# Rekurentas virknes, Skaitļu teorija (2025-10-18)

* Rekurentai virknei definēts pirmais loceklis (vai daži locekļi) un formula, ar kuru no iepriekšējiem locekļiem izrēķināt nākamos. Ar to var saskaitīt variantus tad, ja citas metodes (*reizināšanas likums*) būtu par grūtu. Risinājuma secība:
  + Aprēķināt locekļus dažiem maziem . Rekurentai virknei nepieciešami pirmie locekļi (sākot ar vai ar vai tml.).
  + Apskatīt un mēģināt izteikt ar (vai citiem iepriekšējiem locekļiem). Pierakstīt prasību, ka (vai tml., no kuras vietas šo formulu lietot).
  + Pārliecināties, ka rekurentajā izteiksmē bez atkārtošanās iekļauti visi varianti.
  + Ja uzdevumā prasīts, izveidot virknes locekļu tabuliņu līdz kādai vērtībai un pierakstīt secinājumus.

**1.uzdevums:** Ar apzīmējam gabalu skaitu, kuros taisnes sadala plakni, ja nekādas divas taisnes nav paralēlas un nekādas trīs taisnes neiet caur vienu punktu. Atrast rekurentu sakarību, lai rēķinātu virknes locekļus.

**2.uzdevums:** Ir uzrakstīta izteiksme ar skaitļiem vai burtiem un operāciju (aplītis), kuru raksta starp diviem skaitļiem vai divām izteiksmēm, kas liktas iekavās. Ar apzīmē atšķirīgo veidu skaitu, kuros var salikt iekavas. (Iekavu salikšanas veidus uzskata par atšķirīgiem, ja tie izraisa citādu darbību secību.) Ievērojam, ka (ja ir tikai viens skaitlis vai arī ir divi skaitļi, tad iekavas var salikt tikai vienā veidā). Bet, piemēram, , jo ir pavisam pieci veidi, kā salikt iekavas, ja izteiksmē ir aplīši:

**(A)** Atrast rekurentu sakarību, kā izteikt , izmantojot .  
**(B)** Izveidot tabulu ar vērtībām .

**3.uzdevums (LV.AMO.2019.12.4):** Sporta nometnē ir skolēni. Ar apzīmējam, cik veidos šos skolēnus var sadalīt pāros (pāru secība un arī skolēnu secība pārī nav svarīga). Ar kādu lielāko trijnieka pakāpi dalās ?

*Ieteikums:* Lai atrastu , var apzīmēt ar veidu skaitu, kuros var sadalīt pāros skolēnus (ja ir nepāra, uzskatām, ka ).  
Var atrast, cik ir un tad arī izteikt ar iepriekšējiem virknes locekļiem.

**Atrisinājums:** Izmantojam ieteikumu: Kā rekurenta virkne ir definējama šādi: (ja ir divi skolēni, no viņiem var izveidot pāri tikai vienā veidā).

Ja ir pāra skaitlis (), tad pirmo skolēnu var salikt pārī ar katru no atlikušajiem. Pāri paliek skolēni, kurus var sadalīt pāros veidos. Tātad . Iegūstam, ka , , , utt.

var aprēķināt arī, atkārtoti izmantojot reizināšanas likumu: Vispirms sakārtojam skolēnus kaut kādā secībā (piemēram, pēc vecuma). Visjaunākajam skolēnam pāri var atrast veidos. No atlikušajiem jaunākajam skolēnam pāri var atrast veidos. Pēdējam skolēnam paliek tieši pāris. Pilnu variantu skaitu izsaka reizinājums:

Grupējam reizinātājus atkarībā no trijnieka pakāpes, ar kuru tie dalās.

* reizinātāji dalās ar : .
* reizinātāji dalās ar :
* reizinātāji dalās ar ().
* Viens reizinātājs dalās ar ().

Saskaitot šīs pakāpes .

**4.uzdevums:** Monētu met reizes un katrreiz pieraksta rezultātu “C” (cipars) vai “Ģ” (ģerbonis). Pirmais spēlētājs uzvar, ja visu metienu virknītē nekad nav divi ģerboņi pēc kārtas (virknīte nesatur “ĢĢ”). Apzīmējam ar , cik dažādos veidos 1.spēlētājs var uzvarēt.  
Atrast varbūtību, ar kuru pirmais spēlētājs uzvar, ja monētu met tieši reizes.  
*Piezīme:* Par varbūtību šeit apzīmē attiecību starp to monētas uzmešanas veidu skaitu, kuros uzvar 1.spēlētājs, pret visu iespējamo monētu uzmešanas veidu skaitu.

**Atrisinājums:**  
**(A)** Atrod pirmos dažus virknes locekļus: (ja met vienreiz, der jebkurš no diviem iznākumiem), (ja met divreiz, tad no četriem iznākumiem “CC”, “CĢ”, “ĢC”, “ĢĢ” neder viens).  
Ja , tad izsaka ar iepriekšējiem virknes locekļiem:

* Ja sākumā uzkritis “C”, tad pārējos metienus var izdarīt dažādos veidos, lai uzvarētu 1.spēlētājs (jāpanāk, lai virknītē nebūtu “ĢĢ”).
* Ja sākumā uzkritis “Ģ”, tad 1.spēlētājam nav iespējams turpināt veidos (jo tūlīt varētu parādīties vēl viens “Ģ”). Tādēļ prasām, lai aiz pirmā “Ģ” tūlīt sekotu “C”. Atlikušos metienus var izdarīt veidos, lai 1.spēlētājs uzvarētu.

Esam ieguvuši rekurenci: , , (ja ).

**(B)** Ierakstām tabulā iegūtās vērtības un arī varbūtības, ko iegūst, dalot 1.spēlētājam “veiksmīgo” virkņu skaitu ar visu virkņu skaitu .

|  |  |  | uzvaras varbūtība |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 2 |  |
| 2 | 3 | 4 |  |
| 3 | 5 | 8 |  |
| 4 | 8 | 16 |  |
| 5 | 13 | 32 |  |
| 6 | 21 | 64 |  |

**5.uzdevums:** Kādā programmēšanas valodā visi vārdi satur tieši burtus; katrs burts ir “A”, “B” vai “C”. Ar apzīmējam, cik ir vārdu garumā , kuri satur divus “A” no vietas.  
**(A)** Uzrakstīt kā rekurentu virkni, norādot sākuma nosacījumus un rekurento sakarību, kas ļauj izrēķināt no iepriekšējiem locekļiem.  
**(B)** Atrast vērtību.

**Atrisinājums:**  
**(A)** , bet , jo garumā ir tikai viens derīgs vārds “AA”.

Ja vārda garums , tad apskatām tajā pirmo burtu: ja šis burts ir “B” vai “C”, tad atlikušos burtus var izvēlēties veidos. Tātad ir šādi vārdi.

Ja savukārt pirmais burts ir “A”, tad aiz tā obligāti jāliek “B” vai “C”. Atliek burti, kurus var izvēlēties veidos. Tātad ir šādi vārdi.

Iegūstam rekurentu virkni , , un .

**(B)** Izmantojam rekurento virkni, lai aizpildītu tabuliņu:

|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 6 | 16 | 44 |

**6.uzdevums (No gatavošanās materiāla):** Rindā salikti 10 krēsli, uz katra no tiem sēž pa skolēnam. Skolēni vienu reizi pieceļas un tad apsēžas, pie tam katrs drīkst apsēsties vai nu uz sava agrākā krēsla, vai uz cita krēsla, kurš ir tieši blakus agrākajam krēslam. Cik dažādi skolēnu izvietojumi iespējami pēc pārsēšanās?

**Atrisinājums.** Ar apzīmējam dažādos iespējamos skolēnu izvietojumus pēc pārsēšanās. Ievērojam, ka (skolēns pieceļas un pēc tam atkal apsēžas savā vietā) un (abi skolēni pieceļas un pēc tam katrs apsēžas savā vietā vai arī abi skolēni apmainās vietām).

Apskatām skolēnus un meklējam formulu, kas izsaka . Visas pārsēšanās iedalās divās grupās.

* Pirmais skolēns paliek uz vietas. Tad pārsēžas tikai atlikušie skolēni un šādu dažādo izvietojumu skaits ir .
* Pirmais skolēns pāriet uz otro krēslu. Tad uz pirmo krēslu pāriet skolēns no otrā krēsla. Pārējie skolēni var pārsēsties savā starpā veidos.

Tātad . Izmantojot sākuma nosacījumus un iegūto formulu, iegūstam

|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | 89 |

Līdz ar to iespējami 89 dažādi skolēnu izvietojumi.

**7.uzdevums:** Ciparu virknīti sauksim par “labu”, ja tajā ir pāra skaits nuļļu. Piemēram, “11” vai “0407869” ir labas virknītes, bet “0” vai “120987045608” nav labas.  
Ar apzīmējam, cik ir “labu” virkņu ar tieši cipariem.  
**(A)** Uzrakstīt , , ar reizināšanas likumu. **(B)** Atrast rekurentu sakarību virknei .

**Atrisinājums:** **(A)** Apskata visus veidus, kādos skaitlī (vai vai ) var būt pāra skaits nuļļu. Piemēram virknītes, kas ietilpst var saturēt

* Nevienu nulli (šādu ciparu virknīšu ir , jo var lietot četrus ciparus, kuri katrs pieņem deviņas vērtbas),
* Vai nu tieši divas nulles, kuras var novietot sešos dažādos veidos (un atlikušos ciparus var salikt veidos). Tātad šādu veidu ir pavisam .
* Vai nu visas četras nulles (šāds veids ir tieši viens).

Esam ieguvuši, ka . Līdzīgi var izteikt arī citus locekļus:

* (jo vienu ciparu var izvēlēties veidos, lai nebūtu ).
* ,
* ,
* ,
* ,

Šīs izteiksmes, ja pieaug , kļūst arvien garākas. Tāpēc rodas vajadzība pēc rekurentām virknēm.

**(B)** Apskatām pirmo ciparu virknītē . Ja tas nav , tad atlikušos ciparus varēs izvēlēties dažādos veidos, jo nuļļu kopskaits būs pāra skaitlis gan visiem cipariem, gan arī tiem cipariem, kas paliek, ja pirmo ciparu nodzēš. Šo gadījumu ir , jo pirmais cipars var būt jebkurš no līdz .

Ja turpretī pirmais cipars ir , tad atlikušos ciparus jāizvēlas tā, lai starp tiem būtu nepāra skaits nuļļu jeb dažādos veidos (jo pavisam ciparus var izvēlēties veidos, bet no šiem veidiem mums neder, jo tajos ir pāra skaits nuļļu).

Saskaitot abas iespējas, iegūsim .  
Tātad un ir rekurentas virknes definīcija.

**8.uzdevums:** Dota josla, kuras izmērs ir rūtiņas. Ar apzīmē, cik veidos to var pārklāt ar flīzēm, kuru izmēri ir vai nu (domino figūras) vai arī (kvadrāti).  
**(A)** Izteikt ar *rekurentu sakarību*.  
**(B)** Atrast - cik veidos taisnstūri var pārklāt ar šīm flīzēm.  
**(C)** Pārbaudīt, ka ir spēkā formula . (Parasti izmantot formulu ir ērtāk, jo katru var izrēķināt tieši, neveidojot tabulu.)

**Atrisinājums:**  
**(A)** Ievērosim, ka (joslu var noklāt ar 1 domino kauliņu un nekā citādi). Un (joslu $2 $ var noklāt ar 2 domino kauliņiem vertikāli, vai diviem kauliņiem horizontāli vai arī ar vienu kvadrātu).

Apskatām joslu , ja . Tad eksistē 3 veidi, kā šajā joslā noklāt, piemēram, abas rūtiņas kreisajā joslas galā:

* Tās var nosegt ar vertikālu domino kauliņu. Tad paliek vēl josla , ko var noklāt dažādos veidos.
* Kreiso apakšējo rūtiņu var nosegt ar horizontālu domino kauliņu, bet tad tai virsū jāliek otrs horizontāls kauliņš. Tad paliek josla , ko var noklāt dažādos veidos.
* Visbeidzot kreisajā galā esošās rūtiņas var nosegt ar vienu kvadrātiņu. Arī tad paliek josla , ko var noklāt dažādos veidos.

Visus šos variantus saskaitot, iegūstam, ka .

**(B)** Var izveidot tabuliņu ar vērtībām pie :

|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 3 | 5 | 11 | 21 | 43 | 85 | 171 |

**(C)** Var ievietot dažas vērtības un pārbaudīt, ka , ja (*Indukcijas bāze*).  
Lielākiem apskata divus gadījumus. Ja ir pāra skaitlis, tad jāpārbauda, ka . Ievieto šajā formulā un (izdara \*induktīvo pieņēmumu, ka šiem locekļiem formula jau izpildās), un tad pārbauda ka līdzīga izteiksme ir spēkā arī priekš . Ja ir nepāra, tad šo gadījumu apskata līdzīgi.

* Apzīmējums nozīmē, ka un dod vienādus atlikumus, dalot ar . Piemēram, .  
  , , .
* Dalāmības pazīmes ar : Skaitlis dalās ar , ja pēdējais cipars dalās ar . Skaitlis dalās ar , ja pēdējo divu ciparu veidotais skaitlis dalās ar , utt.
* Dalāmības pazīmes ar : Skaitlis dalās ar , ja pēdējais cipars dalās ar . Skaitlis dalās ar , ja pēdējo divu ciparu veidotais skaitlis dalās ar , utt.
* Dalāmības pazīmes ar un : Skaitlis dalās ar vai ar , tad un tikai tad, ja tā ciparu summa dalās ar vai ar .
* Dalāmības pazīme ar : Skaitlis dalās ar tad un tikai tad, ja tā ciparu summas, kas atrodas nepāra pozīcijās, un ciparu summas, kas atrodas pāra pozīcijās, starpība dalās ar . Piemēram, dalās ar , jo un dalās ar .
* Skaitlis dalās ar divu savstarpēju pirmskaitļu reizinājumu tad un tikai tad, ja dalās ar un dalās ar .

**Iesildīšanās vingrinājumi:**

* Uzrakstīt virkni .
* Uzrakstīt virkni .
* Kā bez reizināšanas (ar saskaitīšanu un atņemšanu) uzzināt, kādu atlikumu dod skaitlis dalot ar ?
* Kā bez reizināšanas (ar saskaitīšanu un atņemšanu) uzzināt, kādu atlikumu dod skaitlis dalot ar ?

**9.uzdevums (LV.AMO.2023.9.2):** Ja divciparu skaitlim galā pieraksta divciparu skaitli , tad iegūtais četrciparu skaitlis dalās ar . Zināms, ka dalās ar . Kāds var būt skaitlis ?

**Atrisinājums:** Skaitlis var būt ; ; ; ; ; vai . Apzīmējam iegūto četrciparu skaitli ar . Ekvivalenti pārveidojam šo skaitli:

Tā kā saskaitāmie un dalās ar un no dotā dalās ar , tad, lai viss skaitlis dalītos ar , arī jādalās ar . Tātad skaitlis var būt jebkurš skaitļa daudzkārtnis, tas ir, ; ; ; ; ; vai .

**10.uzdevums (LV.AMO.2019.9.4):** Ja naturāla sešciparu skaitļa visus nepāra ciparus aizvietotu ar , iegūtu skaitli, kas ir par lielāks nekā sākotnējais skaitlis. Savukārt, ja sākotnējā skaitlī ar aizvietotu visus pāra ciparus, tad iegūtais skaitlis būtu par lielāks nekā sākotnējais. Atrast doto sešciparu skaitli!

**Atrisinājums:** Apzīmējam doto skaitli ar , skaitli, ko iegūst visus pāra ciparus aizstājot ar septītniekiem, apzīmējam ar un skaitli, ko iegūst visus nepāra ciparus aizstājot ar septītniekiem, apzīmējam ar .

Pamatosim, ja diviem skaitļiem samaina vietām to vienas šķiras ciparus, tad šo skaitļu summa nemainās. Pieņemsim, ka vienam skaitlim -tās šķiras cipars ir , bet otram , pieņemsim arī, ka . Tad pirmajam skaitlim ciparu aizstājot ar , šis skaitlis samazinās par . Otrajam skaitlim ciparu aizstājot ar tas palielinās par . Tātad abu skaitļu summa nemainās.

Aplūkojam summu . Katrā šķirā (vienos, desmitos, simtos utt.) šiem diviem skaitļiem viens cipars ir “oriģinālais” (kas bija skaitlī ), bet otrs ir septītnieks. Samainīsim katrā šķirā šos ciparus tā, lai septītnieks atrastos otrajā skaitlī, bet “oriģinālais” cipars - pirmajā.

Tad pirmais skaitlis pārvēršas par , bet otrais - par skaitli, kas sastāv no sešiem septītniekiem. Tā kā šīs darbības rezultātā skaitļu summa nemainās, tad .

Pēc dotā , bet . Atrisinot vienādojumu

iegūstam, ka . Pārbaudām, ka skaitlis apmierina uzdevuma nosacījumus:

* aizvietojot šī skaitļa nepāra ciparus ar , iegūstam ,
* aizvietojot šī skaitļa pāra ciparus ar , iegūstam .

**11.uzdevums (LV.AMO.2018.9.4):** Atrast lielāko naturālo skaitli, kas dalās ar , kura ciparu summa ir un kuram neviens cipars nav .

**Atrisinājums:** Pamatosim, ka lielākais skaitlis, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, ir .

Skaidrs, ka skaitlī nevar būt vairāk kā cipari, jo tad tā ciparu summa būtu lielāka nekā (neviens cipars nav ). Vienīgais ciparu skaitlis, kura ciparu summa ir un neviens cipars nav , sastāv no vieniniekiem, bet tas nedalās ar , jo dalās ar , bet (tas, kas paliek pāri no vieniniekiem, atdalot grupas pa ) nedalās.

Ja skaitlim ir cipari, no kuriem neviens nav , un tā ciparu summa ir , tad tas sastāv no vieniniekiem un viena divnieka. Šo divnieku nevar rakstīt skaitļa pirmajā vai otrajā pozīcijā, jo ne , ne nedalās ar , bet to var rakstīt trešajā pozicijā, jo dalās ar un atlikušais skaitlis no vieniniekiem arī dalās ar .

**12.uzdevums (LV.AMO.2018.8.2):** Naturālu skaitļu virknes katrs loceklis, sākot ar trešo, ir vienāds ar divu iepriekšējo locekļu nenulles ciparu reizinājumu. Kāds ir šīs virknes loceklis?

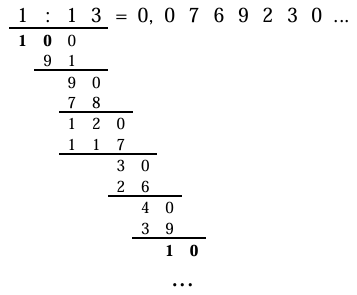
**Atrisinājums:** Turpinot virkni tālāk, iegūsim, ka tā ir (ar pelēkiem cipariem norādīts katra virknes locekļa nenulles ciparu reizinājums):



Tā kā katrs nākamais virknes loceklis ir atkarīgs no diviem iepriekšējiem virknes locekļiem, tad, līdzko parādās divi jau iepriekš bijuši skaitļi, izveidojas periods. Tā kā virknes devītais un desmitais loceklis ir un , un un loceklis arī ir un , tad virkne, sākot ar locekli, ir periodiska un perioda garums ir . Tāpēc pēdējais pilnais periods beidzas pie virknes locekļa, jo , un loceklis ir periodā pēdējais, tātad tas ir .

**13.uzdevums (LV.AMO.2014.8.1):** Skaitli pārveidoja par bezgalīgu decimāldaļu un tajā izsvītroja ciparu aiz komata. Kurš skaitlis lielāks – sākotnējais vai iegūtais?

**Atrisinājums:** Pārveidojot skaitli decimāldaļā (t.i., dalot ar ), iegūstam



Tā kā katrs nākamais cipars dalījumā atkarīgs tikai no tā atlikuma, kurš iegūts iepriekšējā dalīšanas solī., tad, līdzko parādās kāds jau iepriekš sastapts skaitlis (atlikums), izveidojas periods. Kā redzam, daļa ir bezgalīga periodiska decimāldaļa ar perioda garumu cipari. Tātad vietā aiz komata atrodas tāds pats cipars kā vietā aiz komata, jo . Tas ir cipars . Ja mēs šo ciparu izsvītrojam, tad jauniegūtajā skaitlī 2014. cipars aiz komata būs cipars (nākamais, kas seko aiz ). Skaitlim un iegūtajam skaitlim ir veseli un pirmie cipari aiz komata sakrīt, tad lielāks būs tas skaitlis, kuram ir lielāks cipars aiz komata. Tā kā , tad ir lielāka nekā iegūtais skaitlis.

**14.uzdevums (LV.AMO.2022B.11.1)** Vai skaitli 2022 var izteikt kā divu veselu skaitļu kubu summu?

**Atrisinājums:** Vispirms noskaidrosim, ar ko var būt kongruenti veselu skaitlu kubi pēc moduļa :

* ja , tad ;
* ja , tad
* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad .

Tātad veselu skaitlu kubi ir kongruenti ar 0 vai pēc moduļa . Aplūkosim, ar ko var būt kongruenta divu veselu skaitllu kubu summa pēc moduļa .

|  | -1 | 0 | 1 |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| -1 | -2 | -1 | 0 |
| 0 | -1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 2 |

Esam ieguvuši, ka divu šādu skaitlu summa pēc moduļa var pieņemt jebkuru no vērtībām , taču nekādas citas. Tā kā neparādās starp šīm vērtībām, tad divu veselu skaitļu kubu summa nevar būt .