LATVIAN STATE MATHEMATICAL OLYMPIAD

The problems of Latvian state olympiad (2022-03-11). The originals with solutions in Latvian: https://bit.ly/3L9oT7L.

9 Клас

Problem 9.1: Prove that all real numbers x and y satisfy the inequality:

$$x^2 + 5y^2 + 4xy - 6y + 9 \geq 0.$$

Завдання 9.1 Докажіть, що для будь-яких дійсних чисел x і y виконается нерівність

$$x^2 + 5y^2 + 4xy - 6y + 9 \geq 0.$$

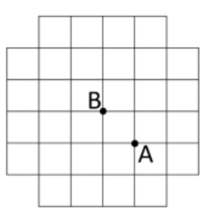
Problem 9.2: In an isosceles triangle the vertex angle $\sphericalangle ABC = \beta$. A circle is drawn with the center in A and radius AC; it intersects the sides AB and BC in the points D and E respectively. It is known that $\sphericalangle ADE = 12\beta$. Find angle β.

Завдання 9.2: Рівнобедрений трикутник має кут при вершині $\sphericalangle ABC = \beta$. Із точці A як із центра проведено коло з радіусом AC, воно перетинає сторони AB і BC у точках D і E відповідно. Відомо що $\sphericalangle ADE = 12\beta$. Знайдіть кут β.

Problem 9.3: Prove that for any positive integer $K > 1$ there exists some positive integer divisible by 7 and the sum of its digits is K.

Завдання 9.3: Докажіть, що для будь-якого натурального числа $K > 1$, існує натуральне число, що ділиться на 7 і сума його цифр дорівнює K.

Problem 9.4: A curious tourist wants to travel on the streets of a city (shown as the sides of square cells in the figure). He goes from intersection A to intersection B walking the longest possible distance without returning to the same intersection twice. What is the longest possible path from A to B, if the side of each square is 1.



Завдання 9.4: Допитливий турист хоче пересуватися вулицями міста (зображені у плані сторонами клітин) з перехрестя A до перехрестя B, щоб пройти найбільшу відстань і не повертаючись у перехрестях більше одного разу. Яка є найбільша довжина подорожі, якщо сторона клітини дорівнює 1.

Problem 9.5: Prove that there is no triangle such that its heights are 19, 37 and 41 units long.

Завдання 9.5: Докажіть, що не існує трикутнік якій має довжини висот 19, 37 та 41 одиниць.

10 Клас

Problem 10.1: Find all pairs of real numbers $(x; y)$ satisfying the system of equations:

$$\begin{cases} x^2 = y + 2 \\ y^2 = x + 2 \end{cases}$$

Завдання 10.1: Знайти усі дійсні рішення системи рівнянь.

$$\begin{cases} x^2 = y + 2 \\ y^2 = x + 2 \end{cases}$$

Problem 10.2: On the side AB of regular triangle ABC we construct a semicircle which is outside the triangle. Points D and E are on this semicircle and they subdivide the arc AB into three equal arcs. Prove that the lines CD and CE cut the side AB into three line segments of equal length.

Завдання 10.2: ABC є рівносторонній трикутник. Зовні нього на стороні AB побудовано півколо. На півколі відзначені точки D і E, які ділять дугу AB на три рівні дуги. Докажіть, що прямі CD та CE розрізають сторону AB на три відрізки рівної довжини.

Problem 10.3: Prove that for any positive integer $K > 1$ there exists some positive integer divisible by 13 and the sum of its digits is K.

Завдання 10.3: Докажіть, що для будь-якого натурального числа $K > 1$, існує натуральне число, що ділиться на 13 і сума його цифр дорівнює K.

Problem 10.4: Consider the cubic equation: $x^3 - 40x^2 + 511x - 2040 = 0$. It has three roots that are the side lengths of some triangle expressed in centimeters. Find the area of this triangle!

Завдання 10.4: Три корені кубічного рівняння $x^3 - 40x^2 + 511x - 2040 = 0$ є довжини сторін трикутника у сантиметрах. Знайдіть площу цього трикутника!

Problem 10.5: In the Hollywood diet one should eat exactly three sweet curd cheese bars "Kārums" in every interval of seven consecutive days. In the Bollywood diet one should eat exactly five sweet curd cheese bars "Kārums" in every interval of eleven consecutive days. What is the largest number of days that one can observe both diets at the same time?

Problem 10.5: Дієта Голлівуду наказує з'їсти три сирні сирки "Kārums" у кожному інтервалі із семи днів підряд, а дієта Болливуду наказує з'їсти п'ять сирних сирків "Kārums" в кожному інтервалі із одинадцяти послідовних днів. Яке найбільше число днів можна дотримуватися обох дієт одночасно?

11 Клас

Problem 11.1: Does there exist a natural number satisfying the following three conditions?

- When it is multiplied by 2, the result is the square of some positive integer.
- When it is multiplied by 3, the result is the cube of some positive integer.
- When it is multiplied by 5, the result is the 5th power of some positive integer.

Problem 11.2: For a given quadrangle $ABCD$, denote the midpoints of its sides AB and CD by M and N respectively. The perpendicular bisectors of the segments AD, BC and MN all intersect in a single point. Prove that $AB = CD$.

Problem 11.3: Number 16 is written on a sheet of paper. After that numbers are added according to these rules:

- If there is number x written on the page, then we can also write x^2.

- If there are numbers x and y on the page, then we can also write the number $|x-y|+1$.

Is it possible to write the number 2022 after several steps. (The numbers already written on the page are never erased or modified.)

Problem 11.4: Consider the cubic equation: $x^3 - 54x^2 + 865x - 3480 = 0$. It has three roots that are the side lengths of some triangle expressed in centimeters. Find the area of this triangle!

Problem 11.5: A natural number N is named *amusing*, iff the product of every N consecutive numbers is divisible by N^2. Which numbers are not amusing?

12 Клас

Problem 12.1: Find the following equation in real numbers $x^2 - \cos x + 1 = 0$.

Problem 12.2: The trapezoid $ABCD$ has two bases AD and BC. The bisectors of angles $\sphericalangle BAD$ and $\sphericalangle ABC$ intersect in E, but the bisectors of angles $\sphericalangle BCD$ and $\sphericalangle CDA$ intersect in F. Prove that $EF = \frac{|AD+BC-AB-CD|}{2}$.

Problem 12.3: Prove that the sum of cubes of two or more successive positive integers cannot be a prime number.

Problem 12.4: Consider the cubic equation: $x^3 - 14x^2 + 63x - 91 = 0$. It has three roots that are the side lengths of some triangle expressed in centimeters. Find the area of this triangle!

Problem 12.5: A square containing 9×9 unit squares (named *cells*) is subdivided into 9 polygons. Every polygon consists of 9 cells, and every polygon is colored in a different color. It is known that in the large square every row and every column contains cells of precisely three different colors. Show that all the nine polygons are squares of size 3×3.