**Diskrētās matemātikas elementi**

**Specializētā kursa programmas paraugs vispārējai vidējai izglītībai**

Programmas paraugs ir izstrādāts Eiropas Sociālā fonda projektā “Kompetenču pieeja mācību saturā” (turpmāk – Projekts).

Mācību satura izstrādi pirmsskolas, pamatizglītības un vispārējās vidējās izglītības pakāpē Projektā vadīja **Dace Namsone** un **Zane Oliņa.**

Programmas parauga izstrādi un sagatavošanu publicēšanai Projektā vadīja **Jānis Vilciņš**.

Programmas paraugu izstrādāja **Maruta Avotiņa.**

Programmas paraugu izvērtēja ārējie eksperti: mācību satura recenzente **Baiba Āboltiņa** un zinātniskā recenzente **Dace Kūma**.

***Projekts izsaka pateicību visām Latvijas izglītības iestādēm, kas piedalījās mācību satura aprobācijā.***

ISBN  978-9934-24-060-7

[logo *Skola2030*]

© Valsts izglītības satura centrs | ESF projekts Nr.8.3.1.1/16/I/002 Kompetenču pieeja mācību saturā, 2021.



Saturs

[Ievads 3](#_Toc81249209)

[Stundu sadalījums 4](#_Toc81249210)

[1. Skaitīšanas sistēmas 5](#_Toc81249211)

[1.1. Skaitļa pārvēršana no kādas skaitīšanas sistēmas uz decimālo skaitīšanas sistēmu 8](#_Toc81249212)

[1.2. Skaitļa pārvēršana no decimālās skaitīšanas sistēmas kādā citā skaitīšanas sistēmā 9](#_Toc81249213)

[2. Kongruences 11](#_Toc81249214)

[2.1. Kongruences jēdziens 11](#_Toc81249215)

[2.2. Kongruenču īpašības 13](#_Toc81249216)

[2.3. Skaitļu pakāpes pēc moduļa 16](#_Toc81249217)

[2.4. Uzdevumi 20](#_Toc81249218)

[2.5. Idejas risinājumiem 21](#_Toc81249219)

[2.6. Uzdevumu atrisinājumi 21](#_Toc81249220)

[3. Dalāmības pierādīšana 24](#_Toc81249221)

[3.1. Dalāmības pazīmes 24](#_Toc81249222)

[3.2. Matemātiskās indukcijas metodes izmantošana 28](#_Toc81249223)

[3.3. Uzdevumi 31](#_Toc81249224)

[3.4. Idejas risinājumiem 31](#_Toc81249225)

[3.5. Uzdevumu atrisinājumi 32](#_Toc81249226)

[4. Vienādojumi naturālos un veselos skaitļos 36](#_Toc81249227)

[4.1. Pirmās kārtas lineāri vienādojumi ar diviem mainīgajiem 37](#_Toc81249228)

[4.2. Atrisinājuma neeksistences piemēri 39](#_Toc81249229)

[4.3. Dažādu spriedumu izmantošana vienādojumu risināšanā veselos skaitļos 42](#_Toc81249230)

[Izmantotā literatūra un citi avoti 46](#_Toc81249231)

[Pielikumi 47](#_Toc81249232)

[1. pielikums. Kongruences (grūtāki uzdevumi) 47](#_Toc81249233)

[2. pielikums. Papildu uzdevumi par atrisinājuma neeksistenci 50](#_Toc81249234)

[3. pielikums. Papildu uzdevumi par vienādojumiem veselos skaitļos 52](#_Toc81249235)

[4. pielikums. Pirmā grupu/pāru darba uzdevuma atrisinājums 53](#_Toc81249236)

[5. pielikums. Otrā grupu/pāru darba uzdevuma atrisinājums 55](#_Toc81249237)

# Ievads

Kursā “Diskrētās matemātikas elementi” aplūkotas skaitīšanas sistēmas un vienādojumi veselos skaitļos, kas ir neliela daļa no diskrētās matemātikas apakšnozares. Uzsvars likts uz spriešanu, kas attīsta skolēnu prasmi pierādīt matemātiska satura apgalvojumus.

Materiālā doti gan uzdevumi, gan arī to atrisinājumi. Daudziem uzdevumiem doti vairāki atšķirīgi risinājumi, lai ilustrētu dažādas metodes, kuras skolēns var salīdzināt un novērtēt katras metodes priekšrocības un trūkumus. Teksts, kas rakstīts slīprakstā pelēkā krāsā, ir ieteikumi skolotājiem, kā virzīt skolēnu darbību un kādus jautājumus var uzdot skolēniem.

**Kursa mērķi:**

1) padziļināt izpratni par skaitīšanas sistēmu daudzveidību un lietojumu;

2) lietot atsevišķus diskrētai matemātikai raksturīgus matemātiskos modeļus un problēmrisināšanas paņēmienus.

**Sasniedzamie rezultāti**

M.A.3.1.4. Skaidro, veido, lieto algoritmus pārejai no vienas skaitīšanas sistēmas uz citu naturāla skaitļa pierakstīšanai.

M.A.4.5.8. Spriežot, veicot algebriskus pārveidojumus, pilno pārlasi vai interpretējot grafiski, atrisina vienādojumu ar diviem mainīgajiem kopā un , piemēram, .

M.A.4.5.9. Lieto dalāmību (kongruences), nosakot izteiksmju īpašības, risinot vienādojumus ar diviem mainīgajiem kopā un .

M.A.4.5.10. Pierāda dalāmību, spriežot un lietojot matemātiskās indukcijas principu.

**Materiāla sagatavošanā izmantotās grāmatas**

A. Andžāns. Algebra 10.-12. klasei Profilkursam, II daļa. Rīga, 1998.

M. Avotiņa, A. Zīlīte. Tematiskie uzdevumi matemātikas olimpiādēs. Rīga: LU, 2019.

# Stundu sadalījums

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Kopā** | **Tēma** | **Stundu skaits** |
| **4** | Skaitīšanas sistēmas | 2 |
| Skaitļa pārvēršana no kādas skaitīšanas sistēmas decimālajā skaitīšanas sistēmā un otrādi | 2 |
| **11** | Kongruences jēdziens | 2 |
| Kongruenču īpašības | 3 |
| Skaitļu pakāpes pēc moduļa | 3 |
| Uzdevumi | 3 |
| **8** | Dalāmības pazīmes | 3 |
| Matemātiskās indukcijas principa izmantošana dalāmības pierādīšanā | 2 |
| Dalāmības pierādīšana (dažādi uzdevumi) | 3 |
| **11** | Vienādojumu risināšana veselos un naturālos skaitļos, pirmās kārtas lineāri vienādojumi ar diviem mainīgajiem | 2 |
| Atrisinājuma neeksistences piemēri | 3 |
| Grupu/pāru darba uzdevums (risina ar Excel) | 1 |
| Gadījumu šķirošana un spriešana | 5 |
| **1** | Pārbaudes darbs | 1 |

# 1. Skaitīšanas sistēmas

Skaitīšanas sistēma ir simbolisks skaitļu pieraksta veids, kurā skaitļu attēlošanai tiek izmantoti cipari vai citas rakstzīmes.

Izšķir pozicionālās un nepozicionālās skaitīšanas sistēmas

Pozicionālajās skaitīšanas sistēmās cipara vērtība ir atkarīga no tā atrašanās vietas skaitlī. Pozicionālās ir decimālā, heksadecimālā, duodecimālā, oktālā, binārā un citas skaitīšanas sistēmas. Pozicionālās skaitīšanas sistēmas skaitļus pieraksta kā ciparu virknes.

Nepozicionālās sistēmās katra cipara vērtība nav atkarīga no šī cipara vietas skaitļa pierakstā. Šādas sistēmas piemērs ir romiešu skaitļu sistēmu, kurā skaitļu pierakstam tiek izmantoti latīņu alfabēta burti (I, V, X, L, C, D, M). Piemēram, I ir vieninieks gan skaitļa sākumā, gan beigās.

Sadzīvē tiek lietota decimālā skaitīšanas sistēma.

Skaitīšanas sistēmā bāze ir kopējais dažādu simbolu skaits, kas pieļaujami šajā sistēmā. Lielākā simbola vērtība vienmēr ir par viens mazāka nekā bāze. Piemēram, decimālajā sistēmā ir desmit dažādi simboli: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, kur lielākais simbols 9 ir par viens mazāks nekā 10 (bāze).

*Jāuzsver atšķirība starp ciparu un skaitli.*

**Decimālā skaitīšanas sistēma**

Secīgas (pa vienam) decimālās skaitīšanas koncepcija.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Simtu pozīcija | Desmitu pozīcija | Vieninieku pozīcija | Piezīmes |
|  |  | 0 | Mazākās vērtības simbols |
|  |  | 1 | Secīgs pieaugums pozīcijā |
|  |  | 2 | Secīgs pieaugums pozīcijā |
|  |  | 3 | Secīgs pieaugums pozīcijā |
|  |  | 4 | Secīgs pieaugums pozīcijā |
|  |  | 5 | Secīgs pieaugums pozīcijā |
|  |  | 6 | Secīgs pieaugums pozīcijā |
|  |  | 7 | Secīgs pieaugums pozīcijā |
|  |  | 8 | Secīgs pieaugums pozīcijā |
|  |  | 9 | Lielākās vērtības simbols |
|  | 1 | **0** | Nobīdes rādītājs |
|  | 1 | 1 | Secīgs pieaugums pozīcijā |
|  | 1 | 2 [..] | Secīgs pieaugums pozīcijā |
|  | 1 | [..] 9 | Secīgs pieaugums pozīcijā |
|  | 2 | **0** | Nobīdes rādītājs |
|  | 2 | 1 | Secīgs pieaugums pozīcijā |
|  | 2 | 2 | Secīgs pieaugums pozīcijā |
|  | … | … | Secīgs pieaugums pozīcijā |
|  | 9 | 8 | Secīgs pieaugums pozīcijā |
|  | 9 | 9 | Secīgs pieaugums pozīcijā |
| 1 | **0** | **0** | Nobīdes rādītājs |
| 1 | 0 | 1 |  |

Jāuzsver skaitļu, kas lielāki par sistēmas bāzi, veidošanu. Simbols 0 seko pēc tam, kad kādā no skaitļa pozīcijām skaitīšanas secībā izmantoti visi sistēmā atļautie simboli, kas decimālajā sistēmā ir no 0 līdz 9. Pie simbola 0 parādīšanās uzkrājums no 1 līdz 9 “jānobīda” uz tieši blakus esošo pozīciju pa kreisi no 0 simbola un secīgā skaitīšana jāatsāk iepriekšējā pozīcijā. Simbolu 0 dēvē par nobīdes rādītāju un tas norāda, ka secīgi skaitot ir saskaitīti attiecīgās pozīcijas 10 vieninieki. Šādu darbību var aplūkot tabulā pie skaitļiem 10, 20 un 100. Katrai pozīcijai decimālajā skaitlī jeb katram vieniniekam šajā pozīcijā ir desmit reizes lielāka vērtība par labajā pusē tieši blakus esošās pozīcijas vērtību, tas ir, šajā pozīcijā esošā vieninieka vērtību. Katra pozicionālā vērtība ir skaitļa 10 daudzkārtnis un tā var tikt izteikta kā skaitlis 10 kāpināts kādā pakāpē.

Vispārīgā veidā jebkuru decimālo skaitli var izteikt kā summu

kur .

Piemēram,

**Citas skaitīšanas sistēmas**

Ja skaitīšanas sistēmas bāze ir 2, tad šo sistēmu sauc par divnieku jeb bināro skaitīšanas sistēmu. Sistēmā izmanto tikai ciparus 0 un 1. Sistēmas bāze – skaitlis 2 – pierakstāms kā 10.

Binārajā sistēmā ir vienkārši izpildīt aritmētiskās darbības – saskaitīšanu un reizināšanu (skat. tabulā). Starpības atrašanai izmanto saskaitīšanas tabulu.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

*Kur izmanto bināro skaitīšanas sistēmu?*

Ja skaitīšanas sistēmas bāze ir 3, tad šo sistēmu sauc par trijnieku jeb ternāro skaitīšanas sistēmu.

Oktālā jeb astotnieku skaitīšanas sistēmā izmanto ciparus 0, 1, 2, …, 7. Sistēmas bāze – skaitlis 8 – izsakāms kā 10.

Ja skaitli pieraksta decimālajā skaitīšanas sistēmā, tad pieņemts tās bāzi 10 īpaši neuzrādīt, savukārt, ja skaitlis ir pierakstīts citā skaitīšanas sistēmā, tad sistēmas bāzi norāda kā apakšējo indeksu skaitļa beigās. Piemēram, – skaitlis oktālajā skaitīšanas sistēmā.

**Vingrinājums**

Aizpildīt saskaitīšanas tabulu oktālajā skaitīšanas sistēmā. Skaidrot darbību izpildi.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Vingrinājuma atbilde**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|  |  | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 10 |
|  | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 10 | 11 |
|  |  | 4 | 5 | 6 | 7 | 10 | 11 | 12 |
|  | 4 | 5 | 6 | 7 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|  |  | 6 | 7 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|  |  | 7 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|  |  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |

**Daudzciparu skaitļu saskaitīšana**

Daudzciparu skaitļu saskaitīšanu citās skaitīšanas sistēmā veic analogi kā decimālajā skaitīšanas sistēmā.

*Var atgādināt, kā saskaita skaitļus decimālajā skaitīšanas sistēmā rakstos. Pēc tam kopīgi ar skolēniem var apspriest, kā veikt saskaitīšanu citās skaitīšanas sistēmās.*

Apskatīsim, kā saskaitīt divus skaitļus oktālajā skaitīšanas sistēmā.

**Piemērs**

Saskaitīt skaitļus un .

1. Saskaitāmos pierakstām vienu zem otra tā, lai vienas šķiras vienības atrastos vienā kolonnā:

Attēls, kurā ir teksts, pulkstenis

Apraksts ģenerēts automātiski

1. Saskaitīšanu sāk ar zemāko šķiru. Vienas šķiras ciparu summu atrod saskaitīšanas tabulā (skat. vingrinājuma tabulu).
2. Ja dotās šķiras ciparu summa ir mazāka nekā skaitīšanas sistēmas bāze (tas ir, ja tā ir viencipara skaitlis; šajā piemērā mazāka nekā 8), tad to pieraksta attiecīgajā kolonnā zem svītras:

Attēls, kurā ir teksts

Apraksts ģenerēts automātiski

Ja kādā šķirā ciparu summa ir divciparu skaitlis (šajā piemērā tāda ir ceturtās šķiras vienību summa), tad otrais (kreisais) cipars šādā summā vienmēr ir 1. To iegaumē un nākamajā solī pieskaita nākamās augstākās šķiras ciparu summai (piemērā to pieskaita piektās šķiras summai):

Attēls, kurā ir teksts

Apraksts ģenerēts automātiski Attēls, kurā ir teksts

Apraksts ģenerēts automātiski

*Idejas mājas darbam vai pāru darbam:*

* *divu (vai vairāk) skaitļu saskaitīšana kādā skaitīšanas sistēmā, skaidrojot veiktās darbības;*
* *divu skaitļu atņemšana kādā skaitīšanas sistēmā, skaidrojot veiktās darbības;*
* *reizināšanas algoritma izveidošana, saskatot analoģijas ar skaitļu reizināšanu rakstos decimālajā skaitīšanas sistēmā.*

## 1.1. Skaitļa pārvēršana no kādas skaitīšanas sistēmas uz decimālo skaitīšanas sistēmu

*Kā pārvērst skaitli decimālajā skaitīšanas sistēmā, ja tas dots kādā citā skaitīšanas sistēmā?*

Lai pārvērstu skaitli decimālajā skaitīšanas sistēmā, to ir jāpieraksta kā ciparu virkni pēc dotās skaitīšanas sistēmas bāzes.

Vispārīgā gadījumā, ja dots skaitlis skaitīšanas sistēmā ar bāzi , tad pārveidošanai uz decimālo skaitīšanas sistēmu pietiek aprēķināt summu:

**Piemēri**

**P1.1.** Pārvērst skaitli no oktālās skaitīšanas sistēmas decimālajā.

**Atrisinājums.** Oktālās skaitīšanas sistēmas bāze ir skaitlis 8. Pierakstām skaitli kā ciparu virkni un aprēķinām iegūto summu:

Tātad .

**P1.2.** Pārvērst skaitli decimālajā skaitīšanas sistēmā.

**Atrisinājums.** Binārās skaitīšanas sistēmas bāze ir skaitlis 2. Pierakstām doto skaitli kā ciparu virkni un aprēķinām summu:

Tātad .

**P1.3.** Pārvērst skaitli no heksadecimālās skaitīšanas sistēmas decimālajā.

*Var uzdot skolēniem pašiem noskaidrot, kas ir heksadecimālā skaitīšanas sistēma.*

**Atrisinājums.** Heksadecimālas skaitīšanas sistēmas bāze ir skaitlis 16. Lai pierakstītu doto skaitli kā ciparu virkni burtus un ir jāaizvieto atbilstoši ar skaitļiem 10 un 11:

Tātad .

## 1.2. Skaitļa pārvēršana no decimālās skaitīšanas sistēmas kādā citā skaitīšanas sistēmā

Apskatīsim piemēru, kā decimālās skaitīšanas sistēmas skaitli 127 pārveidot binārajā pierakstā.

Mērķis ir skaitli 127 pierakstīt formā:

kur .

Tādā gadījumā skaitļa 127 binārais pieraksts būs , kur .

Dalot skaitli 127 ar 2, iegūstam dalījumu 63 un atlikumu 1:

Pēc tam, dalījumu 63 dalot ar 2, iegūstam dalījumu 31 un atlikumu 1:

Turpinām dalīt iegūtos dalījumus ar 2 tik ilgi, kamēr iegūstam dalījumu 0:

* ;
* ;
* ;
* ;
* .

Iegūtās vienādības izmantojam, lai pārveidotu skaitli 127 par tādu reizinājumu summu, kuros viens no reizinātājiem ir divnieka pakāpe un otrs reizinātājs ir 0 vai 1:

Līdz ar to esam ieguvuši, ka .

Bieži skaitļu pārveidošanu veic īsāk, ievērojot, ka dotā skaitļa 127 pierakstā jaunajā skaitīšanas sistēmā cipari parāda atlikumus, ko iegūst, vispirms dalot doto skaitli un pēc tam dalot iegūtos dalījumus ar jaunās sistēmas bāzi:

* pirmajā vietā no labās puses ir atlikums, ko iegūst, dalot doto skaitli ar jaunās sistēmas bāzi;
* otrajā vietā ir atlikums, ko iegūst, dalot pirmo dalījumu ar jaunās sistēmas bāzi;
* trešajā vietā ir atlikums, ko iegūst, dalot otro dalījumu ar jaunās sistēmas bāzi,
* …

Process beidzas, kad iegūtais dalījums ir 0; šīs dalīšanas atlikums ir cipars pēdējā vietā no labās puses (tas ir, pirmajā vietā no kreisās puses).

Skaitļu pārveidošanas procesu ērti attēlot tabulā; skaitli nolasa, sākot ar tabulas pēdējo rindu.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Darbība | Dalījums | Atlikums |
|  | 63 | 1 |
|  | 31 | 1 |
|  | 15 | 1 |
|  | 7 | 1 |
|  | 3 | 1 |
|  | 1 | 1 |
|  | 0 | 1 |

**Piemēri**

**P1.4.** Pārveidot skaitli 57 no decimālās skaitīšanas sistēmas uz trijnieku skaitīšanas sistēmu.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Darbība | Dalījums | Atlikums |
|  | 19 | 0 |
|  | 6 | 1 |
|  | 2 | 0 |
|  | 0 | 2 |

Tātad .

**P1.5.** Pārveidot skaitli 3010 no decimālās skaitīšanas sistēmas uz astotnieku skaitīšanas sistēmu.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Darbība | Dalījums | Atlikums |
|  | 376 | 2 |
|  | 47 | 0 |
|  | 5 | 7 |
|  | 0 | 5 |

Tātad

*Kā vingrinājumus var likt skolēniem dažādus skaitļus pārvērst no vienas skaitīšanas sistēmu uz kādu citu.*

*Rezultātu pārbaudei var izmantot, piemēram,* [*https://www.rapidtables.com/convert/number/base-converter.html*](https://www.rapidtables.com/convert/number/base-converter.html)

# 2. Kongruences

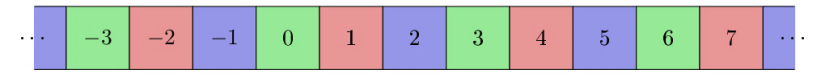
Viens no pazīstamākajiem veselo skaitļu iedalījumiem ir to dalījums pāra un nepāra skaitļos. Katrs vesels skaitlis ir vai nu pāra, vai nepāra, taču neviens nav vienlaikus gan pāra, gan nepāra skaitlis. Tādā veidā visi veselie skaitļi tiek sadalīti divās klasēs: skaitļi, kas dalās ar 2 (pāra skaitļi), un skaitļi, kas nedalās ar 2 (nepāra skaitļi).

Ja dalītāju 2 aizvieto ar 3, tad līdzīgi var runāt par skaitļiem, kas dalās vai nedalās ar 3. Tomēr izrādās, ka lietderīgāk ir veselos skaitļus dalīt klasēs atkarībā no tā, kādu atlikumu tie dod, dalot ar kādu skaitli. Arī pāra un nepāra skaitļus var uztvert kā skaitļus, kas, dalot ar 2, dod attiecīgi atlikumu 0 vai 1. Ja nomainām 2 ar 3, tad veselos skaitļus sadalām trīs klasēs – šķirojot gadījumus, vai skaitlis, dalot ar 3, dod atlikumu 0, 1 vai 2.

**Teorēma par dalīšanu ar atlikumu.** Ja ir vesels skaitlis un ir naturāls skaitlis, tad noteikti var atrast tādus veselus skaitļus un , ka , turklāt .

***Iegaumē!*** Atlikums nekad nav mazāks kā 0 un vienmēr ir mazāks nekā dalītājs tas ir, dalot ar , atlikumam var būt vērtības .

Skaitļu sadalīšanu klasēs var salīdzināt ar “skaitļu krāsošanu”. Pieņemsim, ka visi veselie skaitļi sarakstīti uz bezgalīgas rūtiņu lentes. Ja vēlamies veselos skaitļus sašķirot klasēs atkarībā no tā, piemēram, kādus atlikumus tie dod, dalot ar 3, tad grafiski var iztēloties, ka katram skaitlim atbilstošā rūtiņa tiek nokrāsota vienā no trim krāsām: tie skaitļi, kas dalās ar trīs, tiek krāsoti vienā krāsā, tie skaitļi, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 1 – citā krāsā, un skaitļi, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 2 – vēl citā krāsā. Tādējādi visi skaitļi tiek nokrāsoti kādā no trim krāsām, turklāt katrs skaitlis tiek nokrāsots tieši vienā krāsā (skat. 1. att.).



1. att.

## 2.1. Kongruences jēdziens

Lai šos spriedumus vispārinātu un lietotu uzdevumu risināšanā, definē kongruences jēdzienu.

**Definīcija.** Doti veseli skaitļi unun naturāls skaitlis . Skaitļi un ir kongruenti pēc moduļa , ja un , dalot tos ar , dod vienādu atlikumu.

To pieraksta vai . Latvijā biežāk tiek lietots pirmais pieraksta veids.

**Piemēri**

* , jo gan 7, gan 3, dalot ar 2, dod atlikumu 1.
* , jo gan 17, gan 73, dalot ar 14, dod atlikumu 3.
* , jo gan 71, gan 8, dalot ar 9, dod atlikumu 8.
* , jo gan , gan 4, dalot ar 3, dod atlikumu 1.
* , jo gan , gan 85, dalot ar 7, dod atlikumu 1.

*Piezīme.* Īpaši uzmanīgi jāaprēķina atlikums, ja negatīvu skaitli dala ar naturālu skaitli. Piemēram, skaitli , dalot ar 7, atlikums ir **1**, jo .

Bieži vien, lai pārbaudītu, vai skaitļi ir kongruenti pēc kāda moduļa, ir ērti lietot nākamo teorēmu.

**Teorēma.**  tad un tikai tad, ja starpība dalās ar .

*Kāpēc starpība dalīsies ar , ja ?*

*Tā kā , tad un , kur un . Līdz ar to , kas dalās ar , jo satur reizinātāju .*

*Kāpēc , ja starpība dalās ar ?*

*Pieņemsim, ka un , kur un . Līdz ar to . Tā kā un dalās ar , tad arī jādalās ar , bet tas iespējams tikai tad, ja jeb , jo . Tātad .*

**Piemēri**

* , jo starpība dalās ar 2.
* , jo starpība dalās ar 14.
* , jo starpība dalās ar 9.
* , jo starpība dalās ar 3.
* , jo starpība dalās ar 7.

**Vingrinājumi**

**V2.1.** Nosaukt vismaz piecus skaitļus, kas ir kongruenti skaitlim 7 pēc moduļa 4.

**V2.2.** Vai dotās kongruences ir patiesas?

**V2.3.** Pēc kāda moduļa var būt kongruenti skaitļi 12 un 19 ?

**V2.4.** Pēc kāda moduļa var būt kongruenti skaitļi un 7 ?

**Vingrinājumu atbildes**

**V2.1.** Skaitli 7 dalot ar 4, atlikumā iegūst 3. Tātad der skaitļi formā , kur , tas ir,

**V2.2. a)** Jā, jo gan 3, gan 7 dod atlikumu 3, dalot ar 4.

**b)** Nē, jo 3 dod atlikumu 0, dalot ar 3, bet 7 dod atlikumu 1, dalot ar 3.

**c)** Nē, jo 14 dod atlikumu 4, dalot ar 10, bet 73 dod atlikumu 3, dalot ar 10.

**d)** Jā, jo starpība dalās ar 5.

**V2.3.** Apskatām starpību . Tā kā 7 dalās ar 1 un 7, tad dotie skaitļi var būt kongruenti pēc moduļa 1 vai 7:

**V2.4.** Apskatām starpību . Tā kā 10 dalās ar 1, 2, 5 un 10, tad dotie skaitļi var būt kongruenti pēc moduļa 1, 2, 5 vai 10:

*Katram skolēnam var likt izdomāt līdzīgus piemērus (var uzdot arī kā mājas darbu), pēc tam skolēnus sadala pāros, kur viņi apmainās ar piemēriem, risina otra izdomātos piemērus, salīdzina atbildes un apspriež risinājumus.*

## 2.2. Kongruenču īpašības

Lai kongruences varētu lietot uzdevumu risināšanā, var izmantot kongruenču īpašības, kas ļauj daudzus aprēķinus veikt ievērojami vienkāršāk.

1. Ja , dalot ar , dod atlikumu , tad .
2. Ja , tad , kur ir jebkurš vesels skaitlis.
3. Ja , tad , kur ir jebkurš naturāls skaitlis.
4. Ja un , tad
   * ,
   * ,
   * .
5. Visiem veseliem izpildās kongruence (refleksivitāte).
6. Ja , tad (simetrija).
7. Ja un , tad (transitivitāte).

Apskatām dažu īpašību lietojumu:

* (*4. īpašība*)
* , jo (*3. īpašība*)
* , jo un (*4. īpašība*)
* (*4. īpašība*)

Tā kā kongruence pēc moduļa sadala visus veselos skaitļus klasēs, kur katrā klasē ietilpst skaitļi, kas dod vienādus atlikumus pēc moduļa (skat., piemēram, 1. att., kur un vienā krāsā ir nokrāsoti skaitļi, kas ir vienā klasē), tad īpašību, kas jāpierāda visiem veseliem skaitļiem, pietiek pierādīt katras klases skaitļiem atsevišķi.

**Vingrinājumi**

**V2.5.** Uzrakstīt saskaitīšanas tabulu pēc moduļa 4.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 0 |  |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |

**V2.6.** Uzrakstīt reizināšanas tabulu pēc moduļa 4.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 0 |  |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |

**Vingrinājumu atbildes**

**V2.5.** Piemēram, .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 0 | 1 | 2 |

**V2.6.** Piemēram, .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 0 | 2 | 0 | 2 |
| 3 | 0 | 3 | 2 | 1 |

**Piemēri**

**P2.1.** Aprēķināt atlikumu, kāds rodas, skaitli dalot ar :

* 1. un ;
  2. un ;
  3. un .

**Atrisinājums**

**a)** Risinājumā izmantoti šādi spriedumi:

. Skaitli dalot ar 11, atlikums ir 1.

*Šeit jāuzsver atšķirība starp atlikumu, kas vienmēr ir nenegatīvs, un darbībām ar kongruencēm, kur var izvēlēties ērtāko atbilstošās kongruenču klases pārstāvi. Piemēram, skaitli 21 ir ērtāk aizstāt ar tam kongruentu skaitli pēc moduļa 11 (jo pēc tam tas jākāpina septītajā pakāpē), nevis ar skaitli 10.*

**b)** Risinājumā izmantoti šādi spriedumi:

. Skaitli dalot ar 12, atlikums ir 6.

**c)** Risinājumā izmantoti šādi spriedumi:

. Skaitli dalot ar 7, atlikums ir 3.

**P2.2.** Pierādīt, ka visiem naturāliem skaitlis dalās ar 11.

**Atrisinājums.** Izmantojot kongruenču un pakāpju īpašības, iegūstam

Tātad izteiksme dalās ar 11.

## 2.3. Skaitļu pakāpes pēc moduļa

Dažreiz risinot uzdevumus, ir lietderīgi zināt, kādus atlikumus var iegūt, ja kāda skaitļa pakāpi (piemēram, kvadrātu, kubu) apskata pēc dotā moduļa.

**Piemēri**

**P2.3.** Kādu atlikumu var iegūt, vesela skaitļa kvadrātu dalot ar 3?

**1. atrisinājums** (*bez kongruenču izmantošanas*). Ievērojam, ka veselu skaitli , dalot ar 3, var iegūt atlikumu 0, 1 vai 2. Tātad katru veselu skaitli var pierakstīt vienā no trim formām ( ir vesels skaitlis):

* (skaitļi, kas dalās ar 3, jeb visi skaitļi, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 0), tad  
  , kas dalās ar 3, jo satur reizinātāju 9;
* (skaitļi, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 1), tad , kas, dalot ar 3, dod atlikumu 1, jo pirmie divi saskaitāmie dalās ar 3;
* (skaitļi, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 2), tad , kas, dalot ar 3, dod atlikumu 1, jo pirmie divi saskaitāmie dalās ar 3, bet, 4 dalot ar 3, iegūst atlikumu 1.

Tātad vesela skaitļa kvadrātu, dalot ar 3, var iegūt atlikumu 0 vai 1.

**2. atrisinājums** (*ar kongruenču izmantošanu*). Ievērojam, ka veselu skaitli , dalot ar 3, var iegūt atlikumu 0, 1 vai 2:

* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad .

Tātad vesela skaitļa kvadrātu, dalot ar 3, var iegūt atlikumu 0 vai 1.

*Piezīme. Aplūkotajā 2. risinājumā pēdējos divus gadījumus var apvienot, ievērojot, ka  
, tas ir, ja , tad*

Aprēķināt atlikumu var ar, piemēram, MS Excel. Piemēram, ja jānoskaidro, kādu atlikumu var iegūt, ja vesela skaitļa kvadrātu dala ar 8:

1. vienā kolonnā ieraksta iespējamos atlikumus (skat. 2. att., kur atlikumi ierakstīti šūnās A2 līdz A9), kādus var iegūt, ja skaitli dala ar 8 (atlikumi ir 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7);
2. otrā kolonnā raksta formulu, piemēram, šūnā B2 raksta **=mod(A2^2;8)**. Funkcijai MOD ir divi argumenti, kas atdalīti ar semikolu (skat. 3. att.).

|  |  |
| --- | --- |
| Attēls, kurā ir galds  Apraksts ģenerēts automātiski  2. att. | Attēls, kurā ir teksts  Apraksts ģenerēts automātiski  3. att. |

**P2.4.** Kādu atlikumu dod skaitļa kvadrāts, dalot ar , kur ?

*Uzdevumu var veikt “uz papīra” un pēc tam pārbaudīt ar MS Excel.*

*Uzdevumu var papildināt, skaitļa kvadrātu aizstājot ar kādu citu pakāpi, piemēram, kādu atlikumu dod skaitļa kubs, dalot ar ?*

**Atrisinājums**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Atlikumi |  | Atlikumi |
| 2 | 0; 1 | 8 | 0; 1; 4 |
| 3 | 0; 1 | 9 | 0; 1; 4; 7 |
| 4 | 0; 1 | 10 | 0; 1; 4; 5; 6; 9 |
| 5 | 0; 1; 4 | 11 | 0; 1; 3; 4; 5; 9 |
| 6 | 0; 1; 3; 4 | 13 | 0; 1; 3; 4; 9; 10; 12 |
| 7 | 0; 1; 2; 4 | 16 | 0; 1; 4; 9 |

**P2.5.** Pierādīt, ka nevienai naturālai vērtībai izteiksmes vērtība nav naturāla skaitļa kvadrāts!

**Atrisinājums.** Jau ieguvām (skat. P2.4. piemēru), ka naturāla skaitļa kvadrātu, dalot ar 3, var iegūt atlikumu 0 vai 1.

Apskatot doto izteiksmi pēc moduļa 3, iegūstam

Tātad dotā izteiksme, dalot ar 3, dod atlikumu 2, tātad tā nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts.

*Piezīme*. Uzdevumu var atrisināt arī aplūkojot izteiksmi pēc jebkura skaitļa 3 daudzkārtņa moduļa, tas ir, 6, 9, 12 utt.

*Kāpēc neder, ja apskata pēc moduļa 2?*

Apskatām izteiksmi pēc moduļa 2:

Skaitļa kvadrāts var dot atlikumu 1, dalot to ar 2. Nerodas pretruna.

**P2.6.** Doti tādi naturāli skaitļi un , ka dalās ar 3. Pierādīt, ka dalās arī ar 9.

**Atrisinājums.** Jau ieguvām, ka naturāla skaitļa kvadrāts var būt kongruents ar 0 vai 1 pēc moduļa 3 (skat. P2.4. piemēru). Apskatām summu pēc moduļa 3.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 |
| 0 |  |  |
| 1 |  |  |

Ievērojam, ka jeb dalās ar 3 tikai tad, ja un jeb gan , gan dalās ar 3.

Naturāla skaitļa kvadrāts dalās ar 3 tikai tad, ja pats skaitlis dalās ar 3 (skat. P2.1. piemēru). Tātad gan , gan dalās ar 3, bet tādā gadījumā gan , gan dalās ar 9. Tā kā katrs saskaitāmais dalās ar 9, tad arī summa dalās ar 9.

Uzdevumos par veselu skaitļu pakāpēm ar mainīgu vai lielu kāpinātāju var noderēt nākamā teorēma.

**Teorēma.** Virkne pēc moduļa ir periodiska.

*Kāds ir lielākais iespējamais perioda garums?*

Perioda garums nepārsniedz.

*Kā noskaidrot perioda garumu?*

Perioda garumu un tajā ietilpstošos skaitļus var atrast, rakstot pēc kārtas skaitļus pēc moduļa .

*Kāpēc virkne pēc moduļa ir periodiska?*

Tiklīdz virknē parādās kāds jau bijis skaitlis, ir atrasts periods, jo katrs nākamais virknes loceklis ir atkarīgs tikai no iepriekšējā virknes locekļa ().

**Piemēri**

**P2.7.** Kādu atlikumu iegūst, ja skaitli , dala ar ?

**1. atrisinājums.** Virkne , , ir periodiska pēc moduļa , apskatīsim šīs virknes pirmos locekļus:

* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ...

Šo informāciju ērti apkopot tabulā:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | … |
|  | **1** | 3 | 2 | 6 | 4 | 5 | **1** | 3 | … |

Virkne ir periodiska ar perioda garumu 6. Tā kā , tad secinām, ka

Tātad skaitlis dod atlikumu 2, dalot ar 7.

**2. atrisinājums.** Izmantojam kongruenču un pakāpju īpašības:

Tātad skaitlis dod atlikumu 2, dalot ar 7.

**P2.8.** Vai var atrast tādus divus veselus skaitļus, kuru kubu summa, dalot ar 7, dod atlikumu 3?

**Atrisinājums.** Vispirms noskaidrojam, ar ko var būt kongruenti veselu skaitļu kubi pēc moduļa :

* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad .

Tātad veselu skaitļu kubi ir kongruenti ar vai pēc moduļa . Aplūkojam, ar ko var būt kongruenta divu veselu skaitļu kubu summa pēc moduļa 7.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Esam ieguvuši, ka divu šādu skaitļu summa pēc moduļa 7 var pieņemt jebkuru no vērtībām taču nekādas citas. Tā kā neparādās starp šīm vērtībām, tad divu veselu skaitļu kubu summa nevar dot atlikumu 3, dalot ar 7.

*Piezīme*. Tabulā vietā varēja aplūkot tam pēc moduļa 7 kongruentu skaitli 6. Skaitļa 6 vietā izmantots skaitlis , jo ar to vieglāk veikt darbības. *Šeit jāuzsver atšķirība starp atlikumu, kas vienmēr ir nenegatīvs, un darbībām ar kongruencēm, kur var izvēlēties ērtāko atbilstošās kongruenču klases pārstāvi.*

**P2.9.** Pierādīt, ka nedalās ar 7 nekādiem veseliem skaitļiem.

**Atrisinājums.** Apskatām visus veselos skaitļus pēc moduļa 7:

* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad .

Nevienā gadījumā nav iegūts atlikums 0, tātad izteiksme nedalās ar 7 nekādiem veseliem skaitļiem.

**P2.10.** Trīs veselu skaitļu kvadrātu summa dalās ar 9. Pierādiet, ka var izvēlēties divus no šiem kvadrātiem tā, ka to starpība dalās ar 9.

**Atrisinājums.** Vispirms noskaidrojam, ar ko var būt kongruenti veselu skaitļu kvadrāti pēc moduļa 9 (*šo soli var izlaist, ja ir pildīts P2.4. vai arī veikt, lai trenētos darboties ar kongruencēm*):

* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad .

Tātad veselu skaitļu kvadrāti pēc moduļa 9 var būt kongruenti ar 0, 1, 4 vai 7. Pārbaudām, vai trīs dažādi atlikumi var dot summā skaitli, kas dalās ar 9:

* ;
* ;
* ;
* .

Tātad vismaz divi no atlikumiem ir vienādi, bet tas nozīmē, ka šo kvadrātu starpība dalās ar 9.

## 2.4. Uzdevumi

**U2.1.** Pierādīt, ka no jebkuriem trim naturālu skaitļu kvadrātiem var izvēlēties divus tā, ka to summa vai starpība dalās ar 5.

**U2.2.** Pierādīt, ka starp jebkuriem pieciem naturālu skaitļu kvadrātiem var atrast divus tādus, ka to summa vai starpība dalās ar 13.

**U2.3.** Pierādīt, ka nevienai naturālai vērtībai izteiksmes vērtība nav naturāla skaitļa kvadrāts!

**U2.4.** Pierādīt: ja trīs veselu skaitļu kubu summa dalās ar 9, tad šo skaitļu reizinājums dalās ar 3.

**U2.5.** Vai var atrast tādus veselus skaitļus , un , ka izpildās vienādība ?

*Ja kāds skolēns izpilda visus uzdevumus, tad 1. pielikumā ir doti trīs grūtāki uzdevumi un to atrisinājumi. Uzdevumus var dot gan patstāvīgai risināšanai, gan arī dotā atrisinājuma pētīšanai un skaidrošanai.*

## 2.5. Idejas risinājumiem

**U2.1.** Kādus atlikumus var iegūt, ja naturāla skaitļa kvadrātu dala ar 5?

Kas notiek, ja divi no skaitļiem dod vienādus atlikumus, dalot ar 5?

Kas notiek, ja nav skaitļu, kas dod vienādus atlikumus, dalot ar 5?

*Ievēro! Daži apskatīti piemēri nav pierādījums, ka prasītais vienmēr izpildīsies. Pierādījumam jāsatur spriedumi, kas attiecināmi uz jebkuriem trim izvēlētiem naturālo skaitļu kvadrātiem.*

**U2.2.** Kādus atlikumus var iegūt, ja naturāla skaitļa kvadrātu dala ar 13?

Kas notiek, ja divi no skaitļiem dod vienādus atlikumus, dalot ar 13?

Kas notiek, ja nav skaitļu, kas dod vienādus atlikumus, dalot ar 13?

*Ievēro! Daži apskatīti piemēri nav pierādījums, ka prasītais vienmēr izpildīsies. Pierādījumam jāsatur spriedumi, kas attiecināmi uz jebkuriem pieciem izvēlētiem naturālo skaitļu kvadrātiem.*

**U2.3.** Kādu atlikumu var dot skaitļa kvadrāts, ja to dala ar kādu izvēlētu skaitli ? (*Var izmantot P2.4. piemēra tabulu*).

Kāda vērtība jāizvēlas, lai rastos pretruna?

Vai iegūst pretrunu, ja izteiksmi apskata pēc moduļa 2?

Vai iegūst pretrunu, ja izteiksmi apskata pēc moduļa 3?

Vai iegūst pretrunu, ja izteiksmi apskata pēc moduļa 4?

*Ievēro! Apskatot dažas vērtības, nevar izdarīt secinājumu par vispārīgā apgalvojuma patiesumu. Arī pārbaudītas 100 dažādas vērtības neļauj izdarīt secinājumu par visiem naturālajiem skaitļiem, kuru ir bezgalīgi daudz.*

**U2.4.** Kādu atlikumu var iegūt, ja vesela skaitļa kubu dala ar 9?

Vai var gadīties, ka neviens no skaitļiem nedalās ar 3?

*Ievēro! Daži apskatīti piemēri nav pierādījums, ka prasītais vienmēr izpildīsies.*

**U2.5.** Ar ko kongruenta izteiksme pēc moduļa 7?

Ar ko kongruenta izteiksme pēc moduļa 7?

*Vai pamanīji, ka uzdevums ir ļoti līdzīgs P2.8. piemēram, tikai nedaudz citādāk formulēts?*

*Vai vari izskaidrot atšķirību atrisinājumā? Ar kurām vērtībām (P2.8. piemērs) vai (U2.5. uzdevums) tev bija vieglāk uztvert risinājumu? Kāpēc?*

*Ievēro! Ja, apskatot dažas konkrētas vērtības, neizdodas iegūt vienādību, tas vēl nenozīmē, ka to nevar iegūt. Iespējams, neesi atradis derīgos skaitļus. Pierādījumam, ka prasītos skaitļus nevar atrast, jābalstās uz vispārīgiem spriedumiem.*

## 2.6. Uzdevumu atrisinājumi

**U2.1.** Pierādīt, ka no jebkuriem trim naturālu skaitļu kvadrātiem var izvēlēties divus tā, ka to summa vai starpība dalās ar 5.

**Atrisinājums.** Vispirms noskaidrojam, ar ko var būt kongruents naturāla skaitļa kvadrāts pēc   
moduļa 5.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|  | 0 | 1 | 4 | 4 | 1 |

Tātad naturāla skaitļa kvadrāts pēc moduļa 5 var būt kongruents ar 0, 1 vai 4. Iespējami divi gadījumi.

* Ja divi kvadrāti dod vienādu atlikumu, dalot ar 5, tad to starpība dalās ar 5.
* Ja nekādi divi no šiem trim kvadrātiem nav kongruenti pēc moduļa 5, tad tie pēc moduļa 5 pieņem visas iespējamās vērtības 0, 1 un 4. Tā kā , tad atbilstošo kvadrātu summa dalīsies ar 5.

**U2.2.** Pierādīt, ka starp jebkuriem pieciem naturālu skaitļu kvadrātiem var atrast divus tādus, ka to summa vai starpība dalās ar 13.

**Atrisinājums.** Vispirms noskaidrojam, ar ko var būt kongruents naturāla skaitļa kvadrāts pēc   
moduļa 13.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|  | 0 | 1 | 4 | 9 | 3 | 12 | 10 | 10 | 12 | 3 | 9 | 4 | 1 |

Tātad naturāla skaitļa kvadrāts pēc moduļa 13 var būt kongruents ar 0, 1, 3, 4, 9, 10 vai 12. Iespējami divi gadījumi.

* Ja divi kvadrāti dod vienādu atlikumu, dalot ar 13, tad to starpība dalās ar 13.
* Ja nekādi divi no šiem pieciem kvadrātiem nav kongruenti pēc moduļa 13, tad sadalām šo kvadrātu iespējamās vērtības pēc moduļa 13 četrās grupās: {0}, {1; 12}, {3; 10}, {4; 9}. Tā kā ir jāizvēlas pieci naturālu skaitļu kvadrāti, tad vismaz divi no tiem būs vienā grupā (Dirihlē princips). Šo divu skaitļu summa dalās ar 13.

**U2.3.** Pierādīt, ka nevienai naturālai vērtībai izteiksmes vērtība nav naturāla skaitļa kvadrāts!

**Atrisinājums.** Ievērojam, ka naturālu skaitli , dalot ar 4, var iegūt atlikumu 0, 1, 2 vai 3, un atrodam, kādu atlikumu var iegūt, ja dala ar 4:

* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad .

Tātad naturāla skaitļa kvadrātu, dalot ar 4, var iegūt atlikumu 0 vai 1.

Apskatot doto izteiksmi pēc moduļa 4, iegūstam

Ja , tad , kas nav naturāla skaitļa kvadrāts. Ja ir lielāks nekā 1, tad   
, un šķirojam divus gadījumus:

* ja ir pāra skaitlis, tad ;
* ja ir nepāra skaitlis, tad .

Tātad dotā izteiksme, dalot ar 4, dod atlikumu 3, tātad tā nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts.

*Piezīme.* Iegūt pretrunu var arī apskatot doto izteiksmi pēc moduļa 9. Ja , tad atlikums, dalot ar 9, ir 6, ja ir lielāks nekā 1, tad atlikums, dalot ar 9, ir 3, bet naturālu skaitļu kvadrātu vērtības pēc moduļa 9 var būt tikai 0, 1, 4 vai 7.

**U2.4.** Pierādīt: ja trīs veselu skaitļu kubu summa dalās ar 9, tad šo skaitļu reizinājums dalās ar 3.

**Atrisinājums.** Vispirms noskaidrojam, ar ko var būt kongruenti veselu skaitļu kubi pēc moduļa 9 (*var izmantot MS Excel*):

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Ievērojam, ka , un to izmantosim risinājumā, lai vieglāk izdarītu spriedumus.

Pieņemsim pretējo, ka doto trīs skaitļu reizinājums nedalās ar 3; tad arī neviens no šiem skaitļiem nedalās ar 3, līdz ar to katra skaitļa kubs ir kongruents ar vai pēc moduļa 9. Secinām, ka visu doto skaitļu kubu summa pēc moduļa 9 ir pierakstāma formā .

Ievērosim, ka tas ir nepāra skaitlis, kas pēc absolūtās vērtības nepārsniedz 3, tātad nevar būt kongruents ar 0 pēc moduļa 9. Taču tā ir pretruna ar to, ka doto skaitļu kubu summa dalās ar 9. Līdz ar to pieņēmums, ka neviens no reizinātājiem nedalās ar 3, bijis aplams. Tātad kāds no reizinātājiem dalās ar 3 un arī skaitļu reizinājums dalās ar 3.

*Piezīme.* Ja izmanto atlikumu 8, tad jāapskata, vai kombinējot atlikumus 1 un 8, var iegūt skaitli, kas dalās ar 9, tas ir, jāapskata gadījumi *.*

**U2.5.** Vai var atrast tādus veselus skaitļus , un , ka izpildās vienādība .

**Atrisinājums.** Vesela skaitļa kubs, dalot ar 7, var dot atlikumu 0, 1 vai 6 (*skat. P2.8. piemēru*).

Sastādām tabulu, pa rindām un kolonnām apskatot atbilstoši iespējamās un vērtības pēc moduļa 7, bet tabulas šūnās rakstām .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 6 |
| 0 |  |  | 6 |
| 1 |  |  | 0 |
| 6 | 6 | 0 | 5 |

Tātad izteiksme pēc moduļa 7 var dot atlikumu 0, 1, 2, 5 vai 6, savukārt  
.

Līdz ar to nav tādu veselu skaitļu , un , ka izpildās vienādība .

# 3. Dalāmības pierādīšana

Ja un ir veseli skaitļi, tad ne vienmēr, dalot ar , dalījumā iegūst veselu skaitli. Ja dalījums ir vesels skaitlis, tad saka, ka dalās ar , pretējā gadījumā saka, ka nedalās ar .

**Definīcija.** Ja un , kur – veseli skaitļi, tad saka, ka dalās ar . Pretējā gadījumā saka, ka nedalās ar .

Piemēram, 15 dalās ar 3, bet 15 nedalās ar 2.

***Iegaumē!*** Ja tiek runāts par skaitļu dalāmību, tad runa ir tikai par veseliem skaitļiem.

**Dalāmības īpašības** (Visi īpašībās minētie skaitļi ir veseli.)

* Ja katrs no vairākiem saskaitāmajiem dalās ar , tad to visu summa dalās ar .

Piemēram, dalās ar 2, jo katrs saskaitāmais dalās ar 2.

* Ja divi skaitļi dalās ar , tad arī to starpība dalās ar .

Piemēram, tā kā 201420152016 un 2142020 dalās ar 4, tad ar 4 dalās arī starpība   
.

* Ja kaut viens no vairākiem naturāliem skaitļiem dalās ar , tad to visu reizinājums dalās ar .

Piemēram, dalās ar 5, jo 2015 dalās ar 5.

* Ja vairāku skaitļu summa un visi skaitļi, izņemot vienu, dalās ar , tad arī šis pēdējais skaitlis dalās   
  ar .

Piemēram, ja , tad, tā kā 40, 50 un 120 dalās ar 10, arī dalās ar 10.

## 3.1. Dalāmības pazīmes

*Tematu var sākt ar uzdevumu-spēli, kurā jāatceras un jāizmanto dalāmības pazīmes.*

Andris un Baiba raksta 12-ciparu skaitli, izmantojot tikai ciparus 1, 2, 3, 4 un 5. Pirmo ciparu raksta Andris, otro – Baiba, trešo – Andris, ceturto – Baiba utt. Baiba vēlas, lai beigās iegūtais 12-ciparu skaitlis dalītos ar 9, bet Andris cenšas to nepieļaut. Vai Baiba noteikti var sasniegt savu mērķi? Kā viņai jārīkojas?

**Atrisinājums.** Baiba vienmēr varēs panākt savu mērķi.

Katrā gājienā Baiba raksta tādu ciparu, kura summa ar Andra tikko uzrakstīto ciparu ir 6. Šādu ciparu Baiba var uzrakstīt vienmēr:

* ja Andris uzraksta 1, tad Baibai jāraksta 5;
* ja Andris uzraksta 2, tad Baibai jāraksta 4;
* ja Andris uzraksta 3, tad Baibai arī jāraksta 3;
* ja Andris uzraksta 4, tad Baibai jāraksta 2;
* ja Andris uzraksta 5, tad Baibai jāraksta 1.

Pavisam būs seši šādi Andra un Baibas gājienu pāri, tāpēc beigās visu 12 uzrakstīto ciparu summa  
būs .

Tā kā uzrakstītā skaitļa ciparu summa 36 dalās ar 9, tad arī iegūtais 12-ciparu skaitlis dalīsies ar 9.

Noskaidrot, vai viens vesels skaitlis dalās ar otru, tikai ar definīcijas palīdzību, tas ir, izdalot skaitļus, bieži vien ir neparocīgi un laikietilpīgi. Šo uzdevumu atvieglo skaitļu dalāmības pazīmes. Tabulā dotas biežāk lietotās dalāmības pazīmes.

|  |  |
| --- | --- |
| Dalāmības pazīme | Piemēri |
| Skaitlis dalās ar 2, ja tā pēdējais cipars ir pāra, tas ir, tā pēdējais cipars ir 0, 2, 4, 6 vai 8. | 2022 dalās ar 2, jo tā pēdējais cipars ir pāra |
| Skaitlis dalās ar 3, ja tā ciparu summa dalās ar 3. | 2022 dalās ar 3, jo dalās ar 3 |
| Skaitlis dalās ar 4, ja tā pēdējo divu ciparu veidotais skaitlis dalās ar 4. | 20**20** dalās ar 4, jo 20 dalās ar 4 |
| Skaitlis dalās ar 5, ja tā pēdējais cipars ir 0 vai 5. | 201**5** dalās ar 5, jo tā pēdējais cipars ir 5 |
| Skaitlis dalās ar 6, ja tas dalās gan ar 2, gan ar 3. | 2022 dalās ar 6, jo tas dalās ar 2 un 3 |
| Skaitlis dalās ar 8, ja tā pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis dalās ar 8. | 12**800** dalās ar 8, jo 800 dalās ar 8  2**016** dalās ar 8, jo pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis ir 16, kas dalās ar 8 |
| Skaitlis dalās ar 9, ja tā ciparu summa dalās ar 9. | 2016 dalās ar 9, jo dalās ar 9 |
| Skaitlis dalās ar 10, ja tā pēdējais cipars ir 0. | 15**0** dalās ar 10, jo tā pēdējais cipars ir 0 |
| Skaitlis dalās ar 11, ja tā ciparu summas, kas atrodas nepāra pozīcijās, un ciparu summas, kas atrodas pāra pozīcijās, starpība dalās ar 11. | 108647 dalās ar 11, jo  , kas dalās ar 11  94831 dalās ar 11, jo  , kas dalās ar 11 |

**Dalāmības pazīmju pierādījumi**

Jau no pamatskolas zināmas dalāmības pazīmes, pierādīsim tās. *Dotos pierādījumus var dot skolēniem patstāvīgai pētīšanai grupās un tad prezentēt citiem skolēniem.*

**Dalāmības pazīme ar 2**

Apskatām skaitli . To varam uzrakstīt formā:

Tā kā pirmie saskaitāmie dalās ar 2 (jo satur reizinātāju 10), tad, lai skaitlis dalītos ar 2, arī saskaitāmajam jādalās ar 2. Vienīgie viencipara skaitļi, kas dalās ar 2, ir 0; 2; 4; 6; 8.

Līdz ar to esam pierādījuši, ka skaitlis dalās ar 2, ja tā pēdējais cipars ir pāra skaitlis.

*Piezīme*. Lai iegūtu dalāmības pazīmi ar 2, var pārveidot skaitli arī formā

Īsākam pierakstam uzdevumos lietots apzīmējums , kas nozīmē, ka skaitlis dalās ar skaitli (bez atlikuma).

Līdzīgā veidā, pārveidojot skaitli par divu skaitļu summu var iegūt citu dalāmības pazīmju pierādījumus:

* dalāmības pazīme ar 5 un 10, pārveidojam ;
* dalāmības pazīme ar 4, pārveidojam ;
* dalāmības pazīme ar 8, pārveidojam ;
* skaitlis dalās ar , ja tā pēdējo ciparu veidotais skaitlis dalās ar ;
* skaitlis dalās ar , ja tā pēdējo ciparu veidotais skaitlis dalās ar ;
* skaitlis dalās ar , ja tā pēdējo ciparu veidotais skaitlis dalās ar .

**Dalāmības pazīme ar 3 un ar 9**

Dots skaitlis

Ievērojot, ka , iegūstam, ka

Līdz ar to esam ieguvuši, ka dalās ar 3 tad un tikai tad, ja dalās ar 3.

*Piezīmes*

1. Varam secināt vēl vairāk, ka skaitlis , dalot ar 3, dod tādu pašu atlikumu kā tā ciparu summa, dalot ar 3.
2. Dalāmību ar 3 var pierādīt arī bez kongruenču izmantošanas. Izmantojot faktu, ka  
   , pārveidojam doto skaitli formā
3. Dalāmības pazīmi ar 9 pierāda līdzīgi.

**Dalāmības pazīme ar 11**

Apskatām skaitli

Ievērojam, ka un .

Šķirojam divus gadījumus atkarībā no skaitļa paritātes.

Ja ir pāra skaitlis, tad

Ja ir nepāra skaitlis, tad

Līdz ar to esam ieguvuši, ka skaitlis dalās ar 11, ja tā ciparu summas, kas atrodas nepāra pozīcijās, un ciparu summas, kas atrodas pāra pozīcijās, starpība dalās ar 11.

**Citas dalāmības pazīmes**

Kombinējot iepriekš dotās pazīmes, var iegūt arī pazīmes dalāmībai ar citiem skaitļiem. Piemēram, skaitlis dalās ar 12, ja tas dalās ar 3 un 4; skaitlis dalās ar 90, ja tas dalās ar 9 un 10 jeb skaitļa ciparu summa dalās ar 9 un tā pēdējais cipars ir nulle. Šādi pazīmes veido, doto dalītāju sadalot reizinātājos, kas ir savstarpēji pirmskaitļi (skaitļi, kam lielākais kopīgais dalītājs ir skaitlis 1), un pārbaudot dalāmību ar katru no tiem.

*Kāpēc nosacījums par savstarpējiem pirmskaitļiem ir būtisks?*

Nosacījums par savstarpējiem pirmskaitļiem ir būtisks, jo pretējā gadījumā apgalvojums var nebūt patiess. Ja skaitlis dalās ar 2 un 6, mēs nevaram apgalvot, ka tas dalās arī ar , piemēram, 18 dalās gan ar 2, gan ar 6, bet 18 nedalās ar 12.

*Kā patstāvīgi pētāmu jautājumu var dot citu dalāmības pazīmju (piemēram, ar 7, 13 vai citiem skaitļiem) atrašanu un šo pazīmju pierādījumu pētīšanu vai prezentēšanu.*

**Piemēri**

**P3.1.** Pierādīt, ka visām naturālām vērtībām izteiksme dalās ar 2.

**Atrisinājums.** Ievērojam, ka . Viens no diviem pēc kārtas esošiem naturāliem skaitļiem dalās ar 2, tāpēc dalās ar 2 visiem naturāliem skaitļiem .

**P3.2.** Pierādīt, ka visām naturālām vērtībām izteiksme dalās ar 6.

**Atrisinājums.** Pārveidojam izteiksmi:

Viens no diviem pēc kārtas esošiem naturāliem skaitļiem dalās ar 2 un viens no trīs pēc kārtas esošiem naturāliem skaitļiem dalās ar 3, tāpēc dalās ar visiem naturāliem skaitļiem .

**P3.3.** Pierādīt, ka naturāla skaitļa kvadrāts nevar sastāvēt tikai no sešiniekiem un nullēm.

**Atrisinājums.** Tā kā skaitļa kvadrāts ir skaitļa reizinājums pašam ar sevi, tad visi dažādie pirmreizinātāji tam ir pāra skaitā. Ja skaitlis beidzas ar pāra skaita nullēm, tad šīs nulles varam atmest, jo šādā gadījumā mēs atmetam reizinātāju pāra skaitā. Lai dotais skaitlis būtu kvadrāts, tad atlikušajam skaitlim (bez pāra skaita nullēm beigās) visi dažādie pirmreizinātāji jāsatur pāra skaitā. Apskatām divus iespējamos gadījumus atkarībā no atlikušā skaitļa pēdējiem diviem cipariem:

* 60, tad tas dalās ar 5, bet nedalās ar 25, tātad tam ir tieši viens pirmreizinātājs 5;
* 06 vai 66, tad šis skaitlis dalās ar 2, bet nedalās ar 4, tātad tam ir tieši viens pirmreizinātājs 2.

Tātad esam pierādījuši, ka dotais skaitlis nav naturālā skaitļa kvadrāts.

**P3.4.** Dots, ka un ir naturāli skaitļi. Kāds ir mazākais skaits dažādu pirmskaitļu, ar kuriem var dalīties izteiksme

?

**Atrisinājums.** Dotā izteiksme dalās ar 3 neatkarīgi no un jo satur reizinātāju 3.

Parādīsim, ka tā nav trijnieka pakāpe. Ja ir trijnieka pakāpe, tad ir nepāra skaitlis un ir pāra skaitlis, kas dalās arī ar 2. Tātad dotā izteiksme satur vismaz divus pirmreizinātājus 2 un 3.

Vēl jāparāda piemērs, ka izteiksme var saturēt tieši divus dažādus pirmreizinātājus, kas ir pirmskaitļi. Izvēloties, piemēram, un , iegūstam vajadzīgo

Līdz ar to mazākais skaits dažādo pirmskaitļu, ar kuriem var dalīties dotā izteiksme, ir 2.

**P3.5.** Kādām naturālām vērtībām izteiksmes vērtība ir vesels skaitlis?

**Atrisinājums.** Ekvivalenti pārveidojam doto izteiksmi, atdalot veselo:

Tā kā ir naturāls skaitlis, tad dotās izteiksmes vērtība būs vesels skaitlis tikai tad, ja ir vesels skaitlis, bet tas iespējams, ja ir skaitļa 14 dalītājs. Ievērojot, ka ir naturāls, iegūstam, ka vai , no kā iegūstam, ka vai .

## 3.2. Matemātiskās indukcijas metodes izmantošana

Jau 10. klasē (pēc integrētās programmas parauga) tiek apgūta matemātiskās indukcijas metode, kas ir viens no pierādījumu veidiem. Tas parasti tiek izmantots, lai pierādītu, ka kāds izteikums ir patiess visām naturālām vērtībām.

Indukcija (no latīņu valodas “*inductio*” (uzvedināšana, ierosināšana) – loģisks slēdziens, pārejot no atsevišķiem gadījumiem uz vispārīgu secinājumu, no atsevišķiem faktiem uz vispārinājumu.

Matemātiskās indukcijas metode ir viena no aritmētikas aksiomām, tāpēc tās patiesums nav jāpierāda. Pēc būtības indukcijas aksioma apgalvo, ka katru naturālo skaitli var iegūt, atkārtoti pieskaitot skaitlim 0 vieninieku.

|  |
| --- |
| Lietojot matemātiskās indukcijas metodi uzdevumu risināšanā, rīkojas pēc šāda plāna:   1. pārbauda, vai apskatāmā īpašība piemīt kopas pirmajam elementam (***indukcijas bāze***); 2. pieņem, ka šī īpašība ir spēkā pirmajiem elementiem (***induktīvais pieņēmums***); 3. pierāda, ka tad tā ir patiesa arī -jam elementam (***induktīvā pāreja***). 4. secina: tā kā no izteikuma patiesuma jebkuram elementam izriet, ka tas ir patiess elementam , un tā kā izteikums ir patiess pirmajam elementam, tad izteikums ir patiess jebkuram naturālam elementam . |

Klasiskā veidā matemātiskās indukcijas metodi lieto:

* vienādību pierādīšanā;
* dalāmības pierādīšanā (tas ir, lai pamatotu dalīšanas atlikuma vai kāda cita invarianta saglabāšanos);
* rekurentas virknes vispārīgā locekļa formulas pierādīšanā;
* kombinatorikas uzdevumos u.c.

Šajā nodaļā apskatīsim, kā lietot matemātiskās indukcijas metodi dalāmības pierādīšanā. Dažiem piemēriem doti arī citi risinājumi, kas balstās uz dalāmības izmantošanu vai kongruencēm.

**Piemēri**

**P3.6.** Pierādīt, ka visām naturālām vērtībām izteiksme dalās ar 6.

**1. atrisinājums.** Pierādīsim apgalvojumu ar matemātiskās indukcijas metodi.

*Indukcijas bāze.* Ja , tad , kas dalās ar 6.

*Induktīvais pieņēmums.* Pieņemsim, ka apgalvojums ir patiess, ja , t.i.,

*Induktīvā pāreja.* Pierādīsim, ka apgalvojums ir patiess arī tad, ja , t.i.,

Pārveidosim izteiksmi:

Ja katras saskaitāmais dalās ar 6, tad visa summa dalās ar 6.

*Secinājums.* Tā kā apgalvojums ir patiesa, ja , un no tā, ka apgalvojums ir patiess, ja , izriet, ka apgalvojums ir patiess arī , secinām, ka apgalvojums ir patiess visām naturālām vērtībām.

**2. atrisinājums.** Pārveidojam doto izteiksmi:

Pirmais saskaitāmais ir trīs pēc kārtas esošu veselu skaitļu reizinājums, tāpēc tas dalās gan ar 2, gan ar 3, tātad dalās arī ar 6. Tā kā abi saskaitāmie dalās ar 6, tad arī to summa dalās ar 6.

**3. atrisinājums.** Apskatām visus naturālos skaitļus pēc moduļa 6:

* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad .

Visos gadījumos iegūts atlikums 0, tātad izteiksme dalās ar 6 visiem naturāliem skaitļiem.

**P3.7.** Pierādīt, ka visām naturālām vērtībām izteiksme dalās ar 3.

**1. atrisinājums.** Pierādīsim apgalvojumu ar matemātiskās indukcijas metodi.

*Indukcijas bāze.* Ja , tad , kas dalās ar 3.

*Induktīvais pieņēmums.* Pieņemsim, ka apgalvojums ir patiess, ja , tas ir,

*Induktīvā pāreja.* Pierādīsim, ka apgalvojums ir patiess arī tad, ja , tas ir,

Pārveidojam izteiksmi:

Ja katras saskaitāmais dalās ar 3, tad visa summa dalās ar 3.

*Secinājums.* Tā kā apgalvojums ir patiesa, ja , un no tā, ka apgalvojums ir patiess, ja , izriet, ka apgalvojums ir patiess arī , secinām, ka apgalvojums ir patiess visām naturālām vērtībām.

**2. atrisinājums.** Pārveidojam doto izteiksmi:

Ievērojam, ka ir trīs pēc kārtas esošu skaitļu reizinājums, tātad tas dalās  
ar 3. Tā kā nedalās ar 3 (jo satur tikai reizinātājus 2), tad jādalās ar 3. Esam pierādījuši prasīto.

**3. atrisinājums.** Apskatām doto izteiksmi pēc moduļa 3:

**P3.8.** Pierādīt, ka visām naturālām vērtībām izteiksme dalās ar 24.

**1. atrisinājums.** Pierādīsim apgalvojumu ar matemātiskās indukcijas metodi.

*Indukcijas bāze.* Ja , tad , kas dalās ar 24.

*Induktīvais pieņēmums.* Pieņemsim, ka apgalvojums ir patiess, ja , tas ir,

*Induktīvā pāreja.* Pierādīsim, ka apgalvojums ir patiess arī tad, ja , tas ir,

Pārveidojam izteiksmi:

Ja katras saskaitāmais dalās ar 24, tad visa summa dalās ar 24.

*Secinājums.* Tā kā apgalvojums ir patiesa, ja , un no tā, ka apgalvojums ir patiess, ja , izriet, ka apgalvojums ir patiess arī , secinām, ka apgalvojums ir patiess visām naturālām vērtībām.

**2. atrisinājums.** Pamatosim, ka dotā izteiksme dalās gan ar 3, gan ar 8.

Pārveidojam doto izteiksmi:

Ievērojam, ka ir trīs pēc kārtas esošu skaitļu reizinājums, tātad tas dalās  
ar 3. Tā kā nedalās ar 3 (jo satur tikai reizinātājus 5), tad jādalās ar 3. Tā kā ir nepāra skaitlis, tad un ir divi viens otram sekojoši pāra skaitļi, tāpēc viens no tiem noteikti dalās ar 2 un otrs noteikti dalās ar 4. Tātad to reizinājums dalās ar 8.

Līdz ar to esam pierādījuši, ka dotā izteiksme dalās ar , jo skaitļi 3 un 8 ir savstarpēji pirmskaitļi.

**3. atrisinājums.** Apskatām doto izteiksmi pēc moduļa 24:

## 3.3. Uzdevumi

**U3.1.** Pierādīt, ka visām naturālām vērtībām dalās ar 4.

**U3.2.** Pierādīt, ka visām naturālām vērtībām dalās ar 17.

**U3.3.** Pierādīt, ka katram naturālam izteiksme dalās ar 10.

**U3.4.** Zināms, ka un ir veseli skaitļi. Atrast visas iespējamās vērtības!

**U3.5.** Doti naturāli skaitļi un . Pierādīt

**a)** ja dalās ar 7, tad dalās ar 7;

**b)** ja dalās ar 7, tad dalās ar 7.

## 3.4. Idejas risinājumiem

**U3.1.** 1)Uzdevumu var risināt ar matemātiskās indukcijas metodi.

Kā induktīvajā pārejā pārveidot izteiksmi, lai varētu secināt, ka tā dalās ar 4?

Kā var palīdzēt induktīvā pieņēmuma izmantošana?

2) Uzdevumu var risināt arī ar kongruencēm.

Apskati katru saskaitāmo pēc moduļa 4.

Ar kādu skaitli var aizvietot 3?

3) Kā Ņūtona binoma formulu var izmantot uzdevuma risināšanā?

Kā skaitli 7 var uzrakstīt citādāk?

*Ievēro! Daži apskatīti piemēri nav pierādījums, ka prasītais vienmēr izpildīsies.*

**U3.2.** 1)Uzdevumu var risināt ar matemātiskās indukcijas metodi.

Kā induktīvajā pārejā pārveidot izteiksmi, lai varētu secināt, ka tā dalās ar 17?

Kā var palīdzēt induktīvā pieņēmuma izmantošana?

2) Uzdevumu var risināt arī ar kongruencēm.

Apskati izteiksmi pēc moduļa 17.

Kā pārveidot saskaitāmo , lai noskaidrotu, ar ko tas ir kongruents pēc moduļa 17?

*Ievēro! Daži apskatīti piemēri nav pierādījums, ka prasītais vienmēr izpildīsies.*

**U3.3.** 1)Uzdevumu var risināt ar matemātiskās indukcijas metodi.

Kā induktīvajā pārejā pārveidot izteiksmi, lai varētu secināt, ka tā dalās ar 10?

Kā var palīdzēt induktīvā pieņēmuma izmantošana?

2) Uzdevumu var risināt arī ar kongruencēm.

Risinot uzdevumu ar kongruencēm, var izmantot MS Excel, rezultātus var iegūt pakāpeniski (skat.   
4. att., kur šūnās B2, C2, D2 dotas formulas) vai arī uzreiz ievadot formulu (skat. 5. att., kur šūnā B2 dota formula).

|  |  |
| --- | --- |
| Attēls, kurā ir galds  Apraksts ģenerēts automātiski  4. att. | Attēls, kurā ir galds  Apraksts ģenerēts automātiski  5. att. |

3) Vai izteiksmes vērtība vienmēr dalās ar 2 (tas ir, vai tā vienmēr ir pāra skaitlis)?

Veic ekvivalentus pārveidojumus, lai pamatotu, ka izteiksme vienmēr dalās arī ar 5. Izmanto, ka piecu pēc kārtas esošu naturālu skaitļu reizinājums dalās ar 5.

*Ievēro! Daži apskatīti piemēri nav pierādījums, ka prasītais vienmēr izpildīsies.*

**U3.4.** Pārveido doto daļu par polinoma un tādas daļas, kurai skaitītājs ir skaitlis, summu.

Ko var secināt pa šīs daļas saucēja iespējamajām vērtībām?

**U3.5.** **a)** Pamato, ka dalās ar 7.

Doto izteiksmi pārveido par summu tā, lai katrs saskaitāmais dalītos ar 7.

**b)** Pamato, ka dalās ar 7.

Doto izteiksmi pārveido par summu tā, lai katrs saskaitāmais dalītos ar 7.

## 3.5. Uzdevumu atrisinājumi

**U3.1.** Pierādīt, ka visām naturālām vērtībām dalās ar 4.

**1. atrisinājums.** Izmantosim matemātiskās indukcijas metodi.

*Indukcijas bāze.* Ja , tad , kas dalās ar 4.

*Induktīvais pieņēmums.* Pieņemsim, ka apgalvojums ir patiess, ja , tas ir, .

*Induktīvā pāreja.* Pierādīsim, ka apgalvojums ir patiess arī tad, ja , tas ir, .

Pārveidojam izteiksmi:

Tā kā katrs saskaitāmais dalās ar 4, tad arī summa dalās ar 4.

*Secinājums.* Tā kā apgalvojums ir patiess, ja , un no tā, ka apgalvojums ir patiess, ja , izriet, ka apgalvojums ir patiess arī , secinām, ka apgalvojums ir patiess visām naturālām vērtībām.

**2. atrisinājums.** Apskatām doto izteiksmi pēc moduļa 4:

**3. atrisinājums.** Uzrakstām 7 kā un izmantojam Ņūtona binoma formulu:

Tā kā katrs saskaitāmais dalās ar 4, tad arī visa summa dalās ar 4.

**U3.2.** Pierādīt, ka visām naturālām vērtībām dalās ar 17.

**1. atrisinājums.** Izmantosim matemātiskās indukcijas metodi.

*Indukcijas bāze.* Ja , tad , kas dalās ar 17.

*Induktīvais pieņēmums.* Pieņemsim, ka apgalvojums ir patiess, ja , tas ir, dalās ar 17.

*Induktīvā pāreja.* Pierādīsim, ka apgalvojums ir patiess arī, ja , tas ir,   
 dalās ar 17.

Pārveidojam izteiksmi:

Tā kā katrs saskaitāmais dalās ar 17, tad arī summa dalās ar 17.

*Secinājums.* Tā kā apgalvojums ir patiess, ja , un no tā, ka apgalvojums ir patiess, ja , izriet, ka apgalvojums ir patiess arī , secinām, ka apgalvojums ir patiess visām naturālām vērtībām.

**2. atrisinājums.** Apskatām doto izteiksmi pēc moduļa 17:

**U3.3.** Pierādīt, ka katram naturālam izteiksme dalās ar 10.

**1. atrisinājums.** Izmantosim matemātiskās indukcijas metodi.

*Indukcijas bāze.* Ja , tad , kas dalās ar 10.

*Induktīvais pieņēmums.* Pieņemsim, ja , tad dalās ar 10.

*Induktīvā pāreja.* Pierādīsim, ja , tad dalās ar 10.

Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

Saskaitāmais dalās ar 10 pēc induktīvā pieņēmuma.

Saskaitāmais dalās ar 5, jo satur reizinātāju 5, un dalās ar 2, jo

* ja ir pāra skaitlis, tad reizinātājs dalās ar 2;
* ja ir nepāra skaitlis, tad reizinātājs ir pāra skaitlis un tas dalās ar 2.

Tā kā katrs saskaitāmais dalās ar 10, tad arī summa dalās ar 10.

No matemātiskās indukcijas metodes izriet, ka katram naturālam izteiksme dalās ar 10, kas arī bija jāpierāda.

**2. atrisinājums.** Apskatām doto izteiksmi pēc moduļa 10. Tabulā redzams, ka visām vērtībām dotā izteiksme dalās ar 10.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

**3. atrisinājums.** Pamatojam, ka izteiksmes vērtība vienmēr ir pāra skaitlis:

* ja ir pāra skaitlis, tad visi saskaitāmie ir pāra skaitļi, tātad arī summa ir pāra skaitlis,
* ja ir nepāra skaitlis, tad būs pāra skaitlis kā divu nepāra skaitļu summa un, no šīs summas atņemot pāra skaitli , rezultātā iegūsim pāra skaitli.

Līdz ar to esam pamatojuši, ka izteiksme dalās ar 2.

Lai pamatotu, ka dotā izteiksme dalās arī ar 5, pārveidojam to formā:

Pirmie divi saskaitāmie dalās ar 5, pamatosim, ka trešais saskaitāmais arī dalās ar 5.

Reizinātāju 3 neņemot vērā, jo tas neietekmē dalīšanos ar 5, pārveidojam izteiksmi:

Ievērojam, ka ir pieci pēc kārtas esoši naturāli skaitļi, tāpēc iegūtais reizinājums noteikti dalās ar 5. Tātad esam pamatojuši, ka dalās ar 5.

Tā kā 2 un 5 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad izteiksme dalās ar 10.

**U3.4.** Zināms, ka un ir veseli skaitļi. Atrast visas iespējamās vērtības!

**Atrisinājums.** Ja ir vesels skaitlis, tad arī ir vesels skaitlis. Pārveidojam iegūto izteiksmi, atdalot veselo:

Lai šīs izteiksmes vērtība būtu vesels skaitlis, tad 5 jādalās ar , bet 5 dalās tikai ar un .

Iespējamos gadījumus apkopojam tabulā.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  | der |
|  |  |  | der |
|  |  |  | der |
|  |  |  | der |

Tātad iespējamās *a* vērtības ir , , un 2.

**U3.5.** Doti naturāli skaitļi un . Pierādīt

**a)** ja dalās ar 7, tad dalās ar 7;

**b)** ja dalās ar 7, tad dalās ar 7.

**Atrisinājums. a)** Ja dalās ar 7, tad arī dalās ar 7, jo

Tas nozīmē, ka arī dalās ar 7.

**b)** Ja dalās ar 7, tad arī dalās ar 7. Tas nozīmē, ka arī dalās ar 7.

# 4. Vienādojumi naturālos un veselos skaitļos

Diofants no Aleksandrijas (*Diophantos of Alexandria*) bija sengrieķu matemātiķis, dzīvojis ap 3. gadsimtu. Viņš ir pazīstams ar savu darbību algebras nozarē, tiek saukts par “algebras tēvu”. Diofanta galvenais darbs ir traktāts “Aritmētika”, kas sastāv no 13 grāmatām, no kurām saglabājušas 6 grāmatas ar 189 vienādojumiem, sniegti arī risinājumi uzdevumiem, kas galvenokārt reducējās uz nenoteiktajiem vienādojumiem, kuri grāmatā tikuši saukti par Diofanta vienādojumiem. Diofants matemātiskos lielumus un darbības apzīmējis ar saīsinātiem vārdiem un nosacītiem algebriskiem apzīmējumiem, parādījās burtu simbolikas pazīmes. Diofants bijis pirmais grieķu matemātiķis, kas atzinis daļskaitļus par skaitļiem.

Polinomiālu vienādojumu ar veseliem koeficientiem un vairākiem mainīgajiem, kuram jāmeklē veselās saknes, sauc par Diofanta vienādojumu (*Diophantine equation*).

Liela daļa faktu par Diofanta dzīvi ir iegūta no 5. gadsimta grieķu antoloģijas par skaitļu spēlēm un mīklas, ko radījis Metrodorus. Viena no viņa mīklām (teksts uz Diofanta kapakmens):

*Here lies Diophantus,' the wonder behold.*

*Through art algebraic, the stone tells how old:*

*'God gave him his boyhood one-sixth of his life,*

*One twelfth more as youth while whiskers grew rife;*

*And then yet one-seventh ere marriage begun;*

*In five years there came a bouncing new son.*

*Alas, the dear child of master and sage*

*After attaining half the measure of his father's life chill fate took him. After consoling his fate by the science of numbers for four years, he ended his life.*

Var dot arī tekstu, kas ir 142. mīkla “Professor Layton and Pandora’s Box“ spēlē (skat. [3]):

*Following the 1/6th of my life I spent as a child, I spent 1/12th of my life as a young man. Then, 1/7th of my life later, I got married. Five years after I wed, I was blessed with a child, but sadly, he only lived half the time I was alive before passing away. Today, four years after his death, I too will depart from this world.*

Cik gadus nodzīvojis Diofants?

Diofanta vecumu var noskaidrot, sastādot vienādojumu ( – Diofanta vecums):

kura atrisinājums ir .

Skolas kursā tiek risināti ļoti dažādi vienādojumi, piemēram, lineāri vienādojumi, kvadrātvienādojumi, trigonometriskie vienādojumi, eksponentvienādojumi. Šajā nodaļā apskatīsim vienādojumus, kuriem jānosaka tikai naturālās (veselās) saknes.

Atrisināt vienādojumu nozīmē:

1. atrast visas vienādojuma saknes;
2. pierādīt, ka citu sakņu bez atrastajām nav.

Ja vienādojums satur mainīgos , tad par tā atrisinājumu sauc skaitļu komplektu ar šādu īpašību: ievietojot vienādojumā vietā , vietā , …, vietā , iegūst patiesu skaitlisku vienādību.

Vispārīgas metodes, kā atrisināt vienādojumu, nav (ir zināmas metodes, kā risināt dažus specifiskus vienādojumus, piemēram, kvadrātvienādojumus), bieži vien jāizmanto dažādi spriedumi un metodes. Apskatīsim dažus no tiem.

## 4.1. Pirmās kārtas lineāri vienādojumi ar diviem mainīgajiem

Apakšnodaļa sagatavota izmantojot [1].

Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu .

*Vai vienādojumam ir atrisinājums?*

*Jā, jo der, piemēram, skaitļu pāris un .*

*Vai vienādojumam ir viens vienīgs atrisinājums?*

*Nē, ir vairāk nekā viens atrisinājums.*

*Nosauciet dažus vienādojuma atrisinājumus!*

*Daži atrisinājumi , , .*

*Kā vispārīgā veidā uzrakstīt vienādojuma atrisinājumus?*

*Vienādojuma kreisā puse dalās ar 2, tad arī labajai pusei jādalās ar 2, tātad , kur . Līdz ar to jeb un vienādojuma atrisinājums ir skaitļu pāris , kur .*

Apskatām vispārīgo pirmās pakāpes vienādojumu ar diviem nezināmajiem , kur , un ir veseli skaitļi.

Ja vai , tad iegūst lineāru vienādojumu ar vienu nezināmo (šādus vienādojumus risina jau   
7. klasē).

Pieņemsim, ka un .

Ja , tad un , kur . Vienādojumu var uzrakstīt formā

Iespējami divi gadījumi:

* ja nedalās ar , tad vienādojumam nav atrisinājuma veselos skaitļos, jo vienādojuma kreisā puse dalās ar , bet labā puse nedalās ar ;
* ja dalās ar , tad apzīmējam un iegūstam vienādojumu formā kur .

**Teorēma par lineārā vienādojuma atrisinājumu**

Vienādojumam , kur , eksistē bezgalīgi daudz atrisinājumu veselos skaitļos. Tos visus var iegūt ar formulām un , kur ir patvaļīgs vesels skaitlis un ir kaut kāds vienādojuma atrisinājums.

*Piezīme.* Teorēmu pierāda, ievietojot atrisinājumus un pēc vienkāršošanas iegūstot vienādību   
.

Lai varētu lietot teorēmu, ir jāprot atrast vienu atrisinājumu . Viens veids ir pārbaudīt visas vērtības  
, bet tas var būt ilgi, ja ir liels skaitlis. Otrs veids ir lietot secinājumu no Eiklīda algoritma: divu naturālu skaitļu lielāko kopīgo dalītāju var izteikt kā šo skaitļu lineāru kombināciju ar veseliem koeficientiem.

*Kā patstāvīgu/mājas darbu skolēniem var likt atrast informāciju par Eiklīda algoritmu lielākā kopīgā dalāmā noteikšanai.*

**Piemēri**

**P4.1.** Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu .

**Atrisinājums**. Vienādojuma kreisā puse dalās ar 3, bet labā – nedalās. Tātad vienādojumam nav atrisinājuma veselos skaitļos.

**P4.2.** Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu .

**Atrisinājums.** Tā kā , tad jādalās ar 3.

Ievērojam, ka , tātad jādalās ar 3, tas ir, , kur . Līdz ar to un vienādojuma atrisinājums ir , kur .

**P4.3.** Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu .

**Atrisinājums**. Tā kā un , ir dotā vienādojuma viens konkrēts atrisinājums, tad tā atrisinājums ir , kur .

**P4.4.** Atrast vienu vienādojuma atrisinājumu veselos skaitļos.

**Atrisinājums.** Ievērojot, ka , viegli iegūt vienu atrisinājumu un . Tātad vienādojuma atrisinājums ir , kur .

*Piezīme*. Apskatīsim, kā atrast vienu atrisinājumu, izmantojot Eiklīda algoritmu. Meklējam ar Eiklīda algoritmu:

Tātad , jo dalīšanās ar 1 ir bez atlikuma.

Pakāpeniski no “augšas uz leju” izsakām:

* no pirmās vienādības ;
* no otrās vienādības ;
* pārveidojam iegūto vienādību formā :

Esam ieguvuši atrisinājumu un .

Šajā gadījumā vienādojuma vispārīgais atrisinājums ir formā , .

*Vai iegūtais abos veidos iegūtie atrisinājumi sakrīt?*

*Jā, sakrīt. Pārveidojam iegūto atrisinājumu , kur . Apzīmējot  
, iegūstam , kur .*

**P4.5.** Kādus naturālus skaitļus var ievietot un vietā, lai iegūtu patiesu vienādību ?

**Atrisinājums.** Doto vienādojumu pārveidojam par . Tā kā vienādojuma labā puse dalās ar 5, tad arī vienādojuma kreisajai pusei jādalās ar 5, tas ir, jādalās ar 5. Skaitlis 2 ar 5 nedalās, tātad jādalās ar 5.

Apskatām visus iespējamos gadījumus:

* ja , tad jeb ;
* ja , tad jeb ;
* ja , tad un tas vairs nav naturāls skaitlis.

Līdz ar to un vai un .

|  |
| --- |
| ***Iegaumē!***  Ja uzdevumā ir jautājums „Kāds var būt...? ”; „Cik...? ”, tad uzdevuma risinājumam jāsastāv no divām daļām:   1. jāaplūko visi iespējamie gadījumi un atbildē jāuzrāda visas atrastās dažādās vērtības, kam uzdevuma prasības izpildās; 2. jāpamato, ka citu vērtību nav. |

## 4.2. Atrisinājuma neeksistences piemēri

Vai var atrast tādus naturālus skaitļus un , ka ?

**Atrisinājums.** Tā kā vienādojuma kreisā puse dalās ar 2, bet labā nedalās ar 2, tad nevar atrast tādus naturālus skaitļus un , lai dotā vienādība būtu patiesa.

Līdzīgu pieeju var izmantot arī sarežģītāku vienādojumu risināšanā. Grūtākais ir atrast skaitli, ar kuru jādala vienādojuma abas puses, ai rastos pretruna.

Apskatīsim algebriskus vienādojumus ar veseliem koeficientiem, kuriem atrisinājums jāmeklē veselo vai naturālo skaitļu kopā. Uzdevumos izmantosim ideju:

**ja var pierādīt, ka vienādojuma abas puses, dalot ar kādu šim vienādojumam īpaši izvēlētu skaitli, noteikti dod dažādus atlikumus, tad vienādojumam nav atrisinājuma.**

*Ievēro!* Ja vienādojuma abas puses dalās ar kādu skaitli, tad no tā **nevar** secināt, ka vienādojumam ir atrisinājums veselos skaitļos.

**Daži *īpašā skaitļa* izvēles principi**

* Izvēlamies tikai pirmskaitļus vai to pakāpes.
* Sākam ar maziem skaitļiem 2; 3; 4; 5; 7; 8; 9; 11; ... .
* Izvēlamies skaitļus, kas ir vienādojuma koeficientu dalītāji.
* Vienādojumos, kuros parādās skaitļu *-*tās pakāpes, izvēlamies skaitļus un visus pirmskaitļus, kas izsakāmi formā . Piemēram, vienādojumos, kas saistīti ar skaitļu kubiem, sākotnējie *īpašie* skaitļi ir 9; 7; 13; 19; ... .
* Vienādojumos, kuri satur veselu skaitļu kvadrātus, parasti izdevīgi aplūkot atlikumus, dalot ar 4, 8 vai 16, dažreiz ar 3.
* Jācenšas izvēlēties tādu skaitli, lai, dalot ar to, iespējami daudziem vienādojuma kreisās un labās puses saskaitāmajiem būtu pēc iespējas mazāk dažādu iespējamu vērtību.

Lietojot šo ideju, lietderīgi atcerēties par darbībām ar atlikumiem, kā arī to, kādus atlikumus var dot veselu skaitļu kvadrāti, kubi, ceturtās pakāpes utt.

*Piezīme*. Vienam vienādojumam var būt vairāki *īpašie* skaitļi un dotajos piemēros norādītie nav jāuzskata par vienīgajiem vai pašiem labākajiem.

**Piemēri**

**P4.6.** Pierādīt, ka vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos!

**Atrisinājums.** Naturāla skaitļa kvadrāts, dalot ar 4, var dot tikai atlikumu 0 vai 1 (skat. P2.4. piemēru). Tāpēc , dalot ar 4, var dot tikai atlikumu , , vai , tas ir, atlikumu 0, 1 vai 2. Taču skaitlis 2015 dod atlikumu 3, dalot ar 4. Tāpēc dotajam vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

**P4.7.** Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu .

**Atrisinājums.** Pārrakstām vienādojumu formā . Apskatām iegūtā vienādojuma labās puses izteiksmi pēc moduļa 5 (jo vienādojuma kreisās puses izteiksme dalās ar 5).

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 0 |  |
| 1 |  |
| 2 |  |
| 3 |  |
| 4 |  |

Esam ieguvuši, ka nedalās ar 5, bet dalās ar 5. Tātad dotajam vienādojumam nav atrisinājuma veselos skaitļos.

**P4.8.** Pierādīt, ka vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos!

**1. atrisinājums.** Pārveidojam doto vienādojumu formā . Gan , gan pēc moduļa 4 var pieņemt tikai vērtības 0 un 1, tāpēc vienādojuma kreisā puse pēc moduļa 4 var pieņemt tikai vērtības 0, 1 vai 2, bet . Līdz ar to dotajam vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

**2. atrisinājums.** Ekvivalenti pārveidojam doto vienādību:

Pēdējās vienādības kreisajā pusē ir skaitļa kvadrāts, kura pēdējais cipars var būt tikai 0; 1; 4; 5; 6; 9, bet vienādības labajā pusē esošā skaitļa pēdējais cipars ir 7. Tātad abas vienādības puses nevar būt vienādas, līdz ar to dotajam vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

*Piezīme*. Principā 2. atrisinājumā izmantota kongruence pēc moduļa 10.

**3. atrisinājums.** Pārveidojam doto vienādību formā un apskatām to pēc moduļa 5. Veselu skaitļu kvadrāti pēc moduļa 5 var dot atlikumus 0, 1 vai 4 (skat. P2.4. piemēru), taču labā puse ir kongruenta ar 2 pēc moduļa 5. Tātad abas vienādības puses nevar būt vienādas, līdz ar to dotajam vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

**P4.9.** Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu .

**Atrisinājums.** Apskatīsim doto vienādojumu pēc moduļa 3. Tā kā   
 un , tad iegūstam . Šī kongruence nav patiesa, jo kreisās puses izteiksmes vērtība ir 0 vai 2, bet labās puses izteiksmes vērtība ir 1. Tātad dotajam vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

*Ideja par kongruenci pēc moduļa 3 var rasties, ja ievēro, ka , un .*

**P4.10.** Pierādīt, ka neeksistē tādi naturāli skaitļi , un , ka izpildās vienādība .

**Atrisinājums.** Apskatīsim doto vienādojumu pēc moduļa 7. Tā kā   
 un , tad iegūstam Šī kongruence nav patiesa, jo kreisās puses izteiksmes vērtība ir 0 vai , bet labās puses izteiksmes vērtība ir 1. Tātad dotajam vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

*Ideja par kongruenci pēc moduļa 7 var rasties, ja ievēro, ka , un  
.*

**P4.11.** Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu .

**Atrisinājums.** Apskatām doto vienādojumu pēc moduļa 8. Viegli pārbaudīt, ka veselu skaitļu kvadrāti, dalot ar 8, var dot tikai atlikumus 0, 1 vai 4 (skat. ).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|  | 0 | 1 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 1 |

Tas nozīmē, ka dotā vienādojuma kreisā puse , dalot ar 8, var dot tikai atlikumus 0, 1 vai 4. Savukārt skaitlis , dalot ar 8, var dot tikai atlikumus 0 vai 2. Tātad vienādojuma labā puse   
, dalot ar 8, var dot tikai atlikumus 3 vai 5. Tātad nav tādu veselu un vērtību, pie kurām dotā vienādojuma abas puses dotu vienu un to pašu atlikumu, dalot ar 8. Līdz ar to dotajam vienādojumam nav atrisinājuma veselos skaitļos.

*Papildu uzdevumi par pretrunas modeli doti 2. pielikumā, tos skolotājs var izmantot pēc saviem ieskatiem (ar tiem var aizstāt grupu/pāru darba uzdevumu).*

**Uzdevums grupu/pāru darbam** (*ar MS Excel izmantošanu, risinājums dots 4. pielikumā*)

Atrisināt vienādojumu veselos skaitļos.

*Vienādojumam nav atrisinājuma. Citi iespējami uzdevuma formulējumi:*

* *Pierādīt, ka vienādojumam nav atrisinājuma veselos skaitļos.*
* *Vai vienādojumam ir atrisinājums veselos skaitļos?*
* *Vai var atrast tādus veselus skaitļus un , ka ?*

*Pēc kāda moduļa jāapskata dotais vienādojums, lai iegūtu pretrunu?*

*Sāciet ar skaitļu pakāpēm un pirmskaitļiem! Ar ko var būt kongruenta skaitļa sestā vai septītā pakāpe pēc kāda moduļa?*

*Varbūt ērtāk izmantot vienādojumu formā ?*

*Ar ko var būt kongruents un pakāpe pēc kāda moduļa?*

*Apskatiet vienādojumu pēc moduļa 43.*

*Uzdevuma risinājuma uzrakstīšana trenē prasmi matemātiski korekti un citiem saprotami izteikties.*

## 4.3. Dažādu spriedumu izmantošana vienādojumu risināšanā veselos skaitļos

Apakšnodaļa sagatavota izmantojot [1].

Apskatīsim trīs biežāk lietotos spriedumus.

* Ja vienādojums pārveidots formā , kur ir izteiksmes, kas satur mainīgos un kuru vērtības noteikti ir veseli skaitļi, bet ir konstante (vesels skaitlis), tad noteikti jābūt dalītājiem.
* Mazāks skaitlis nevar dalīties ar lielāku skaitli.
* Starp diviem pēc kārtas esošiem naturāliem skaitļiem un nav neviena cita naturāla skaitļa.

Risinot uzdevumus, var būt nepieciešams veikt arī izteiksmju novērtēšanu.

Ja vienādojums pārveidots formā , kur ir izteiksmes, kas satur mainīgos un kuru vērtības noteikti ir veseli skaitļi, bet ir konstante (vesels skaitlis), tad noteikti jābūt dalītājiem.

**P4.12.** Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu .

**Atrisinājums.** Pārveidojam vienādojumu formā .

Skaitli 4 kā divu veselu skaitļu reizinājumu var iegūt 6 veidos (skat. tabulu).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Atrisinājums |
|  |  |  |
|  |  | nav |
|  |  | nav |
|  |  |  |
|  |  | nav |
|  |  | nav |

**P4.13.** Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu .

**Atrisinājums**. No vienādības izriet, ka katrs no skaitļiem un ir vai nu vieninieks, vai divnieka pakāpe ar naturālu kāpinātāju. Virknē 1; 2; 4; 8; 16; 32; ... vienīgie skaitļi, kuru starpība ir 15, ir 1 un 16. Tāpēc un .

**P4.14.** Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu .

**Atrisinājums.** Vienādojuma kreisās puses izteiksmi sadalot reizinātājos, iegūstam

Tā kā un ir veseli skaitļi, tad katrs reizinātājs ir vesels skaitlis. Skaitli 10 kā trīs veselu skaitļu reizinājumu (līdz precizitātei ar reizinātāju secību) var izteikt septiņos veidos:

Ievērojam, ka , tātad der tikai tie sadalījumi, kuros ir divi reizinātāji, kas atšķiras tieši par 1, tādi ir tikai pirmie divi gadījumi. Apskatām katru no tiem.

1. Iegūstam vienādojumu sistēmu , kuras atrisinājums ir un.
2. Iegūstam vienādojumu sistēmu , kurai nav atrisinājuma veselos skaitļos,  
   jo .

Līdz ar to esam ieguvuši, ka dotajam vienādojumam ir tikai viens atrisinājums veselos skaitļos un.

**P4.15.** Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu .

**Atrisinājums.** Pārveidojam vienādojumu par . Tā kā 2011 ir pirmskaitlis, tad var būt tikai viens no skaitļiem . Ievietojot šīs vērtības, iegūstam atrisinājumus .

**P4.16.** Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu .

**Atrisinājums.** Izteiksim skaitļus un šādā formā: un , kur un – nepāra skaitļi. Nezaudējot vispārīgumu (simetrijas dēļ), varam pieņemt, ka . Tad

Iekavās uzrakstīts nepāra skaitlis, kas ir lielāks nekā 1. Bet nevar dalīties ar nepāra skaitli lielāku par 1. Tātad dotajam vienādojumam nav atrisinājumu naturālos skaitļos.

Mazāks skaitlis nevar dalīties ar lielāku skaitli.

**P4.17.** Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu .

**Atrisinājums.** Pārveidojam vienādojumu formā

Tā kā un , tad un . Līdz ar to  
. Apskatot visas iespējamās vērtības:

* ja , tad , kura saknes ir , kas nav naturāli skaitļi;
* ja , tad , kura saknes ir , kas nav naturāli skaitļi;
* ja , tad , kuras saknes ir (neder) un .

Līdz ar to dotajam vienādojumam naturālos skaitļos ir viens atrisinājums .

**P4.18.** Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu .

**Atrisinājums.** Pārveidojam vienādojumu formā un atdalām veselo:

Tā kā jāmeklē atrisinājums naturālos skaitļos, tad ir jābūt 2 dalītājam. Vienīgā derīgā vērtība ir 1, tad , no kā iegūstam, ka (neder) un .

Līdz ar to vienādojuma atrisinājums ir un .

**P4.19.** Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu .

**Atrisinājums.** Ja ir atrisinājums, tad arī ir atrisinājums. Tāpēc sākumā apskatām tikai gadījumu, ja . Izsakot mainīgo , iegūstam .

Tā kā jābūt veselam skaitlim un , tad jābūt skaitļa 10 dalītājam, tātad  
, no kurienes iegūstam . Tā kā apskatām , tad . Pārbaudot visas iespējas, iegūstam atrisinājumus . Tātad dotā vienādojuma atrisinājumi ir arī .

*Piezīme.* Uzdevumu var risināt arī izsakot .

*Nedrīkst izdarīt spriedumu, ka ir jābūt skaitļa 5 dalītājam vai ka ir jābūt pāra skaitlim, jo skaitli 7 var iegūt arī saskaitot divus daļskaitļus.*

**P4.20.** Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu .

**Atrisinājums.** Izsakām mainīgo :

Lai būtu naturāls skaitlis, tad vai .

Apskatām abus gadījumus.

* Ja , tad un jeb . Skaitlis ir naturāls tikai tad, ja ir naturāls. Vienīgā iespēja, ja . Līdz ar to esam ieguvuši, ka , un ir dotā vienādojuma atrisinājums.
* Ja un ir naturāli skaitļi, tad jeb . Tātad un šajā gadījumā dotajam vienādojumam nav atrisinājuma.

Līdz ar to esam pierādījuši, ka dotajam vienādojumam naturālos skaitļos ir viens vienīgs atrisinājums , un .

Starp diviem pēc kārtas esošiem naturāliem skaitļiem un nav neviena cita naturāla skaitļa.

**P4.21.** Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu *.*

**Atrisinājums.** Pārveidosim vienādojumu formā .

Ja vai , tad un atrisinājums eksistē.

Pieņemsim, ka . Tad ir spēkā nevienādības:

Tā kā atrodas starp divu secīgu veselu skaitļu kvadrātiem, tad tas nevar būt vesela skaitļa kvadrāts.

Līdzīgi, ja , tad ir spēkā stingrās nevienādības . Tātad arī šajā gadījumā nevar būt vesela skaitļa kvadrāts.

Līdz ar to atrisinājumi ir ) un .

**P4.22.** Pierādīt, ka nav tādu naturālu skaitļu un , ka

**1. atrisinājums.** Ja kāds no vai ir lielāks vai vienāds ar , tad vienādojumam nav atrisinājuma.

Tātad jāizpildās nevienādībām , un . Tā kā ir naturāli skaitļi, tad secinām, ka , un . Tādā gadījumā

no kā izriet, ka dotajam vienādojumam nav atrisinājuma.

**2. atrisinājums.** Apskatām doto vienādojumu pēc moduļa 3. Tad

un

no kā izriet, ka nav tādu naturālu skaitļu un , ka .

**P4.23.** Pierādīt, ka vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

**Atrisinājums.** Pārveidojam doto vienādojumu:

Lai vienādojumam būtu atrisinājums naturālos skaitļos, nepieciešams, lai (izteiksmes vērtība nevar būt negatīva vai 0, jo tad vai būtu jābūt negatīvam vai 0). Bet tādā gadījumā otram kreisās puses reizinātājam jābūt ne lielākam kā labās puses izteiksmei, tas ir,   
, ko pārveidojot iegūstam, ka . Iegūtā nevienādība būs patiesa tikai tad, ja . Tādā gadījumā , tāpēc (ja ir 4 vai mazāk, tad kreisās puses izteiksmes vērtība ir lielāka nekā ). Bet tādā gadījumā , tāpēc vienādojumam atrisinājuma naturālos skaitļos nav.

*Papildu uzdevumi par vienādojumiem veselos skaitļos doti 3. pielikumā, tos skolotājs var izmantot pēc saviem ieskatiem (ar tiem var aizstāt grupu/pāru darba uzdevumu).*

**Uzdevums grupu/pāru darbam** (*risinājums dots 5. pielikumā)*

Atrast visas iespējamās naturālās , , un vērtības tādas, ka un

*Vai vari atrast kādu derīgu skaitļu četrinieku?*

*Apskati gadījumu, ja .*

*Apskati gadījumu, ja .*

*Apskati gadījumu, ja .*

*Apskati gadījumu, ja .*

*Apskati gadījumu, ja .*

*Vai vari pamatot, ka neder tādas vērtības, kas lielākas nekā 5?*

* *Kāpēc ?*
* *Kāpēc ir patiesa nevienādība ?*
* *Kāpēc ir patiesa nevienādība ?*

# Izmantotā literatūra un citi avoti

1. A. Andžāns. Algebra 10.-12. klasei Profilkursam, II daļa. Rīga, Zvaigzne ABC, 1998.

2. M. Avotiņa, A. Zīlīte. Tematiskie uzdevumi matemātikas olimpiādēs. Rīga: LU, 2019.

3. Professor Layton and the Diabolical Box Walkthrough.

Pieejams: <http://professorlayton2walkthrough.blogspot.com/2008/11/puzzle142.html>

**Noderīgi papildu materiāli diskrētās matemātikas plašākai apguvei**

V. K. Balakrishnan. Introductory Discrete Mathematics. New York: Dover Publications, INC, 1996.

A. Bērziņa, A. Bērziņš. Diferencēti uzdevumi skaitļu teorijā. Mācību apgāds, 1996.

Pieejams: <http://nms.lu.lv/wp-content/uploads/2014/06/BerzinsBerzina_DiferencetiUzdSkT.pdf>

A. Bērziņš. Praktikums elementārajā skaitļu teorijā. LU, 1994.

A. Andžāns, P. Zariņš. Matemātiskās indukcijas metode un varbūtību teorijas elementi. Rīga, Zvaigzne, 1983.

A. Andžāns, U. Kanders. Matemātiskās indukcijas metode. Rīga, LU.

Pieejams: http://www.lanet.lv/info/matind/index.html#s

G. Deksnis. Diskrētā matemātika. Rīga: Drukātava, 2009.

W. L. LeVeque. Fundamentals of Number Theory. New York: Dover Publications, INC, 1996.

I. Volodko. Diskrētā matemātika uzdevumos un piemēros. Rīga: RTU, 2004.

# Pielikumi

## 1. pielikums. Kongruences (grūtāki uzdevumi)

**1.** Pierādīt apgalvojumu: ja ir pirmskaitlis, tad skaitlis , dalot 24, dod atlikumu 1.

**Atrisinājums.** Ievērosim, ka . Tā kā 8 un 3 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad pietiek pierādīt, ka visiem pirmskaitļiem izpildās kongruences

jo tas nozīmēs, ka dalās gan ar 8, gan ar 3, tātad dalās ar .

1. Pamatosim, ka . Tā kā visi pirmskaitļi ir nepāra skaitļi, tad pēc moduļa 8 skaitlis var pieņemt tikai vērtības 1, 3, 5 vai 7. Pārbaudām, ka visu šo vērtību kvadrāti ir kongruenti ar 1 pēc moduļa 8.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 5 | 7 |
|  | 1 |  |  |  |

Redzam, ka šādiem pirmskaitļiem izpildās , tas ir, dalās ar 8.

1. Pamatosim, ka . Neviens pirmskaitlis nedalās ar 3. Tātad pēc moduļa 3 pirmskaitlis var pieņemt tikai vērtības 1 vai 2. Pārbaudām, ka šo vērtību kvadrāti ir kongruenti ar 1 pēc moduļa 3.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  | 1 |  |

Secinām, ka visiem pirmskaitļiem skaitlis dalās gan ar 8, gan ar 3, tātad dalās , kas nozīmē, ka , dalot ar 24, dod atlikumu 1.

*Piezīmes*

1. Pēc moduļa 8 varēja aplūkot arī vērtības un , bet pēc moduļa 3 jāaplūko vērtības un ņemt vērā, ka .
2. Ievērojot, ka ir nepāra skaitlis un ir divu viens otram sekojošu pāra skaitļu reizinājums (no kuriem viens noteikti dalās ar 2, bet otrs – ar 4), var secināt, ka dalās ar 8.

**2.** Atrast visu skaitļu, kas pierakstāmi formā , kur un un ir pirmskaitļi, lielāko kopīgo dalītāju!

**Atrisinājums.** Ievērojam, ka .

Tā kā

un

tad meklētais lielākais kopīgais dalītājs nevar būt lielāks kā 240. Pamatosim, ka visi dotie skaitļi dalās ar 240, līdz ar to būs pierādīts, ka . Ievērosim, ka ; tā kā visi reizinātāji ir savstarpēji pirmskaitļi, tad pietiekami parādīt, ka katrs no dotajiem skaitļiem dalās gan ar 16, gan ar 3, gan ar 5.

* Tā kā jebkurš pirmskaitlis , kas lielāks nekā 5, ir nepāra skaitlis, tad, to dalot ar pāra skaitli, nevar iegūt atlikumu, kas ir pāra skaitlis, līdz ar to var rasties tikai nepāra atlikums: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 vai 15. Tātad var būt kongruents ar vai pēc moduļa 16. Noskaidrosim, ar ko var būt kongruenta pirmskaitļa ceturtā pakāpe pēc moduļa 16:
* ;
* ;
* ;
* .

Tātad .

* Pirmskaitli , dalot ar 3, var iegūt tikai atlikumu 1 vai 2, tāpēc pēc moduļa 3 šāds pirmskaitlis var pieņemt tikai vērtības un .
* Pirmskaitli , dalot ar 5, var iegūt tikai atlikumu 1, 2, 3 vai 4, tāpēc pēc moduļa 5 šāds pirmskaitlis var pieņemt tikai vērtības un . Tad vai   
  . Tātad .

Līdz ar to un tāpēc jeb dalās ar 240. Esam pierādījuši, ka visu skaitļu, kas pierakstāmi formā , kur un un ir pirmskaitļi, lielākais kopīgais dalītājs ir 240.

*Piezīme*. Pamatot to, ka dalās ar 16, var, ievērojot, ka jebkuriem nepāra skaitļiem un to kvadrātu summa dalās ar 2, bet kvadrātu starpība dalās ar 8.

**3.** Atrast skaitļu , , , …, lielāko kopīgo dalītāju!

**Atrisinājums.** Ievērosim, ka , tātad meklētais lielākais kopīgais dalītājs nevar būt lielāks kā 24. Pamatosim, ka visi dotie skaitļi dalās ar 24, līdz ar to būs pierādīts, ka . Ievērosim, ka   
. Tā kā 8 un 3 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad pietiekami parādīt, ka katrs no dotajiem skaitļiem dalās gan ar 3, gan ar 8.

Ievērojam, ka dotie skaitļi ir formā , kur ir nepāra skaitlis, t. i., .

1. Pamatosim, ka visi dotie skaitļi dalās ar 3.

* Ja dalās ar 3, tad arī reizinājums dalās ar 3.
* Ja nedalās ar 3, tad , līdz ar to ; taču tad reizinājums dalās ar 3.

1. Pamatosim, ka visi skaitļi dalās ar 8. Tā kā ir nepāra skaitlis, tad pēc moduļa 8 pieņem vērtības 1, 3, 5, 7. Ērti ir izmantot faktu un kas nozīmē, ka vai arī .

Ievērosim, ka un . Tātad un

Taču tas nozīmē, ka skaitlis un arī reizinājums dalās ar 8.

Esam pierādījuši, ka nepāra skaitļiem skaitlis dalās gan ar 3, gan ar 8, tātad doto skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir 24.

## 2. pielikums. Papildu uzdevumi par atrisinājuma neeksistenci

**1.** Vai var atrast tādus veselus skaitļus un , ka ?

**Atrisinājums.** Ja vai ir pāra skaitlis, tad vienādojuma kreisās puses izteiksmes vērtība ir pāra skaitlis, kas nevar būs vienāda ar nepāra skaitli 434343. Ja un abi ir nepāra skaitļi, tad ir pāra skaitlis (kā divu nepāra skaitļu summa) un vienādojuma kreisās puses izteiksmes vērtība ir pāra skaitlis, kas nevar būs vienāda ar nepāra skaitli 434343.

Tātad nevar atrast tādus veselus skaitļus un , lai dotā vienādība būtu patiesa.

**2.** Vai var atrast tādus veselus skaitļus un , ka ?

**Atrisinājums.** Apskatām dotā vienādojuma kreisās puses izteiksmi pēc moduļa 4.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 0 |  |
| 1 |  |
| 2 |  |
| 3 |  |

Esam ieguvuši, ka pēc moduļa 4 var pieņemt vērtības 0; 1 vai 3, bet . Tātad dotajam vienādojumam nav atrisinājuma veselos skaitļos.

**3.** Vai var atrast tādus veselus skaitļus un , ka ?

**1. atrisinājums.** Gan 2016, gan 120 dalās ar 3, tātad arī jādalās ar 3. Tas nozīmē, ka arī jādalās   
ar 3, bet tad noteikti dalās ar 9. Tas nozīmē, ka vienādojuma kreisā puse dalās ar 9, jo arī 2016 dalās ar 9, bet vienādojuma labā puse ar 9 nedalās. Tātad šādus skaitļus atrast nav iespējams.

**2. atrisinājums.** Apskatām dotā vienādojuma kreisās puses izteiksmi pēc moduļa 9.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Esam ieguvuši, ka pēc moduļa 9 var pieņemt vērtības vai bet   
. Tātad dotajam vienādojumam nav atrisinājuma veselos skaitļos.

**4.** Vai var atrast tādus naturālus skaitļus un , ka ?

**Atrisinājums.** Apskatām doto vienādojumu pēc moduļa 8. Veselu skaitļu kvadrāti, dalot ar 8, var dot tikai atlikumus 0, 1 vai 4.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|  | 0 | 1 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 1 |

Tā kā vienādojuma labajā pusē ir nepāra skaitlis, tad vai nu vienam, vai trim no kreisās puses saskaitāmajiem jādod nepāra atlikums. Līdz ar to iespējami šādi gadījumi:

* ;
* ;
* ;
* .

Tā kā , tad nevar atrast tādus naturālus skaitļus un , lai dotā vienādība būtu patiesa.

**5.** Pierādīt, ka vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos!

**Atrisinājums.** Apskatīsim doto vienādojumu pēc moduļa 11. Tā kā   
 un , tad iegūstam . Šī kongruence nav patiesa, jo kreisās puses izteiksmes vērtība ir 0 vai 2, bet labās puses izteiksmes vērtība ir 1. Tātad dotajam vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

## 3. pielikums. Papildu uzdevumi par vienādojumiem veselos skaitļos

**1.** Atrast visus naturālu skaitļu pārus , kuriem ir spēkā vienādība .

**Atrisinājums.** Pārveidojam doto vienādību:

Tā kā un ir naturāli skaitļi un iegūtās vienādības kreisās puses izteiksme ir pozitīva, tad vai . Apskatām abus gadījumus:

* ja , tad jeb , no kā iegūstam, ka (vērtība neder, jo nav naturāls skaitlis);
* ja , tad jeb , no kā iegūstam, ka naturālu atrisinājumu nav.

Līdz ar to esam ieguvuši, ka vienīgais derīgais skaitļu pāris ir .

**2.** Atrast visus pirmskaitļu pārus , kuriem.

**Atrisinājums.** Dalām abas dotā vienādojuma puses ar 2 un pārveidojam iegūto vienādojumu:

Ievērojam, ka iegūtās vienādības labās puses izteiksme ir pozitīva, tātad arī jābūt pozitīvam. Tā kā 10 un 9 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad ir jādalās ar 9. Iespējamās vērtības varētu būt 1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82 un 91, no kurām derīgas ir tikai vērtības 19, 37 un 73, jo tie ir pirmskaitļi. Atrodam atbilstošās vērtības:

* ja , tad jeb (neder, jo nav pirmskaitlis),
* ja , tad jeb (pirmskaitlis),
* ja , tad jeb (pirmskaitlis).

Tātad dotajam vienādojumam ir divi atrisinājumi: , un , .

*Piezīme.* Uzdevumu var risināt ar pilno pārlasi, apskatot visus pirmskaitļus , kuriem (tas ir, visus pirmskaitļus, kas ir mazāki nekā 100).

## 4. pielikums. Pirmā grupu/pāru darba uzdevuma atrisinājums

Atrisināt vienādojumu veselos skaitļos.

(*Starptautisko komandu sacensību matemātikā “Baltic Way 2012” uzdevums*)

**Atrisinājums**. Pierādīsim, ka dotajam vienādojumam nav atrisinājuma veselos skaitļos.

Sestās pakāpes skaitļi pēc moduļa 43 ir kongruenti tikai ar 0, 1, 4, 11, 16, 21, 35 vai 41, bet septītās pakāpes skaitļi – ar 0, 1, 6, 7, 36, 37 vai 42.

Apskatām, kādas vērtības var pieņemt vienādojuma katras puses izteiksme:

Tā kā šīm kopām nav kopīgu elementu, tad nevar pastāvēt vienādība . Tātad dotajam vienādojumam nav atrisinājuma veselos skaitļos.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 11 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 10 |
| 2 | 21 | 42 | 42 | 12 |
| 3 | 41 | 39 | 37 | 17 |
| 4 | 11 | 22 | 1 | 10 |
| 5 | 16 | 32 | 37 | 17 |
| 6 | 1 | 2 | 6 | 5 |
| 7 | 1 | 2 | 7 | 4 |
| 8 | 16 | 32 | 42 | 12 |
| 9 | 4 | 8 | 36 | 18 |
| 10 | 35 | 27 | 6 | 5 |
| 11 | 4 | 8 | 1 | 10 |
| 12 | 21 | 42 | 37 | 17 |
| 13 | 16 | 32 | 36 | 18 |
| 14 | 21 | 42 | 36 | 18 |
| 15 | 11 | 22 | 36 | 18 |
| 16 | 35 | 27 | 1 | 10 |
| 17 | 35 | 27 | 36 | 18 |
| 18 | 41 | 39 | 7 | 4 |
| 19 | 11 | 22 | 37 | 17 |
| 20 | 4 | 8 | 37 | 17 |
| 21 | 41 | 39 | 1 | 10 |
| 22 | 41 | 39 | 42 | 12 |
| 23 | 4 | 8 | 6 | 5 |
| 24 | 11 | 22 | 6 | 5 |
| 25 | 41 | 39 | 36 | 18 |
| 26 | 35 | 27 | 7 | 4 |
| 27 | 35 | 27 | 42 | 12 |
| 28 | 11 | 22 | 7 | 4 |
| 29 | 21 | 42 | 7 | 4 |
| 30 | 16 | 32 | 7 | 4 |
| 31 | 21 | 42 | 6 | 5 |
| 32 | 4 | 8 | 42 | 12 |
| 33 | 35 | 27 | 37 | 17 |
| 34 | 4 | 8 | 7 | 4 |
| 35 | 16 | 32 | 1 | 10 |
| 36 | 1 | 2 | 36 | 18 |
| 37 | 1 | 2 | 37 | 17 |
| 38 | 16 | 32 | 6 | 5 |
| 39 | 11 | 22 | 42 | 12 |
| 40 | 41 | 39 | 6 | 5 |
| 41 | 21 | 42 | 1 | 10 |
| 42 | 1 | 2 | 42 | 12 |
| 43 | 0 | 0 | 0 | 11 |

## 5. pielikums. Otrā grupu/pāru darba uzdevuma atrisinājums

Atrast visas iespējamās naturālās , , un vērtības tādas, ka un

**Atrisinājums**. Tā kā un , tad un

jeb

Tātad un .

Apskatīsim visas iespējamās vērtības.

* Ja , tad , un . Tātad ir dotā vienādojuma atrisinājums.
* Ja , tad . Tātad un iegūstam vienādojumu  
  . Tā kā , tad šajā gadījumā vienādojumam nav atrisinājuma.
* Ja , tad . Tātad un iegūstam vienādojumu . Tā kā vienādojuma kreisā puse ir pāra skaitlis, tad arī labajai pusei jābūt pāra skaitlim. Labās puses saskaitāmie 6 un ir pāra skaitļi, tāpēc arī ir jābūt pāra skaitlim. Tātad .
  + Ja , tad , un , tātad ir dotā vienādojuma atrisinājums.
  + Ja , tad , šajā gadījumā nav naturāls skaitlis un dotajam vienādojumam nav atrisinājuma.
* Ja , tad . Tātad un iegūstam vienādojumu jeb .
  + Ja , tad , un nav naturāls skaitlis.
  + Ja , tad . Tātad šajā gadījumā dotajam vienādojumam nav atrisinājuma.
* Ja , tad . Tātad .
  + Ja , tad un ir dotā vienādojuma atrisinājums.
  + Ja , tad , jeb , kas ir pretrunā ar to, ka . Tātad šajā gadījumā dotajam vienādojumam nav atrisinājuma.

Esam ieguvuši, ka dotā vienādojuma atrisinājumi ir , un .