAC = \angle ACF$, izmantojot iekšējos šķērsleņķus, tātad $\angle CAF = \angle ACF$ un $\triangle AFC$ ir vienādsānu. Lai M ir nogriežņa AC viduspunkts un savienojam M ar F . Tas dod vēl divus taisnleņķa trijstūrus, $\triangle AMF$ un $\triangle CMF$, kas arī ir līdzīgi $\triangle ABC$. Tātad

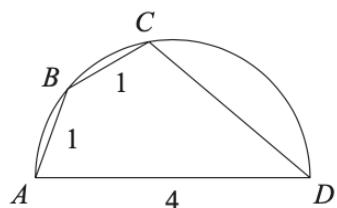
$$\frac{MF}{MA} = \frac{BC}{BA}$$

no kurienes $MF = \frac{MA \cdot BC}{BA} = \frac{10 \cdot 12}{16} = \frac{15}{2}$. Tāpēc $S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{2} \cdot 20 = 75$.

10.uzdevums

Riņķa diametra AD garums ir 4. Punkti B un C atrodas uz riņķa, kā attēlots zīmējumā, un $AB = BC = 1$. Atrast CD garumu.

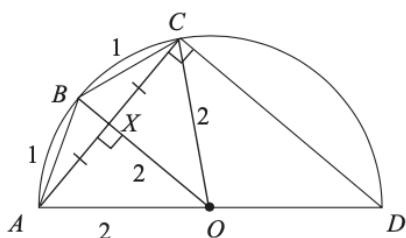
Ierakstīt atbildē veselu skaitli vai parastu noīsinātu daļu P/Q.



Atbilde: 7/2

Atrisinājums-1:

Lai O ir apla centrs, tā ka $OA = OB = OC = 2$, un lai horda AC un rādiuss OB krustojas punktā X .



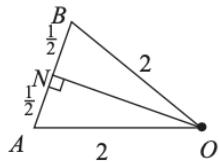
Trijstūris OAC ir vienādsānu, un OB pārgriež leņķi AOC uz pusēm (jo hordas AB un BC ir vienādas un tāpēc apla centrā nogriež vienādus leņķus). Tātad OB ir vienādsānu trijstūra AOC pamata AC perpendikulārais dalītājs. Citiem vārdiem, $AX = XC$ un $\angle AXO = 90^\circ$, kā parādīts iepriekšējā zīmējumā.

Tā kā leņķis ACD ir 90° (leņķis pusaplī), trijstūris ACD ir taisnleņķa trijstūris, kurā viena mala ir CD , un tās garums mums jāatrod. Zinām, ka $AD = 4$, tāpēc CD var atrast, izmantojot Pitagora teorēmu:

$$CD^2 = AD^2 - AC^2, \quad (4.1)$$

ja vien varam noteikt nogriežņa AC garumu. To darīsim, izmantojot laukumus, bet pastāv arī citas metodes.

Tagad aplūkosim vienādsānu trijstūri OAB un lai N ir nogriežņa AB viduspunkts, tā ka trijstūris ANO ir taisnleņķa.



Tad pēc Pitagora teorēmas

$$NO^2 = 2^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{4},$$

tāpēc $NO = \frac{\sqrt{15}}{2}$. Tātad trijstūra AOB laukums ir

$$\frac{1}{2} \times AB \times NO = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Bet trijstūra OAB laukums ir arī $\frac{1}{2} \times OB \times AX$. Tāpēc $AX = \frac{\sqrt{15}}{4}$ un tādēļ

$$AC = 2AX = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

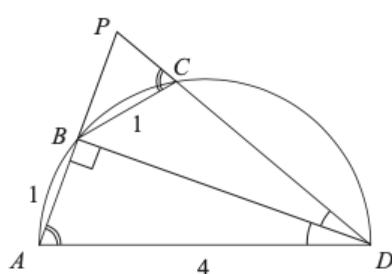
Ievietojot šo vērtību vienādojumā (4.1)., iegūstam

$$CD^2 = AD^2 - AC^2 = 4^2 - \frac{15}{4} = \frac{49}{4}$$

un līdz ar to $CD = \frac{7}{2}$.

Atrisinājums-2:

Lai P ir pagarināto AB un DC krustpunkts.



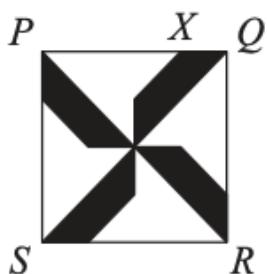
Leņķi ADB un BDC abi ir riņķī ievilkti leņķi, ko balsta hordas ar garumu 1. Tāpēc šie leņķi ir vienādi. Cits ievilkts leņķis $\angle ABD = 90^\circ$, jo balstās uz diametru. Tāpēc trijstūri ABD un PBD ir kongruenti (pazīme $\ell m \ell$). Tātad $BP = 1$ un $PD = 4$.

Turklāt trijstūros BCP un DAP leņķis pie P ir kopīgs un $\angle BCP = \angle DAP$ (ievilkta četrstūra ārējais leņķis). Tāpēc šie trijstūri ir līdzīgi, un no tā seko $PC : 1 = 2 : 4$. Tātad $PC = \frac{1}{2}$ un $CD = PD - PC = 4 - \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$.

11.uzdevums

Četras vienādas vienādsānu trapeces novietotas tā, ka to garākās pamata malas veido kvadrāta $PQRS$ diagonāles, kā parādīts attēlā. Punkt X dala PQ attiecībā $3 : 1$. Kāda daļa no kvadrāta ir iekrāsota?

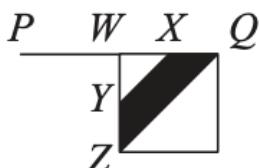
- (A) $\frac{5}{16}$, (B) $\frac{3}{8}$, (C) $\frac{7}{16}$, (D) $\frac{5}{12}$, (E) $\frac{1}{2}$.



Atbilde: B

Atrisinājums:

Zīmējumā parādīta kvadrāta labā augšējā ceturtdaļa. Iekrāsotais trapecveida četrstūris ir apzīmēts ar $QXYZ$, un W ir punkts, kurā pagarinājums ZY krustojas ar PQ .



Tā kā $QXYZ$ ir vienādsānu trapece, $\angle QZY = \angle ZQX = 45^\circ$. Taisnes YX un ZQ ir paralēlas, un $\angle XYW = \angle WXY = 45^\circ$. Tātad WYX un WZQ abi ir vienādsānu taisnleņķa trijstūri. Tā kā $\angle ZWQ = 90^\circ$ un Z atrodas kvadrāta $PQRS$ centrā, secinām, ka W ir nogriežņa PQ viduspunkts. Tāpēc $WX = XQ = \frac{1}{4}PQ$. Tātad līdzīgo trijstūru WYX un WZQ malu garumu attiecība ir $1 : 2$, un līdz ar to šo trijstūru laukumu attiecība ir $1 : 4$.

Tāpēc trapeces laukums $S_{QXYZ} = \frac{3}{4} \cdot S_{ZWQ} = \frac{3}{32} \cdot S_{PQRS}$, jo trijstūris ZWQ ir viena astotā daļa no $PQRS$. Tātad iekrāsotā daļa no kvadrāta ir $4 \times \frac{3}{32} = \frac{3}{8}$, kas ir atbilde (B).

12.uzdevums

Trapeces perimetrs ir 5 vienības un katras malas garums ir vesels skaitlis. Kādi ir divi mazākie trapeces leņķi?

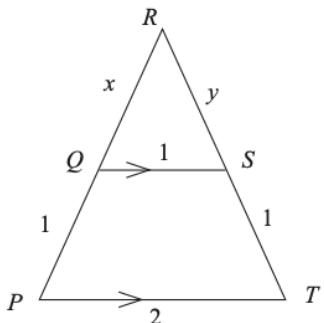
- (A) 30° un 30° , (B) 60° un 60° , (C) 45° un 45° , (D) 30° un 60° , (E) 45° un 90° .

Atbilde: B

Atrisinājums:

Aprakstītā situācija atbilst vienādsānu trapecei ar trim malām, kuru garums ir viena vienība, un

vienu malu, kuras garums ir divas vienības. Pagarinām abas trapeces sānu malas, lai izveidotu trijstūri, kā parādīts zīmējumā.



Taisnes PT un QS ir paralēlas. Tāpēc, izmantojot atbilstošos leņķus, zinām, ka $\angle TPR = \angle SQR$ un $\angle PTR = \angle QSR$. Tas parāda, ka trijstūriem PRT un QRS ir vienādi leņķi, tātad tie ir līdzīgi. Tāpēc

$$\frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

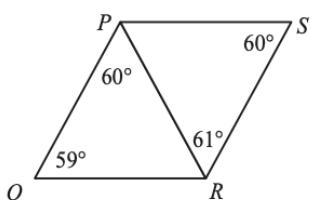
no kā iegūst $x = 1$, un

$$\frac{y}{y+1} = \frac{1}{2}$$

no kā iegūst $y = 1$. Tātad trijstūris QRS ir vienādmalu, un tā visi leņķi ir 60° . Tas nozīmē, ka arī leņķi pie trapeces pamata ir 60° .

13.uzdevums

Četrstūrī $PQRS$, $\angle PQR = 59^\circ$, $\angle RPQ = 60^\circ$, $\angle PRS = 61^\circ$ un $\angle RSP = 60^\circ$, kā redzams attēlā. Kurš no nogriežņiem ir garākais? (A) PQ , (B) PR , (C) PS , (D) QR , (E) RS .



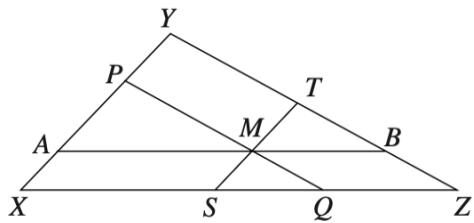
Atbilde: A

Atrisinājums:

Trijstūri ir līdzīgi, jo abos ir leņķi 59° , 60° , 61° . Trijstūrī īsākā mala vienmēr atrodas pretī mazākajam leņķim, tāpēc nogrieznis PR ir īsākā mala trijstūrī PQR , lai gan tas nav īsākā mala trijstūrī PRS ; tātad trijstūris PQR ir lielāks nekā trijstūris PRS un tam jāietver garākais nogrieznis. Trijstūrī garākā mala atrodas pretī lielākajam leņķim, tāpēc mala PQ ir garākā (pretī $\angle PRQ$, kas ir 61°).

14.uzdevums

Attēlā redzams trijstūris XYZ . Malām XY , YZ un XZ ir attiecīgi garumi 2, 3 un 4. Taisnes AMB , PMQ un SMT vilkas paralēli trijstūra malām tā, ka nogriežņu AP , QS un BT garumi ir vienādi. Kāds ir AP garums? (A) $\frac{10}{11}$, (B) $\frac{11}{12}$, (C) $\frac{12}{13}$, (D) $\frac{13}{14}$, (E) $\frac{14}{15}$.



Atbildē: C

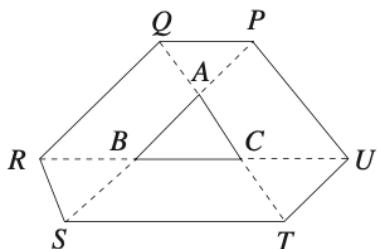
Atrisinājums:

Visi diagrammā redzamie trijstūri ir līdzīgi, jo tiem ir vienādi leņķi. Tāpēc katrā trijstūra malu attiecība ir 2 : 3 : 4. Vispirms aplūkosim trijstūri APM. Apzīmējam AP = x, tad AM = 2x. Aplūkojot trijstūri TBM, no BT = x sekos BM = $\frac{4x}{3}$. Četrstūris AMSX ir paralelogramms, jo AM ir paralēls XS un MS ir paralēls AX. Tātad AM = XS = 2x. Līdzīgi QZ = BM = $\frac{4x}{3}$. Aplūkojot trijstūra XYZ pamatu, XS + SQ + QZ = 4. Tātad $2x + x + \frac{4x}{3} = 4$ un līdz ar to $x = \frac{12}{13}$.

15.uzdevums

Attēlā dots trīsstūris ABC ar laukumu 12 cm^2 . Trijstūra malas ir pagarinātas līdz punktiem P, Q, R, S, T un U tā, kā parādīts, tā ka $PA = AB = BS$, $QA = AC = CT$ un $RB = BC = CU$. Kāds ir sešstūra PQRSTU laukums kvadrātcentimetros?

Ierakstīt atbildē veselu skaitli vai parastu daļu P/Q.



Atbildē: 156

Atrisinājums:

Aplūkosim trijstūrus ABC un AST. Leņķi CAB un TAS ir vienādi, jo tas ir tas pats leņķis, $SA = 2BA$ un $TA = 2CA$. Tādēļ trijstūri ABC un AST ir līdzīgi. To malu attiecība ir 1 : 2, un to laukumu attiecība ir $1 : 2^2 = 1 : 4$. Tāpēc trijstūra AST laukums ir $4 \times 12 \text{ cm}^2 = 48 \text{ cm}^2$, un tādēļ BSTC laukums ir $(48 - 12) \text{ cm}^2 = 36 \text{ cm}^2$.

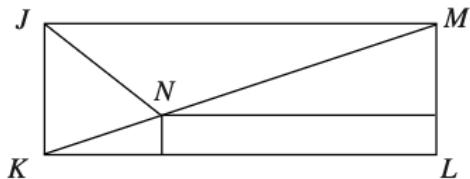
Līdzīgi var parādīt, ka katrs no laukumiem CUPA un AQRB arī ir 36 cm^2 . Aplūkosim trijstūrus ABC un APQ. Leņķi BAC un PAQ ir vienādi kā krustleņķi, $AB = AP$ un $AC = AQ$. Tādēļ trijstūri ABC un APQ ir vienādi (pazīme $m\ell m$), un tāpēc trijstūra APQ laukums ir 12 cm^2 . Līdzīgi var parādīt, ka $S_{BRS} = S_{CTU} = 12 \text{ cm}^2$. Tādēļ sešstūra PQRSTU laukums cm^2 ir $(3 \times 36 + 4 \times 12) = 156$.

16.uzdevums

Taisnstūrī JKLM leņķa $\angle KJM$ bisektrise krusto diagonāli KM punktā N, kā parādīts. Attālumi no N līdz malām LM un KL ir attiecīgi 8 cm un 1 cm. Malas KL garums ir $(a + \sqrt{b}) \text{ cm}$.

Kāda ir $a + b$ vērtība?

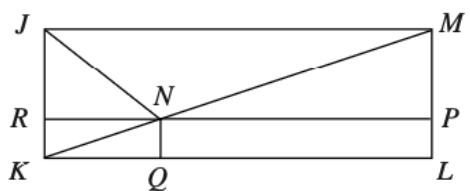
Ierakstīt atbildē veselu skaitli vai parastu noīsinātu daļu P/Q .



Atbilde: 16

Atrisinājums:

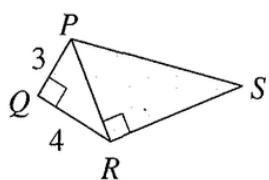
Ar P un Q apzīmējam punktus, kuros no N novilk tie perpendikuli pret taisnēm ML un KL krustojas ar šīm taisnēm, un pagarināsim taisni PN , lai tā krustotos ar JK punktā R , kā parādīts attēlā.



Tā kā JN ir leņķa $\angle MJK$ bisektrise, tad $\angle NJR = 45^\circ$. Tā kā leņķis $\angle JRN$ ir 90° , trijstūris $\triangle JRN$ ir vienādsānu un $JR = RN$. Apzīmējam nogriežņa RN garumu centimetros ar x . Tad nogriežņu JR un PM garumi arī ir x cm. Ievērojiet, ka trijstūri NKQ un MNP ir līdzīgi, jo tiem ir vienādi leņķi. Tāpēc $\frac{1}{x} = \frac{x}{8}$, un tādēļ $x = \sqrt{8}$, jo x ir pozitīvs. Nogriežņa KL garums ir vienāds ar nogriežņu NP un NR garumu summu. Tāpēc nogriežņa KL garums ir $(8 + \sqrt{8})$ cm. Tātad $a + b$ vērtība ir 16.

17.uzdevums

Attēlā dots četrstūris $PQRS$, kas veidots no diviem līdzīgiem taisleņķa trīsstūriem PQR un PRS . Malas PQ garums ir 3, malas QR garums ir 4, un $\angle PRQ = \angle PSR$. Kāds ir četrstūra $PQRS$ perimets? (A) 22, (B) $22\frac{5}{6}$, (C) 27, (D) 32, (E) $45\frac{1}{3}$.



Atbilde: A

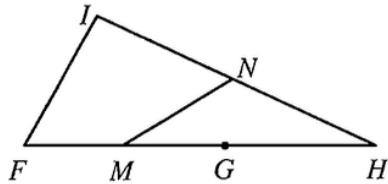
Atrisinājums:

Pitagora teorema rāda, ka $PR = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Tātad trijstūra PQR perimets ir 12. Tā kā trijstūri ir līdzīgi un $PR : PQ = 5 : 3$, redzam, ka trijstūra PRS perimets ir 20. Tādēļ $PQRS$ perimets ir $12 + 20 - 2 \cdot PR = 32 - 10 = 22$.

18.uzdevums

Attēlā dots trīsstūris FHI , un punkts G atrodas uz nogriežņa FH tā, ka $GH = FI$. Punkti M un N ir attiecīgi nogriežņu FG un HI viduspunkts. Leņķis $NMH = \alpha$. Kurš no sekojošajiem dod izteiksmi leņķim $\angle IFH$?

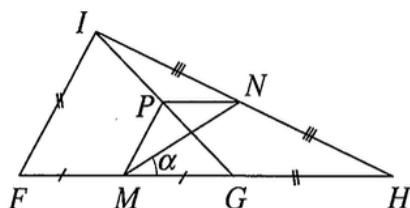
- (A) 2α , (B) $90^\circ - \alpha$, (C) $45^\circ + \alpha$, (D) $90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$, (E) 60° .



Atbildē: A

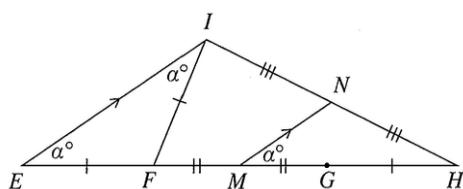
Atrisinājums-1:

Novelkam nogriezni IG . Ar P apzīmējam tādu punktu uz IG , ka PN ir paralēls FH . Leņķi PNM un NMH ir iekšējie šķērsleņķi, tāpēc $\angle PNM = \alpha$. Turklat trijstūris PNI ir līdzīgs trijstūrim GHI (abu trijstūru leņķi ir vienādi); tā kā N ir nogriežņa HI viduspunkts, tad $PN = \frac{1}{2}GH$. Arī $IP = \frac{1}{2}IG$, tātad $PG = \frac{1}{2}IG$. Tā kā $MG = \frac{1}{2}FG$, trijstūris PMG ir līdzīgs IFG , un jo īpaši $PM = \frac{1}{2}IF$. Tā kā $IF = GH$, tāpēc $PN = \frac{1}{2}GH = \frac{1}{2}IF = PM$, tātad trijstūris MNP ir vienādsānu un $\angle PMN = \angle PNM = \alpha$. Tā kā trijstūri PMG un IFG ir līdzīgi, iegūstam $\angle IFG = \angle PMG = \alpha + \alpha = 2\alpha$.



Atrisinājums-2:

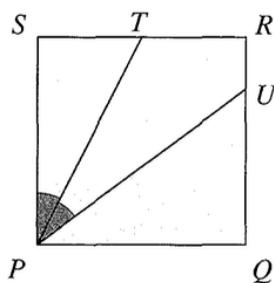
Pagarinām taisni HF līdz punktam E tā, lai $EF = GH$. Zināms, ka $FM = MG$, tāpēc punkts M ir nogriežņa EH viduspunkts. Tā kā N ir nogriežņa IH viduspunkts, trijstūri IHE un NHM ir līdzīgi. Tātad $\angle IEH = \angle NMH = \alpha$. Tā kā $EF = GH = FI$, trijstūris EFI ir vienādsānu. Tāpēc $\angle FIE = \angle IEF = \alpha$. Tādēļ pēc ārējā leņķa teorēmas $\angle IFG = \angle IEF + \angle FIE = \alpha + \alpha = 2\alpha$.



19.uzdevums

Attēlā dots kvadrāts $PQRS$ ar malu garumu 2. Punkts T ir malas RS viduspunkts, un punkts U atrodas uz nogriežņa QR tā, ka $\angle SPT = \angle TPU$. Kāds ir nogriežņa UR garums?

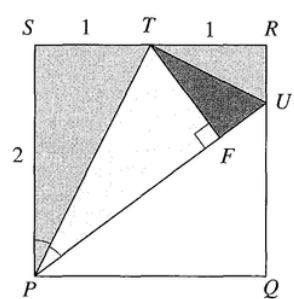
Ierakstīt atbildē veselu skaitli vai parastu daļu P/Q .



Atbilde: 1/2

Atrisinājums:

Ar F apzīmējam punktu uz PU , kuram $\angle TFP = 90^\circ$, un savieno T ar F un U , kā parādīts zīmējumā.



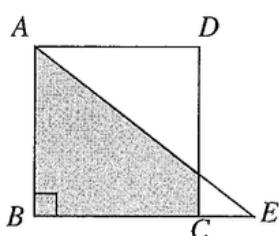
Tad trijstūri PTS un PTF ir kongruenti (pazīme $\ell m \ell$), tātad $TF = 1$. Tāpēc trijstūri TUR un TUF ir kongruenti (kā taisnleņķa trijstūri ar vienādu hipotenūzu un kateti), tātad $\angle RTU = \angle UTF$. Četri leņķi pie T ir leņķi uz taisnes RTS , tāpēc to summa ir 180° . No šejienes seko, ka $\angle RTU = \angle SPT$. Tādēļ trijstūri RTU un SPT ir līdzīgi (pazīme $\ell \ell$), un

$$\frac{UR}{RT} = \frac{TS}{SP} = \frac{1}{2}.$$

Tātad $UR = \frac{1}{2}$.

20.uzdevums

Attēlā dots kvadrāts $ABCD$ un taisnleņķa trijstūris ABE . Malas BC garums ir 3. Malas BE garums ir 4. Kāds ir iekrāsotās daļas laukums? (A) $5\frac{1}{4}$, (B) $5\frac{3}{8}$, (C) $5\frac{1}{2}$, (D) $5\frac{5}{8}$, (E) $5\frac{3}{4}$.



Atbilde: D

Atrisinājums:

Lai F ir taišņu AE un CD krustpunkts. Lai nogriežņa CF garums ir h . Tad, izmantojot līdzīgus

trijstūrus,

$$\frac{CF}{CE} = \frac{BA}{BE},$$

tātad

$$\frac{h}{1} = \frac{3}{4},$$

no kā iegūst $h = \frac{3}{4}$.

Iekrāsotais apgabals $ABCF$ ir trapece, tāpēc tā laukums ir

$$\frac{1}{2} \left(3 + \frac{3}{4} \right) \times 3 = \frac{45}{8},$$

kas ir $5\frac{5}{8}$.

