Algebra: Vienādojumi, funkcijas, grafiki

1.uzdevums (LV.NOL.2022.10.2)

Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu $x^3 - 4x^2 + 8 = 0$.

Atrisinājums:
Uzminam, ka $x = 2$ ir dotā vienādojuma sakne, jo $8 - 16 + 8 = 0$. Izdalot polinomus (skat. 5.att.), iegūstam $(x-2)\left(x^2 - 2x - 4\right) = 0$.

$$
\begin{array}{l}
\;\;(x^3 - 4x^2 + 8) : (x - 2) = x^2 - 2x - 4 \\
-\underline{x^3 - 2x^2} \\
\qquad -2x^2 + 8 \\
\qquad -\underline{-2x^2 + 4x} \\
\qquad\qquad -4x + 8 \\
\qquad\qquad -\underline{-4x + 8} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Katru reizinātāju pielīdzinot nullei, iegūstam, ka $x - 2 = 0$ vai $x^2 - 2x - 4 = 0$. Vienādojumu $x^2 - 2x - 4 = 0$ risinām, atrodot diskriminantu $D = 4 + 16 = 20$, tad $x_{2;3} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$. Tātad esam ieguvuši, ka dotā vienādojuma saknes ir $x_1 = 2$ un $x_{2;3} = 1 \pm \sqrt{5}$.

2.uzdevums (LV.NOL.2010.9.1)

Atrodiet kaut vienu kvadrātvienādojumu ar veseliem koeficientiem, kam viena no saknēm ir (**A**) $\sqrt{2} + 1$, (**B**) $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$.

Piezīme. Katrā uzdevuma daļā runā par **citu** kvadrātvienādojumu.

Atrisinājums:

(**A**) piemēram, $x^2 - 2x - 1 = 0$.

(**B**) ievērojam, ka $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} + 2)^2} = \sqrt{3} + 2$. Tāpēc der, piemēram, vienādojums $x^2 - 4x + 1 = 0$.

3.uzdevums (LV.AMO.2004.8.1)

Dots, ka kvadrātvienādojuma $x^2 + px + q = 0$ saknes ir x_1 un x_2, bet kvadrātvienādojuma $x^2 + ax + b = 0$ saknes ir x_1^2 un x_2^2. Izsacīt a un b ar p un q palīdzību.

Atrisinājums:

No Vjeta teorēmas $b = x_1^2 \cdot x_2^2 = \left(x_1 x_2\right)^2 = q^2$,

bet $a = -\left(x_1^2 + x_2^2\right) = 2x_1x_2 - \left(x_1 + x_2\right)^2 = 2q - p^2$.

4.uzdevums (LV.AMO.2015.8.1)

Nosaki, vai izteiksmes $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$ vērtība ir racionāls skaitlis!

Atrisinājums:

Pārveidojam doto izteiksmi:

$$\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+2\sqrt{5}+1}-\sqrt{(\sqrt{5})^2-2\sqrt{5}+1}=\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}=$$
$$=\left|\sqrt{5}+1\right|-\left|\sqrt{5}-1\right|=\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1=2$$

Izteiksmes vētība ir racionāls skaitlis, jo 2 ir racionāls.

5.uzdevums (LV.VOL.2015.11.1)

Kvadrātvienādojuma

$$(1+\sqrt{5})x^2-\sqrt[4]{7}\cdot(1+\sqrt{5})^2x+\sqrt[4]{7}=0$$

saknes ir skaitļi a un b. Pierādīt, ka izteiksmes $a^4b+ab^4+3a^3b^2+3a^2b^3+16a^4b^3+16a^3b^4$ vērtība ir vesels skaitlis!

Atrisinājums:

No Vjeta teorēmas izriet, ka

$$\begin{cases} a+b=\sqrt[4]{7}\cdot(1+\sqrt{5}) \\ ab=\frac{\sqrt[4]{7}}{1+\sqrt{5}} \end{cases}$$

Pārveidojam doto izteiksmi:

$a^4b+ab^4+3a^3b^2+3a^2b^3+16a^4b^3+16a^3b^4=ab\left(a^3+b^3+3a^2b+3ab^2+16a^3b^2+16a^2b^3\right)=$
$=ab\left((a+b)^3+16a^2b^2(a+b)\right)=\frac{\sqrt[4]{7}}{1+\sqrt{5}}\cdot\left(\sqrt[4]{7^3}\cdot(1+\sqrt{5})^3+16\cdot\frac{\sqrt[4]{7^2}\cdot\sqrt[4]{7}\cdot(1+\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})^2}\right)=$

$=7\cdot(1+\sqrt{5})^2+\frac{16\cdot 7}{(1+\sqrt{5})^2}=7\cdot\left((6+2\sqrt{5})+\frac{16}{6+2\sqrt{5}}\right)=$

$=7\cdot\frac{36+24\sqrt{5}+20+16}{6+2\sqrt{5}}=7\cdot 12\cdot\frac{6+2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}}=84.$

Tā kā skaitlis 84 ir vesels skaitlis, tad prasītais ir pierādīts.

6.uzdevums (LV.VOL.2021.11.1)

Pierādīt, ka $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}-\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}=2$.

Atrisinājums:

Ievērosim, ka $(\sqrt{3}+1)^3=6\sqrt{3}+10$ un $(\sqrt{3}-1)^3=6\sqrt{3}-10$. Līdz ar to

$$\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}-\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}=(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)=2$$

Un ievērojam, ka 2 ir vesels skaitlis.

7.uzdevums (LV.VOL.2006.10.4)

Pierādīt, ka $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+...+\frac{1}{\sqrt{2005}+\sqrt{2006}}>21,8$

Atrisinājums:

Ievērojam, ka

$$S=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{2004}+\sqrt{2005}}+\frac{1}{\sqrt{2005}+\sqrt{2006}}=$$
$$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+...+(\sqrt{2005}-\sqrt{2004})+(\sqrt{2006}-\sqrt{2005})=$$

$=\sqrt{2006}-1\geq 43,7$. Tā kā **šajā** summā katrs nākošais saskaitāmais mazāks par iepriekšējo, tad uzdevuma formulējumā minēto saskaitāmo summa ir lielāka par $\frac{1}{2}S$, tātad lielāka par $21,85$.

8.uzdevums (LV.NOL.2004.9.4)

Uz tāfeles uzrakstīti 2004 skaitļi; viens no tiem ir 1. Ar vienu gājienu atļauts nodzēst vienu skaitli un tā vietā uzrakstīt skaitli $a+b-c$, kur $a,\ b$ un c - kaut kādi trīs no nenodzēstajiem skaitļiem. Vai, atkārtojot šādus gājienus vairākas reizes, var panākt, lai uz tāfeles vienlaicīgi būtu uzrakstīti 2004 skaitļi, kas visi vienādi ar 1?

Atrisinājums:

Jā, var.
Ja pieci no sākotnējiem skaitļiem ir $x;\ y;\ z;\ t;\ 1$, aizstājam x un y ar $a=z+t-1$. Tālāk z un t aizstājam ar $1+a-a=1$. Tālāk a un a aizstājam ar $1+1-1=1$. Tagad ir vismaz 5 vieninieki. Līdzīgi pakāpeniski pārvēršam par vieniniekiem visus skaitļus, kas tādi vēl nav.

9.uzdevums (LV.VOL.2023.12.3)

Uz tāfeles uzrakstīti 100 reāli pozitīvi skaitļi (ne obligāti dažādi). Ja uz tāfeles ir uzrakstīti skaitļi x un y (ne obligāti dažādi), tad uz tās ir uzrakstīts arī skaitlis $\frac{2xy}{x+y}$. Kāda var būt visu 100 uzrakstīto skaitlu summa, ja zināms, ka viens no uzrakstītajiem skaitliem ir 73?

Atrisinājums:

Pierādīsim, ka visi 100 uzrakstītie skaitļi ir vienādi.

Pieņemsim pretējo, ka uz tāfeles ir atrodami vismaz divi dažādi skaitļi. Sakārtosim visus skaitļus nedilstošā secībā un ņemsim divus ar mazākajām vērtībām $a < b$ (a ir vismazākais skaitlis un b ir otrs mazākais skaitlis). Pēc uzdevuma nosacījuma uz tāfeles ir rakstīts arī skaitlis $\frac{2ab}{a+b}$. Parādīsim, ka $a < \frac{2ab}{a+b} < b$, kas būs pretruna ar to, ka a un b ir divi mazākie skaitļi.

Lai pamatotu, ka $a < \frac{2ab}{a+b}$, reizinām abas nevienādības puses ar $a + b > 0$ un iegūstam, ka $a^2 + ab < 2ab$ jeb $a^2 < ab$, kas ir patiesa nevienādība, jo $a < b$.

Līdzīgi, lai pamatotu, ka $\frac{2ab}{a+b} < b$, reizinām abas nevienādības puses ar $a + b > 0$ un iegūstam nevienādību $2ab < ab + b^2$, kas ir ekvivalenta patiesai nevienādībai $ab < b^2$, jo $a < b$.

Tātad visi uzrakstītie skaitļi ir vienādi un to summa ir $73 \cdot 100 = 7300$.

Piezīme. Skaitlis $\frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ ir skaitļu a un b vidējais harmoniskais.

10.uzdevums (LV.AMO.2015.9.1)

No visiem tādiem skaitļiem, kuru starpība ir 2015, noteikt tos divus, kuru reizinājums ir vismazākais!

Atrisinājums:

Dotos skaitļus apzīmējam ar x un $x + 2015$. Šo skaitļu reizinājums ir $x \cdot (x + 2015)$. Apskatām funkciju $f(x) = x \cdot (x + 2015) = x^2 + 2015x$. Funkcijas grafiks ir parabola ar zaru vērsumu uz augšu. Parabolas virsotnes abscisa $x_0 = \frac{-2015}{2} = -1007.5$ ir punkts, kurā funkcija sasniedz vismazāko vērtību. Tātad meklētie divi skaitļi ir -1007.5 un 1007.5.