Skaitļu teorija un virknes (5A: 2025-10-09)

- Dalāmības pazīmes ar $2, 4, 8, \ldots$: Skaitlis dalās ar 2, ja pēdējais cipars dalās ar 2. Skaitlis dalās ar 4, ja pēdējo divu ciparu veidotais skaitlis dalās ar 4, utt.
- Dalāmības pazīmes ar $5, 25, 125, \ldots$: Skaitlis dalās ar 5, ja pēdējais cipars dalās ar 5. Skaitlis dalās ar 25, ja pēdējo divu ciparu veidotais skaitlis dalās ar 25, utt.
- Dalāmības pazīmes ar 3 un 9: Skaitlis dalās ar 3 vai ar 9, tad un tikai tad, ja tā ciparu summa dalās ar 3 vai ar 9.
- Dalāmības pazīme ar 11: Skaitlis dalās ar 11 tad un tikai tad, ja tā ciparu summas, kas atrodas nepāra pozīcijās, un ciparu summas, kas atrodas pāra pozīcijās, starpība dalās ar 11. Piemēram, 108647 dalās ar 11, jo $(1+8+4)-(0+6+7)=0$ un 0 dalās ar 11.
- Skaitlis n dalās ar divu savstarpēju pirmskaitļu reizinājumu $a \cdot b$ tad un tikai tad, ja n dalās ar a un n dalās ar b.
- *Rekurentas virknes* ir virknes, kurās kārtējo locekli a_n var izrēķināt no iepriekšējiem locekļiem a_{n-1}, a_{n_2} utt.

1.uzdevums: Zināms, ka skaitlis n dalās ar 50, 60 un 135. Cik ir šādu skaitļu intervālā $[1; 10000]$?

2.uzdevums (LV.AMO.2016.8.3): Zināms, ka skaitlis dalās ar 2016 un ka visi tā cipari ir dažādi. Kāds ir lielākais ciparu skaits, kas var būt šajā skaitlī?

3.uzdevums (LV.AMO.2019.8.5): Kādai mazākajai naturālai n vērtībai skaitli 10^n iespējams izteikt kā sešu naturālu skaitļu reizinājumu tā, ka neviens no tiem nav mazāks kā 10 un to visu pēdējie cipari ir dažādi (tas ir, nevienam no tiem pēdējais cipars nesakrīt ar kāda cita skaitļa pēdējo ciparu)?

4.uzdevums (no gatavošanās materiāla): Kādi cipari var būt burtu a un b vietā, lai piecciparu skaitlis $\overline{a543b}$ dalītos ar 36?

5.uzdevums (LV.NOL.2012.8.3): Vai naturāla skaitļa ciparu reizinājums var būt skaitlis $\overline{aabbcc}$? (Pieraksts $\overline{kmn}$ nozīmē, ka skaitļa simtu cipars ir k, desmitu cipars ir m un vienu cipars ir n.)

6.uzdevums (No gatavošanās materiāla): Rindā salikti 10 krēsli, uz katra no tiem sēž pa skolēnam. Skolēni vienu reizi pieceļas un tad apsēžas, pie tam katrs drīkst apsēsties vai nu uz sava agrākā krēsla, vai uz cita krēsla, kurš ir tieši blakus agrākajam krēslam. Cik dažādi skolēnu izvietojumi iespējami pēc pārsēšanās?

7.uzdevums: Ciparu virknīti sauksim par "labu", ja tajā ir pāra skaits nuļļu. Piemēram, "11" vai "0407869" ir labas virknītes, bet "0" vai "120987045608" nav labas.
Ar a_n apzīmējam, cik ir "labu" virkņu ar tieši n cipariem.
(A) Atrast rekurentu sakarību virknei a_n.
(B) Izveidot tabulu ar virknes vērtībām $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$.

8.uzdevums: Dota josla, kuras izmērs ir $2 \times n$ rūtiņas. Ar a_n apzīmē, cik veidos to var pārklāt ar flīzēm, kuru izmēri ir vai nu 2×1 (domino figūras) vai arī 2×2 (kvadrāti).
(A) Izteikt a_n ar *rekurentu sakarību*.
(B) Atrast a_8 - cik veidos taisnstūri 2×8 var pārklāt ar šīm flīzēm.
(C) Pārbaudīt, ka ir spēkā formula $a_n = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$. (Parasti izmantot formulu ir ērtāk, jo katru a_n var izrēķināt tieši, neveidojot tabulu.)

9.uzdevums: Ir uzrakstīta izteiksme ar $n+1$ skaitļiem vai burtiem un operāciju $\circ$ (aplītis), kuru raksta starp diviem skaitļiem vai divām izteiksmēm, kas liktas iekavās. Ar C_n apzīmē atšķirīgo veidu skaitu, kuros var salikt iekavas. (Iekavu salikšanas veidus uzskata par atšķirīgiem, ja tie izraisa citādu darbību secību.) Ievērojam, ka $C_0 = C_1 = 1$ (ja ir tikai viens skaitlis vai arī ir divi skaitļi, tad iekavas var salikt tikai vienā veidā). Bet, piemēram, $C_3 = 5$, jo ir pavisam pieci veidi, kā salikt iekavas, ja izteiksmē ir 3 aplīši:

$$((a \circ b) \circ c) \circ d, \quad (a \circ (b \circ c)) \circ d, \quad (a \circ b) \circ (c \circ d), \quad a \circ ((b \circ c) \circ d), \quad a \circ (b \circ (c \circ d)).$$

(A) Atrast rekurentu sakarību, kā izteikt C_n, izmantojot $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$.
(B) Izveidot tabulu ar vērtībām $C_0, \cdots, C_6$.

10.uzdevums: Monētu met n reizes un katrreiz pieraksta rezultātu "C" (cipars) vai "Ģ" (ģerbonis). Pirmais spēlētājs uzvar, ja visu metienu virknītē nekad nav divi ģerboņi pēc kārtas (virknīte nesatur "ĢĢ"). Apzīmējam ar a_n to, cik ir virknīšu garumā n bez "ĢĢ" (jeb cik dažādos veidos 1.spēlētājs var uzvarēt).
(A) Atrast rekurentu sakarību, kas a_n izsaka ar iepriekšējiem virknes locekļiem.
(B) Atrast varbūtību, ar kuru pirmais spēlētājs uzvar, ja monētu met tieši 6 reizes (par varbūtību saucam dalījumu starp to monētas uzmešanas veidu skaitu, kuros uzvar 1.spēlētājs, pret visu iespējamo monētu uzmešanas veidu skaitu).