1 Algebra: Rekurentas virknes

1.uzdevums

Fibonači virkne definēta ar sakarībām $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ (ja $n \geq 2$) – katru nākamo locekli iegūst, saskaitot divus iepriekšējos.
Šīs virknes locekļi no F_0 līdz F_{35} apkopoti tabulā (sk. zīmējumu).

Zināms, ka Fibonači skaitļu atlikumu virkne, dalot ar 5, ir periodiska: Katru nākamo atlikumu viennozīmīgi nosaka divi iepriekšējie atlikumi – tāpēc tie sāks atkārtoties. Daži pirmie atlikumu virknes locekļi ir $0, 1, 1, 2, 3, 0, 3, 3, 1, 4, \ldots$. Kāds ir šīs atlikumu virknes periods?

0	1	1	2
3	5	8	13
21	34	55	89
144	233	377	610
987	1597	2584	4181
6765	10946	17711	28657
46368	75025	121393	196418
317811	514229	832040	1346269
2178309	3524578	5702887	9227465

2.uzdevums

Kādam valdniekam bija n kvadrātiski lauciņi. Uz pirmā lauciņa viņš uzlika 1 rīsu graudu, uz otrā lauciņa viņš uzlika divreiz vairāk (2 rīsu graudus), uz nākamā viņš uzlika vēl divreiz vairāk (4 rīsu graudus) utt.

Lai varētu vieglāk saprast, cik graudi nepieciešami uz k-tā lauciņa, viņš definēja rekurentu virkni: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$ (ja $n \geq 3$). Cik rīsu graudiņu nepieciešami, lai noklātu pirmos 8 lauciņus šajā virknē?

3.uzdevums

Kosmiskie ceļotāji aizlidoja uz planētu, uz kuras gravitācija līdzīga Zemei (brīvās krišanas paātrinājums ir $10\ m/s^2$), bet nav gaisa pretestības. Ja no šīs planētas debesskrāpja jumta palaiž vaļā ķieģeli, tad pirmajā sekundē tas nolido 5 metrus uz leju, otrajā sekundē 15 metrus, trešajā sekundē 25 metrus utt.

Ķieģeļa nolidotais ceļš k-tajā sekundē ir a_k, kur $a_1 = 5$, $a_n = a_{n-1} + 10$ (ja $n \geq 2$). Zināms, ka tieši pēc 10 sekunžu lidojuma, ķieģelis atsitas pret planētas virsmu. Cik metru augsts bija debesskrāpis? (*Ierakstīt tikai skaitli bez mērvienības.*)

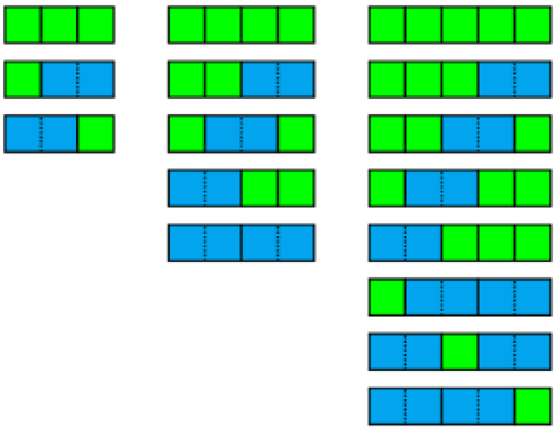
4.uzdevums

No mājām līdz ieejai dzīvoklī ir 10 pakāpieni. Naoko ar vienu soli uzkāpj 2 vai 3 pakāpienus (vienu pakāpienu ar vienu soli viņa nekad nekāpj). Cik dažādos veidos var uzkāpt līdz dzīvoklim no ieejas? (Veidus uzskata par atšķirīgiem, ja atšķiras izdarīto soļu secība: $2+3$ ir cita secība nekā $3+2$.)

5.uzdevums

Mums jāaizpilda ar krāsainām flīzēm taisnstūris 1×7. Ir pieejamas flīzes ar izmēru 1×1 (zaļas) un arī flīzes ar izmēru 1×2 (zilas). Dažādie veidi, kā aizpildīt taisnstūrus 1×3, 1×4 un 1×5 redzami zīmējumā.

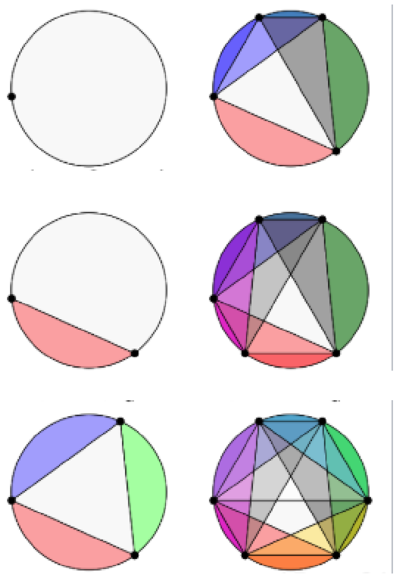
Cik veidos ar šīm flīzēm var aizpildīt taisnstūri 1×7 (zilo un zaļo flīžu skaits un secība ir svarīgi).



6.uzdevums

Zīmējumā attēlota riņķa līnija, uz kuras atzīmēti n punkti. Starp visiem atzīmētajiem punktiem ir novilkti nogriežņi (riņķa hordas). Zināms, ka nekādas trīs hordas nekrustojas vienā punktā. Ar a_n apzīmējam gabalu skaitu, kurās hordas sadala riņķi. Piemēram,
$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4;\ a_4 = 8.$

Atrast a_6 vērtību.



7.uzdevums

Ar a_n (kur $n \geq 0$) apzīmējam atlikumu, kuru dod 3^n, dalot ar 7. Atrast virknes a_n periodu.

8.uzdevums

Ar b_n (kur $n \geq 0$) apzīmējam atlikumu, kuru dod $12n$, dalot ar 27. Atrast virknes b_n periodu.

9.uzdevums

Ar c_n (kur $n \geq 0$) apzīmējam atlikumu, kuru dod $12n$, dalot ar 29. Atrast virknes c_n periodu.

10.uzdevums

Definējam rekurentu virkni $a_n = 2a_{n-1} + 3$ $(n \geq 1)$, bet nenorādām tās pirmo locekli a_0. Var viegli izteikt dažus nākamos locekļus:

$a_1 = 2a_0 + 3$ un $a_2 = 2a_1 + 3 = 2(2a_0 + 3) + 3 = 4a_0 + 9$.

Ja mēs izsakām a_4 ar a_0 šādi: $a_4 = 16a_0 + C$, tad cik ir C?