12. Polinomi un racionālas izteiksmes (2026-01-05 .. 2026-01-09)

1. Polinomu dalīšana ar atlikumu. Praktisks lietojums: Ja a ir $P(x)$ sakne, tad $P(x) = (x-a)Q(x)$ ($P(x)$ dalās ar $x-a$ bez atlikuma).
2. Polinomam $P(x)$ (ja tas nav identiski 0) ir ne vairāk kā n reālas saknes. Un ja diviem n-tās pakāpes polinomiem sakrīt vērtības vairāk nekā n punktos, tad tie ir identiski. Nepāra pakāpes polinomiem ir vismaz viena reāla sakne.
3. Vjeta teorēma 2. un 3.pakāpes polinomiem.

Definīcija:
Skaitlis a ir polinoma $P(x)$ sakne, ja $P(a) = 0$.
Piedevām, ja skaitlis a ir polinoma $P(x)$ sakne, tad

$$P(x) = (x-a)Q(x),$$

kur $Q(x)$ ir kaut kāds polinoms.

Svarīgi sekot līdzi, kādai skaitļu kopai pieder polinoma saknes. Iespējami dažādi gadījumi:

- Polinomam $P(x) = x^2 - 1$ ir 2 **veselas** saknes $x = 1$ un $x = -1$.
- Polinomam $P(x) = 4x^2 - 1$ nav **veselu** sakņu, taču tam ir 2 racionālas saknes $\frac{1}{2}$ un $-\frac{1}{2}$.
- Polinomam $P(x) = x^2 - 2$ nav **racionālu** sakņu, taču tam ir 2 reālas saknes $\sqrt{2}$ un $-\sqrt{2}$.
- Polinomam $P(x) = x^2 + 1$ nav **reālu** sakņu, taču tam ir 2 kompleksas saknes i un $-i$.

Sofijas Žermēnas identitāte:
Uzdevums - sadalīt reizinātājos polinomu $x^4 + 4$. Reālu sakņu tam nav, ar $x - a$ izdalīt nevar nevienam reālam a. Bet reizinātājos var sadalīt:

$$x^4 + 4 = (x^2+2)^2 - 4x^2 = (x^2+2-2x)(x^2+2-2x).$$

Vjeta teorēma 2.pakāpes polinomam:
Ja polinomam $x^2 + px + q = 0$ ir saknes x_1, x_2, tad izpildās $x_1 + x_2 = -p; \qquad x_1 \cdot x_2 = q.$

Vjeta teorēma 3.pakāpes polinomam:
Ja polinomam $x^2 + px^2 + qx + r = 0$ ir saknes x_1, x_2, x_3, tad izpildās

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p; \qquad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q; \qquad x_1x_2x_3 = -r.$$

Vjeta teorēma pārbaudāma, atverot iekavas izteiksmē: $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = 0$.

Uzdevums 1:
Definējam šādu funkciju $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$.
(**A**) Izteikt funkcijas $f(f(x))$ (divreiz pielieto šo funkciju) un arī $f(f(f(x)))$ (trīsreiz pielieto šo funkciju).
(**B**) Kāds ir funkciju $f(f(x))$ un $f(f(f(x)))$ definīcijas apgabals un vērtību apgabals?

Uzdevums 2:
Robotam uz vēdera ir displejs, kas var attēlot jebkuru racionālu daļskaitli $x = P/Q$, izņemot $x = 0 = 0/1$ un $x = 1 = 1/1$. Kad robots kustina kreiso kāju (**K**), tad daļskaitlis x uz šī displeja pārvēršas par $1/x$. Kad robots kustina labo kāju (**L**), tad daļskaitlis x pārvēršas par $1 - x$.

Robots pagāja 100 soļus uz priekšu (100 reizes izdarīja kustību pāri **K,L**). Izrādījās, ka beigās viņam uz vēdera ir skaitlis $\frac{22}{7}$. Kāds skaitlis tur bija pašā sākumā?

Uzdevums 3:
Vienādojumam $x^2 + ax + b = 0$ (kur a un b ir dažādi) ir divas saknes $x = a$ un $x = b$. Cik daudzus šādus vienādojumus var uzrakstīt?

Uzdevums 4:
Dots kubisks vienādojums $2x^3 - x^2 - 6x + 5 = 0$.
(A) Uzminēt kādu tā sakni a.
(B) Izdalīt $P(x) = 2x^3 - x^2 - 6x + 5$ ar $(x - a)$ atrastajai saknei a un atrast arī pārējās saknes.

Uzdevums 5:
Vienādojuma $x^3 - 14x^2 + 63x - 91 = 0$ saknes ir trijstūra malu garumi centimetros. Aprēķināt šī trijstūra laukumu.
Piezīme: Trijstūrim ar malām a, b, c laukums $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, kur $p = (a + b + c)/2$ ir trijstūra pusperimetrs (*Hērona formula*).

Uzdevums 6:
Vienādojumam $x^3 - px + 2019 = 0$, kur p — naturāls skaitlis, ir trīs reālas saknes x_1, x_2, x_3. Kāda var būt izteiksmes $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ vērtība?

Uzdevums 7:
a, b ir reāli skaitļi. Zināms, ka

$$a + b \in \mathbb{Q}, \qquad a^2 + b^2 \in \mathbb{Q}.$$

Pierādīt, ka $ab \in \mathbb{Q}$. Vai arī a, b ir racionāli skaitļi?

Uzdevums 8:
a, b ir reāli skaitļi un $b \neq 0$. Zināms, ka

$$a + b \in \mathbb{Q}, \qquad ab \in \mathbb{Q}, \qquad \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}.$$

Pierādīt, ka no $a + b \neq 0$ seko arī $a, b \in \mathbb{Q}$.