Līdzīgi trijstūri

Kalvis Apsītis (kalvis.apsitis@gmail.com)
Latvijas Universitāte EZTF, Āgenskalna Valsts ģimnāzija

Saturs

1. Teorija
2. Uzdevumu paraugi
3. Vērtēšanas kritēriji
4. Secinājumi

Teorija: Kas drīkst parādīties novada olimpiādē?

7. klase					
7.1. Kā nosaka kopas visus elementus, aprēķina notikuma varbūtību?	7.2. Kā definē ģeometriskas figūras?	7.3. Kā raksturo sakarību starp mainīgiem lielumiem?	7.4. Kā pieraksta un pēta funkcijas, kuru grafiks ir taisne?	7.5. Kā raksturo trijstūri, izmantojot tā elementus?	7.6. Kādas ir sakarības starp lielumiem trijstūrī?
15-19 stundas	*18-22 stundas*	*10-12 stundas*	*16-20 stundas*	*18-22 stundas*	*18-22 stundas*

7. klasē uz 2. posma olimpiādi jāzina trijstūra iekšējo leņķu summa.

8. klase					
8.1. Kā matemātiski raksturo un analizē datus?	8.2. Kā skaidro un lieto pakāpi ar veselu kāpinātāju?	8.3. Kā rīkojas, ja skaitli nevar pierakstīt kā daļu?	8.4. Kā aprēķina laukumu jebkuram trijstūrim, riņķim?	8.5. Kas kopīgs četrstūriem, kuru pretējās malas ir pa pāriem paralēlas?	8.6. Kā izpilda iztei
12-16 stundas	*18-22 stundas*	*24-28 stundas*	*18-22 stundas*	*20-24 stundas*	*18-2*

9. klase					
9.1. Kā definē un raksturo līdzīgus trijstūrus?	9.2. Kas kopīgs četrstūriem, kuriem tieši divas malas ir paralēlas?	9.3. Kā aprēķinos izmanto taisnleņķa trijstūra divu malu attiecību?	9.4. Kā izmanto izteiksmju sadalīšanu reizinātājos?	9.5. Kā skaidro un izmanto formulas darbā ar kvadrātvienādojumu, kvadrātfunkciju?	9.6. K situācij nezi lielu
16-20 stundas	*18-22 stundas*	*16-20 stundas*	*20-24 stundas*	*20-24 stundas*	*18-2*

"Vidusskolai 10.-12. klasei olimpiādē tiks ievērota Matemātika I un Matemātika II tematu secība." (Guna Brenda Einberga, 2022.g.)

https://www.nms.lu.lv/olimpiades/valsts-olimpiade/ > **Galvenie teorijas jautājumi…**

Teorija: Kāda ģeometrija drīkst parādīties?

8.klase	Leņķi pie paralēlām taisnēm; Paralelogrami. Vienādi trijstūri. Trijstūra laukuma formula $S = \frac{1}{2}ah$
9.klase	Līdzīgi trijstūri. Trapeces laukums $S = \frac{a+b}{2}h$ Var nezināt trigonometriju vai trijstūra laukumu $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$
Matemātika I	Vektoru darbības. Vektori koordinātu plaknē. Taisnes vienādojums. Sinusu un kosinusu teorēma. Trigonometrisku izteiksmju pārveidojumi. Papildus 10. klasē uz 2. posma olimpiādi nepieciešams apgūt svarīgākos jēdzienus un sakarības no ģeometrijas (skat. 7.-11. lpp.)
Matemātika II	Analītiskā ģeometrija (punktu kolinearitāte, nogriežņa viduspunkts, trijstūra laukums). Sekantes, hordas, regulāri n-stūri.

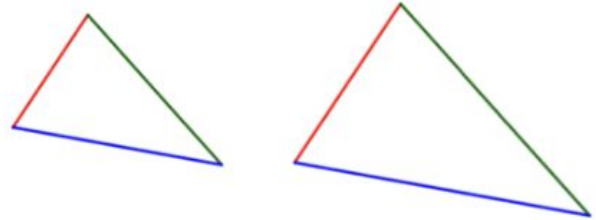
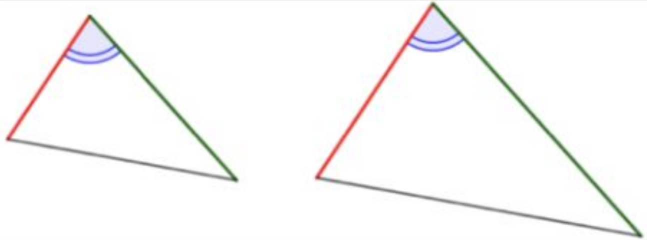
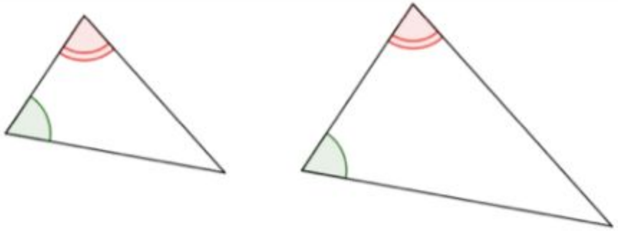
Līdzīgu trijstūru jēdziens

Definīcija: Divus trijstūrus sauc par *līdzīgiem*, ja to atbilstošās malas ir proporcionālas un atbilstošie leņķi ir vienādi.

Līdzvērtīga definīcija: Divus trijstūrus sauc par līdzīgiem, ja starp tiem eksistē *līdzības pārveidojums* (taisnes attēlojas par taisnēm un visi attālumi piereizinās ar koeficientu k).

Pamatfakts:

Trijstūru līdzības trīs nosacījumi

Pazīme	**Ilustrācija**
"**mmm**" – divi trijstūri ir līdzīgi, ja viena trijstūra trīs malas ir attiecīgi proporcionālas ar otra trijstūra trim malām	
"**mlm**" – divi trijstūri ir līdzīgi, ja viena trijstūra divas malas ir proporcionālas otra trijstūra divām malām un leņķi starp tām ir vienādi	
"**ll**" – divi trijstūri ir līdzīgi, ja viena trijstūra divi leņķi ir attiecīgi vienādi ar otra trijstūra diviem leņķiem	

Metriskas sakarības līdzīgiem trijstūriem

Ja divi trijstūri ir līdzīgi: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, tad atbilstošo malu garumu attiecību sauc par *līdzības koeficientu*: $\dfrac{AB}{A_1B_1} = k$

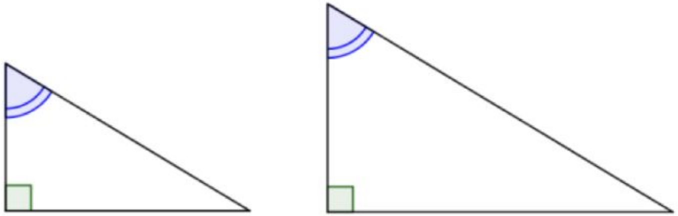
Arī perimetru attiecība:

$$\frac{P(ABC)}{P(A_1B_1C_1)} = k$$

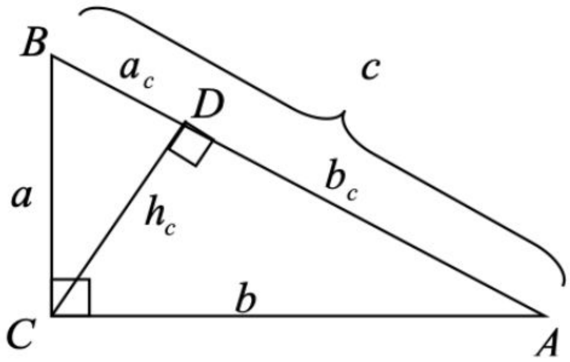
Laukumu attiecībai ievērojam, ka $\triangle ABC$ gan pamats, gan augstums ir k reizes garāki nekā $\triangle A_1B_1C_1$

Tāpēc $\dfrac{S(ABC)}{S(A_1B_1C_1)} = k^2$

Pamatfakts: Augstums dala taisnleņķa trijstūri līdzīgos trijstūros



Taisnleņķa trijstūru līdzībai pietiek ar vienu vienādu leņķi.

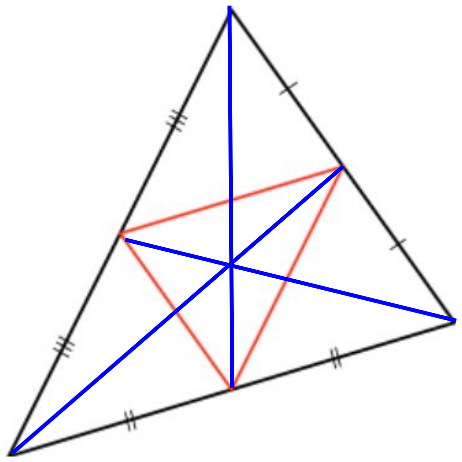


(1) Augstums no taisnā leņķa virsotnes sadala trijstūri 2 taisnleņķa trijstūros, kas līdzīgi sākotnējam.

(2) Taisnleņķa trijstūra malu, augstuma un katešu projekciju sakarības:

$$b = \sqrt{c \cdot b_c}, \quad a = \sqrt{c \cdot a_c}, \quad h = \sqrt{a_c b_c}$$

Pamatfakts: Viduslīnija dala trijstūri līdzīgos trijstūros, mediānas krustojas vienā punktā.

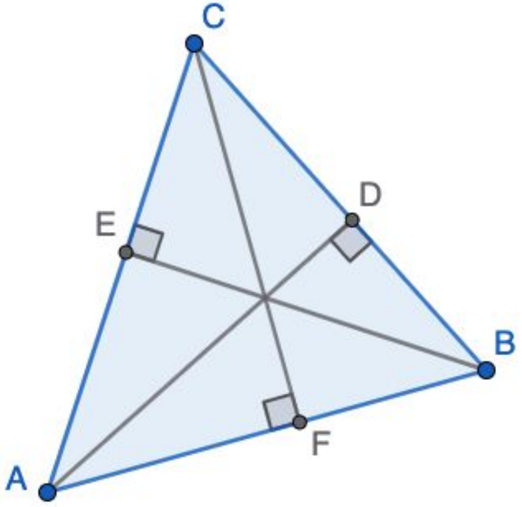


(1) Viduslīniju veidotais trijstūris līdzīgs sākotnējam (visas malas divreiz īsākas; pazīme MMM).

(2) Mediānas sākotnējā trijstūrī ir mediānas arī viduslīniju (sarkanajā) trijstūrī. Ja sākotnējā trijstūrī tās nekrustotos 1 punktā, būtu pretruna.

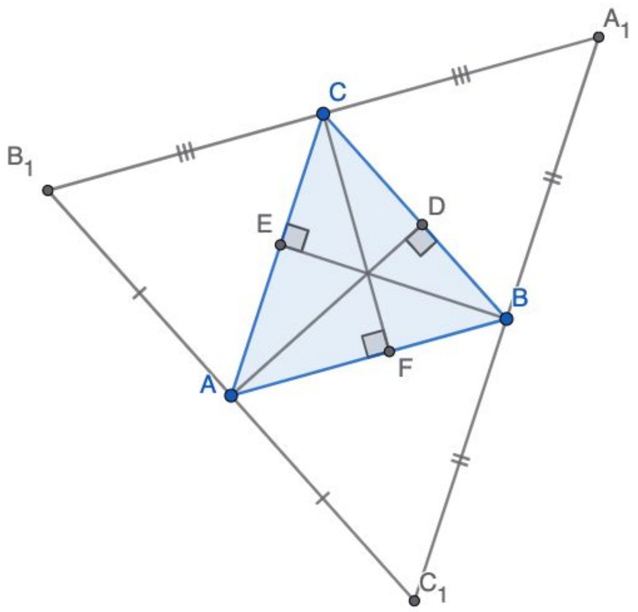
(3) Līdzības dēļ mediānu krustpunkts dala katru mediānu attiecībā 2:1 (skaitot no virsotnes).

Pamatfakts: Trijstūra augstumi krustojas vienā punktā – 1



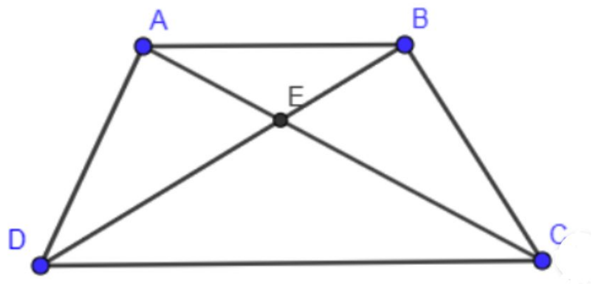
Pamatojums?

Pamatfakts: Trijstūra augstumi krustojas vienā punktā – 2

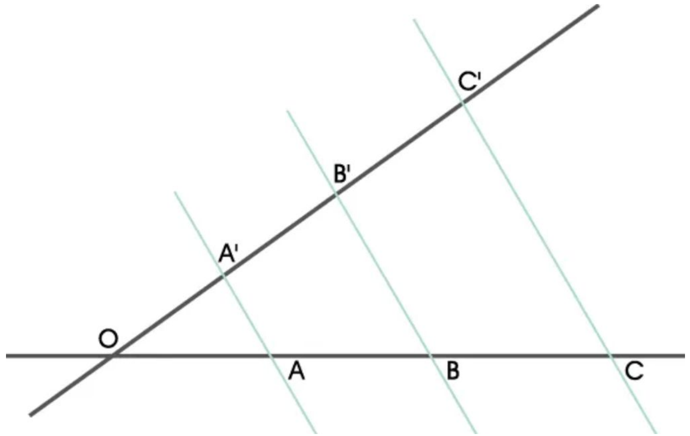


- Ap sākotnējo trijstūri uzkonstruē divreiz lielāku, kuram sākotnējais veido viduslīnijas.
- Sākotnējā trijstūra augstumi ir $\triangle A_1B_1C_1$ vidusperpendikuli.
- Vidusperpendikuls ir punktu ģeometriska vieta vienādos attālumos no nogriežņa galapunktiem. (Divu vidusperpendikulu krustpunkts – vienā attālumā no A_1, B_1, C_1

Pamatfakts: Līdzīgi trijstūri pie paralēlām taisnēm

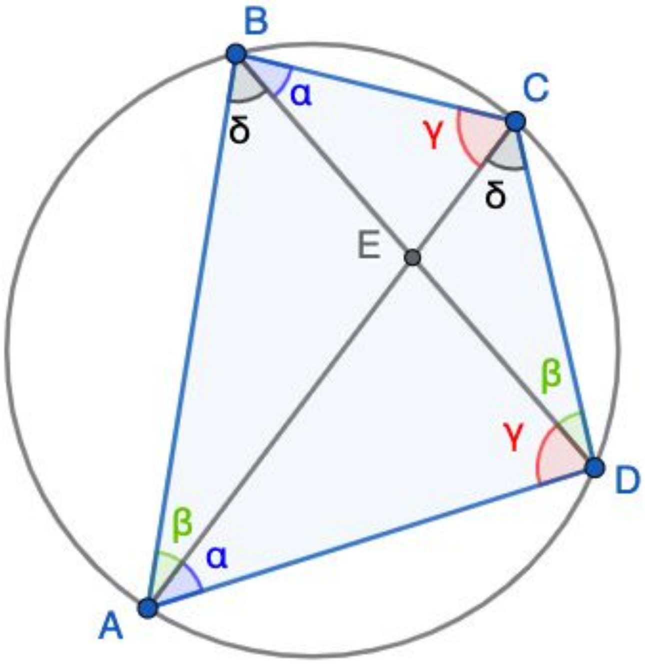


(1) Trapecē abi trijstūri (AEB, DEC zīmējumā), ko veido pamata mala un diagonāles ir līdzīgi.



(2) OAA', OBB', OCC' ir savstarpēji līdzīgi.
OA/OA'=OB/OB'=OC/OC'

Pamatfakts: Riņķī ievilkta četrstūra pazīmes



$ABCD$ ir riņķī ievilkts četrstūris un E ir tā diagonāļu krustpunkts.

(1) 4 vienādi ievilkto leņķu pāri (α, β, γ, δ).

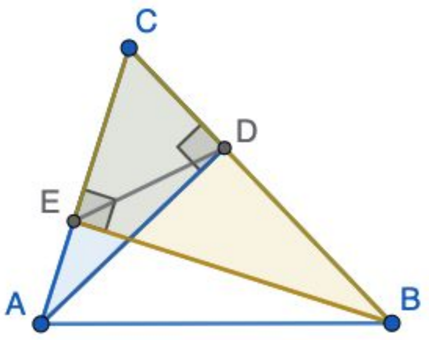
(2) $\triangle EAB \sim \triangle EDC,\ \triangle EBC \sim \triangle EAD$

(3) $AE \cdot EC = BE \cdot ED$ (hordu gabalu reizinājumi, kas iet caur E, ir vienādi)

(4) $$2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360^\circ$$
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$$

Ievilkta četrstūra pretējo leņķu summa ir 180°.

Pamatfakts: Divu augstumu pamati un trešā virsotne

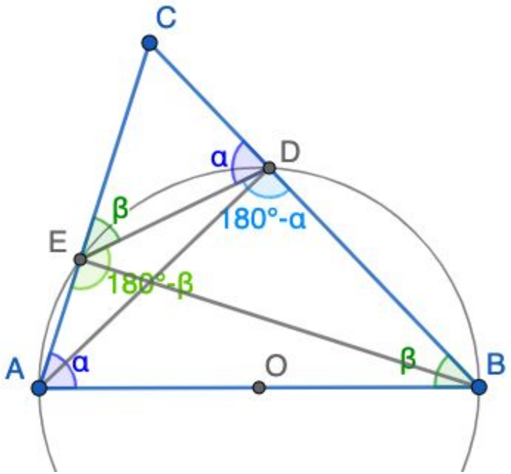


Teorēma: Šaurleņķu trijstūrī ABC vilkti augstumi AD un BE. Tad △ABC ~ △DEC. Divi pierādījumi:

(1) Taisnleņķa trijstūri ACD un BCE ir līdzīgi – tātad

$\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB}$ Pārraksta daļu attiecību: $\frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CB}$

$\measuredangle ACB$ Ir kopīgs. Pēc MLM pazīmes △ABC ~ △DEC.



(2) AEB un ADB ir taisni leņķi →

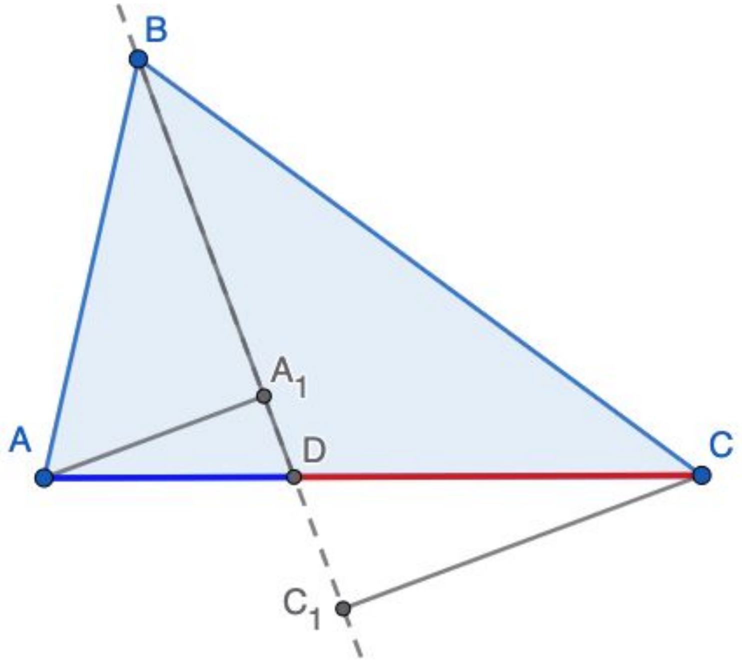
AEDB ir četrstūris, ap kuru var apvilkt riņķa līniju un AB ir tās diametrs.

Riņķī ievilktā četrstūrī pretējo leņķu summa ir 180°.

Tāpēc EDB=180°–α un CDE=α.

Pamatfakts: Trijstūra bisektrises īpašība

Ja ABC ir trijstūris un BD ir leņķa B bisektrise, tad $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$



Trijstūri ABA_1 un BCC_1 ir līdzīgi.

Tāpēc $$\frac{AB}{BC} = \frac{AA_1}{CC_1}$$

Arī trijstūri ADA_1 un CDC_1 ir līdzīgi.

Tāpēc $$\frac{AA_1}{CC_1} = \frac{AD}{DC}$$

Abas vienādības apvieno:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$$

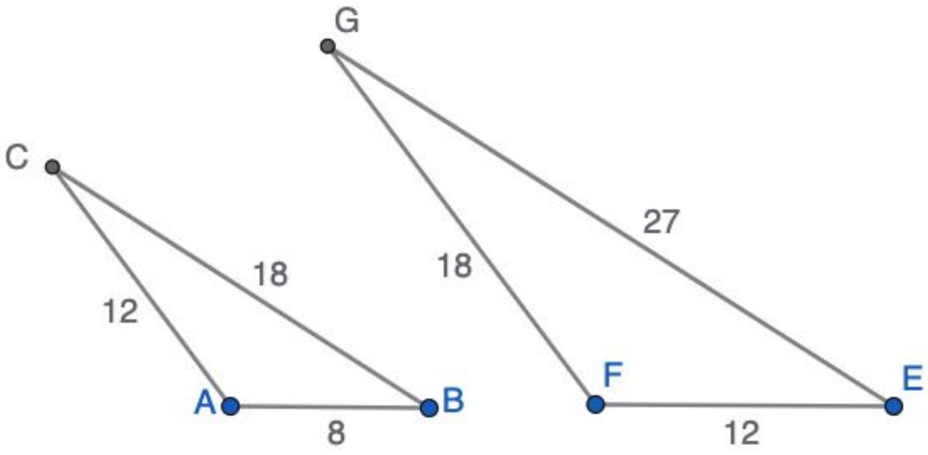
E1. piemērs

Viena trijstūra divas malas un divi leņķi vienādi ar otra trijstūra divām malām un diviem leņķiem. Vai var apgalvot, ka šie trijstūri ir vienādi?

E1.piemēra atrisinājums

Pēc pazīmes LL abiem trijstūriem jābūt līdzīgiem. Bet tie var nebūt vienādi.

Vienādās malu attiecības veido ģeometrisku progresiju:



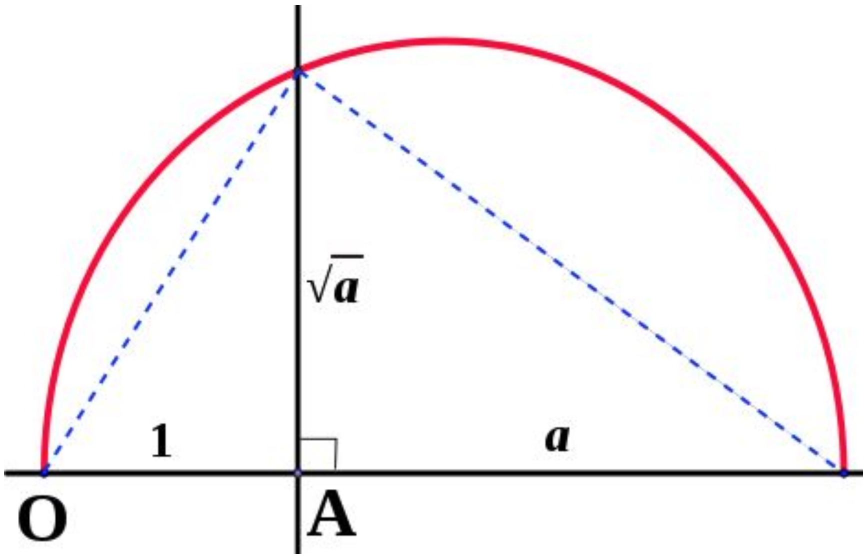
a_1	a_2	a_3	
	a_2	a_3	a_4

E2. piemērs

Dots nogrieznis ar garumu a centimetri. Vai ar cirkuli un lineālu (bez iedaļām) var uzkonstruēt nogriezni ar garumu $\sqrt{a}$ centimetri?

(*Piezīme:* Sk. arī "Kuba dubultošanas problēma" – neatrisināma ar cirkuli un lineālu: https://en.wikipedia.org/wiki/Doubling_the_cube)

E2.piemēra atrisinājums

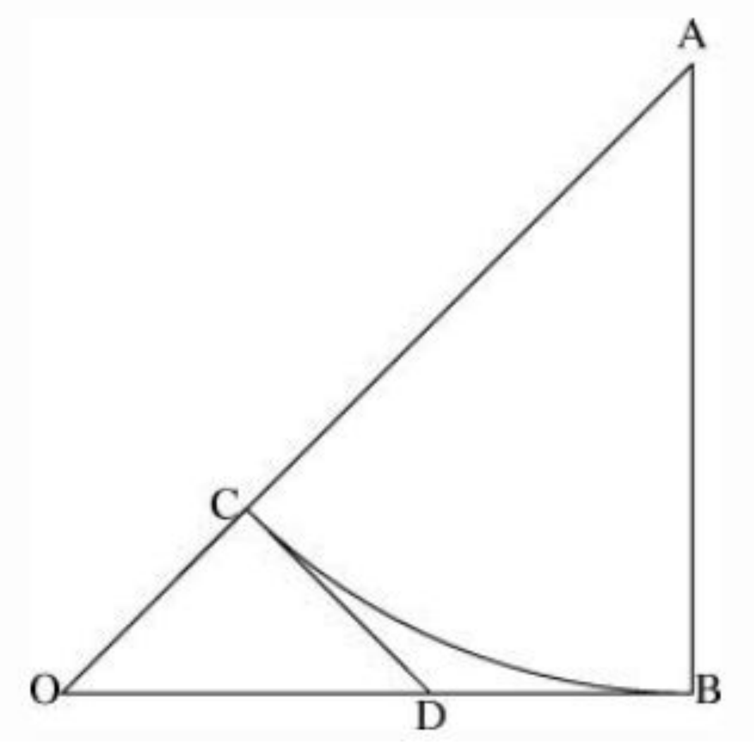


Uzdevumā par “kvadrātsaknes konstruēšanu” svarīga ir mērvienība. Kvadrātsaknei no 1m un no 100cm jāsanāk tādai pašai! Tāpēc pieņemam, ka mums ir vienības nogrieznis garumā 1 mērvienība.

E3. Piemērs

Vai ar ģeometrisku konstrukciju var parādīt, ka $\sqrt{2}$ ir iracionāls?

E3.piemēra atrisinājums



Pieņemam, ka vienādsānu taisnleņķa trijstūris OAB ir mazākais trijstūris ar veseliem malu garumiem. Tad $CO = AO - AC$ arī ir vesels.
Punktā C velkam perpendikulu pret OA. Pieskares no punkta D ir vienādas ($DC=DB$). Tāpēc arī $OD=OB-DB$ ir vesels. Tāpēc ODC ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris ar vēl īsākām veselām malām. Pretruna.

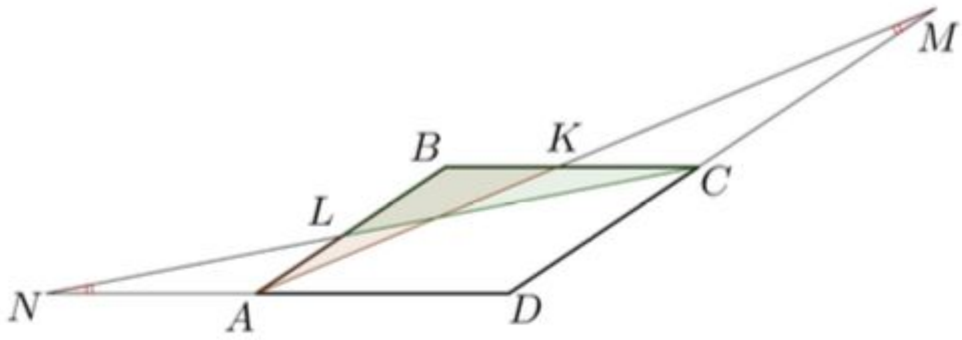
Fēliksa Kleina Erlangenes programma (1872.g.): Jo vairāk pārveidojumu, jo mazāk invariantu

	Pārveidojumi	Kas saglabājas pārveidojumos
Eiklīda ģeometrija (*Kvadrāts vienāds pats ar sevi*)	• Paralēlā pārnese (*translation*) • Pagrieziens (*rotation*) • Ass simetrija (*reflection*)	• Visi attālumi • Visi leņķi, • Visu nogriežņu garumu attiecības • Paralēlas taisnes • Nogriežņu attiecības uz paralēlām taisnēm • Laukumu attiecības
Līdzības ģeometrija (*Liels kvadrāts vienāds ar mazu kvadrātu*)	• Paralēlā pārnese (*translation*) • Pagrieziens (*rotation*) • Ass simetrija (*reflection*) • Homotētija (*dilation*; un vispār – staipīšana visos virzienos vienādi)	• Visi leņķi, • Visu nogriežņu garumu attiecības • Paralēlas taisnes • Nogriežņu attiecības uz paralēlām taisnēm • Laukumu attiecības
Afīnā ģeometrija (*Paralelograms vienāds ar katru citu paralelogramu*)	• Paralēlā pārnese (*translation*) • Pagrieziens (*rotation*) • Ass simetrija (*reflection*) • Homotētija (*dilation*) • Nevienmērīga staipīšana (*scale*) • Šķiebšana jeb greizums (*shear*)	• Paralēlas taisnes • Nogriežņu attiecības uz paralēlām taisnēm • Laukumu attiecības

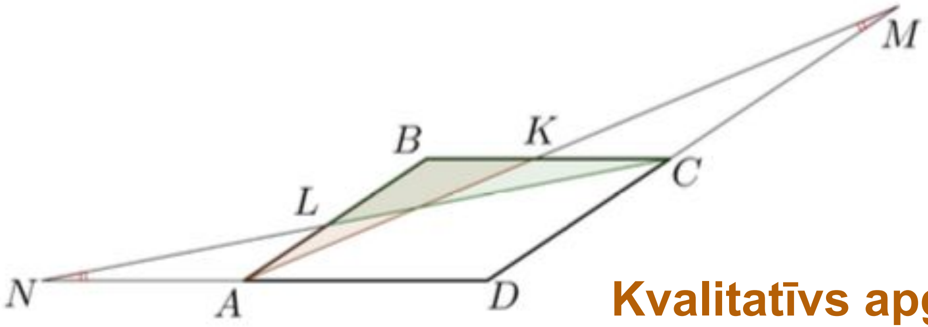
Uzdevumu paraugi

1.uzdevums

Uz paralelograma $ABCD$ malām AB un BC atlikti attiecīgi punkti L un K; taisne AK krusto taisni DC punktā M, taisne CL krusto taisni DA punktā N. Pierādīt, ka $\triangle ABK \sim \triangle CBL$, ja dots, ka $\angle CND = \angle AMD$!



1.uzdevuma atrisinājums



Dots: $\angle CND = \angle AMD$,

K uz BC, L uz AB,

$BC || AD$, $AB || CD$

Kvalitatīvs apg. $\angle CND$ un $\angle BCL$ ir šķērsleņķi

Kvantitatīvs apg. $\rightarrow$

$\angle CND = \angle BCL$

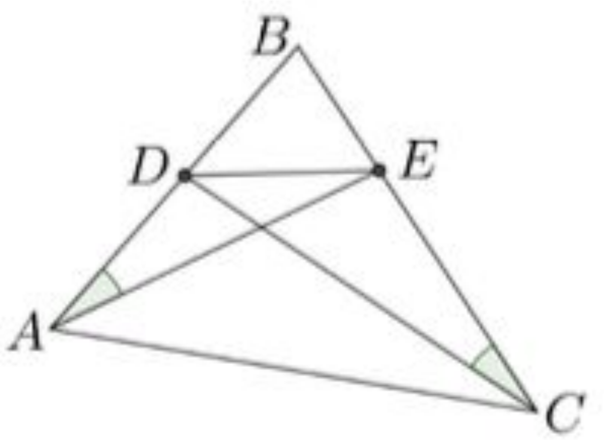
$\angle BAK$ un $\angle AMD$ ir šķērsleņķi

$\rightarrow \angle BAK = \angle AMD$

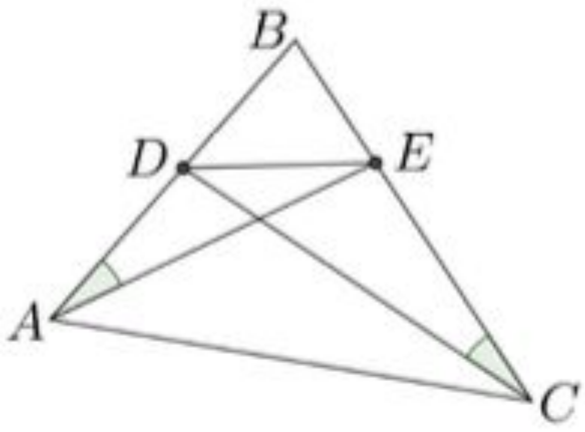
$$\left.\begin{array}{l} \angle BCL = \angle BAK \\ \angle ABK = \angle LBC \end{array}\right\} \rightarrow \triangle ABK \sim \triangle CBL$$

2.uzdevums

Uz trijstūra ABC malām AB un BC ņemti attiecīgi punkti D un E. Dots, ka $\sphericalangle BAE = \sphericalangle BCD$. Pierādīt, ka trijstūri ABC un EBD ir līdzīgi!



2.uzdevuma atrisinājums – 1

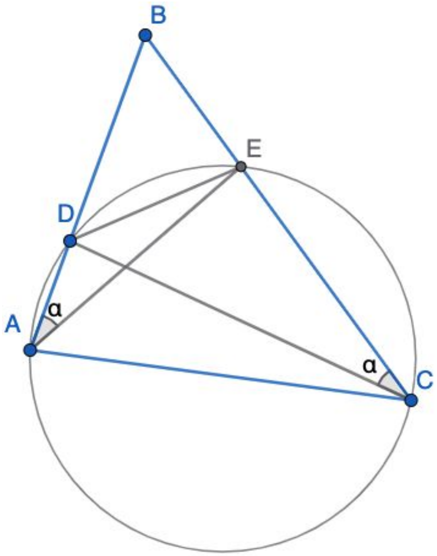


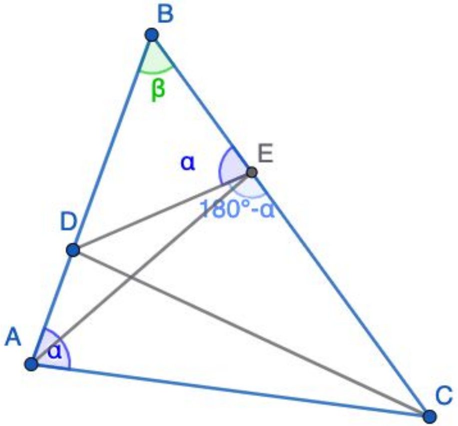
$\triangle ABE \sim \triangle CBD$ (pazīme LL)

$$\frac{BD}{BE} = \frac{CB}{AB} \quad \text{jeb} \quad \frac{BD}{BC} = \frac{BE}{AB}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Leņķis } ABC \text{ kopīgs} \\ \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{BE}{AB} \end{array}\right\} \rightarrow \triangle ABC \sim \triangle BED$$

2.uzdevuma atrisinājums – 2





$\measuredangle DAE = \measuredangle DCE \rightarrow$ Ap $ADEC$ var apvilkt riņķa līniju.

Ap $ADEC$ var apvilkt riņķa līniju

$\rightarrow \measuredangle DAC + \measuredangle DEC = 180^\circ$

$\measuredangle DEC$, $\measuredangle BED$ ir blakusleņķi $\rightarrow$

$\measuredangle BED = 180^\circ - \measuredangle DEC = \measuredangle DAC$

$\measuredangle BED = \measuredangle BAC$ un $\measuredangle ABC = \measuredangle DBE$

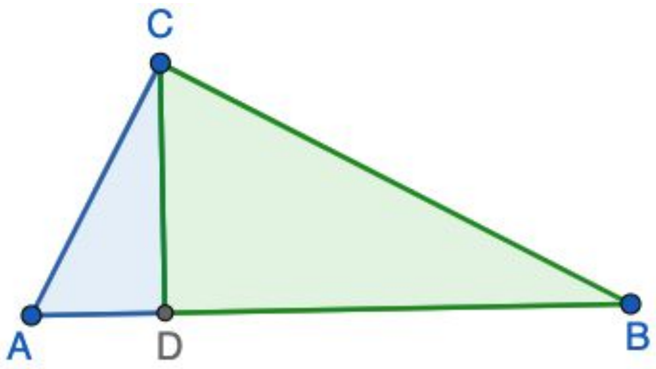
$\rightarrow \triangle EBD, \triangle ABC$ ir līdzīgi

(pazīme LL)

3.uzdevums

Vai jebkuru taisnstūri jebkurai naturālai n ($n \geq 2$) vērtībai var sagriezt n savstarpēji līdzīgos trijstūros?

3.uzdevuma atrisinājums

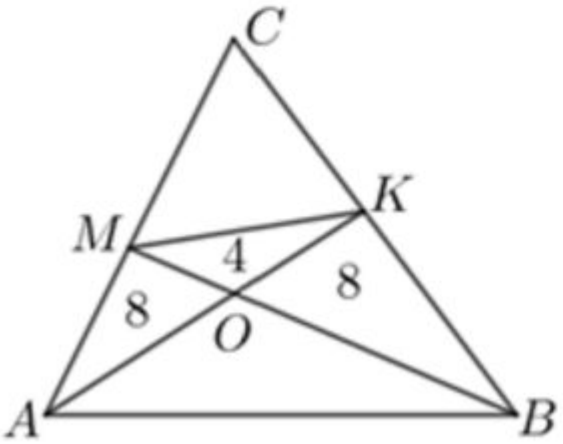


Lemma: Katru taisnleņķa trijstūri var sagriezt divos taisnleņķa trijstūros, kas līdzīgi sākotnējam.

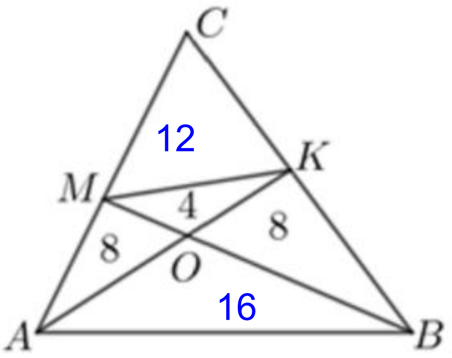
Uzdevums ar indukciju:
Bāze: Taisnstūri var sagriezt $n = 2$ līdzīgos taisnleņķa trijstūros
Pāreja: $n \Rightarrow n + 1$. Vispirms sagriež n gabalos, tad vienu gabalu griež tālāk divos. (Risinātājam indukcija nav formāli jāizmanto.)

4.uzdevums

Uz trijstūra ABC malām AC un BC atlikti attiecīgi punkti M un K. Nogriežņi AK un BM krustojas punktā O. Aprēķnāt trijstūra ABC laukumu, ja $S_{AMO} = S_{BKO} = 8$ un $S_{KMO} = 4$.



4.uzdevuma atrisinājums



S(MOK)=4 ir trīsreiz mazāks nekā S(MAK)=12. Tāpēc augstums no A pret pamatu MK ir trīsreiz garāks nekā augstums no O pret MK.

Arī augstums no B pret pamatu MK ir trīsreiz garāks kā augstums no A pret MK.

Tāpēc $MK||AB$ un $AMKB$ ir trapece.

Tad $\triangle KOM \sim \triangle AOB$

un augstums no O pret AB ir divas trešdaļas no trapeces augstuma.

Līdzības koeficients ir 2, tad $S(AOB)=16$.

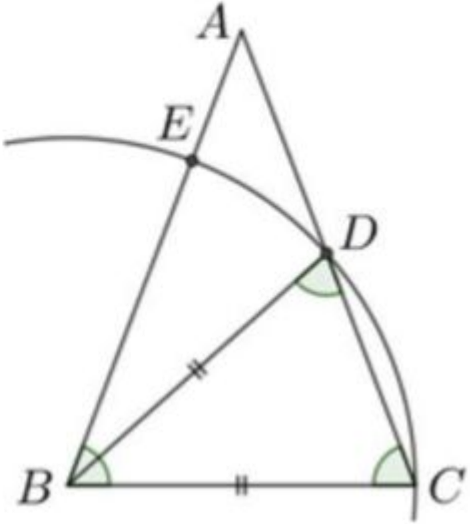
MK ir ABC viduslīnija, tāpēc

$$S(MKC) = \frac{1}{4}S(ABC)$$

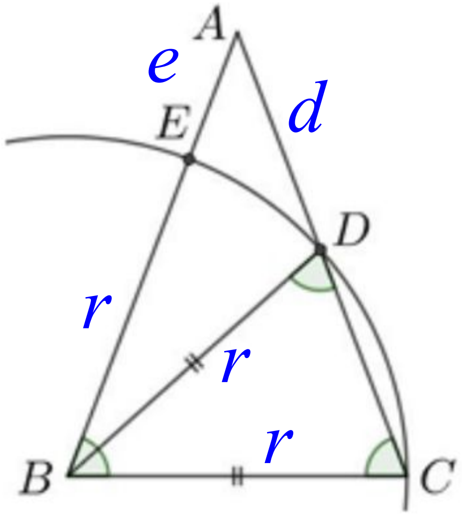
jeb trešdaļa no trapeces laukuma $4+8+8+16=36$. Tad $S(ABC)=48$.

5.uzdevums

Dots vienādsānu trijstūris ABC, kuram $AB=AC$ un $\angle BAC<60°$. Riņķa līnija, kuras centrs ir punktā B un rādiuss BC, krusto trijstūra malas AC un AB attiecīgi punktos D (kas nesakrīt ar C) un E. Pierādīt, ka $AD < 2AE$.



5.uzdevuma atrisinājums



$$\triangle ABC \sim \triangle BCD$$

pēc pazīmes LL. Tāpēc

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{DC}$$

Apzīmē riņķa rādiusu r, $AE=e$, $AD=d$. Tad

$$\frac{e+r}{r} = \frac{r}{e+r-d}$$

$$(e+r)^2 - d(e+r) = r^2$$

$$e^2 + 2er + r^2 = r^2 + d(e+r)$$

$$2e^2 + 2er - e^2 = d(e+r)$$

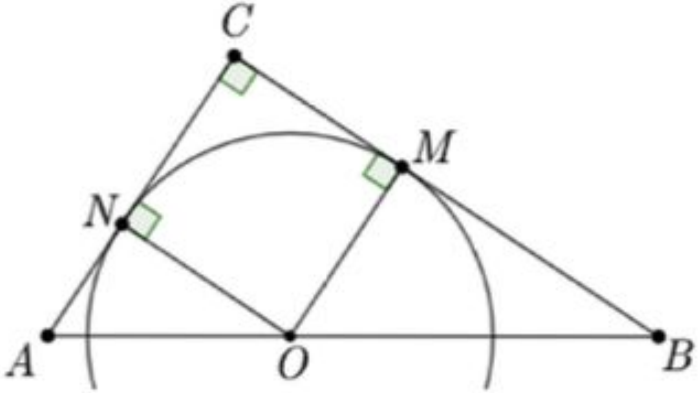
$$2e(e+r) - e^2 = d(e+r)$$

$$2e(e+r) > d(e+r)$$

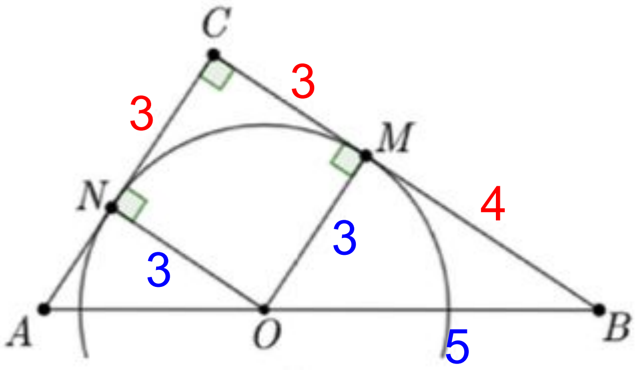
$$2e > d$$ jeb $2AE>AD$

6.uzdevums

Uz taisnleņķa trijstūra ACB hipotenūzas AB atlikts punkts O, kas ir centrs riņķa līnijai ar rādiusu 3, kura pieskaras abām katetēm. Aprēķināt trijstūra ACB laukumu, ja $OB=5$.



6.uzdevuma atrisinājums



(1) $\triangle OBM$ ir taisnleņķa $\rightarrow$

$$MB = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

(2) CN un CM ir pieskares $\rightarrow$ $OMCN$ ir kvadrāts)

(3) Taisnleņķa trijstūri ar kopīgu leņķi $\rightarrow$

$$\triangle ABC \sim \triangle OBM$$

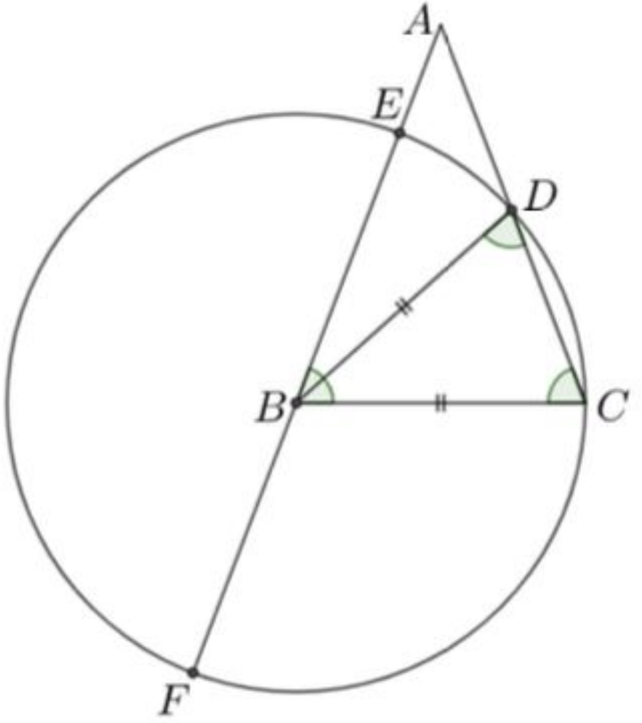
(4) $\triangle ABC$ katete CB=3+4=7.

(5) $\triangle ABC$ līdzīgs $\triangle OBM$ ar $k = \dfrac{7}{4}$

(6) $S_{ABC} = S_{OBM} \cdot k^2 = 6 \cdot \left(\dfrac{7}{4}\right)^2$

7.uzdevums

Dots vienādsānu trijstūris ABC, kuram $AB=AC$ un $\angle BAC<60°$. Riņķa līnija, kuras centrs ir punktā B un rādiuss BC, krusto trijstūra malas AC un AB attiecīgi punktos D un E. Aprēķināt AD/DC, ja $AE/EB=2/5$.



7.uzdevuma atrisinājums

Apzīmē $AE = 2x$.

Proporcija $AE/EB=2/5$ dod $EB=5x$. $AB=AC=7x$.

E,D,C atrodas uz riņķa līnijas $\rightarrow BE=BD=BC=5x$

$BD=BC \rightarrow \triangle BDC$ ir vienādsānu

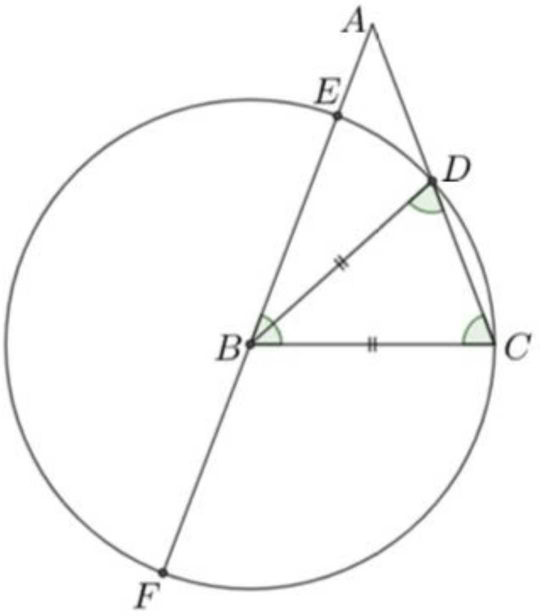
$$\left.\begin{array}{l}\triangle ABC \text{ un } \triangle BDC \text{ ir vienādsānu}\\ \text{Pamata leņķi } \sphericalangle ACB=\sphericalangle DCB\end{array}\right\} \rightarrow \triangle ABC \sim \triangle BDC$$

$\triangle ABC \sim \triangle BDC \;\rightarrow\; AB/BC = BC/DC$

$$DC = \frac{BC^2}{AB} = \frac{(5x)^2}{7x} = \frac{25}{7}x$$

$AD=AC-DC=7x-(25/7)x=(24/7)x$.

$AD/DC=24/25$.



Par vērtēšanas kritērijiem

Kritērijus novada olimpiādei parasti izsūta NMS. Tie mēdz būt nepilnīgi, jo neviens nevar pirms olimpiādes iztēloties visus (daļējos) atrisinājumus.

(Citāts no sena NMS materiāla.)
Ņemiet vērā, ka piedāvātie uzdevumu atrisinājumi nav vienīgie pareizie. Ja skolēna risinājums atšķiras no piedāvātajiem atrisinājumiem un līdz ar to neatbilst piedāvātajiem vērtēšanas kritērijiem, tad skolēna risinājums ir objektīvi jāizvērtē atbilstoši matemātikas un loģikas likumiem (skat. vispārīgos vērtēšanas kritērijus pēdējā lapā).

https://www.nms.lu.lv/fileadmin/user_upload/lu_portal/projekti/nms.lu.lv/Arhivs/Olimpiades/NOL/NOV_67_vert.pdf

Vispārīgie vērtēšanas kritēriji olimpiāžu darbu vērtēšanai, ja nav doti citi norādījumi vai skolēna risinājums atšķiras no piedāvātā risinājuma. (Citēts no NMS materiāla 9.lpp.)

Kritēriji	**Punkti**
Uzdevums nav risināts; tīrrakstā nav minēts pat uzdevuma numurs.	–
Tīrrakstā minēts uzdevuma numurs, bet risinājumā **NAV NEVIENAS VĒRTĪGAS IDEJAS**, kas varētu vest pie pareiza atrisinājuma.	0
Dažas derīgas idejas, bet bez tālākas izmantošanas vai pamatojuma.	1–2
Dažas derīgas idejas, bet bez tālākas izmantošanas vai pamatojuma.	3–4
Veiksmīgi iesākts risinājums, bet nav saskatīts virziens, kā turpināt iesākto un novest līdz galam.	5
Pareizi iesākts un turpināts risinājums, kas tomēr nav paspēts vai prasts novest līdz pašam galam.	6
Principā pareizs risinājums, bet ir kāda lielāka iebilde, nepilnība, trūkums.	7
Uzdevums atrisināts, bet risinājumam nelieli defekti – trūkst kāda paskaidrojuma, izlaistas mazāk būtiskas, bet tomēr nepieciešamas detaļas utml.	8–9
Absolūti pareizs un skaidri saprotami pierakstīts risinājums bez iebildēm, piebildēm un citiem trūkumiem.	10

Par olimpiāžu vērtēšanas kritērijiem

- Ko darīt ar risinājumiem, kuros ierakstīts “kaut kas par tēmu”?
  Vai ir veikts būtisks darbs tieši par uzdevumā prasīto jautājumu?
- Par ekstra aplamībām punktus parasti nenoņem; vērtē saprātīgās daļas.
- Atsaukšanās uz “zināmiem apgalvojumiem”? Drīkst, ja tie ir atrodami.
- Ja uzdevumā ir vairāki apakšpunkti vai atrisinājuma struktūras daļas?
  Fiksēti punkti par katru daļu.
- Vienu uzdevumu labo vairāki cilvēki? Viņiem jāvienojas par kritērijiem.
- Vērtējumu skalai jādod līdzīgi punkti par līdzīgiem risinājumiem/kļūdām;
  vēlami kritēriji, kuri paredz daļējus punktus un palielina vērtējumu izkliedi.
- Par ko liekami “desmitnieki” vērtējumā? Ja viss būtiskais ir izdarīts – tsk. ar
  nesmuku vai darbietilpīgu metodi.

1. KĀ ZINĀT, KO RAKSTĪT UZDEVUMA ATRISINĀJUMĀ?

Matemātikā ir noteikti kritēriji tam, kādi spriedumi ir un kādi spriedumi nav pieļaujami dažādu apgalvojumu pamatošanā. Lielākajai daļai uzdevumu risinājumu ir jāsatur vispārīgs pamatojums (nevis daži piemēri), kas garantē, ka atrastā atbilde ir pareiza. Taču ir arī tādi uzdevumi, kuros pietiek parādīt tikai vienu piemēru, lai tas būtu pilnībā atrisināts. Ir četri galvenie uzdevumu veidi, ko viegli atšķirt pēc formulētā jautājuma. Vairums olimpiāžu uzdevumu atbilst kādam no šiem četriem veidiem, kas savukārt nosaka atrisinājuma struktūru.
Mācību procesā var izmantot atgādni par atrisinājuma struktūru (skat. 156. lpp.)

<table>
<tr><th>Uzdevumi, kuros jāatrod visas iespējamās vērtības</th><th>Uzdevumi, kuros jāatrod vai nu vislielākā, vai vismazākā vērtība</th></tr>
<tr><td>„Kāds var būt...?”; „Cik...?”
Uzdevuma risinājumā jābūt divām daļām:
1) uzrakstīti visi iespējamie gadījumi, kam prasības izpildās;
2) pierādīts, ka citu iespēju nav.</td><td>„Kāds lielākais (mazākais)...?”
Uzdevuma risinājumā jābūt divām daļām:
1) uzrakstīta vislielākā (vismazākā) vērtība un parādīts piemērs, kurā izpildās visas prasības;
2) pierādīts, ka vēl lielāka (mazāka) vērtība nav iespējama.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Uzdevumi, kuros uz jautājumu jāatbild ar „jā” vai „nē” un jāpamato sava atbilde</th></tr>
<tr><td>„Vai var...?”; „Vai iespējams...?”; „Vai eksistē...?”
Ja atbilde ir:
• „jā”, tad pietiek uzrādīt vienu piemēru, kurā visas uzdevuma prasības izpildās;
• „nē”, tad nepieciešams pierādījums, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem.</td><td>„Vai visiem...?”; „Vai vienmēr... ?”; „Vai noteikti... ?”; „Vai katram... ?”
Ja atbilde ir:
• „jā”, tad nepieciešams pierādījums, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem;
• „nē”, tad pietiek uzrādīt vienu pretpiemēru.</td></tr>
</table>

https://www.nms.lu.lv/fileadmin/user_upload/lu_portal/projekti/nms.lu.lv/Gramatas/Tematiskie/GRAMATA_atjaunots_matem_olimp_uzd_macibu_procesa_5-9kl.pdf 5.lappuse.

Līdzīgo trijstūru uzdevumi pēc atrisinājuma struktūras

Pierādīt (Dotā apgalvojuma pamatojums)	**(1)** Uz paralelograma ABCD malām AB un BC atlikti attiecīgi punkti L un K; taisne AK krusto taisni DC punktā M, taisne CL krusto taisni DA punktā N. Pierādīt, ka $\triangle ABK \sim \triangle CBL$, ja dots, ka $\angle CND = \angle AMD$!
	(2) Uz trijstūra ABC malām AB un BC ņemti attiecīgi punkti D un E. Dots, ka $\angle BAE = \angle BCD$. Pierādīt, ka trijstūri ABC un EBD ir līdzīgi!
	(5) Dots vienādsānu trijstūris ABC, kuram AB= AC un $\angle BAC < 60°$. Riņķa līnija, kuras centrs ir punktā B un rādiuss BC, krusto trijstūra malas AC un AB attiecīgi punktos D (kas nesakrīt ar C) un E. Pierādīt, ka $AD<2AE$.
Vai visiem… (Pierādījums vai pretpiemērs)	**(3)** Vai jebkuru taisnstūri jebkurai naturālai n ($n \geq 2$) vērtībai var sagriezt n savstarpēji līdzīgos trijstūros?
Aprēķināt (Atrastas visas atbildes un pamatojums, ka citu bez atrastajām nav)	**(4)** Uz trijstūra ABC malām AC un BC atlikti attiecīgi punkti M un K. Nogriežņi AK un BM krustojas punktā O. Aprēķnāt trijstūra ABC laukumu, ja $S(AMO)=S(BKO) = 8$ un $S(KMO)=4$.
	(6) Uz taisnleņķa trijstūra ACB hipotenūzas AB atlikts punkts O, kas ir centrs riņķa līnijai ar rādiusu 3, kura pieskaras abām katetēm. Aprēķināt trijstūra ACB laukumu, ja $OB = 5$.
	(7) Dots vienādsānu trijstūris ABC, kuram AB= AC un $\angle BAC < 60°$. Riņķa līnija, kuras centrs ir punktā B un rādiuss BC, krusto trijstūra malas AC un AB attiecīgi punktos D un E. Aprēķināt AD/DC , ja $AE/EB=2/5$.

Secinājumi

Secinājumi

- Līdzīgie trijstūri tieši izmantoti ap 15% no 9.-12.kl. olimpiāžu uzdevumiem ģeometrijā.
- Līdzīgie trijstūri ir sastopami Kangaroo-veida konkursos un citos izvēļu vai īso atbilžu testos.
- Līdzīgus trijstūrus izmanto ģeometrijas pamatfaktu pierādījumos.
- Uzdevumi par līdzīgiem trijstūriem stipri atšķiras (pēc formulējuma, pēc citām risināšanā izmantojamām tēmām vai atrisinājuma struktūras)

Literatūra

1. https://www.nms.lu.lv/arhivs-un-materali/materiali/teorijas-materiali/ – NMS Teorijas materiāli
2. https://www.nms.lu.lv/arhivs-un-materali/uzdevumu-arhivs/olimpiazu-uzdevumu-arhivs/ – NMS Olimpiāžu arhīvs
3. https://www.skola2030.lv/lv/skolotajiem/programmu-paraugi-videja-izglitiba
4. https://www.math.olympiaadid.ut.ee/html/index.php?id=piirk – Igaunijas reģionu olimpmiāde
5. https://problems.ru/view_by_subject_new.php?parent=279 – Подобные треугольники
6. http://prasolov.loegria.net/planim5.pdf – V.Prasolovs. Uzdevumi planimetrijā
7. https://ukmt.org.uk/yearbooks – UK Maths Trust
8. https://www.dudajevagatve.lv/eliozo/curriculum?olympiad=LV.AMO&minyear=2014&maxyear=2024&mingrade=7&maxgrade=10 – Novada olimpiāžu tēmas