Skaitļu teorija
ATV

Uzdevumu lapa #0

2020./2021.m.g.

(Par racionāliem un iracionāliem skaitļiem, skaitļu pierakstu un periodiskām virknēm.)

Uzdevums 25.1: Plakne sadalīta vienības kvadrātiņos kā rūtiņu papīra lapa.

(A) Vai var šajā plaknē uzzīmēt regulāru piecstūri, kura visas virsotnes atrastos rūtiņu virsotnēs?

(B) Vai šajā plaknē var uzzīmēt regulāru trijstūri, kura visas virsotnes atrastos rūtiņu virsotnēs?

Piezīme. Par *rūtiņu virsotnēm* saucam tos plaknes punktus, kuros sastopas četri vienības kvadrātiņi.

Uzdevums 25.2: Rūtiņu plaknē var iezīmēt dažādu izmēru kvadrātus (gan taisnus, gan slīpus), kuru virsotnes var atrasties rūtiņu virsotnēs. Šajos piemēros mūs interesē kvadrāti ar noteitiem izmēriem. Pieņemam, ka vienas rūtiņas izmērs ir 1×1 (viena garuma vienība).

(A) Vai eksistē kvadrāts ar izmēriem 17×17, kura virsotnes atrodas rūtiņu virsotnēs, bet malas nav paralēlas rūtiņu malām?

(B) Vai eksistē kvadrāts ar diagonāles garumu $\sqrt{26}$, kura virsotnes atrodas rūtiņu virsotnēs?

(C) Vai eksistē kvadrāts ar diagonāles garumu $\sqrt{76}$, kura virsotnes atrodas rūtiņu virsotnēs?

(D) Vai eksistē kvadrāts ar diagonāles garumu $\sqrt{126}$, kura virsotnes atrodas rūtiņu virsotnēs?

Uzdevums 25.3: Bezgalīgu virkni no nullēm un vieniniekiem veido sekojoši:

- Vispirms uzraksta ciparu 0.
- Katrā nākamajā solī apskata līdzšinējās virknes locekļus, visu nuļļu vietā ieraksta vieniniekus, bet visu vieninieku vietā nulles – un pieraksta galā esošajai virknei.

Veicot šos soļus, iegūstam meklējamās virknes posmus (katrs nākamais posms divreiz garāks par iepriekšējo):

```
0
01
0110
01101001
0110100110010110
01101001100101101001011001101001
...
```

Ja virknes locekļus numurē, sākot ar 0-to, iegūstam, ka $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 1$, $t_3 = 0$, $t_4 = 1$, $t_5 = 0$, $t_6 = 0$, $t_7 = 1$, $t_8 = 1$, $t_9 = 0$, utt. Lai atrastu jebkuru virknes locekli, uzraksta pietiekoši daudzus posmus šajā konstrukcijā.

(A) Vai virkne t_n ir periodiska? (Ja ir, atrast tās priekšperiodu un periodu. Ja nav, pamatot, kāpēc nav.)

(B) Aplūkojam jaunu virkni $g_n = t_{3^n}$, t.i. tos t_n locekļus, kuru numuri ir skaitļa 3 pakāpes. Jau atradām, ka

$$\begin{cases} g_0 = t_{3^0} = t_1 = 1, \\ g_1 = t_{3^1} = t_3 = 0, \\ g_2 = t_{3^2} = t_9 = 0. \end{cases}$$

Vai virkne g_n ir periodiska? (Ja ir, atrast tās priekšperiodu un periodu. Ja nav, pamatot, kāpēc nav.)

Uzdevums 25.4: Ilzītei sākumā bija 10 eirocenti. Viņa nopelnīja vēl 7 eiras, bet pēc tam 7 eiras iztērēja. Lai noskaidrotu, cik naudas atlicis, viņa rēķināja ar Python:

```
(base) PS C:\> python
>>> 0.1
0.1
>>> 0.1 + 7
7.1
>>> (0.1 + 7) - 7
0.09999999999999964
```

Ilzītei radās aizdomas, ka pēdējais rezultāts radies noapaļojot, tāpēc viņa izteica skaitli $0.1 = \frac{1}{10}$ kā bezgalīgu summu:

$$0.1 = \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2^2} + \frac{d_3}{2^3} + \frac{d_4}{2^4} + \ldots,$$

kur ikviens d_i ir *binārā pieraksta cipars*, kas ir vai nu 0, vai 1.
Atrast periodisku virkni ar binārajiem cipariem, kas precīzi izsaka 0.1. Un atrast, līdz kurai pozīcijai skaitlis varētu būt bijis noapaļots, ka tika iegūts rezultāts `0.09999999999999964`.

Uzdevums 25.5: Zināms, ka racionāla daļa $\frac{p}{q}$ apmierina nevienādības:

$$\frac{2019}{2020} < \frac{p}{q} < \frac{2020}{2021}.$$

Starp visām šādām daļām atrast to, kurai saucējs q ir vismazākais.

Uzdevums 25.6: (A) Vai skaitlis $\sqrt[3]{2}$ ir racionāls vai iracionāls?

(B) Pierādīt vai apgāzt sekojošu apgalvojumu:
"Katram reālam skaitlim x, ja x^2 ir iracionāls, tad arī x^3 ir iracionāls."