4. SKAITĻU TEORIJAS LAPA, 2022-02-04

Definīcija: Ar n apzīmējam jebkuru naturālu skaitli un ar p – kādu pirmskaitli. Par skaitļa n p-valuāciju sauc tādu skaitli k, ka n dalās ar p^k, bet nedalās ar p^{k+1}. Šo faktu pieraksta, izmantojot grieķu burtu "nī":

$$\nu_p(n) = k.$$

Piemēri: Ja pirmskaitlis $p = 3$, tad

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu_3(1) = \nu_3(2) = \nu_3(4) = \nu_3(5) = \ldots = 0 \\ \nu_3(3) = \nu_3(6) = \nu_3(12) = \nu_3(15) = \ldots = 1 \\ \nu_3(9) = \nu_3(18) = \nu_3(36) = \nu_3(45) = \ldots = 2 \\ \nu_3(27) = \nu_3(54) = \ldots = 3 \\ \nu_3 81 = \ldots = 4 \\ \ldots \end{array} \right.$$

Teorēma (Adrien-Marie Legendre): Katram pirmskaitlim p un katram naturālam n p-valuācija ir aprēķināma pēc formulas

$$\nu_p(n!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor,$$

kur $\lfloor x \rfloor$ apzīmē apakšējo veselo daļu. (Izskatās, ka šajā vienādībā ir bezgalīga summa, bet jebkurām n un p vērtībām šajā summā ir tikai galīgs skaits nenulles saskaitāmo.)

Apgalvojums: Lielākā 2 pakāpe, ar ko dalās $n!$ ir $n - S_2(n)$, kur ar $S_2(n)$ apzīmēta n ciparu summa divnieku pierakstā.

Teorēma (Ernst Kummer) Doti skaitļi n un m, kas apmierina nevienādības $n \geq m \geq 0$ un arī pirmskaitlis p. Tad binomiālajam koeficientam C_n^m p-valuācija sakrīt ar pārnesumu skaitu, ja m saskaita ar $n - m$ skaitīšanas sistēmā ar bāzi p.

Šo teorēmu var pierādīt, izsakot binomiālo koeficientu:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

un izmantojot Ležandra teorēmu.

Teorēma (Lucas): Visiem nenegatīviem m un n, un jebkuram pirmskaitlim p, ir spēkā šāda sakarība:

$$\binom{m}{n} \equiv \prod_{i=0}^{k} \binom{m_i}{n_i} \pmod{p},$$

kur $n = n_k p^k + n_{k-1} p^{k-1} + \ldots + n_1 p + n_0$, bet $m = m_k p^k + m_{k-1} p^{k-1} + \ldots + m_1 p + m_0$.

Lemma 1 (Lifting the Exponent, LTE): Doti divi veseli skaitļi x un y un arī naturāls skaitlis $n \in \mathbb{N}$. Dots arī **nepāra** pirmskaitlis p. Izpildās šādi nosacījumi:

- x, y nedalās ar p.
- $x - y$ dalās ar p.

Tad izpildās vienādība:

$$\nu_p(x^n - y^n) = \nu_p(x - y) + \nu_p(n).$$

Lemma 2 (Lifting the Exponent, LTE): Doti divi veseli skaitļi x un y un arī naturāls skaitlis $n \in \mathbb{N}$. Dots arī **nepāra** pirmskaitlis p. Izpildās šādi nosacījumi:

- n ir nepāra skaitlis.
- x, y nedalās ar p.
- $x + y$ dalās ar p.

Tad izpildās vienādība:

$$\nu_p(x^n + y^n) = \nu_p(x + y) + \nu_p(n).$$

Lemma 3 (Lifting the Exponent, LTE): Skaitļi x un y ir divi veseli nepāra skaitļi un n ir pozitīvs **pāra** skaitlis. Tad

$$\nu_2(x^n - y^n) = \nu_2(x - y) + \nu(x + y) + \nu_2(n) - 1.$$

Ja savukārt n ir pozitīvs **nepāra** skaitlis, tad

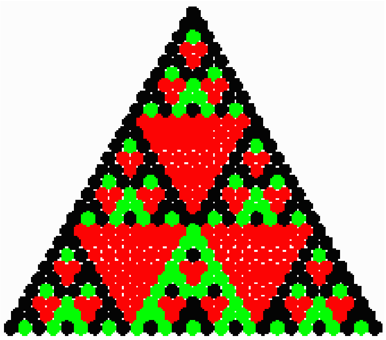
$$\nu_2(x^n - y^n) = \nu_2(x - y).$$

4.1 Iesildīšanās

1.uzdevums: Ar cik nullēm beidzas skaitlis 2022! (2022 faktoriāls, t.i. visu skaitļu no 1 līdz 2022 reizinājums)?

2.uzdevums: Ar kādu lielāko skaitļa 2 pakāpi dalās kombinācija C_{2022}^{415}?

3.uzdevums: Attēlā dots Paskāla trijstūris (k-tais elements šī trijstūra n-tajā rindiņā attēlo, cik dažādos veidos var izvēlēties k elementus no n elementu kopas). Šis Paskāla trijstūris izkrāsots 3 krāsās (aplītis ir sarkans, ja tajā vietā ierakstītais skaitlis dalās ar 3; aplītis ir melns, ja dod atlikumu 1, dalot ar 3, aplītis ir zaļš, ja dod atlikumu 2, dalot ar 3). Atrast, kurš ir otrs melnais aplītis šī Paskāla trijstūra 1000 rindiņā: Kuram mazākajam $k > 0$ ir spēkā sakarība $C_{1000}^{k} \equiv 1 \pmod 3$?



4.uzdevums: Atrast mazāko k vērtību, kurai $11^k - 1$ beidzas ar 4 nullēm.

5.uzdevums: Atrast valuācijas pirmskaitļu vērtībām $p = 5$ un $p = 7$:

$$\left\{\ \nu_5\left((2-1)\cdot(2^2-1)\cdot(2^3-1)\cdot\ldots\cdot(2^{1000}-1)\right), \nu_7\left((2-1)\cdot(2^2-1)\cdot(2^3-1)\cdot\ldots\cdot(2^{1000}-1)\right).\right.$$

6.uzdevums (UKMO2013): Skaitlis pierakstīts decimālās sistēmas bāzē satur 3^{2013} ciparus 3; citu ciparu skaitļa pierakstā nav. Atrast augstāko skaitļa 3 pakāpi, kas dala šo skaitli.

4.2 Klases uzdevumi

1.uzdevums: Pamatot, ka harmoniskas rindas pirmo n locekļu summa:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$$

nevar būt vesels skaitlis, ja $n > 1$.

2.uzdevums: Cik kopā $\{0, 1, 2, \ldots, 2012\}$ ir elementu k, kam C_{2012}^k: dalās ar 2012? Ar C_n^k apzīmējam kombinācijas no n pa k jeb

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

3.uzdevums: Atrast visus naturālo skaitļu (k, n) pārus, kuriem izpildās

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

4.uzdevums (IMO2000.5): Vai eksistē naturāls n, ka skaitlim n ir tieši 2000 dalītāji, kuri ir pirmskaitļi, un $2^n + 1$ dalās ar n. (Skaitlis n drīkst dalīties arī ar pirmskaitļu pakāpēm.)

5.uzdevums: Atrast veselu skaitli n, kam $100 \leq n \leq 1997$, ka n dala $2^n + 2$.

6.uzdevums (LV.TST.1992.12.1): Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz naturālu skaitļu kvadrātu, kurus var iegūt, divas reizes pēc kārtas uzrakstot kādu naturālu skaitli.

4.3 Mājasdarba uzdevumi

Iesniegšanas termiņš: 2023.g. 25.februāris.

Kam iesūtīt: `kalvis.apsitis`, domēns `gmail.com`

1.uzdevums (BW.2015.16): Ar $P(n)$ apzīmējam lielāko pirmskaitli, ar ko dalās n. Atrast visus naturālos skaitļus $n \geq 2$, kam

$$P(n) + \lfloor \sqrt{n} \rfloor = P(n+1) + \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor.$$

Piezīme: $\lfloor x \rfloor$ apzīmē lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz x.

2.uzdevums (BW.2015.17): Atrast visus naturālos skaitļus n, kuriem $n^{n-1} - 1$ dalās ar 2^{2015}, bet nedalās ar 2^{2016}.

3.uzdevums (BW.2016.5): Dots pirmskaitlis $p > 3$, kuram $p \equiv 3 \pmod 4$. Dotam naturālam skaitlim a_0 virkni $a_0, a_1, \ldots$ definē kā $a_n = a_{n-1}^{2^n}$ visiem $n = 1, 2, \ldots$. Pierādīt, ka a_0 var izvēlēties tā, ka apakšvirkne $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ nav konstanta pēc moduļa p nevienam naturālam N.

4.uzdevums (BW.TST.2015.15): Ar $\omega(n)$ apzīmēsim dažādo pirmskaitļu skaitu, ar ko dalās n. Pierādīt, ka ir bezgalīgi daudz tādu naturālu skaitļu n, kuriem $\omega(n) < \omega(n+1) < \omega(n+2)$.

5.uzdevums (BW.2015.17): Pirmskaitlim p un naturālam skaitlim n apzīmējam ar $f(p, n)$ lielāko veselo skaitli k, kuram $p^k \mid n!$. Dots fiksēts pirmskaitlis p, bet m un c ir jebkādi naturāli skaitļi. Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudzi tādi naturāli skaitļi n, kuriem $f(p, n) \equiv c \pmod m$.

6.uzdevums: Pierādiet, ka eksistē bezgalīgi daudz naturālu skaitļu n, kuriem skaitlis $2^n + 2$ dalās ar n.