4.uzdevums: Monētu met n reizes un katrreiz pieraksta rezultātu "C" (cipars) vai "Ģ" (ģerbonis). Pirmais spēlētājs uzvar, ja visu metienu virknītē nekad nav divi ģerboņi pēc kārtas (virknīte nesatur "ĢĢ"). Apzīmējam ar a_n to, cik ir virknīšu garumā n bez "ĢĢ" (jeb cik dažādos veidos 1.spēlētājs var uzvarēt).
(A) Atrast rekurentu sakarību, kas a_n izsaka ar iepriekšējiem virknes locekļiem.
(B) Atrast varbūtību, ar kuru pirmais spēlētājs uzvar, ja monētu met tieši 6 reizes (par varbūtību saucam dalījumu starp to monētas uzmešanas veidu skaitu, kuros uzvar 1.spēlētājs, pret visu iespējamo monētu uzmešanas veidu skaitu).

Atrisinājums:
(A) Atrod pirmos dažus virknes locekļus: $a_1 = 2$ (ja met vienreiz, der jebkurš no diviem iznākumiem), $a_2 = 3$ (ja met divreiz, tad no četriem iznākumiem "CC", "CĢ", "ĢC", "ĢĢ" neder viens).
Ja $n > 2$, tad izsaka a_n ar iepriekšējiem virknes locekļiem:

- Ja sākumā uzkritis "C", tad pārējos $n-1$ metienus var izdarīt a_{n-1} dažādos veidos, lai uzvarētu 1.spēlētājs (jāpanāk, lai $n-1$ virknītē nebūtu "ĢĢ").
- Ja sākumā uzkritis "Ģ", tad 1.spēlētājam nav iespējams turpināt a_{n-1} veidos (jo tūlīt varētu parādīties vēl viens "Ģ"). Tādēļ prasām, lai aiz pirmā "Ģ" tūlīt sekotu "C". Atlikušos $n-2$ metienus var izdarīt a_{n-2} veidos, lai 1.spēlētājs uzvarētu.

Esam ieguvuši rekurenci: $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (ja $n > 2$).

(B) Ierakstām tabulā iegūtās vērtības $a_1, a_2, \ldots$ un arī varbūtības, ko iegūst, dalot 1.spēlētājam "veiksmīgo" virkņu skaitu a_n ar visu virkņu skaitu 2^n.

n	a_n	2^n	uzvaras varbūtība p
1	2	2	$2/2 = 1$
2	3	4	$3/4 = 0.75$
3	5	8	$5/8 = 0.625$
4	8	16	$8/16 = 0.5$
5	13	32	$13/32 \approx 0.4063$
6	21	64	$21/64 \approx 0.3281$

3.uzdevums (LV.AMO.2019.12.4): Sporta nometnē ir 100 skolēni. Ar N apzīmējam, cik veidos šos 100 skolēnus var sadalīt 50 pāros (pāru secība un arī skolēnu secība pārī nav svarīga). Ar kādu lielāko trijnieka pakāpi dalās N?

Atrisinājums: Aprēķinām N, izmantojot reizināšanas likumu. Visjaunākajam skolēnam pāri var atrast 99 veidos. No atlikušajiem jaunākajam skolēnam pāri var atrast 97 veidos. Pēdējam skolēnam paliek tieši 1 pāris. Pilnu variantu skaitu izsaka reizinājums:

$$N = 99 \cdot 97 \cdot 95 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1\,.$$

Grupējam reizinātājus atkarībā no trijnieka pakāpes, ar kuru tie dalās.

- $(99-3)/6+1=17$ reizinātāji dalās ar 3: $3 \cdot 9 \cdot 15 \cdot 21 \cdot 27 \cdot \ldots \cdot 99$.
- $(99-9)/18+1=6$ reizinātāji dalās ar 3^2: $9 \cdot 27 \cdot 45 \cdot 63 \cdot 81 \cdot 99$
- $(81-27)/54+1=2$ reizinātāji dalās ar 3^3 $(27, 81)$.
- Viens reizinātājs dalās ar 3^4 (81).

Saskaitot šīs pakāpes $17+6+2+1=26$.

6.uzdevums (LV.AMO.2023.9.2): Ja divciparu skaitlim $\overline{ab}$ galā pieraksta divciparu skaitli $\overline{cd}$, tad iegūtais četrciparu skaitlis dalās ar 13. Zināms, ka $12a+9b$ dalās ar 13. Kāds var būt skaitlis $\overline{cd}$?

Atrisinājums: Skaitlis $\overline{cd}$ var būt $13; 26; 39; 52; 65; 78$ vai 91. Apzīmējam iegūto četrciparu skaitli ar $\overline{abcd}$. Ekvivalenti pārveidojam šo skaitli:

$$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d = (12a+9b) + (10c+d) + 988a + 91b =$$

$$= (12a+9b) + (10c+d) + 13 \cdot 76a + 13 \cdot 7b\,.$$

Tā kā saskaitāmie $13 \cdot 76a$ un $13 \cdot 7b$ dalās ar 13 un no dotā $12a+9b$ dalās ar 13, tad, lai viss skaitlis dalītos ar 13, arī $10c+d=\overline{cd}$ jādalās ar 13. Tātad skaitlis $\overline{cd}$ var būt jebkurš skaitļa 13 daudzkārtnis, tas ir, $13; 26; 39; 52; 65; 78$ vai 91.

7.uzdevums (LV.AMO.2019.9.4): Ja naturāla sešciparu skaitļa visus nepāra ciparus aizvietotu ar 7, iegūtu skaitli, kas ir par 5998 lielāks nekā sākotnējais skaitlis. Savukārt, ja sākotnējā skaitlī ar 7 aizvietotu visus pāra ciparus, tad iegūtais skaitlis būtu par 500290 lielāks nekā sākotnējais. Atrast doto sešciparu skaitli!

Atrisinājums: Apzīmējam doto skaitli ar x, skaitli, ko iegūst visus pāra ciparus aizstājot ar septītniekiem, apzīmējam ar A un skaitli, ko iegūst visus nepāra ciparus aizstājot ar septītniekiem, apzīmējam ar B.

Pamatosim, ja diviem skaitļiem samaina vietām to vienas šķiras ciparus, tad šo skaitļu summa nemainās. Pieņemsim, ka vienam skaitlim n-tās šķiras cipars ir a, bet otram b, pieņemsim arī, ka $a > b$. Tad pirmajam skaitlim ciparu a aizstājot ar b, šis skaitlis samazinās par $(a-b) \cdot 10^n$. Otrajam skaitlim ciparu b aizstājot ar a tas palielinās par $(a-b) \cdot 10^n$. Tātad abu skaitļu summa nemainās.

Aplūkojam summu $A + B$. Katrā šķirā (vienos, desmitos, simtos utt.) šiem diviem skaitļiem viens cipars ir "oriģinālais" (kas bija skaitlī x), bet otrs ir septītnieks. Samainīsim katrā šķirā šos ciparus tā, lai septītnieks atrastos otrajā skaitlī, bet "oriģinālais" cipars - pirmajā.

Tad pirmais skaitlis pārvēršas par x, bet otrais - par skaitli, kas sastāv no sešiem septītniekiem. Tā kā šīs darbības rezultātā skaitļu summa nemainās, tad $A + B = x + 777777$.

Pēc dotā $A = x + 500290$, bet $B = x + 5998$. Atrisinot vienādojumu

$$(x + 500290) + (x + 5998) = x + 777777$$

iegūstam, ka $x = 271489$. Pārbaudām, ka skaitlis 271489 apmierina uzdevuma nosacījumus:

- aizvietojot šī skaitļa nepāra ciparus ar 7, iegūstam $277487 = 271489 + 5998$,
- aizvietojot šī skaitļa pāra ciparus ar 7, iegūstam $771779 = 271489 + 500290$.

8.uzdevums (LV.AMO.2018.9.4): Atrast lielāko naturālo skaitli, kas dalās ar 7, kura ciparu summa ir 100 un kuram neviens cipars nav 0.

Atrisinājums: Pamatosim, ka lielākais skaitlis, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, ir $112\underbrace{1111\ldots111}_{96\ vieninieki}$.

Skaidrs, ka skaitlī nevar būt vairāk kā 100 cipari, jo tad tā ciparu summa būtu lielāka nekā 100 (neviens cipars nav 0). Vienīgais 100 ciparu skaitlis, kura ciparu summa ir 100 un neviens cipars nav 0, sastāv no 100 vieniniekiem, bet tas nedalās ar 7, jo 111111 dalās ar 7, bet 1111 (tas, kas paliek pāri no 100 vieniniekiem, atdalot 16 grupas pa 111111) nedalās.

Ja skaitlim ir 99 cipari, no kuriem neviens nav 0, un tā ciparu summa ir 100, tad tas sastāv no 98 vieniniekiem un viena divnieka. Šo divnieku nevar rakstīt skaitļa pirmajā vai otrajā pozīcijā, jo ne 211, ne 121 nedalās ar 7, bet to var rakstīt trešajā pozicijā, jo 112 dalās ar 7 un atlikušais skaitlis no 96 vieniniekiem arī dalās ar 7.

9.uzdevums (LV.AMO.2018.8.2): Naturālu skaitļu virknes $1;\ 8;\ 8;\ 64;\ 192;\ 432;\ \ldots$ katrs loceklis, sākot ar trešo, ir vienāds ar divu iepriekšējo locekļu nenulles ciparu reizinājumu. Kāds ir šīs virknes $2018.$ loceklis?

Atrisinājums: Turpinot virkni tālāk, iegūsim, ka tā ir (ar pelēkiem cipariem norādīts katra virknes locekļa nenulles ciparu reizinājums):

1;	8;	8;	64;	192;	432;	432;	576;	**5040;**	**4200;**	160;	48;	192;	576;	3780;	35280;	40320;	5760;	**5040;**	**4200;**	...
1	*8*	*8*	*24*	*18*	*24*	*24*	*210*	*20*	*8*	*6*	*32*	*18*	*210*	*168*	*240*	*24*	*210*	*20*	*8*	

Tā kā katrs nākamais virknes loceklis ir atkarīgs no diviem iepriekšējiem virknes locekļiem, tad, līdzko parādās divi jau iepriekš bijuši skaitļi, izveidojas periods. Tā kā virknes devītais un desmitais loceklis ir 5040 un 4200, un $19.$ un $20.$ loceklis arī ir 5040 un 4200, tad virkne, sākot ar $9.$ locekli, ir periodiska un perioda garums ir 10. Tāpēc pēdējais pilnais periods beidzas pie $2018.$ virknes locekļa, jo $2018 = 8 + 10 \cdot 201$, un $2018.$ loceklis ir periodā pēdējais, tātad tas ir 5760.

10.uzdevums (LV.AMO.2014.8.1): Skaitli $\frac{1}{13}$ pārveidoja par bezgalīgu decimāldaļu un tajā izsvītroja 2014. ciparu aiz komata. Kurš skaitlis lielāks – sākotnējais vai iegūtais?

Atrisinājums: Pārveidojot skaitli $\frac{1}{13}$ decimāldaļā (t.i., dalot 1 ar 13), iegūstam

```
1 : 13 = 0, 0 7 6 9 2 3 0 ...
1 0 0
  9 1
    9 0
    7 8
    1 2 0
    1 1 7
        3 0
        2 6
          4 0
          3 9
            1 0
            ...
```

Tā kā katrs nākamais cipars dalījumā atkarīgs tikai no tā atlikuma, kurš iegūts iepriekšējā dalīšanas solī., tad, līdzko parādās kāds jau iepriekš sastapts skaitlis (atlikums), izveidojas periods. Kā redzam, daļa $\frac{1}{13} = 0,(076923)$ ir bezgalīga periodiska decimāldaļa ar perioda garumu 6 cipari. Tātad 2014. vietā aiz komata atrodas tāds pats cipars kā 4. vietā aiz komata, jo $2014 = 335 \cdot 6 + 4$. Tas ir cipars 9. Ja mēs šo ciparu izsvītrojam, tad jauniegūtajā skaitlī 2014. cipars aiz komata būs cipars 2 (nākamais, kas seko aiz 9). Skaitlim $\frac{1}{13}$ un iegūtajam skaitlim ir 0 veseli un pirmie 2013 cipari aiz komata sakrīt, tad lielāks būs tas skaitlis, kuram ir lielāks 2014. cipars aiz komata. Tā kā $9 = 2$, tad $\frac{1}{13}$ ir lielāka nekā iegūtais skaitlis.