# 17 Citu (neģeometrisku) uzdevumu lasīšana (2026-02-16)

Praktisks ieteikums (4R: Read, Restate, Represent, Roadmap):
(1) **Izlasīt** uzdevumu un atrast visus nosacījumus;
(2) **Pārformulēt** īsāk un saviem vārdiem;
(3) **Attēlot** situāciju zīmējumā, tabulā utt.
(4) **Izplānot** sagaidāmās risinājuma darbības.

Jautājumi par lasīšanu un uzdevuma modeli:

TBD

### 1.uzdevums (LV.VOL.2015.9.3)

Aija izvēlas naturālu skaitli $n \leq 100$ un veido skaitļu virkni, kur katru nākamo virknes locekli iegūst pēc šāda likuma:

- ja $2n \leq 100$, tad virknes nākamais loceklis ir $2n$;
- ja $2n > 100$, tad virknes nākamais loceklis ir $2n - 100$.

Ja virknē vēl kādreiz parādās skaitlis $n$, tad skaitli $n$ sauksim par *patīkamu*. Cik pavisam ir *patīkamu* skaitļu, kas nepārsniedz $100$?

Piemēram, skaitlis $40$ ir *patīkams*, jo $40;\ 80;\ 60;\ 20;\ 40;\ \ldots$, bet $25$ - nav, jo $25;\ 50;\ 100;\ 100;\ \ldots$ (tālāk virknē nav skaitļu, kas atšķirīgi no $100$).

## 17.1 Atrisinājums

Ir $25$ skaitļi, kas nepārsniedz $100$ un dalās ar $4$. Parādīsim, ka visi šie skaitļi ir *patīkami*. Katrs no tiem pieder vienam no trim cikliem:

$100 \rightarrow 100$;

$20 \rightarrow 40 \rightarrow 80 \rightarrow 60 \rightarrow 20$;

$4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow 64 \rightarrow 28 \rightarrow 56 \rightarrow 12 \rightarrow 24 \rightarrow 48 \rightarrow 96 \rightarrow 92 \rightarrow 84 \rightarrow 68 \rightarrow 36 \rightarrow 72 \rightarrow 44 \rightarrow 88 \rightarrow 76 \rightarrow 52 \rightarrow 4$

Pierādīsim, ka tie skaitļi, kas nedalās ar $4$, nevar būt *patīkami*. Šķirojam divus gadījums.

- Nepāra skaitļi nevar būt *patīkami*, jo visi nākamie virknes locekļi būs tikai pāra skaitļi un, tātad, sākotnējā $n$ vērtība tajā atkārtoti parādīties nevar.
- Pāra skaitļi, kas nedalās ar $4$, var pierakstīt formā $n = 4k + 2$. Šajā gadījumā otrais virknes loceklis būs vai nu $2 \cdot (4k+2) = 4 \cdot (2k+1)$, vai $2 \cdot (4k+2) - 100 = 4 \cdot (2k - 24)$. Abos gadījumos virknes otrais loceklis dalās ar $4$ un tas ir uzrakstāms formā $4m$. Visi nākamie virknes locekļi arī dalīsies ar $4$, jo vai nu $2 \cdot 4m = 8m$, vai $2 \cdot 4m - 100 = 4 \cdot (2m - 25)$. Līdz ar to virknē nevar atkārtoti parādīties skaitlis, kas nedalās ar $4$, un skaitlis $n = 4k + 2$ nav *patīkams*.

Tātad pavisam ir $25$ *patīkami* skaitļi.

### 17.2 Atrisinājums

Ir 25 skaitļi, kas nepārsniedz 100 un dalās ar 4. Parādīsim, ka visi šie skaitļi ir *patīkami*. Ja skaitlis $x$ dalās ar 4, tad gan $2x$, gan $2x - 100$ arī dalīsies ar 4. Aplūkosim virkni, sākot ar patvaļīgu skaitli $x_1$, kas dalās ar 4: $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$ Tā kā ir tikai 25 skaitļi, kas tajā var parādīties, tad skaidrs, ka kādā brīdī virknes locekļi sāks atkārtoties. Aplūkosim pirmo skaitli virknē, kas atkārtojas, tas ir, tādu $x_{j+1}$, ka visi iepriekšējie $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_j$ ir dažādi, bet $x_{j+1}$ ir vienāds ar kādu no tiem. Pierādīsim, ka $x_{j+1} = x_1$, ar to arī būs pierādīts, ka skaitlis $x_1$ ir *patīkams*. Pieņemsim pretējo, ka $x_{j+1} = x_{k+1}$ un aplūkosim, kādi varēja būt iepriekšējie skaitļi $x_j$ un $x_k$. Tā kā tiem jābūt dažādiem, tad skaidrs, ka $x_{j+1}$ un $x_{k+1}$ tika iegūti ar dažādām darbībām, tas ir, $x_{j+1} = 2x_j$ un $x_{k+1} = 2x_k - 100$ (vai otrādi), kas nozīmē, ka $2x_j = 2x_k - 100$ jeb $x_k - x_j = 50$ un tā ir pretruna, jo gan $x_j$, gan $x_k$ dalās ar 4, bet 50 nedalās ar 4.

Vēl jāpierāda, ka pārējie skaitļi nav *patīkami*. Skaidrs, ka nepāra skaitļi nav *patīkami*, jo, ja $x$ ir nepāra skaitlis, tad gan $2x$, gan $2x - 100$ ir pāra skaitļi un tālāk virknē visi skaitļi būs pāra.

Ja skaitlis $x$ dalās ar 2, bet nedalās ar 4, tad $x$ nav *patīkams*, jo, gan $2x$, gan $2x - 100$ dalās ar 4 un tālāk virknē visi skaitļi dalīsies ar 4.

### 2.uzdevums (LV.VOL.2016.9.5)

Naturālu skaitļu virkni $(s_i)$ pēc parauga ″ 2016 ″ veido šādi: virknes pirmais loceklis $s_1$ ir 2; virknes otrais loceklis $s_2$ - mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā $s_1$ un tā pierakstā ir cipars 0; virknes trešais loceklis $s_3$ - mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā $s_2$ un tā pierakstā ir cipars 1; virknes ceturtais loceklis $s_4$ - mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā $s_3$ un tā pierakstā ir cipars 6. Pēc tam meklētie cipari cikliski atkārtojas: $2-0-1-6-2-0-\ldots$. Virknes pirmie locekļi ir $2;\ 10;\ 11;\ 16;\ 20;\ 30;\ 31;\ 36;\ 42;\ 50$.

Kādi ir četri nākamie skaitļi, kas virknē seko aiz skaitļa 2016?

### 17.3 Atrisinājums

Pavisam ir četru veidu *gājieni*: ″ $2 \to 0$ ″ (skaitlis satur 2 un meklējam nākamo skaitli, kas satur 0), ″ $0 \to 1$ “,″ $1 \to 6$ ″ un ″ $6 \to 2$ “. Turklāt šie *gājieni* cikliski atkārtojas tieši šādā secībā.

Lai noskaidrotu, kuri nākamie skaitļi seko virknē pēc skaitļa 2016, nepieciešams uzzināt, pēc kāda *gājiena* tika sasniegts skaitlis 2016.

Aplūkosim iespējamos gadījumus.

(**A**) Skaitli 2016 nevar iegūt pēc *gājiena* ″ $6 \to 2$ “, jo iepriekšējais virknes loceklis būtu 2006, bet nākamais skaitlis, kas ir lielāks nekā 2006 un satur ciparu 2, ir 2007.

(**B**) Skaitli 2016 nevar iegūt pēc *gājiena* ″ $2 \to 0$ “, jo iepriekšējam virknes loceklim tad būtu jābūt 2015, bet pirms tā izdarītajam *gājienam* jābūt″ $6 \to 2$ “, kas noved pie tās pašas pretrunas kā (A) gadījumā.

(**C**) Skaitli 2016 nevar iegūt pēc *gājiena* ″ $0 \to 1$ “, jo iepriekšējam virknes loceklim būtu jābūt 2015, bet pirms tā izdarītajam *gājienam* jābūt″ $2 \to 0$ ″ un skaitlim 2014. Savukārt, pirms skaitļa 2014 izdarītajam *gājienam* jābūt ″ $6 \to 2$ ″ un iegūstam līdzīgu pretrunu kā (A) gadījumā.

(**D**) Tātad skaitli 2016 iegūst pēc *gājiena* " $1 \to 6$ ", un nākamie skaitļi virknē pēc *gājieniem*" $6 \to 2$ "," $2 \to 0$ "," $0 \to 1$ " un " $1 \to 6$ " ir skaitļi $2017,\ 2018,\ 2019$ un 2026.

**3.uzdevums (LV.VOL.2014.9.4)**

Gatavojoties 13 diplomātu apspriedei, krēsli tika izvietoti ap apaļu galdu vienādos attālumos un katrai no vietām tika sagatavota plāksnīte ar diplomāta vārdu. Diemžēl, ieņemot vietas pie galda, diplomāti šīs plāksnītes neņēma vērā un izrādījās, ka neviens no diplomātiem nav apsēdies pretī savai plāksnītei.

(**A**) Pierādīt: nepārsēdinot diplomātus, galdu ir iespējams pagriezt tā, ka vismaz divi diplomāti atradīsies pret savām plāksnītēm.
(**B**) Pierādīt: ja sākumā tieši viens diplomāts būtu sēdējis pret savu plāksnīti, tad ir iespējams, ka viņi apsēdušies tā, ka, pagriežot galdu, nav iespējams panākt, ka pret savu plāksnīti atradīsies vairāk par vienu diplomātu.

### 17.4 Atrisinājums

(**A**) Apaļajam galdam pavisam ir 13 derīgas pozīcijas, kuras var iegūt galda pagriešanas par noteiktu vietu skaitu rezultātā. Katrs diplomāts pret savu plāksnīti atradīsies tikai vienā no šīm pozīcijām. Katrai galda pozīcijai $i (1 \leq i \leq 13)$ ar $p_i$ apzīmējot diplomātu skaitu, cik šajā pozīcijā atrodas pret savām plāksnītēm, iegūstam $p_1 + p_2 + \ldots + p_{13} = 13$.

Zināms, ka viena no $p_i$ vērtībām ir $0$, jo sākuma neviens no diplomātiem neatrodas pretī savai plāksnītei. Pēc Dirihlē principa kādai no atlikušajām $p_j$ vērtībām jābūt vismaz 2, t. i., ir vismaz divi diplomāti, kas kādā pozīcijā atrodas pretī savām plāksnītēm.

(**B**) Pieņemot, ka diplomāti numurēti ar naturāliem skaitļiem no 1 līdz 13 pēc kārtas un sēdināt tos ap galdu bija paredzēts pulkstenrādītāja virzienā (plāksnītes saliktas $1-2-3-\ldots-12-13$), tad diplomātiem pie galda apsēžoties, piemēram, šādi $1-13-12-11-10-9-8-7-6-5-4-3-2$, izpildās uzdevumā prasītais. Diplomātiem $i$ un $j$, ja $i$ sēž savā vietā, tad $j$-tā plāksnīte atrodas $j-i$ vietas pa labi, bet $j$-ais diplomāts atrodas $j-i$ vietas pa kreisi. Tā kā 13 ir nepāra skaitlis, tad $j$ nevar sēdēt pie savas plāksnītes.

*Piezīme.* Pavisam iespējami 13723 atšķirīgi diplomātu izvietojuma varianti ar iepriekšminēto īpašību.

**4.uzdevums (LV.VOL.2013.9.4)**

Divas komandas savā starpā izspēlējušas vairākas (vairāk nekā vienu) spēles. Par zaudējumu komanda saņem $n$ punktus ($n$- naturāls skaitlis), bet par uzvaru $n+3$ punktus. Neizšķirtu rezultātu nav. Pēc spēļu beigām izrādījās, ka vienai komandai ir par vienu uzvaru vairāk nekā otrai. Zināms, ka viena no komandām kopsummā ieguva 92 punktus. Cik punktus ieguva otra komanda?

### 17.5 Atrisinājums

Ja pieņemam, ka komanda-zaudētāja izcīnījusi $a$ uzvaras, tad komanda-uzvarētāja izcīnījusi $a+1$ uzvaru. Kopējais punktu skaits komandai-zaudētājai ir $a(n+3)+(a+1)n = 2an+3a+n$, bet komandai-uzvarētājai $(a+1)(n+3)+an = 2an+3a+n+3$.

Pierādīsim, ka komanda-uzvarētāja nevarēja izcīnīt 92 punktus. Ja tā tomēr būtu bijis, tad $2an+3a+n+3 = 92$ jeb eksistē tāds naturāls skaitlis $a$, ka $n = \frac{89-3a}{2a+1}$ ir naturāls skaitlis. Tā kā $n \geq 1$, tad pieļaujamās $a$ vērības ir $1 \leq a \leq 17$. Aplūkosim skaitītāja un saucēja vērtību katrai no šīm vērtībām:

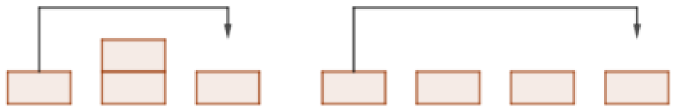
Kā redzams, nevienai no pieļaujamajām $a$ vērtībām daļas vērtība nav naturāls skaitlis. Tātad komanda-uzvarētāja nevar būt ieguvusi 92 punktus.

Pārbaudīsim, vai komanda-zaudētāja varēja iegūt 92 punktus. Tad $2an+3a+n = 92$ un $n = \frac{92-3a}{2a+1}$. Ja $a = 5$, tad $n = 7$, vai, ja $a = 8$, tad $n = 4$, tātad, komanda-zaudētāja varēja iegūt 92 punktus.

Tā kā komanda-uzvarētāja ieguva par 3 punktiem vairāk nekā komandu-zaudētāja, tad otra komanda (uzvarētāja) ieguva 95 punktus.

### 5.uzdevums (LV.VOL.2018.9.5)

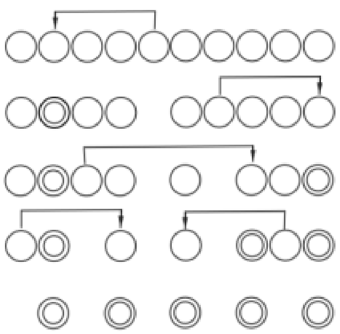
Rindā izvietotas 2018 monētas. Vienā gājienā drīkst paņemt vienu monētu, pārcelt to pāri tieši divām monētām un uzlikt to uz nākamās monētas. Vai 1009 gājienos visas monētas iespējams savākt kaudzītēs pa divām monētām katrā kaudzītē?



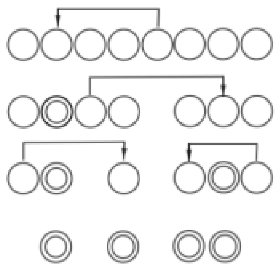
5. att.

## 17.6 Atrisinājums

Pamatosim, ka prasītais ir iespējams. Ja ir 10 monētas vai 8 monētas, tad attiecīgi ar 5 vai 4 gājieniem tās var savākt kaudzītēs pa divām monētām katrā kaudzītē, skat., piemēram, 6.att. un 7.att. Tā kā $2018 = 201 \cdot 10 + 8$, tad ar $201 \cdot 5 + 4 = 1009$ gājieniem monētas iespējams savākt kaudzītēs pa divām monētām katrā kaudzītē.



6. att.



7. att.

### 6.uzdevums (LV.VOL.2017.9.5)

Katra no bumbiņām, kas atrodas kastē, nokrāsota vienā no $N$ krāsām, un uz katras uzrakstīts naturāls skaitlis, kas nepārsniedz $N$. Zināms, ka katra no $N$ krāsām izmantota vismaz vienu reizi, tāpat arī katrs skaitlis, kas nepārsniedz $N$, izmantots vismaz vienu reizi. Kādām $N$ vērtībām kastē noteikti varēs atrast $N$ dažādu krāsu bumbiņas, uz kurām būs rakstīti $N$ dažādi skaitļi?

### 17.7 Atrisinājums

Ja $N = 1$, tad kastē ir vismaz viena bumbiņa, kas nokrāsota vienīgajā iespējamajā krāsā un uz tās uzrakstīts skaitlis 1. Tātad vērtība $N = 1$ der.

Parādīsim, ja $N = 2$, tad vienmēr var atrast divas bumbiņas, kam izpildās prasītās īpašības. Izvēlamies patvaļīgu bumbiņu. Tās krāsu apzīmējam ar $k_1$, bet skaitli, kas uz tās uzrakstīts - ar $s_1$. Ja kastē atrodas bumbiņa, kuras krāsa ir $k_2$ un uz kuras uzrakstīts skaitlis $s_2$, tad esam atraduši nepieciešamo bumbiņu pāri. Apskatīsim gadījumu, kad kastē nav bumbiņa, kuras krāsa ir $k_2$ un uz kuras uzrakstīts skaitlis $s_2$. Tā kā kastē ir divu dažādu krāsu bumbiņas, tad kastē ir jābūt bumbiņai, kuras krāsa ir $k_2$ un uz kuras uzrakstīts skaitlis $s_1$. Tā kā kastē ir bumbiņa, uz kuras uzrakstīts skaitlis $s_2$, tad kastē ir jābūt bumbiņai, kuras krāsa ir $k_1$ un uz kuras uzrakstīts skaitlis $s_2$. Tātad, kastē ir divas bumbiņas, kuru krāsas ir $k_2$ un $k_1$ un uz tām uzrakstītie skaitļi ir attiecīgi $s_1$ un $s_2$, kas veido nepieciešamo bumbiņu pāri.

Pamatosim, ka $N$ nevar būt lielāks kā 2. Tabulā parādīts piemērs, kurā visas uzdevumā minētās īpašības izpildās, bet nevar atrast $N$ dažādu krāsu bumbiņas, uz kurām uzrakstīti visi skaitļi no 1 līdz $N$.

| Skaitlis / Krāsa | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | ... | $s_N$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $k_1$ | | + | + | ... | + |
| $k_2$ | + | | | | |
| $k_3$ | + | | | | |
| ... | ... | | | | |
| $k_N$ | + | | | | |

### 7.uzdevums (LV.VOL.2004.9.4)

Kvadrāts sastāv no $4 \times 4$ vienādām kvadrātiskām rūtiņām Andris pēc kārtas novieto pa vienam tomim kādā vēl neaizņemtā rūtiņā saskaņā ar šādiem noteikumiem: pirmo torni viņš drīkst novietot patvaļīgā rūtiņā pēc savas izvēles, bet katru nākošo torni jānovieto tādā rūtiņā, kur to uzlikšanas brīdī apdraud nepāra skaits jau novietoto (divi torņi apdraud viens otru, ja tie abi atrodas vienā horizontālē vai vienā vertikālē un starp tiem nav citu torņu).

Kādu lielāko torņu daudzumu Andrim var izdoties novietot?

### 17.8 Atrisinājums

(**A**) var uzlikt 15 torņus; skat., piem., 2.zīm.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** | **6** | **2** | |
| **15** | **14** | **13** | **12** |
| **11** | **10** | **9** | **8** |
| **3** | **4** | **7** | **5** |

2. zīm.

(**B**) ja uzliktu 16 torņus, tad tie būtu jānovieto arī visās stūra rūtiņās. Bet to torni, kuru ievieto **pēdējā stūra rūtiņā**, uzlikšanas brīdī apdraud divi citi - pretruna.