1. SKAITĻU TEORIJAS LAPA, 2022-10-22

1.1 Iesildīšanās

1.uzdevums:

(A) Atrast vismaz 13 pēc kārtas sekojošus saliktus skaitļus.

(B) Vai var atrast N pēc kārtas sekojošus saliktus skaitļus jebkuram naturālam N?

Atbilde:

(A) Var sareizināt visus pirmskaitļus no 2 līdz 13:

$$N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 30030.$$

Izrakstām skaitļus $N + 2, \ldots, N + 14$:

$$\begin{array}{ll} N+2 = 30032 & \text{dalās ar 2} \\ N+3 = 30033 & \text{dalās ar 3} \\ N+4 = 30034 & \text{dalās ar 2} \\ \ldots & \ldots \\ N+13 = 30043 & \text{dalās ar 13} \\ N+14 = 30044 & \text{dalās ar 2 un ar 7} \end{array}$$

Piemēram $N + 13$ dalās ar 13, jo gan N, gan 13 dalās ar 13.

Šī konstrukcija intervālam $[30032; 30044]$ negarantē, ka skaitļi ir iespējami mazi, jo eksistē daudzi citi intervāli, kuros ir 13 pēc kārtas sekojoši salikti skaitļi. Piemēram, intervāls $[114; 126]$ arī satur 13 pēc kārtas sekojošus saliktus skaitļus.

(B) Arī patvaļīgam N var atrast N pēc kārtas sekojošus saliktus skaitļus. Var izvēlēties naturālu skaitļu intervālu $[(N + 1)! + 2; (N + 1)! + (N + 1)]$.

Dirihlē Teorēma (Dirichlet): Ja a un d ir savstarpēji pirmskaitļi, tad bezgalīgā aritmētiskā progresijā $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots$ ir bezgalīgi daudz pirmskaitļu.

2.uzdevums: Pamatot, ka ir bezgalīgi daudzi pirmskaitļi formā $4n + 3$ (un arī formā $6n + 5$), neizmantojot Dirihlē teorēmu.

Atbilde:

Mēģinām atkārtot Eiklīda pierādījumu.

3.uzdevums: Pirmos desmit pirmskaitļus p, kas dod atlikumu 1, dalot ar 4, izteikt formā $p = a^2 + b^2$, kur $a, b \in \mathbb{N}$. Piemēram, $5 = 2^2 + 1^2$. (Fermā Ziemassvētku teorēma apgalvo, ka visus pirmskaitļus $p = 4n + 1$ var izteikt kā divu kvadrātu summu – turklāt tieši vienā veidā.

Pamatot arī, ka nevienu pirmskaitli p, kas dod atlikumu 3, dalot ar 4, nevar izteikt kā divu kvadrātu summu.

4.uzdevums: Par *Gausa veselajiem skaitļiem* sauc skaitļus formā $a + bi$ (kur $a, b \in \mathbb{Z}$ ir veseli). Par *Gausa pirmskaitļiem* sauc tādus Gausa veselos skaitļus, kurus nevar izteikt kā divu Gausa veselo skaitļu reizinājumu (ja vien kāds no reizinātājiem nav 1, -1, i vai $-i$). Piemēram, 2 nav Gausa pirmskaitlis, jo $2 = (1+i)(1-i)$.

Vai skaitļi $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + i$, 3, 5 ir Gausa pirmskaitļi?

Ieteikums: Ja apzīmējam $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (kompleksā skaitļa modulis), tad komplekso skaitļu reizināšanai izpildās sakarība:

$$|(a + bi)(c + di)| = |a + bi| \cdot |c + di|.$$

5.uzdevums:

(A) Pamatot šādu pakāpju starpības formulu visiem $n \geq 2$:

$$a^n - b^n = (a - b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b^1 + \ldots + a^1 b^{n-2} + b^{n-1}\right).$$

(B) Pamatot pakāpju summas formulu visiem $n \geq 1$:

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)\left(a^{2n} - a^{2n-1}b^1 + a^{2n-2}b^2 - \cdots - a^1 b^{2n-1} + b^{2n}\right).$$

6.uzdevums: Pamatot, ka jebkuriem diviem naturāliem m, n ir spēkā vienādība: $m \cdot n = \mathrm{gcd}(m,n) \cdot \mathrm{lcm}(m,n)$.

1.2 Klases uzdevumi

1.jautājums Rindā novietoti 36 slēdži ar numuriem no 1 līdz 36. Katrs slēdzis var būt ieslēgts vai izslēgts; sākumā tie visi ir izslēgti. Pirmajā solī pārslēdz pretējā stāvoklī visus slēdžus, kuru numuri dalās ar 1. Otrajā solī pārslēdz visus tos, kuru numuri dalās ar 2. Un tā tālāk - līdz 36.solī pārslēdz pretējā stāvoklī slēdžus, kuru numuri dalās ar 36. Cik daudzi slēdži kļūst ieslēgti pēc visu soļu pabeigšanas?

2.jautājums: Dots skaitlis $N = 420$. Atrast visu N pozitīvo dalītāju skaitu, visu pozitīvo dalītāju summu un visu pozitīvo dalītāju kvadrātu summu.

3.jautājums: Atrast mazāko naturālo skaitli M, kam ir tieši 16 dalītāji.

4.jautājums: Naturālam skaitlim n ir tieši 125 pozitīvi dalītāji (ieskaitot 1 un pašu n). Kādu visaugstākās pakāpes sakni noteikti var izvilkt no n, iegūstot naturālu rezultātu?

Definīcija: Par n-to Fermā skaitli ($n \geq 0$) sauc $F_n = 2^{2^n} + 1$.

5.jautāums: Pierādīt, ka naturāliem skaitļiem m un n, kam $m > n$, Fermā skaitlis $F_m - 2$ noteikti dalās ar F_n.

6.jautājums (BW.TST.2016.16): Kāda ir izteiksmes

$$\text{LKD}\left(n^2 + 3, (n+1)^2 + 3\right)$$

lielākā iespējamā vērtība naturāliem n?

1.3 Mājasdarba uzdevumi

Iesniegšanas termiņš: 2022.g. 5.novembris.

Kam iesūtīt: `kalvis.apsitis`, domēns `gmail.com`

1.uzdevums: Naturālu skaitli sauksim par *elegantu*, ja tā decimālajā pierakstā nav nevienas nulles un šis skaitlis dalās ar savu ciparu summu. (Eleganti ir visi viencipara skaitļi, kā arī, piemēram, skaitļi 36 un 322.) Pierādīt, ka ir bezgalīgi daudz elegantu skaitļu!

2.uzdevums: Zināms, ka trīsciparu skaitlis $\overline{abc}$ ir pirmskaitlis un ka vienādojumam $ax^2 + bx + c = 0$ ir divas reālas saknes. Vai var gadīties, ka šīs saknes ir **(a)** veseli skaitļi, **(b)** racionāli skaitļi?

3.uzdevums: Divi spēlētāji pamīšus raksta uz tāfeles naturāla skaitļa N naturālos dalītājus. Katrā gājienā jāievēro šādi noteikumi:

- nedrīkst atkārtoti rakstīt jau uzrakstītu dalītāju;
- nedrīkst rakstīt dalītāju, kurš ir tieši 2 vai 3 reizes lielāks vai mazāks nekā kāds jau uzrakstītais dalītājs.

Zaudē tas spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt?

Pamatot atbildi šādām vērtībām: $N = 144$ un $N = 216$.

4.uzdevums: Skaitļi p, q ir pirmskaitļi un $p > q$. Definējam $t = \gcd(p! - 1, q! - 1)$. Pierādīt, ka $t \leq p^{\frac{p}{3}}$.

5.uzdevums:

A. Atrast visus naturālos skaitļus n, ka jebkuram nepāra skaitlim a izpildās $4 \mid a^n - 1$.

B. Atrast visus naturālos skaitļus n, ka jebkuram nepāra skaitlim a, izpildās $2^{2017} \mid a^n - 1$.

6.uzdevums: Atrast visus veselo skaitļu trijniekus (a, b, c), kas apmierina vienādojumu:

$$5a^2 + 9b^2 = 13c^2.$$