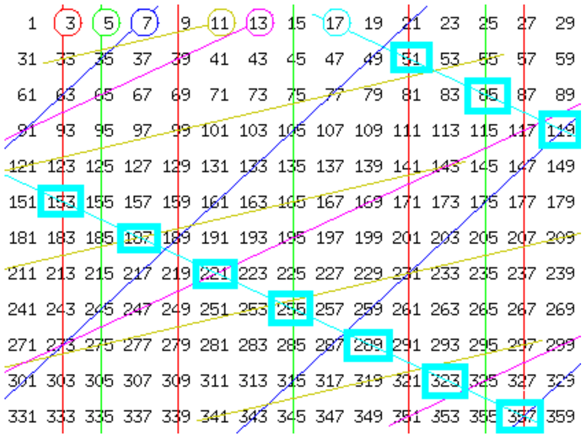
Dalāmība, Pirmskaitļi, LKD un MKD

Sacensības #2021.01

2021-02-18

Par šo LU NMS atbalstīto pasākumu
atbild kalvis.apsitis@gmail.com.



Attēls 1: Eratostēna režģis nepāru skaitļiem.

Uzdevums 1.1: Eratostēnam patīk veidot režģus šādi: Visus nepāra skaitļus viņš izkārto rindās pa 15; tad velk taisnes, uz kurām atrodas saliktie skaitļi, kas dalās ar 3, 5, 7, utt. Attēlā ar taisnstūrīšiem apvilkti visi nepāru saliktie skaitļi, kas dalās ar 17 (tie ir 51,85,119,153,187, ...). Pieņemsim, ka pēdējais skaitlis Eratostēna režģī ir 8999 (attēlā redzama tikai režģa augšdaļa).
Jautājums: Cik daudzi ar taisnstūrīti apvilkti skaitļi atradīsies tajā Eratostēna režģa kolonnā, kurā to ir vismazāk? Ierakstiet atbildē naturālu skaitli. (Par kolonnu saucam vertikāli, kur skaitļi rakstīti viens zem otra. Piemēram $1, 31, \ldots$ vai $3, 33, \ldots$.)

Uzdevums 1.2: Tabulā attēloti veselie skaitļi $[5041; 5160]$. Pirmajā solī izsvītro visus pāra skaitļus; otrajā solī – visus skaitļus, kuri dalās ar 3; trešajā solī – visus skaitļus, kuri dalās ar 5. Cik skaitļi palika neizsvītroti pēc šiem trim soļiem (citiem vārdiem, cik daudzi $x \in [5041; 5160]$ nedalās ne ar vienu no skaitļiem 2, 3 vai 5.
Jautājums: Ierakstīt atbildē neizsvītroto skaitļu skaitu.

Uzdevums 1.3: Sienāzis sākumā atrodas punktā ar koordinātēm $(0; 0)$. Vienā gājienā tas var pārvietoties no punkta $(x; y)$ uz kādu no četriem punktiem $(x - 35; y - 12)$, $(x + 35; y + 12)$, $(x - 12; y + 35)$ vai $(x + 12; y - 35)$. Pēc kāda laika sienāzis nonāk punktā $(1; y)$. Atrast mazāko pozitīvo y, kam tas ir iespējams.
Jautājums: Ierakstīt atbildē naturālu skaitli: mazāko y ar minēto īpašību.

Uzdevums 1.4: Atrast mazāko x vērtību, kurai visi skaitļi $\mathrm{LKD}(14, x)$, $\mathrm{LKD}(14, x + 1)$, $\mathrm{LKD}(15, x)$ un $\mathrm{LKD}(15, x + 1)$ ir lielāki par 1.
Jautājums: Ierakstīt naturālu skaitli x ar šo īpašību.

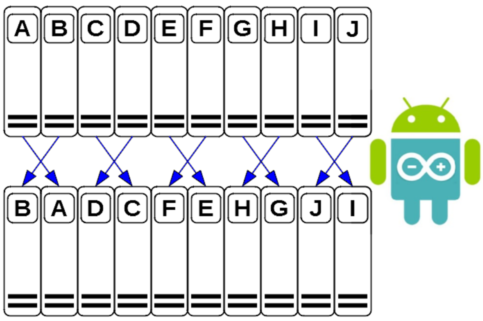
Uzdevums 1.5: Aprēķināt summu LKD$(10!, 1)$+LKD$(10!, 2)$+LKD$(10!, 3)$+...+LKD$(10!, 100)$, kur saskaita lielākos kopīgos dalītājus skaitlim 10! (desmit faktoriāls) ar pirmajiem 100 naturālajiem skaitļiem.

Uzdevums 1.6: Anna saliek 600 akmentiņus m kastītēs tā, ka ikvienā kastītē ir vienāds skaits dārgakmeņu. Kastīšu ir vairāk nekā viena un katrā kastītē ir vairāk nekā viens akmentiņš. Cik dažādām m vērtībām to var izdarīt?

Uzdevums 1.7: Atrast visu to skaitļu d summu, kuriem $d \mid 360$ un $d \mid 600$ (t.i. d ir skaitļa 360 **un** skaitļa 600 dalītājs).

Uzdevums 1.8: Atrast visu to skaitļu d summu, kuriem $d \mid 360$ vai $d \mid 600$ (t.i. d ir skaitļa 360 **vai** skaitļa 600 dalītājs).

Uzdevums 1.9: Ar faktoriāla palīdzību var konstruēt cik patīk garus intervālus, kuros nav neviena pirmskaitļa. Piemēram, ir zināms, ka intervālā $[14! + 2, \ldots, 14! + 14]$ ir 13 pēc kārtas sekojoši salikti skaitļi. Atrast līdzīgu intervālu $[x, x + 12] \subseteq [100; 200]$, kurā arī ir 13 skaitļi, no kuriem neviens nav pirmskaitlis.
Jautājums: Ierakstīt skaitli x, kur x ir pirmais saliktais skaitlis trīspadsmit saliktu skaitļu virknē.



Attēls 2: Sējumu pārkārtošana.

Uzdevums 1.10: Karantīnas dēļ bibliotēkā drīkst uzturēties vienīgi robots. Plauktā ir 10 enciklopēdijas sējumi, kas apzīmēti ar burtiem $A, \ldots, J$, pašā sākumā tie sakārtoti pēc alfabēta. Reizi stundā robots sējumus pārkārto: sējumu, kurš atradās pirmajā vietā, noliek vietā n_1, ..., sējumu, kurš atradās desmitajā vietā, noliek vietā n_{10}. ($n_1, \ldots, n_{10}$ ir dažādi naturāli skaitļi no 1 līdz 10 – tie robota dzīves laikā paliek nemainīgi.)
Pēc tieši T šādām pārkārtošanām sējumi atkal sakārtojas sākotnējā alfabētiskajā secībā. Atrast lielāko perioda T vērtību. Piemēram attēlā redzamajam robotam, kurš vienkārši blakusesošos sējumus apmaina vietām, $T = 2$.
Jautājums: Ierakstīt naturālu skaitli: lielāko iespējamo perioda vērtību.

Uzdevums 1.11: Attēlā 3 redzami vairāku pirmskaitļu apgriezto lielumu $1/p$ decimālpieraksti ($p = 3, 11, 37, 41, 7, \ldots$), kas ir bezgalīgas periodiskas decimāldaļas ar dažādiem periodiem.

$$
\begin{aligned}
1/3 &= \mathtt{0.333333...} = \mathtt{0.(3)}, \quad (\text{periods } T = 1)\\
1/11 &= \mathtt{0.090909...} = \mathtt{0.(09)}, \quad (\text{periods } T = 2)\\
1/37 &= \mathtt{0.027027...} = \mathtt{0.(027)}, \quad (\text{periods } T = 3)\\
1/41 &= \mathtt{0.0243902439...} = \mathtt{0.(02439)}, \quad (\text{periods } T = 5)\\
1/7 &= \mathtt{0.142857142857...} = \mathtt{0.(142857)}, \quad (\text{periods } T = 6)
\end{aligned}
$$

Attēls 3: Bezgalīgu periodisku decimāldaļu piemēri.

Atrast mazāko pirmskaitli p ar īpašību, ka $1/p$ ir periodiska decimāldaļa ar periodu $T = 4$ (viena un tā pati četru ciparu grupa bezgalīgi atkārtojas).
Jautājums: Ierakstīt pirmskaitli p ar minēto īpašību.

Uzdevums 1.12: Lielākais šobrīd zināmais pirmskaitlis ir $2^{82\,589\,933} - 1$ (pirmskaitļus, kas izsakāmi kā $2^p - 1$ sauc par Mersena pirmskaitļiem). Miķelītis uzrakstīja vēl lielāku skaitli $N = 2^{82\,589\,934} - 1$, kuram kāpinātājs 82589934 dalās ar 3. Miķelītis uzskata, ka uzrakstītais N arī ir pirmskaitlis un pārspēj zināmo pasaules rekordu. Pamatojiet, ka Miķelītim nav taisnība.
Jautājums: Ierakstīt atbildē mazāko pirmskaitli $p < N$, ar kuru noteikti dalās N.