# Rekurentas virknes, Skaitļu teorija (6A: 2025-10-16)

* Rekurentai virknei definēts pirmais loceklis (vai daži locekļi) un formula, ar kuru no iepriekšējiem locekļiem izrēķināt nākamos. Ar to var saskaitīt variantus tad, ja citas metodes (*reizināšanas likums*) būtu par grūtu. Risinājuma secība:
  + Aprēķināt locekļus dažiem maziem . Rekurentai virknei nepieciešami pirmie locekļi (sākot ar vai ar vai tml.).
  + Apskatīt un mēģināt izteikt ar (vai citiem iepriekšējiem locekļiem). Pierakstīt prasību, ka (vai tml., no kuras vietas šo formulu lietot).
  + Pārliecināties, ka rekurentajā izteiksmē bez atkārtošanās iekļauti visi varianti.
  + Ja uzdevumā prasīts, izveidot virknes locekļu tabuliņu līdz kādai vērtībai un pierakstīt secinājumus.
* Apzīmējums nozīmē, ka un dod vienādus atlikumus, dalot ar . Piemēram, .  
  , , .
* Virkne, kas iegūstama, rakstot arvien jaunus decimālciparus , , , ir izsakāma ar rekurentu sakarību:  
  , , , .  
  Var rakstīt arī uzreiz: .

**0.uzdevums:**  
**(A)** Uzrakstīt virkni .  
**(B)** Uzrakstīt virkni .  
**(C)** Kā bez reizināšanas (ar saskaitīšanu un atņemšanu) uzzināt, kādu atlikumu dod skaitlis dalot ar ?  
**(D)** Kā bez reizināšanas (ar saskaitīšanu un atņemšanu) uzzināt, kādu atlikumu dod skaitlis dalot ar ?

**1.uzdevums:** Ar apzīmē, cik dažādos veidos atšķiramus cilvēkus var sagrupēt pāros (cilvēku secība pārī nav svarīga). Ja ir nepāra, tad .  
**(A)** Izteikt , izmantojot reizināšanas likumu,  
**(B)** Izteikt kā rekurentu virkni.

**2.uzdevums:** Ar apzīmējam gabalu skaitu, kuros taisnes sadala plakni, ja nekādas divas taisnes nav paralēlas un nekādas trīs taisnes neiet caur vienu punktu. Atrast rekurentu sakarību, lai rēķinātu virknes locekļus.

**3.uzdevums (LV.AMO.2019.12.4):** Sporta nometnē ir skolēni. Ar apzīmējam, cik veidos šos skolēnus var sadalīt pāros (pāru secība un arī skolēnu secība pārī nav svarīga). Ar kādu lielāko trijnieka pakāpi dalās ?

**Atrisinājums:** Aprēķinām , izmantojot reizināšanas likumu. Visjaunākajam skolēnam pāri var atrast veidos. No atlikušajiem jaunākajam skolēnam pāri var atrast veidos. Pēdējam skolēnam paliek tieši pāris. Pilnu variantu skaitu izsaka reizinājums:

Grupējam reizinātājus atkarībā no trijnieka pakāpes, ar kuru tie dalās.

* reizinātāji dalās ar : .
* reizinātāji dalās ar :
* reizinātāji dalās ar ().
* Viens reizinātājs dalās ar ().

Saskaitot šīs pakāpes .

**4.uzdevums:** Monētu met reizes un katrreiz pieraksta rezultātu “C” (cipars) vai “Ģ” (ģerbonis). Pirmais spēlētājs uzvar, ja visu metienu virknītē nekad nav divi ģerboņi pēc kārtas (virknīte nesatur “ĢĢ”). Apzīmējam ar to, cik ir virknīšu garumā bez “ĢĢ” (jeb cik dažādos veidos 1.spēlētājs var uzvarēt).  
**(A)** Atrast rekurentu sakarību, kas izsaka ar iepriekšējiem virknes locekļiem.  
**(B)** Atrast varbūtību, ar kuru pirmais spēlētājs uzvar, ja monētu met tieši reizes (par varbūtību saucam dalījumu starp to monētas uzmešanas veidu skaitu, kuros uzvar 1.spēlētājs, pret visu iespējamo monētu uzmešanas veidu skaitu).

**Atrisinājums:**  
**(A)** Atrod pirmos dažus virknes locekļus: (ja met vienreiz, der jebkurš no diviem iznākumiem), (ja met divreiz, tad no četriem iznākumiem “CC”, “CĢ”, “ĢC”, “ĢĢ” neder viens).  
Ja , tad izsaka ar iepriekšējiem virknes locekļiem:

* Ja sākumā uzkritis “C”, tad pārējos metienus var izdarīt dažādos veidos, lai uzvarētu 1.spēlētājs (jāpanāk, lai virknītē nebūtu “ĢĢ”).
* Ja sākumā uzkritis “Ģ”, tad 1.spēlētājam nav iespējams turpināt veidos (jo tūlīt varētu parādīties vēl viens “Ģ”). Tādēļ prasām, lai aiz pirmā “Ģ” tūlīt sekotu “C”. Atlikušos metienus var izdarīt veidos, lai 1.spēlētājs uzvarētu.

Esam ieguvuši rekurenci: , , (ja ).

**(B)** Ierakstām tabulā iegūtās vērtības un arī varbūtības, ko iegūst, dalot 1.spēlētājam “veiksmīgo” virkņu skaitu ar visu virkņu skaitu .

|  |  |  | uzvaras varbūtība |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 2 |  |
| 2 | 3 | 4 |  |
| 3 | 5 | 8 |  |
| 4 | 8 | 16 |  |
| 5 | 13 | 32 |  |
| 6 | 21 | 64 |  |

**5.uzdevums:** Kādā programmēšanas valodā visi vārdi satur tieši burtus; un katrs burts ir “A”, “B” vai “C”. Ar apzīmējam, cik ir vārdu garumā , kuri satur divus “A” no vietas.  
**(A)** Uzrakstīt kā rekurentu virkni, norādot sākuma nosacījumus un rekurento sakarību, kas ļauj izrēķināt no iepriekšējiem locekļiem.  
**(B)** Atrast vērtību.

**6.uzdevums (LV.AMO.2023.9.2):** Ja divciparu skaitlim galā pieraksta divciparu skaitli , tad iegūtais četrciparu skaitlis dalās ar . Zināms, ka dalās ar . Kāds var būt skaitlis ?

**Atrisinājums:** Skaitlis var būt ; ; ; ; ; vai . Apzīmējam iegūto četrciparu skaitli ar . Ekvivalenti pārveidojam šo skaitli:

Tā kā saskaitāmie un dalās ar un no dotā dalās ar , tad, lai viss skaitlis dalītos ar , arī jādalās ar . Tātad skaitlis var būt jebkurš skaitļa daudzkārtnis, tas ir, ; ; ; ; ; vai .

**7.uzdevums (LV.AMO.2019.9.4):** Ja naturāla sešciparu skaitļa visus nepāra ciparus aizvietotu ar , iegūtu skaitli, kas ir par lielāks nekā sākotnējais skaitlis. Savukārt, ja sākotnējā skaitlī ar aizvietotu visus pāra ciparus, tad iegūtais skaitlis būtu par lielāks nekā sākotnējais. Atrast doto sešciparu skaitli!

**Atrisinājums:** Apzīmējam doto skaitli ar , skaitli, ko iegūst visus pāra ciparus aizstājot ar septītniekiem, apzīmējam ar un skaitli, ko iegūst visus nepāra ciparus aizstājot ar septītniekiem, apzīmējam ar .

Pamatosim, ja diviem skaitļiem samaina vietām to vienas šķiras ciparus, tad šo skaitļu summa nemainās. Pieņemsim, ka vienam skaitlim -tās šķiras cipars ir , bet otram , pieņemsim arī, ka . Tad pirmajam skaitlim ciparu aizstājot ar , šis skaitlis samazinās par . Otrajam skaitlim ciparu aizstājot ar tas palielinās par . Tātad abu skaitļu summa nemainās.

Aplūkojam summu . Katrā šķirā (vienos, desmitos, simtos utt.) šiem diviem skaitļiem viens cipars ir “oriģinālais” (kas bija skaitlī ), bet otrs ir septītnieks. Samainīsim katrā šķirā šos ciparus tā, lai septītnieks atrastos otrajā skaitlī, bet “oriģinālais” cipars - pirmajā.

Tad pirmais skaitlis pārvēršas par , bet otrais - par skaitli, kas sastāv no sešiem septītniekiem. Tā kā šīs darbības rezultātā skaitļu summa nemainās, tad .

Pēc dotā , bet . Atrisinot vienādojumu

iegūstam, ka . Pārbaudām, ka skaitlis apmierina uzdevuma nosacījumus:

* aizvietojot šī skaitļa nepāra ciparus ar , iegūstam ,
* aizvietojot šī skaitļa pāra ciparus ar , iegūstam .

**8.uzdevums (LV.AMO.2018.9.4):** Atrast lielāko naturālo skaitli, kas dalās ar , kura ciparu summa ir un kuram neviens cipars nav .

**Atrisinājums:** Pamatosim, ka lielākais skaitlis, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, ir .

Skaidrs, ka skaitlī nevar būt vairāk kā cipari, jo tad tā ciparu summa būtu lielāka nekā (neviens cipars nav ). Vienīgais ciparu skaitlis, kura ciparu summa ir un neviens cipars nav , sastāv no vieniniekiem, bet tas nedalās ar , jo dalās ar , bet (tas, kas paliek pāri no vieniniekiem, atdalot grupas pa ) nedalās.

Ja skaitlim ir cipari, no kuriem neviens nav , un tā ciparu summa ir , tad tas sastāv no vieniniekiem un viena divnieka. Šo divnieku nevar rakstīt skaitļa pirmajā vai otrajā pozīcijā, jo ne , ne nedalās ar , bet to var rakstīt trešajā pozicijā, jo dalās ar un atlikušais skaitlis no vieniniekiem arī dalās ar .

**9.uzdevums (LV.AMO.2018.8.2):** Naturālu skaitļu virknes katrs loceklis, sākot ar trešo, ir vienāds ar divu iepriekšējo locekļu nenulles ciparu reizinājumu. Kāds ir šīs virknes loceklis?

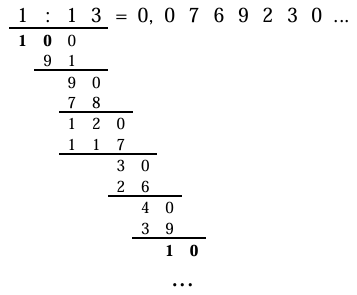
**Atrisinājums:** Turpinot virkni tālāk, iegūsim, ka tā ir (ar pelēkiem cipariem norādīts katra virknes locekļa nenulles ciparu reizinājums):



Tā kā katrs nākamais virknes loceklis ir atkarīgs no diviem iepriekšējiem virknes locekļiem, tad, līdzko parādās divi jau iepriekš bijuši skaitļi, izveidojas periods. Tā kā virknes devītais un desmitais loceklis ir un , un un loceklis arī ir un , tad virkne, sākot ar locekli, ir periodiska un perioda garums ir . Tāpēc pēdējais pilnais periods beidzas pie virknes locekļa, jo , un loceklis ir periodā pēdējais, tātad tas ir .

**10.uzdevums (LV.AMO.2014.8.1):** Skaitli pārveidoja par bezgalīgu decimāldaļu un tajā izsvītroja ciparu aiz komata. Kurš skaitlis lielāks – sākotnējais vai iegūtais?

**Atrisinājums:** Pārveidojot skaitli decimāldaļā (t.i., dalot ar ), iegūstam



Tā kā katrs nākamais cipars dalījumā atkarīgs tikai no tā atlikuma, kurš iegūts iepriekšējā dalīšanas solī., tad, līdzko parādās kāds jau iepriekš sastapts skaitlis (atlikums), izveidojas periods. Kā redzam, daļa ir bezgalīga periodiska decimāldaļa ar perioda garumu cipari. Tātad vietā aiz komata atrodas tāds pats cipars kā vietā aiz komata, jo . Tas ir cipars . Ja mēs šo ciparu izsvītrojam, tad jauniegūtajā skaitlī 2014. cipars aiz komata būs cipars (nākamais, kas seko aiz ). Skaitlim un iegūtajam skaitlim ir veseli un pirmie cipari aiz komata sakrīt, tad lielāks būs tas skaitlis, kuram ir lielāks cipars aiz komata. Tā kā , tad ir lielāka nekā iegūtais skaitlis.