NMS SKAITU TEORIJA #5: VALUCIJAS

5.1 Valuciju jdziens

Valucijas apraksta augstko pirmskaita pakpi, ar kuru dals dotais skaitlis.

- Skaitu teorij dareiz pietiek analizt situciju terminos dals vai nedals (no ejienes ir termini *pirmskaitlis*, *savstarpji pirmskaiti*, *LKD*, *MKD*).
- Dareiz japlko ar modui jeb kongruenu klases pc kda pirmskaita vai pirmskaita pakpes modua (par to ir modulr aritmtika)
- Vl detaliztk var aplkot atlikumus, dalot ar dadiem pirmskaitiem (vai dadu pirmskaitu pakpm) – nieu atlikumu teorma.
- Visbeidzot, valucijas ir vl preczks instruments – aplko cik laba ir dalmba ar kdu pirmskaitli.

Defincija: Ar n apzmjam jebkuru naturlu skaitli un ar p – kdu pirmskaitli. Par skaita n p-valuciju sauc tdu skaitli k, ka n dals ar p^k, bet nedals ar p^{k+1}. o faktu pieraksta, izmantojot grieu burtu n:

$$\nu_p(n) = k.$$

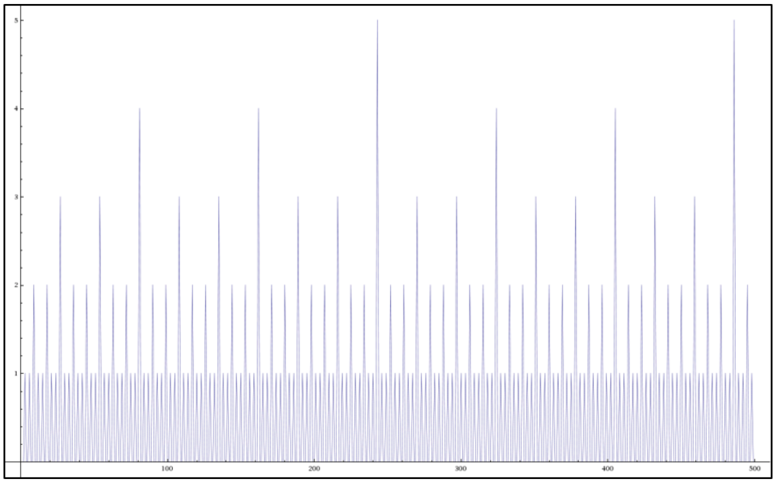
A α	B β	Γ γ	Δ δ	E ε	Z ζ
H η	Θ θ	I ι	K κ	Λ λ	M μ
N $\boxed{\nu}$	Ξ ξ	O o	Π π	P ρ	Σ σ
T τ	Υ υ	Φ ϕ	X χ	Ψ ψ	Ω ω

Fig. 1: Grieu alfabts

Piemri: Ja pirmskaitlis $p = 3$, tad

$$\begin{cases} \nu_3(1) = \nu_3(2) = \nu_3(4) = \nu_3(5) = \ldots = 0 \\ \nu_3(3) = \nu_3(6) = \nu_3(12) = \nu_3(15) = \ldots = 1 \\ \nu_3(9) = \nu_3(18) = \nu_3(36) = \nu_3(45) = \ldots = 2 \\ \nu_3(27) = \nu_3(54) = \ldots = 3 \\ \nu_3 81 = \ldots = 4 \\ \ldots \end{cases}$$

Funkcijas $f(n) = \nu_3(n)$ grafiks redzams zmjum – t ir zveidga trepte, kur ar regulrm atstarpm rodas arvien garki za zobi.



Valuciju pabas: Iedomsimies, ka p ir jebkur fiksts pirmskaitlis.

- $\nu_p(a) = \infty$ tad un tikai tad, ja $a = 0$. (Visiem citiem veseliem skaitiem atrodas tik augsta pirmskaita p pakpe p^{k+1}, ka a vairs nedals ar p^{k+1}.)
- $\nu_p(ab) = \nu_p(a) + \nu_p(b)$. (Augstks pakpes saskaits, ja abus skaitus a un b reizina.)
- $\nu_p(a+b) \geq \min(\nu_p(a), \nu_p(b))$. aj izteiksm pastv viendba, ja $\nu_p(a) \neq \nu_p(b)$.

Valuciju funkcijas $\nu_2(n)$, $\nu_3(n)$ un citas nevar bt periodiskas, jo laiku pa laikam pards arvien lielkas vrtbas, piemram, $\nu_2(2^k) = k$. No otras puses, to grafikiem piemt savdabga simetrija. Ar katrai konstantei $C > 0$ funkcija $f(n) = \min(C, \nu_2(n))$ ir periodiska (periodiskumu var pankt, ja liels vrtbas "apgrie" t, lai ts neprsniegtu C).

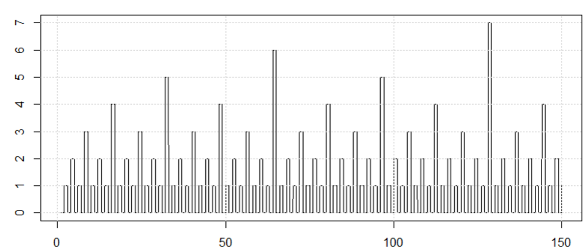


Fig. 2: Funkcijas $\nu_2(n)$ grafiks (loklie maksimumi pie $n = 64$ un $n = 128$).

5.2 Valucijas kombinatorik

5.2.1 Leandra teorma

Teorma (Adrien-Marie Legendre): Katram pirmskaitlim p un katram naturlam n p-valucija ir aprinma pc formulas

$$\nu_p(n!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor,$$

kur $\lfloor x \rfloor$ apzm apakjo veselo dau. (Izskats, ka aj viendb ir bezgalga summa, bet jebkurm n un p vrtbm aj summ ir tikai galgs skaits nenulles saskaitmo.)

Apgalvojums: Lielk 2 pakpe, ar ko dals $n!$ ir $n - S_2(n)$, kur ar $S_2(n)$ apzmta n ciparu summa divnieku pierakst.

Piemrs: Skaita 100 divnieku pieraksts ir $\texttt{1100100}_2$, td ciparu summa ir $S_2(100) = S_2(\texttt{1100100}_2) = 3$. Iegstam, ka $\nu_2(100!) = 100 - 3 = 97$.

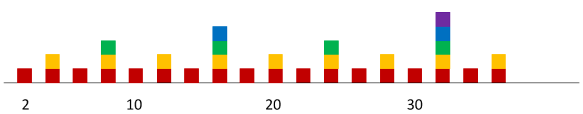
N_{10}	N_2	$N!$	$\nu_2(N!)$
1	1	1	0
2	10	2	1
3	11	6	1
4	100	24	3
5	101	120	3
6	110	720	4
7	111	5040	4
8	1000	40320	7
9	1001	362880	7
10	1010	3628800	8
11	1011	39916800	8
12	1100	479001600	10

Fig. 3: Funkcijas $\nu_2(n!)$ tabula.

Lemma: Starp pirmajiem m naturlajiem skaitiem ir tiei $\lfloor m/n \rfloor$ skaita n daudzkrtu.

(Ar $\lfloor x \rfloor$ apzm skaita apakjo veselo dau – vislielko veselo skaitli, kas neprsniedz x.)

Piemrs: Ar kdu lielko 2 pakpi dals skaitlis 36!?



Prformulsim o citdi: Iztlosimies, ka 36! sadalts pirmreizintjos:

$$36! = 2^{k_2} \cdot 3^{k_3} \cdot 5^{k_5} \cdot 7^{k_7} \cdot \ldots \cdot 31^{k_{31}}.$$

Atradsim k_2 jeb kpintju pie pirmskaita 2 aj izteiksm. (Kpc 36! dals tikai ar pirmajiem 11 pirmskaitiem no 2 ldz 31?)

Zmjum redzami visi reizintji, kuri veido 36!. Tie, kuri dals ar 2, attloti ar klucu stabiu, kas rda, cik divniekus (k pirmreizintjus) is skaitlis pievienojis faktorilam.

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{16} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{32} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{64} \right\rfloor + \cdots = \mathbf{18} + \mathbf{9} + \mathbf{4} + \mathbf{2} + \mathbf{1}.$$

Rinot faktorilu, kluci summjas pa kolonnm. Leandra formula tos saskaita pa rindim (vispirms sarkanos, tad oranos, utt.)

 diagramma ilustr svargu metodi: Ja ir jnovrt veselu skaitu summa, ko var saskaitt divos dados veidos (piemram, krsaino klucu zmjum gan pa kolonnm, gan pa rindim), to biei ir vrts mint dart, lai iegtu rtku izteiksmi. oreiz ietaupjums ir acmredzams – tai viet lai saskaittu 18 stabios esoos klucus, pietiek (rindis) summt tikai piecus skaitus, kurus turklt vieglk izrint preczi. Lielkiem n Leandra formulas ietaupjums ir vl lielks: Ja $n = 1000$, tad saskaitmo skaits samazins no 500 ldz 10, jo jau $1000/2^{10} < 1$.

Lietojot Leandra formulu ar citiem pirmskaitiem, $p > 2$, iegstam du sadaljumu pirmreizintjos:

$$36! = 2^{34} \cdot 3^{17} \cdot 5^{8} \cdot 7^{5} \cdot 11^{3} \cdot 13^{2} \cdot 17^{2} \cdot 19^{1} \cdot 23^{1} \cdot 29^{1} \cdot 31^{1}.$$

is skaitlis beidzas ar $\min(\nu_2(36!), \nu_5(36!)) = \min(34, 8) = 8$ nullm – katra nulle decimlpierakst rodas, sareizinoties pirmreizintjam 2 ar pirmreizintju 5. Skaita 36! ties aprins, sareizinot pirmos 36 naturlos skaitus, rda to pau:

```
>>> from functools import reduce
>>> reduce(lambda a, b: a*b, range(1,37))
371993326789901217467999448150835200000000
```

Piemrs: Atrast robeas (skaitus, kuriem neierobeoti tuvojas izteiksme zem robeas tad, ja n kst oti liels):

- $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\nu_2(n!)}{n}$.
- $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\nu_3(n!)}{n}$.
- $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\nu_5(n!)}{n}$.

5.2.2 Kummera teorma

Teorma (Ernst Kummer) Doti skaiti n un m, kas apmierina neviendbas $n \geq m \geq 0$ un ar pirmskaitlis p. Tad binomilajam koeficientam C_n^m p-valucija sakrt ar prnesumu skaitu, ja m saskaita ar $n-m$ skaitanas sistm ar bzi p.

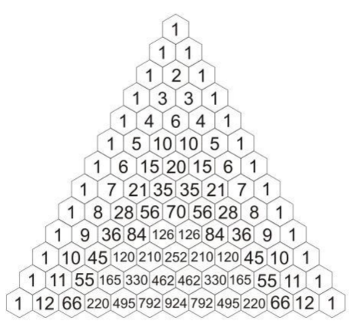
o teormu var pierdt, izsakot binomilo koeficientu:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

un izmantojot Leandra teormu.

Note: Par kombinciju jeb bionmilo koeficientu skaitu teorijas pabm ir vl ar citi dergi rezultti (sal. Lkas teormu https://bit.ly/3Frc1pT), bet tie neattiecas uz veselo skaitu funkciju tmu.

Piemrs: Zmjum attlots Paskla trijstris, kur iepelkotas visas nepru nas. Pc Kummera teormas ts ir visas ts kombincijas pa m no n, kam m var saskaitt $n-m$ binraj pierakst pilngi bez prnesumiem.



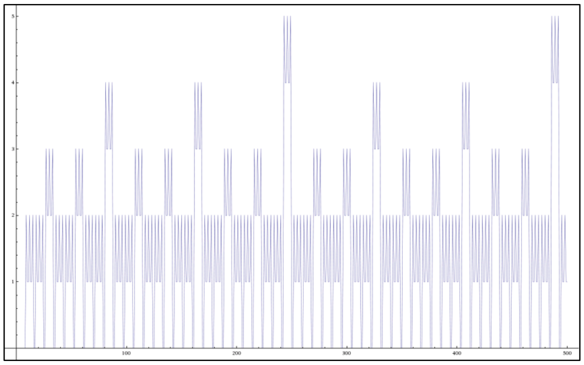
Apgalvojums: Dots naturls skaitlis n. Pierdt, ka jebkuru n pc krtas emtu naturlu skaitu reizinjums dals ar $n!$.

Pierdjums: Apzmsim lielko no reizintajiem skaitiem ar m. Tad jpierda, ka

$$\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!} \in \mathbb{N}.$$

Pierakstt izteiksme sakrt ar $C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$. T k kombincijas (pie $n \leq m$) apzm, cik veidos no m elementiem var izvlties nesakrtotu izlasi ar n elementiem, kombincijas vienmr ir naturli skaiti.

Piemrs: Zmjum attlots funkcijas $f(n) = \nu_3(C_n^7)$ grafiks. Vairumam skaitu kombincija pa 7 no n dals ar nelielm 3 pakpm.



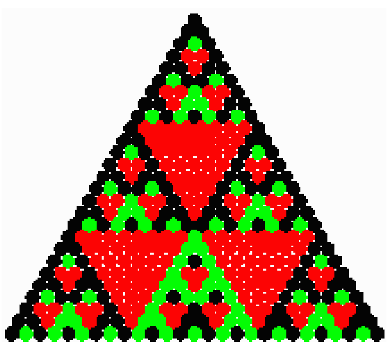
5.2.3 Lkas teorma

Teorma (Lucas): Visiem nenegatviem m un n, un jebkuram pirmskaitlim p, ir spk da sakarba:

$$\binom{m}{n} \equiv \prod_{i=0}^{k} \binom{m_i}{n_i} \pmod{p},$$

kur $n = n_k p^k + n_{k-1} p^{k-1} + \ldots + n_1 p + n_0$, bet $m = m_k p^k + m_{k-1} p^{k-1} + \ldots + m_1 p + m_0$.

Piemrs: Attl dots Paskla trijstris (k-tais elements trijstra n-taj rindi attlo, cik dados veidos var izvlties k elementus no n elementu kopas). is Paskla trijstris izkrsots 3 krss (apltis ir sarkans, ja taj viet ieraksttais skaitlis dals ar 3; apltis ir melns, ja dod atlikumu 1, dalot ar 3, apltis ir za, ja dod atlikumu 2, dalot ar 3). Atrast, cik ir melno aplu Paskla trijstra 1000 rindi: Cik daudzi no visiem 1001 skaitiem aj rindi dod atlikumu 1, dalot ar 3.



Risinjums: `16`.

Pierakstm skaitli $1000 = 729 + 243 + 27 + 1 = 3^6 + 3^5 + 3^3 + 1 = \texttt{1101001}_3$ trijnieku skaitanas sistm.

Aplkosim vispirms kombincijas C_{999}^k. Pamatosim, ka ir tiei 8 vrtbas, kurm $C_{999}^k \equiv 1 \pmod{3}$ jeb rodas melni apli (vism prjm C_{999}^k dals ar 3: ie apli ir sarkani).

$$C_{999}^0 \equiv C_{999}^{27} \equiv C_{999}^{243} \equiv C_{999}^{270} \equiv C_{999}^{729} \equiv C_{999}^{756} \equiv C_{999}^{972} \equiv C_{999}^{999} \equiv 1 \pmod{3}.$$

Izmantojot Kummera teormu var pamatot, ka visiem citiem k, $C_{999}^k \equiv 0 \pmod{3}$. Tas ir tpc, ka visos citos gadjumos iegt skaitli, kura decimlpieraksts ir 999 ($999_{10} = \texttt{1101000}_3$) var tikai saskaitot k un $999 - k$ t, ka rodas prnesums (saskaitot stabi trijnieku skaitanas sistm). Ir tikai 8 veidi k sadalt trs vieniniekus no $\texttt{1101000}_3$ pa abiem saskaitmajiem t, lai nerastos neviens prnesums.

Savukrt visas astoas vrtbas, kas mintas kongruenc (sk. viendojumu augstk) ir viendas ar 1 (nevis ar 2) saska ar Lkas teormu.

Zem Paskla trijstra rindias, kur ir visi C_{999}^k, ir nkam rindia, kur ir visi C_{1000}^k. aj rindi melno elementu bs divreiz vairk, jo katrs no astoiem melnajiem, kas minti (augj viendojum) saskaitsies ar sarkano kaimiu kreisaj un ar labaj pus. Kop bs 16 melni elementi (bet zao - tdu C_{1000}^k, kas kongruenti ar 2 pc modua 3) nebs. To secina vai nu no iepriekjs rindias, vai ar tiei izmantojot Lkas teormu.

5.3 Kpintja pacelanas lemmas

Kpintja pacelanas lemmas (Lifting the Exponent Lemmas) ir vairki savstarpji saistti rezultti, kuri auj atrast p-valucijas divu skaitu pakpju starpbai vai summai.

5.3.1 Valucijas nepra pirmskaitiem

aj noda aplkosim vienkrko gadjumu, ja p ir nepra skaitlis.

Piemrs (UKMO2013): Skaitlis pierakstts decimls sistmas bz satur 3^{2013} ciparus 3; citu ciparu skaita pierakst nav. Atrast augstko skaita 3 pakpi, kas dala o skaitli.

Ieteikums: Var aplkot ieskum mazku skaitli, kura decimlpierakst ir 27 trijnieki (jeb 3^3):

$$N = 333\,333\,333\ \ 333\,333\,333\ \ 333\,333\,333$$

o skaitli var sadalt vairkos reizintjos (katrs reizintjs dals ar 3, bet nedals ar 9 (var prbaudt ar ciparu summm). Tas auj droi noskaidrot, ar kdu 3 pakpi dals N.

Piemrs: Zmjam grafiku veselu skaitu funkcijai $f(k) = \nu_3(10^k - 1)$, kur $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{ll}
9 = 3 \cdot 3, & f(1) = 2, \\
99 = 9 \cdot 11, & f(2) = 2, \\
999 = 9 \cdot 111, & f(3) = 3, \\
9999 = 9 \cdot 1111, & f(4) = 2, \\
99999 = 9 \cdot 11111, & f(5) = 2, \\
999999 = 9 \cdot 1001 \cdot 111, & f(6) = 3, \\
9999999 = 9 \cdot 1111111, & f(7) = 2, \\
99999999 = 9 \cdot 11111111, & f(8) = 2, \\
999999999 = 9 \cdot 1001001 \cdot 111, & f(9) = 4.
\end{array}$$

Katru no skaitiem, kas uzrakstti ar visiem deviniekiem, minm dalt reizintjos t, lai katram reizintjam (111 utml.) btu viegli atrodama 3-valucija.

Apgalvojums 1: Doti divi veseli skaiti x un y un ar naturls skaitlis $n \in \mathbb{N}$. Dots ar pirmskaitlis p (var bt ar $p = 2$). Izpilds di nosacjumi:

- n nedals ar p.
- x, y nedals ar p.
- $x - y$ dals ar p.

Tad izpilds viendba:

$$\nu_p(x^n - y^n) = \nu_p(x - y).$$

Piemrs 1: $x = 10$, $y = 1$, $n = 7$, bet $p = 3$. Tad skaitlis $x^7 - y^7 = 10^7 - 1^7 = 9999999$ dals ar $3^2 = 9$, bet nedals ar $3^3 = 27$. (Tpat k skaitlis $x - y = 10 - 1 = 9$.)

Pierdjums: Apgalvojumu 1 pierda, sadalot $x^n - y^n$ reizintjos. Un tad pamatojot, ka summa

$$x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1} \equiv nx^{n-1}$$

nedals ar p. $\square$

Apgalvojums 2: Doti divi veseli skaiti x un y un ar naturls skaitlis $n \in \mathbb{N}$. Dots ar pirmskaitlis p (var bt ar $p = 2$). Izpilds di nosacjumi:

- n ir nepra skaitlis.
- n nedals ar p.
- x, y nedals ar p.
- $x - y$ dals ar p.

Tad izpilds viendba:

$$\nu_p(x^n + y^n) = \nu_p(x + y).$$

Piemrs 2: $x = 10$, $y = 1$, $n = 7$, bet $p = 11$. Tad skaitlis $x^7 + y^7 = 10^7 + 1^7 = 10000001$ dals ar $11^1 = 11$, bet nedals ar $11^2 = 121$. (Tpat k skaitlis $x + y = 11$.)

Turpmkajos piemros nometam prasbu, ka n nedals ar p. Toties papildus prasm, lai pirmskaitlis p btu nepra skaitlis. Ir spk vairkas kpintja pacelanas lemmas:

Pierdjums: Apgalvojumu 2 pierda, ievietojot y viet $-y$ un lietojot iepriekjo Apgalvojumu 1. □

Lemma 1 (Lifting the Exponent, LTE): Doti divi veseli skaiti x un y un ar naturls skaitlis $n \in \mathbb{N}$. Dots ar **nepra** pirmskaitlis p. Izpilds di nosacjumi:

- x, y nedals ar p.
- $x - y$ dals ar p.

Tad izpilds viendba:

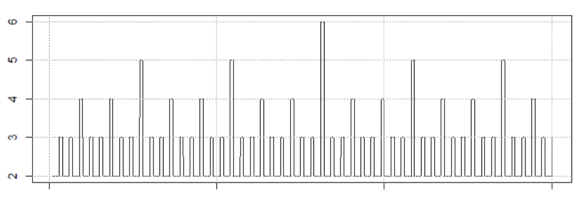
$$\nu_p(x^n - y^n) = \nu_p(x - y) + \nu_p(n).$$

Piemrs 3: $x = 10$, $y = 1$, $n = 27$, bet $p = 3$. Tad skaitlis

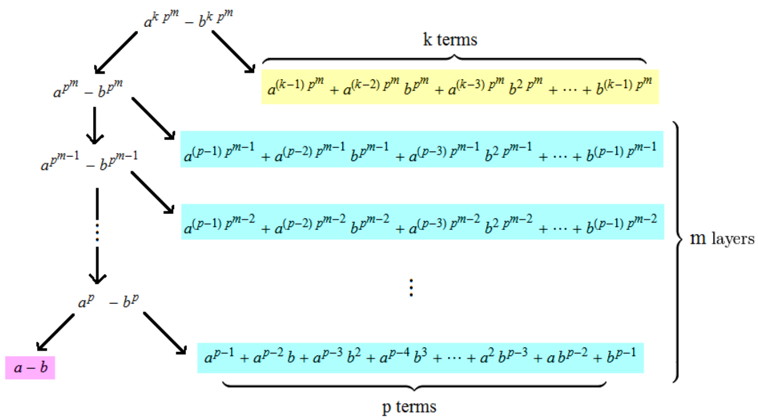
$$x^{27} - y^{27} = 10^7 - 1^7 = 999999999\,999999999\,999999999$$

dals ar 3^k pie $k = \nu_3(10 - 1) + \nu_3(27) = 2 + 3 = 5$ (t.i. dals ar $3^6 = 243$). Bet is skaitlis nedals ar 3^{k+1} (t.i. ar $3^6 = 729$).

Aplkojot jebkdas n vrtbas, iegstam grafiku funkcijai $f(n) = \nu_3(10^n - 1)$, t.i. ar kdu augstko trijnieka pakpi dals skaitlis n devinieki:



Pierdjums: Lemmu 1 pierda, atkrtoti dalot reizintjos izteiksmi $x^n - y^n$, kur var izteikt $n = k \cdot p^m$ (kur k nedals ar p):



Piemrs: Ar kdu lielko skaita 41 pakpi dals ds skaitlis:

$$\underbrace{9999\ldots9999}_{8405 \text{ devinieki}}.$$

Risinjums: Citiem vrdiem, mums jatrod $\nu_{41}(10^{8405}-1)$. Dalm reizintjos $8405 = 5 \cdot 41^2$.

Lemmu 1 nevar pielietot uzreiz izteiksmei $10^{5\cdot 41^2} - 1^{5\cdot 41^2}$, jo $10-1$ nedals ar 41. Par laimi, jau $99999 = 10^5 - 1$ dals ar 41. Prveidojam izteiksmi:

$$\nu_{41}(10^{5\cdot 41^2} - 1^{5\cdot 41^2}) = (100000^{41^2} - 1^{5\cdot 41^2}) = \nu_{41}(10000-1) + \nu_{41}(41^2) = 3.$$

Ttad mintais skaitlis dals ar 41^3 (bet nedals ar lielku 41 pakpi).

Piemrs: Katram dotajam naturlam skaitlim $k > 0$ atrast iespjami mazu n vrtbu, kurai $10^n - 1$ dals ar 3^k, izmantojot divas dadas metodes:

- Eilera teormu
- LTE Lemmu 1

Risinjums: Ievrosim, ka dotajam 3^k Eilera funkcijas vrtba ir $\varphi(3^k) = 3^k - 3^{k-1}$. Pc Eilera teormas, skaitlis $10^{\varphi(3^k)} - 1$ garantti dalsies ar 3^k. Savukrt pc kpintja pacelanas lemmas mums vajag lai $\nu_3(10-1) + \nu_3(n)$.

Apkoposim iegts vrtbas tabul (skaitus form $10^n - 1$, kas dals ar vajadzgo 3 pakpi):

k	1	2	3	4	5	5
Eilera teorma	10^1-1	10^6-1	$10^{18}-1$	$10^{54}-1$	$10^{162}-1$	$10^{486}-1$
LTE Lemma	10^1-1	10^1-1	10^3-1	10^9-1	$10^{27}-1$	$10^{81}-1$

K redzam tabul, LTE Lemma dod daudz preczku novrtjumu; atrasts n vrtbas tiem ir minimls, kam $10^n - 1$. Savukrt Eilera teorma piedv sereiz lielku skaitli, kur ar der un $10^n - 1$ dals ar 3^k, bet tas var nebt mazkais. aj piemr tas pat vienmr ir sereiz lielks nek LTE dotais novrtjums.

Lemma 2 (Lifting the Exponent, LTE): Doti divi veseli skaiti x un y un ar naturls skaitlis $n \in \mathbb{N}$. Dots ar **nepra** pirmskaitlis p. Izpilds di nosacjumi:

- n ir nepra skaitlis.
- x, y nedals ar p.
- $x + y$ dals ar p.

Tad izpilds viendba:

$$\nu_p(x^n + y^n) = \nu_p(x+y) + \nu_p(n).$$

Piemrs 4: $x = 10$, $y = 1$, $n = 121$, bet $p = 11$. Tad skaitlis

$$x^{121} + y^{27} = 10^{121} + 1^{121} = 1\underbrace{00\ldots00}_{\text{120 nulles}}1$$

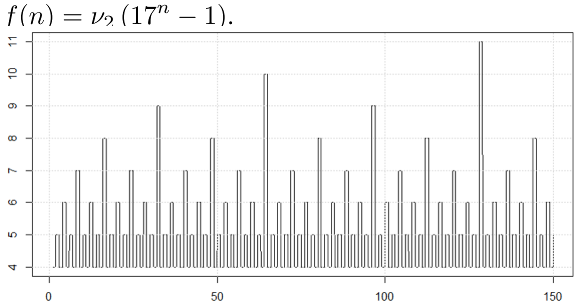
dals ar 11^k pie $k = \nu_{11}(10+1) + \nu_{11}(121) = 1 + 2 = 3$ (t.i. dals ar $11^3 = 1331$). Bet is skaitlis nedals ar 11^{k+1} (t.i. ar $11^4 = 14641$).

Pierdjums: Lemmu 2 pierda, aizstjot y ar $(-y)$ un izmantojot iepriekjo Lemmu 1. (eit ir btiski, lai n ir nepra; lai gan pats y, gan ar $(-y)^n$ maina zmi. □

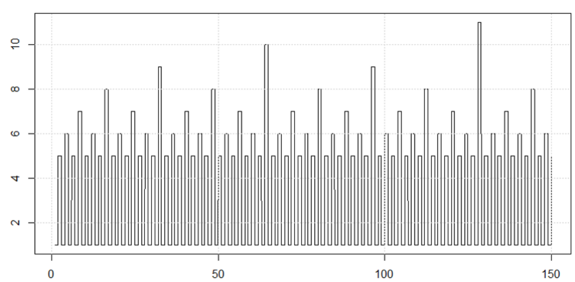
5.3.2 Valucijas pirmskaitlim 2

Uzdevums (Valsts4Posms-1993.9-12.2): Dots naturls skaitlis $a > 2$. Pierdt, ka eksist tikai galgs skaits tdu naturlu n, ka $a^n - 1$ dals ar 2^n.

Izvlamies "patvagu" naturlu skaitli $a = 17$. Apskatsim $17^n - 1$ dalmbu ar 2 pakpm – ievieam funkciju $f(n) = \nu_2\left(17^n - 1\right)$.



Saldzinsim o ar citu naturlu skaitli $a = 15$. Ldzgi k iepriek apskatm funkciju $f(n) = \nu_2\left(15^n - 1\right)$.



Ievrosim, ka abi grafiki izturas ldzgi nepra vrtbm n. Tie sakrt ar $\nu_2(n)$ grafiku, kas pabdts 4 vienbas uz augu. Toties pie nepra n uzvedbas atiras: $\nu_2\left(17^n - 1\right) = 4$ un $\nu_2\left(15^n - 1\right) = 1$.

Lemma 3 (Lifting the Exponent, LTE): Skaiti x un y ir divi veseli nepra skaiti un n ir pozitvs **pra** skaitlis. Tad

$$\nu_2(x^n - y^n) = \nu_2(x - y) + \nu(x + y) + \nu_2(n) - 1.$$

Ja savukrt n ir pozitvs **nepra** skaitlis, tad

$$\nu_2(x^n - y^n) = \nu_2(x - y).$$

5.3.3 Skaitliski piemri

1.jautjums: Ar cik nullm beidzas skaitlis 2022! (2022 faktorils, t.i. visu skaitu no 1 ldz 2022 reizinjums)?

2.jautjums: Ar kdu lielko skaita 2 pakpi dals kombincija C_{2022}^{415}?

3.jautjums: Atrast mazko k vrtbu, kurai $11^k - 1$ beidzas ar 4 nullm.

4.jautjums: Atrast 5-valuciju reizinjumam

$$(2-1)\cdot(2^2-1)\cdot(2^3-1)\cdot\ldots\cdot(2^{1000}-1).$$

5.jautjums: Atrast 7-valuciju reizinjumam

$$(2-1)\cdot(2^2-1)\cdot(2^3-1)\cdot\ldots\cdot(2^{1000}-1).$$

6.jautjums: Neizmantojot Kummera teormu (bet izmantojot interpretciju) pamatot, ka C_{2012}^{17}: dals ar 2012. (**Ieteikums:** Izmantot faktu, ka 17 un 2012 ir savstarpji pirmskaiti un td kombincijm C_{2012}^{17}, ko iztlojas k pa apli izvietotas 2012 krelltes, no kurm tiei 17 ir nokrsotas - bs simetriskas attiecb pret 2012 pagriezieniem ap apa centru.)

Dieml, o nevar izspriest otrdi. No t, ka k un 2012 ir kopgi daltji vl neseko, ka C_{2012}^{17} nedals ar 2012.

```
>>> bin(2022)
'0b11111100110'
>>> bin(415)
'0b110011111'
>>>
```

5.3.4 Sacensbu uzdevumi

1.uzdevums: Pamatot, ka harmoniskas rindas pirmo n loceku summa:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}$$

nevar bt vesels skaitlis, ja $n > 1$.

2.uzdevums (CGMO2012.8) Cik kop $\{0,1,2,\ldots,2012\}$ ir elementu k, kam C_{2012}^{k}: dals ar 2012? Ar C_n^k apzmjam kombincijas no n pa k jeb

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ieteikumi:

- Sadalm reizintjos: $2012 = 2^2 \cdot 503$
- Ievrojam, ka $503 \mid C_{2012}^{k}$ tad un tikai tad, ja 503 nedala k.
- Ievrojam, ka $4 \mid C_{2012}^{k}$ tad un tikai tad, ja saskaitot binraj pierakst k un $2012 - k$ rodas vismaz divi prnesumi (Kummera teorma).

3.uzdevums (IMO2019.P4) Atrast visus naturlo skaitu (k, n) prus, kuriem izpilds

$$k! = (2^n-1)(2^n-2)(2^n-4)\cdots(2^n-2^{n-1}).$$

4.uzdevums (IMO2000.5): Vai eksist naturls n, ka skaitlim n ir tiei 2000 daltji, kuri ir pirmskaiti, un 2^n+1 dals ar n. (Skaitlis n drkst dalties ar ar pirmskaitu pakpm.)

5.uzdevums (APMO1997.2): Atrast veselu skaitli n, kam $100 \leq n \leq 1997$, ka n dala $2^n + 2$.

6.uzdevums (Sierpinski): Pierdt, ka nevienam $n > 1$ neizpilds

$$n \mid 2^{n-1} + 1.$$

7.uzdevums (IMO1990.3): Noteikt visus veselos skaitus $n > 1$, kam $\frac{2^n+1}{n^2}$ ir vesels skaitlis.

8.uzdevums (BW2015.16): Ar $P(n)$ apzmjam lielko pirmskaitli, ar ko dals n. Atrast visus naturlos skaitus $n \geq 2$, kam

$$P(n) + \lfloor \sqrt{n} \rfloor = P(n+1) + \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor .$$

9.uzdevums (BW2015.17): Atrast visus naturlos skaitus n, kuriem $n^{n-1} - 1$ dals ar 2^{2015}, bet nedals ar 2^{2016}.

Ieteikumi: Apzmsim virkni $a_n = \nu_2(n^{n-1} - 1)$. Pamatot, ka $a_n = 2\nu_2(n-1) + \nu_2(n+1) - 1$.

10.uzdevums (Valsts4Posms-1992.12.1): Pierdt, ka eksist bezgalgi daudz naturlu skaitu kvadrtu, kurus var iegt, divas reizes pc krtas uzrakstot kdu naturlu skaitli.

Ieteikumi: Divreiz uzrakstmos skaitus var mrtiecgk meklt, ja mina dalt reizintjos izteiksmi $10^n + 1$. Daltji 101, 1001, 10001 utt. pards tad, ja aplko divreiz pc krtas uzraksttus skaitus, piemram, 1212, 123123, 12341234. Savukrt, $10^n + 1$ labi dals reizintjos, ja aplko, teiksim, $\nu_{11}(10^n + 1)$. Atkrtojamo ciparu skaitu n var pielgot t, lai $10^n + 1$ daltos ar to, ko mums vajag.

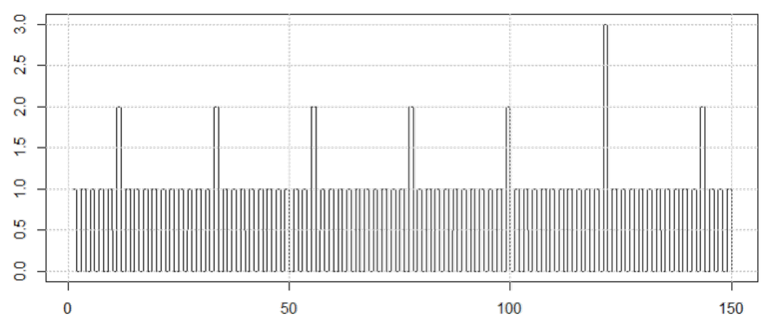


Fig. 4: Grafiks funkcijai $f(n) = \nu_{11}(10^n + 1)$ (Kpintja Pacelanas Lemma 2)

5.4 Atsauces

1. https://cp4space.hatsya.com/2014/04/13/lifting-the-exponent/.
2. https://bit.ly/3KdtxBH.
3. http://artofproblemsolving.com/articles/files/SatoNT.pdf.
4. http://www.aquatutoring.org/KummerTheoremLucasTheorem.pdf.
5. http://reu.dimacs.rutgers.edu/~mslusky/.