Tests 2017-03-29

Tests atspoguļo skaitļu teorijas prasmes agrāko gadu (2000.-2016.g.) 7.-8.kl. **No** un **Ao** uzdevumos. Tas galvenokārt iedvesmojies no NMS arhīva materiāliem, kas apkopoti PDF dokumentā - sk. <http://www.dudajevagatve.lv/nt/nt-7-8.html> (*7.-8.klašu novadu olimpiādes: Skaitļu teorija (pasniedzēja materiāls)*). Tests, ko piedāvā pulciņā pirms **Ao**, varētu sastāvēt no jautājumiem, ko skolēni risinātu aptuveni minūtes. Šajā sarakstā ir vairāk jautājumu, jo var izrādīties, ka daļa jautājumu ir piemērotāki 9.-10.klasei vai arī ir jāpārstrādā. Katrai no tēmām pievienots klasifikators (piemēram al.manipulate.smallexpr), ar kuru apzīmēsim arī teorijas tēmas un olimpiāžu uzdevumus, kuru matemātiskais saturs ir līdzīgs.

# Mazi kvadrāti uz liela kvadrāta diagonāles (al.manipulate.smallexpr)

**Q-1-1** Zināms, ka veseli skaitļi un ņemti no saraksta un . Atrodiet tādus un , kuriem izteiksme pieņem lielāko iespējamo vērtību.

***Atbilde:*** Ierakstīt veselus skaitļus, kam ir vislielākais: \_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_

*1. atrisinājums:* Var izvēlēties un (vai otrādi). To, ka pieņem lielāko iespējamo vērtību var pārbaudīt vai nu ar pilno pārlasi ( gadījumi, kā izvēlēties saskaitāmos, neskaitot tos, kur un apmainīti vietām).

$2. atrisinājums:\* Vispārīgā gadījumā var uzrakstīt jeb . Fiksētam izteiksmes labā puse būs vislielākā tad, ja ir iespējami mazs. Mūsu gadījumā - vienāds ar , jo nevar būt negatīvi. Tādēļ viens skaitlis ir , bet otrs ir .

**Q-1-2** Zināms, ka veseli skaitļi un ņemti no saraksta un . Atrodiet tādus un , kuriem izteiksme pieņem lielāko iespējamo vērtību.

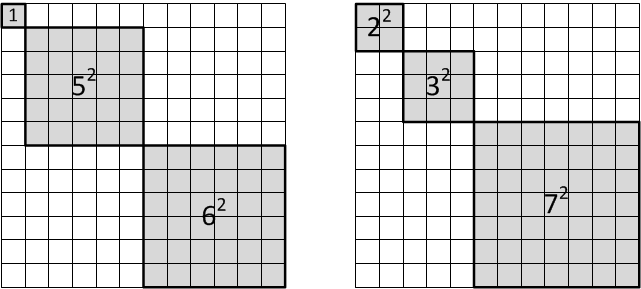
***Atbilde:*** Ierakstīt veselus nenegatīvus skaitļus, kam ir vislielākais: \_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_

*1. atrisinājums:* Var izvēlēties un , ko var pārbaudīt ar pilno pārlasi, aplūkojot dažādus skaitļu pārīšus, kas summā dod .

*2. atrisinājums:* Izsakām , tad un grafiks ir parabola, kuras zari vērsti uz leju. Līdz ar to šī kvadrātfunkcija savu lielāko vērtību sasniedz punktā, kas ir parabolas virsotne, tas ir . Tātad arī .

*3. atrisinājums:* Var uzrakstīt jeb . Fiksētam izteiksmes labā puse būs vislielākā tad, ja ir iespējami mazs. T.i. jāizvēlas , kas nozīmē, ka .

**Q-1-3** Skaitļu trijniekiem un ir vienādas gan summas, gan kvadrātu summas.



Attēls: Iekrāsotie laukumi ir vienādi

Kāds izdomāja pieskaitīt visiem šiem skaitļiem un ieguva jaunus trijniekus un . Kādas sakarības pastāv starp šo skaitļu summām un kvadrātu summām. (*Ja ir slinkums kāpināt lielus skaitļus, var atvērt iekavas izteiksmēs utml.*)

***Atbilde:***  
*I daļa:* Atzīmēt patieso apgalvojumu par summām:

*II.daļa:* Atzīmēt patieso apgalvojumu par kvadrātu summām:

*Atrisinājums:* Abos gadījumos abas puses ir savstarpēji vienādas. Pirmajā gadījumā tas ir viegli redzams, jo abos gadījumos izteiksmei pieskaita to pašu lielumu (). Otrajā gadījumā varam atvērt iekavas un grupēt:

To pašu izdara arī ar otru pusi un pārliecinās, ka viss noīsinās.

# Progresijas kā trepes (al.sym.progressions)

**Q-2-1.** Skaitļus iegūst, saskaitot arvien garākus naturālo skaitļu virknes sākumposmus:

Ierakstīt rūtiņās šīs virknes locekļu veidotos atlikumus, dalot ar skaitļiem un ; ierakstīt arī, pēc cik rūtiņām šie atlikumi sāk atkārtoties (t.i. atlikumu perioda garumu).

***Atbilde:***  
*I daļa:* Virknes atlikumi, dalot ar (ierakstīt rūtiņās skaitļus , vai ):



Atlikumu periods, dalot ar : \_\_\_\_\_\_  
(*t.i. pēc cik rūtiņām atlikumi sāk atkārtoties*)

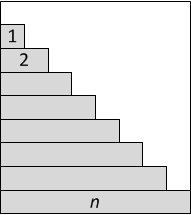
*II daļa:* Virknes atlikumi, dalot ar (ierakstīt rūtiņās skaitļus , , vai ):



Atlikumu periods, dalot ar : \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:* Dalot ar , rodas atlikumu virkne ar periodu .  
Dalot ar , rodas atlikumu virkne ar periodu .

**Q-2-2.** Saskaita visus naturālos skaitļus no līdz : . Atrast piecas mazākās vērtības, kurām dalās ar .



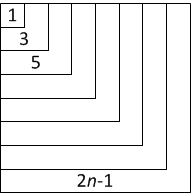
Attēls: Progresijas summa kā trepītes laukums

***Atbilde:*** Piecas mazākās vērtības, kurām dalās ar (skaitļus atdala ar semikoliem (;)): \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:* Ņemot vērā to, ka trepīte ir puse no taisnstūra , secinām, ka vai jādalās ar . Iegūstam, ka der .

**Q-2-3.** Virkni iegūst, saskaitot pirmos nepāru skaitļus:

Atrast piecas mazākās vērtības, kurām dalās ar .



Attēls: Progresijas summa kā L-figūriņu laukums

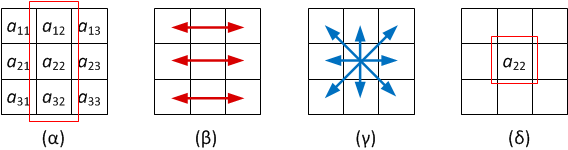
***Atbilde:*** Piecas mazākās vērtības, kam dala (skaitļus atdala ar semikoliem (;)): \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:* Tā kā pirmo nepāru skaitļu summa ir , iegūstam, ka dalās ar . Iegūstam, ka der .

# Maģiski kvadrāti 3 reiz 3 (al.equation.expressvariable)

Atšķirībā no kombinatorikā pazīstamajiem *maģiskajiem kvadrātiem*; šeit aplūkosim kvadrātus, kuros summas rindiņās, kolonnās un uz diagonālēm ir vienādas, bet (ja vien uzdevuma nosacījumos nav īpaši minēts) neprasīsim, lai visi tabulā ierakstītie skaitļi būtu dažādi vai arī tie būtu no intervāla .

**Q-3-1.** Par maģisko kvadrātu šajā uzdevumā sauksim jebkādu naturālu skaitļu izvietojumu tabulā rūtiņas, kuram summas visās rindiņās un kolonnās kā arī uz abām diagonālēm ir vienādas ar vienu un to pašu skaitli . (Nav obligāti jāizmanto atšķirīgi skaitļi vai arī skaitļi no līdz .)  
Attēlā dotajam maģiskajam kvadrātam izteikt tabulas elementus un to summas (, , , ) ar . Piemēram, (jo tāda ir maģiskā kvadrāta definīcija).

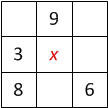


Attēls: Sakarības maģiskajā kvadrātā

***Atbilde:*** Visos piemēros ierakstīt trūkstošo reizinātāju pirms kā parastu daļskaitli :  
**()** \_\_\_\_\_\_   
**()** Skaitļu summa uz sarkanajām horizontālajām līnijām attēlā ():  
 \_\_\_\_\_\_   
**()** Skaitļu summa uz zilajām līnijām, kas iet caur kvadrāta centru attēlā ():  
 \_\_\_\_\_\_   
**()** Tabulas centra elements:  
 \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:*  
**()** Koeficients pirms summai šajā kolonnā ir (maģiskā kvadrāta definīcija).  
**()** Koeficients pirms ir , jo katrā no rindiņām summa ir .  
**()** Koeficients pirms ir , jo tur ietilpst vienādas summas.  
**()** No **()** atņemam **()**. Visi tabulas elementi noīsinās, izņemot vidējo. Iegūstam, jeb , t.i. koeficients ir .

**Q-3-2.** Aizpildīt tukšās rūtiņas kvadrātā ar naturāliem skaitļiem, ja zināms, ka skaitļu summas visās rindiņās, visās kolonnās un uz abām diagonālēm ir vienādas. (*Ja vēlaties, varat vidējo rūtiņu apzīmēt ar un izmantot zināmo apgalvojumu, ka ir tā summa, kas vienāda katrā rindiņā, kolonnā un diagonālē.*)



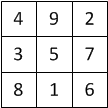
Attēls: Daļēji aizpildīts kvadrāts

***Atbilde:*** Ierakstīt trūkstošās vērtības maģiskā kvadrāta rindiņās:

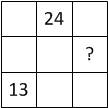


*Atrisinājums:* Rūtiņa tabulas kreisajā augšējā stūrī vienāda gan ar (lai kreisajā kolonnā ), gan arī (lai uz diagonāles ). Iegūstam vienādojumu:

Zinot, ka kvadrāta vidū un visas summas ir , pārējās tabulas rūtiņas var viegli aizpildīt.



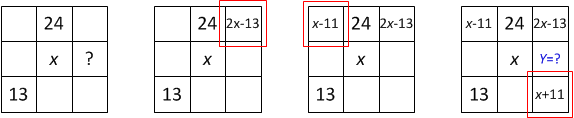
**Q-3-3.** Dots kvadrāts , kur summas visās rindiņās, visās kolonnās un uz abām diagonālēm ir vienādas. Noskaidrot, kāds skaitlis ir rakstīts jautājuma zīmes vietā. (*Ja vēlaties, varat vidējās rūtiņas skaitli apzīmēt ar un izmantot zināmo apgalvojumu, ka ir tā summa, kas vienāda katrā rindiņā, kolonnā un diagonālē.*)



Attēls: Daļēji aizpildīts kvadrāts

***Atbilde:*** Skaitlis otrās rindiņas trešajā kolonnā \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:* Apzīmējam skaitli tabulas vidū ar . Tad visus citus tabulas skaitļus var izteikt ar šo (sk. attēlu).



Pēc 3 soļiem iegūstam, ka labajā kolonnā skaitļi ir , nezināms (kurš šajā uzdevumā jāatrod), kā arī . Iegūstam sakarību:

Pēc saīsināšanas abās pusēs iegūstam jeb . Tātad meklētais skaitlis ir (Sal. **Ao2014.7.4**).

# Lineāri vienādojumi veselos skaitļos (al.inequality.finitesearch)

**Q-4-1.** Viena vista maksā dolārus; savukārt par dolāru var dabūt cāļus. Cik vistu un cik cāļu jāpērk, lai par dolāriem nopirktu putnus.

***Atbilde:*** Ierakstīt vistu un cāļu skaitu: \_\_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:* Apzīmēsim: - tik vistu jānopērk, - tik cāļu jānopērk. Tad no dotā un . Pareizinot pēdējā vienādojuma abas puses ar , iegūstam . Pārrakstām pēdējo vienādojumu formā . Tā kā , tad iegūstam jeb . Līdz ar to .

**Q-4-2.** Karlsonam ir tikai ēru monētas, Bokas jaunkundzei ir tikai ēru monētas. Vai Karlsons var samaksāt Bokas jaunkundzei ēru? Vai Bokas jaunkundze var samaksāt Karlsonam ēru? (Atbildēs Karlsona samaksāto/izdoto monētu skaitu apzīmējam ar , bet Bokas jaunkundzes samaksāto/izdoto monētu skaitu apzīmējam ar .)

***Atbilde:***  
*I daļa:* Ja , tad \_\_\_\_\_\_ un \_\_\_\_\_\_.

*II daļa:* Ja , tad \_\_\_\_\_\_ un \_\_\_\_\_\_.

*Atrisinājums:* Atrisinājumu ir ļoti daudz (esošu atrisinājumu var pārveidot, aizstājot ar , bet ar ). Bet nelieliem skaitļiem var izvēlēties un , tad .  
Otrajā daļā var izvēlēties un , tad .

**Q-4-3.** Karlsons sev pusdienām nopirka pīrādziņus un magoņmaizītes; un samaksāja 400 eirocentus. Ar kādu lielāko skaitli noteikti dalās magoņmaizītes cena eirocentos?

***Atbilde:*** Ierakstīt skaitli: \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:* Apzīmējam pīrādziņa cenu ar un magoņmaizītes cenu ar . Rakstām vienādojumu jeb , no kā iegūstam . Ievērojam, k avienādojuma labā puse dalās ar , tādēļ arī vienādojuma kreisā puse jeb dalās ar . Tā kā un nav kopīgu dalītāju, secinām, ka arī dalās ar .  
Vienlaikus, ir lielākais skaitlis, ar ko noteikti dalās , jo var izvēlēties (tad ).

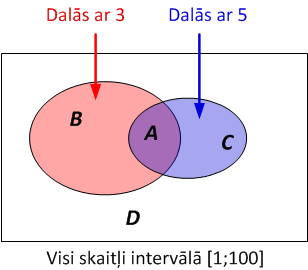
# Skaita kaut ko Venna diagrammās (co.fullsearch.opposite)

**Q-5-1.** Cik ir tādu naturālu trīsciparu skaitļu, kas dalās gan ar , gan ar ?

***Atbilde:*** Ierakstīt skaitu: \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:* Trīsciparu skaitļi ir visi skaitļi intervālā . Gan ar , gan ar dalās visi tie skaitļi, kas dalās ar . Tātad ir jāatrod visas tādas naturālas vērtības, ka ir trīsciparu skaitlis. Ievērojam, ka mazākā vērtība vavr būt (tad iegūštam trīsciparu skaitli ), bet lielākā - (tad iegūstam trīsciparu skaitli ). Tātad pavisam kopā iespējamas dažādas vērtības jeb pavisam ir tādi naturāli trīsciparu skaitļi, kas dalās gan ar , gan ar .

**Q-5-2.** Attēlā uzzīmēta Venna diagramma ar piemēriem, kas parāda visas iespējas, kā skaitļi intervālā var dalīties (vai nedalīties) ar vai . (Piemēram, apgabalā ir skaitļi, kas dalās ar un ar , t.i. tur ietilpst skaitļi . Apgabalā ir skaitļi, kas nedalās ne ar , ne ar utt.) Noskaidrot, cik skaitļu ir katrā Venna diagrammas apgabalā.



Skaitļi atkarībā no dalāmības ar 3 un ar 5

***Atbilde:*** Katrā no gadījumiem ierakstiet, cik ir naturālu skaitļu no intervāla ar minēto īpašību:  
**()** Dalās gan ar , gan ar : \_\_\_\_\_\_  
**()** dalās ar , bet nedalās ar : \_\_\_\_\_\_  
**()** nedalās ar , bet dalās ar : \_\_\_\_\_\_  
**()** nedalās ne ar , ne ar : \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:* Apgabalā ir skaitļi: .  
Skaitļu, kas dalās ar pavisam ir (no līdz - visi, kas dalās ar ). Tā kā seši no tiem dalās arī ar , tad apgabalā ir skaitļi.  
Skaitļu, kas dalās ar šajā intervālā ir . No tiem dalās tikai ar , bet ne ar .  
Visbeidzot visu pārējo skaitļu (kas nedalās ne ar , ne ar ) ir .

**Q-5-3.** Cik ir tādu piecciparu skaitļu, kuru pierakstā ir vismaz viens nepāra cipars? (*Var vispirms noskaidrot, cik ir tādu piecciparu skaitļu, kuru pierakstā visi ir pāru cipari.*)

***Atbilde:*** Ierakstīt skaitu: \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:* Piecciparu skaitļu pavisam ir (no līdz ). Tādu, kuru pierakstā ir tikai pāru cipari, ir (te jāņem vērā, ka pāru ciparu ir pieci - , bet pirmajā vietā nevar likt nulli, jo citādi nesanāk piecciparu skaitlis).

Atņemot no visu piecciparu skaitļu skaita tos, kuri neder, iegūstam: .

**Q-5-4.** Virknē uzrakstītas simts parastas daļas, kam saucējā ir skaitlis :

Cik no šīm daļām ir nesaīsināmas?

***Atbilde:*** Ierakstīt skaitu: \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:* Nesaīsināmas ir tās daļas, kuru skaitītājā ir skaitlis, kas nedalās ne ar , ne ar . Intervālā pavisam ir skaitļi, kuri nedalās ar - tie ir visi nepāru skaitļi. No tiem ir tādi, kas dalās ar (). Paliek pāri skaitļu , kam daļa ir nesaīsināma.

**Q-5-5.** Cik ir tādu naturālu skaitļu, kas nepārsniedz un kas dalās ar vai (vai tiem abiem), bet nedalās ar .

***Atbilde:*** Ierakstīt skaitu: \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:* No pirmajiem naturāliem skaitļiem ar dalās skaitļi, ar dalās skaitļi, tātad skaitļu, kas dalās ar , bet nedalās ar , ir . Starp šiem skaitļiem, kas dalās ar , ir ieskaitīti arī tādi, kas dalās arī ar . Vēl jāpieskaita tādi skaitļi, kas dalās ar , bet nedalās ar . No pirmajiem naturālajiem skaitļiem skaitļi dalās ar . Ar un jeb ar dalās skaitļi, tātad ir skaitļi, kas dalās ar , bet nedalās ar . Tātad pavisam kopā ir skaitļi, kas apmierina uzdevuma prasības.

# Spēles un algoritmiski procesi (co.games.strategy)

**Q-6-1.** Spēles sākumā uz tāfeles uzrakstīts naturāls skaitlis. Divi spēlētāji pārmaiņus izdara gājienus: Ar 1 gājienu atļauts no skaitļa atņemt , vai (pēc atņemšanas skaitlim jābūt pozitīvam vai nullei). Uzvar tas spēlētājs, pēc kura gājiena rodas nulle. Atzīmēt tos sākumskaitļus, pie kuriem uzvar 2.spēlētājs (ja abi spēlē pareizi).

***Atbilde:*** Katrai vērtībai ierakstīt, kurš spēlētājs uzvar (ja abi spēlē pareizi) - t.i. ciparus "1" vai "2".



*Atrisinājums:* Ja sākumā uzrakstīts skaitlis, kurš dalās ar , tad uzvar 2.spēlētājs. Visos citos gadījumos uzvar 1.spēlētājs (un uzvarošā stratēģija ir - ikreiz atņemt tādu skaitli, lai rezultāts dalītos ar ). Ņemot vērā atļautos gājienus, viens no spēlētājiem vienmēr būs spiests pārveidot skaitli, kurš dalās ar par tādu skaitli, kurš nedalās ar ; savukārt viņa pretinieks atkal varēs atjaunot dalāmību ar . Un galarezultātā viņš varēs sasniegt mazāko atļauto skaitli, kurš dalās ar (t.i. nulli).

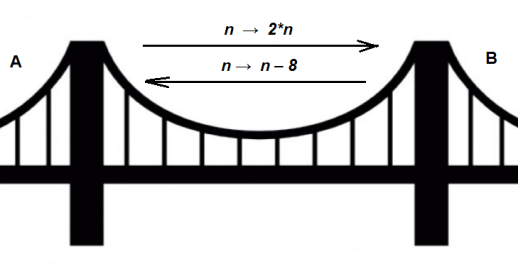
**Q-6-2.** Andris iedomājas naturālu ; izrēķina reizinājumus , , , un , patvaļīgi izvēlas vienu no šiem pieciem reizinājumiem un nosauc to Jurim. Vai Juris var viennozīmīgi pateikt, kuru skaitli Andris iedomājās, ja Andra nosauktais skaitlis ir ? ?

***Atbilde:***  
*I daļa.* Ja nosaukts , tad atbilde ir (izvēlēties no "Jā" un "Nē"): \_\_\_\_\_\_ ("Jā" gadījumā \_\_\_\_\_\_)  
*II daļa.* Ja nosaukts , tad atbilde ir (izvēlēties no "Jā" un "Nē"): \_\_\_\_\_\_ ("Jā" gadījumā \_\_\_\_\_\_)

*Atrisinājums.* Skaitlis dalās gan ar , gan ar , gan ar . Tādēļ var pieņemt attiecīgi vērtības , vai , t.i. nevar viennozīmīgi noteikt.

Savukārt dalās tikai ar vienu no reizinātājiem no kopas , t.i. ar . Un .

**Q-6-3.** Varis dzīvo punktā un viņam ir eiras. Viņš var šķērsot tiltu no uz un atpakaļ. Ejot no uz Velns divkāršo Varim piederošo naudas daudzumu, ejot no uz Varis maksā Velnam 8 eiras. Kas notiek Varim pietiekami daudzas reizes staigājot pa tiltu turp un atpakaļ, ja ? Ja ?



Attēls: Tilts starp A un B

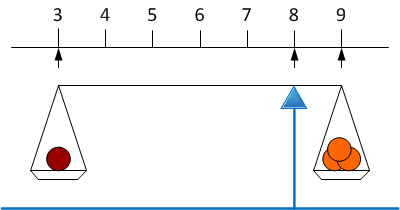
***Atbilde:***  
*I daļa.* Atzīmēt, kas notiek ar Vara naudu, ja :

*II daļa.* Atzīmēt, kas notiek ar Vara naudu, ja :

*Atrisinājums:* Ja Varim sākumā ir eiras, tad iegūstam virkni . Tālāk turpināt gājienus vairs nevar - Varim jāpaliek tilta pusē .  
Ja Varim sākumā ir eiras, tad iegūstam virkni , kas bezgalīgi svārstās starp divām vērtībām.

# Masu centrs un spēka pleci (nt.divisibility.barycenter)

**Q-7-1.** Skolēnam ir viena atzīme "3" un vairākas atzīmes "9" (citu atzīmju viņam nav). Kāds ir mazākais atzīmju "9" skaits, lai visu skolēna atzīmju aritmētiskais vidējais būtu vismaz "8".



Attēls: Nesimetriski sviras svari

***Atbilde:*** Ierakstīt skaitu: \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:* Nogrieznis ir piecas reizes garāks kā nogrieznis . Tādēļ, lai būtu līdzsvara punkts, atzīmēm "9" jābūt piecas reizes vairāk - uz vienu atzīmi "3" vajadzīgas piecas atzīmes "8". Šajā gadījumā tiešām:

**Q-7-2.** Ir trīs apelsīni (viena apelsīna vidējā masa ir g) un septiņi greipfrūti (viena greipfrūta vidējā masa ir grami). Kāda ir visu desmit objektu vidējā masa? (Atsevišķo apelsīnu un greipfrūtu masas nav zināmas.)

***Atbilde:*** Ierakstīt vidējo masu gramos: \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:* Lai nebūtu pārāk lieli skaitļi, no katra augļa masas gramos atņemsim . Šajā gadījumā trim apelsīnu skaitļiem aritmētiskais vidējais ir , bet greipfrūtu skaitļu aritmētiskais vidējais ir . Ja greipfrūtu ir , tad (t.i. apelsīnu vidējo skaitli trīskāršojam, bet greipfrūtu vidējo skaitli septiņkāršojam). Iegūstam, ka vidējais skaitlis ir , kas atbilst masai grami.

**Q-7-3.** Klasē mācās meitenes un zēni. Katram no viņiem noteica garumu veselos centimetros. Zēnu vidējais garums bija centimetri, bet meiteņu vidējais garums bija centimetri. Savukārt visas klases bērnu vidējais garums bija centimetri. Ar kādu skaitli noteikti dalās zēnu skaits ?

***Atbilde:*** Ierakstīt skaitli, ar kuru dalās : \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:* Nogriežņu un garumu attiecība ir . Smaguma centrs ir šādi novietots vienīgi tad, ja meiteņu/zēnu skaita attiecība ir pret . Tā kā tie abi ir savstarpēji pirmskaitļi, tad jādalās ar .

# Pirmskaitļu un to pakāpju daudzkārtņu izvietojums (nt.divisibility.multiples)

**Q-8-1.** Zināms, ka dalās ar . Vai kāds no reizinātājiem , , , noteikti dalās ar ? Aplūkot vērtības , , , , .

***Atbilde:*** Dažādām vērtībām ierakstīt rūtiņās "Jā" vai "Nē":



*Atrisinājums:* Ja un , tad atbilde ir "Jā", visur citur atbilde "Nē". Ja reizinājums dalās ar vai (t.i. pirmskaitļu pakāpēm), tad kāds no reizinātājiem dalās ar (vai attiecīgi ar ). Bet tādā gadījumā neviens cits no reizinātājiem ar (attiecīgi ar ) dalīties nevar, jo reizinātāju starpības ir (nedalās ar vai ). Tas nozīmē, ka tam pašam reizinātājam ir jādalās ar augstāku pirmskaitļa pakāpi ( vai ).

Ja , (t.i. dalītājs satur dažādu pirmskaitļu pakāpes), tad apgalvojums par dalīšanos nav spēkā, jo var gadīties, ka dalās ar viena pirmskaitļa attiecīgo pakāpi, bet - ar cita pirmskaitļa pakāpi.

Arī pie apgalvojums nav spēkā, jo var gadīties, ka dalās ar , bet dalās ar . Tad reizinājums dalīsies ar , lai gan neviens no reizinātājiem nedalījās ar .

**Q-8-2.** Zināms, ka dalās ar . Vai kāds no reizinātājiem noteikti dalās ar ? Vai kāds no reizinātājiem noteikti dalās ar ?

***Atbilde:***  
*I daļa:* Vai kāds reizinātājs noteikti dalās ar (Jā/Nē): \_\_\_\_\_\_  
*II daļa:* Vai kāds reizinātājs noteikti dalās ar (Jā/Nē): \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:* Ievērojam, ka .

*1. daļa:* Jā, kāds no reizinātājiem noteikti dalās ar . No skaitļiem ir tieši divi pāru skaitļi, bet ne vairāk kā viens no tiem dalās ar . Tātad viens no pāru skaitļiem satur pirmreizinātāju pirmajā pakāpē. Tas nozīmē, ka otrajam pāru skaitlim jāsatur pirmreizinātājs trešajā pakāpē, lai un rezultāts dalītos ar . Secinām, ka viens no reizinātājiem tiešām dalās ar .

*2. daļa:* Nē, ne noteikti. Ja un abi dalās ar , tad to reizinājums dalās ar , kaut arī neviens no reizinātājiem nedalās ar .

**Q-8-3.** Dots pēc kārtas ņemtu skaitļu reizinājums: . Vai šis reizinājums noteikti dalās ar , , , , , , , , , ?

***Atbilde:*** Katram no skaitļiem tabuliņā ierakstiet Jā/Nē:



*Atrisinājums:* Ar un dalās tādēļ, ka vismaz kāds no dalās ar (vai attiecīgi ar ).  
Ar , dalās tādēļ, ka vismaz kāds no dalās ar , un kāds (varbūt cits) no tās pašas virknītes dalās ar (attiecīgi ar ).  
Ar dalās tādēļ, ka virknītē ir vismaz divi skaitļi, kas dalās ar .  
Ar dalās tādēļ, ka virknītē ir vismaz viens, kas dalās ar ,  
un vēl divi citi skaitļi, kas dalās ar .

Ar , , var nedalīties, jo virknīte var nesaturēt nevienu, kas dalītos ar kādu no šiem pirmskaitļiem.  
Ar var nedalīties, ja virknītē ir tikai viens skaitlis, kas dalās ar .

# Kaut kas paliek nemainīgs (nt.remainder.invariant)

**Q-9-1.** Vai pa apli var uzrakstīt naturālus skaitļus tā, lai jebkuru blakus esošu skaitļu starpība (no lielākā skaitļa atņemot mazāko) būtu , , vai ? Aplūkot divus gadījumus: un .

***Atbilde:***  
*I daļa.* Ja skaitļu skaits , tad atbilde ir (izvēlēties no "Jā" un "Nē"): \_\_\_\_\_\_  
*II daļa.* Ja skaitļu skaits , tad atbilde ir (izvēlēties no "Jā" un "Nē"): \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:* Pie atbilde ir "Jā": pietiek izveidot virkni, kurai pamīšus ir divas vērtības: . Pie atbilde ir "Nē". Katriem diviem blakusesošiem skaitļiem viņu atlikumi, dalot ar , atšķiras par . Veicot nepāra skaitu šādu pāreju no uz , no uz , utt., no uz , iegūsim, ka (apļa sākumā) un (apļa beigās) arī dot dažādus atlikumus, dalot ar . Pretruna.

**Q-9-2.** Vai skaitli var iegūt, saskaitot nepāru skaitļu kvadrātus (t.i. skaitļus ). Saskaitāmajiem nav noteikti jābūt dažādiem. Aplūkot vērtības ?

***Atbilde:***  
*I daļa.* Ja (izvēlēties no "Jā" un "Nē"): \_\_\_\_\_\_  
*II daļa.* Ja (izvēlēties no "Jā" un "Nē"): \_\_\_\_\_\_  
*III daļa.* Ja (izvēlēties no "Jā" un "Nē"): \_\_\_\_\_\_  
*IV daļa.* Ja (izvēlēties no "Jā" un "Nē"): \_\_\_\_\_\_  
*V daļa.* Ja (izvēlēties no "Jā" un "Nē"): \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:* Ikviens nepāru skaitļu kvadrāts dod atlikumu , dalot ar . Tā kā un dalās ar , tad saskaitāmo skaitam jādalās ar . Astoņiem saskaitāmajiem atrisinājums eksistē, piemēram, .

**Q-9-3.** Uz tāfeles pa reizei uzrakstīti visi naturālie skaitļi no līdz ieskaitot. Ar vienu gājienu var izvēlēties uz tāfeles uzrakstītus skaitļus un , nodzēst tos, un to vietā uzrakstīt . Pēc četriem šādiem gājieniem uz tāfeles būs palikuši četri skaitļi. Cik no tiem var būt nepāru skaitļi?

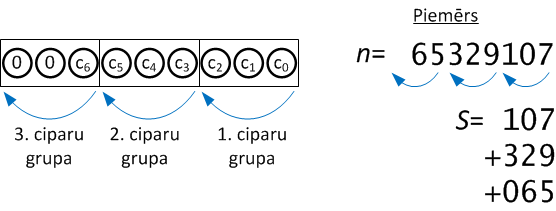
***Atbilde:*** Ierakstīt pretī skaitļu skaitam "Jā", ja tas ir iespējams nepāru skaitļu skaits.



*Atrisinājums:* Ir iespējami , vai nepāru skaitļi. Sākumā ir četri nepāru skaitļi. Pēc katra gājiena nepāru skaitļu skaits var palikt nemainīgs (ja un ir abi pāru, vai arī viens no tiem ir pāru), vai arī samazināties par divi (ja un ir abi nepāru). Tādēļ nepāru skaitļu skaita paritāte nemainās.

# Decimālpieraksts kļūst par izteiksmi (nt.decnotation.expressions)

**Q-10-1.** Skaitļa decimālpierakstu (sākot no labās puses) sagriež gabalos pa cipariem katrā gabalā. Ja ciparu skaits nedalās ar , skaitļa sākumā pieraksta vienu vai divas nulles. Visus 3-ciparu gabalus saskaita un iegūst summu . (Sk. piemēru attēlā, kur skaitli pārveido par .) Kuriem ir spēkā "dalāmības pazīme": dalās ar tad un tikai tad, ja summa dalās ar ?



Attēls: Skaitļa pārveidošana, izmantojot "dalāmības pazīmi"

***Atbilde:*** Atzīmēt visas atbildes , kam der šī "dalāmības pazīme":

*Atrisinājums:* Dalāmības pazīme der skaitļiem un . Jo decimālciparu pārvietojot par pozīcijām, skaitlis samazinās par vai utt. (līdzīgi var izspriest, kas notiek ja decimālciparu pārvieto par pozīcijām).  
Visiem citiem skaitļiem (ja tie nav dalītāji) šo dalāmības pazīmi var apgāzt. Teiksim, skaitlis dalās ar , bet nedalās ar , utt.

**Q-10-2.** Atrast mazāko četrciparu skaitli, kurš dalās ar un kam visi cipari ir dažādi.

***Atbilde:*** Ierakstīt skaitli: \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:* Mazākais četrciparu skaitlis varētu sākties ar cipariem "12" (mazāki cipari skaitļa sākumā nevar būt, lai tas būtu četrciparu). Ja trešais cipars būtu "3", tad pēdējam ciparam būtu jābūt "2" ( dalās ar ), bet tas neatbilst noteikumiem.  
Tādēļ trešais cipars ir "4" un pēdējais cipars ir "3". Skaitlis dalās ar .

**Q-10-3.** Zināms, ka .  
Aplūkojam visas divnieka pakāpes līdz tam: Vai vairāk ir tādu divnieka pakāpju, kuru decimālpieraksts sākas ar ciparu "1", vai arī tādu, kuru decimālpieraksts sākas ar cipariem "2" vai "3"?

***Atbilde:*** Atzīmēt patiesu apgalvojumu par divnieka pakāpēm kopā .

*Atrisinājums:* Pakāpes var sadalīt pāros: , , , utt. Katrā pārī ir viena pakāpe, kas sākas ar ciparu "1" (tāda ir jebkuram ciparu skaitam, jo reizinot ar nevar uzreiz aizlēkt uz skaitli, kas sākas ar "2" vai lielāku ciparu). Savukārt divreiz lielāka par šo ir tāda pakāpe, kas sākas ar ciparu "2" vai "3" (tas ir otrais skaitlis katrā pārī). Tātad šo pakāpju ir vienāds skaits.

Ņemot vērā, ka ir -ciparu skaitlis, kas sākas ar ciparu "4", pirms tam bija pakāpes, kas sākās ar ciparu "1" un pakāpes, kas sākās ar cipariem "2" vai "3". (Un kopā atliek vēl pakāpes, kas sākas ar citiem cipariem.)

# Atzīmēt skaitļus, kas apmierina apgalvojumu (nt.primes.small)

**Q-11-1.** Kuriem skaitļiem vienmēr ir spēkā apgalvojums: Ja reizinājums dalās ar , tad vai (vai tie abi) dalās ar .

***Atbilde:*** Tabulā esošos nepāru skaitļus atzīmēt ar "Jā" vai "Nē" - atkarībā no tā, vai apgalvojums ir spēkā.



*Atrisinājums:* Minētais nosacījums ir t.s. Eiklīda lemma - tas ir spēkā pirmskaitļiem (un nav spēkā saliktiem skaitļiem).

**Q-11-2.** Zināms, ka visas daļas ir nesaīsināmas. Kāds var būt ?

***Atbilde:*** Tabulā esošos nepāru skaitļus atzīmēt ar "Jā" vai "Nē" - atkarībā no tā, vai apgalvojums ir spēkā.



*Atrisinājums:* Minētais nosacījums nozīmē, ka skaitlim nav kopīgu reizinātāju (lielāku par ) starp skaitļiem . T.i. ir pirmskaitlis.

**Q-11-3.** Zināms, ka skaitļa kvadrātam ir tieši dažādi dalītāji (ieskaitot un pašu skaitli ). Kāds var būt ?

***Atbilde:*** Tabulā esošos nepāru skaitļus atzīmēt ar "Jā" vai "Nē" - atkarībā no tā, vai apgalvojums ir spēkā.



*Atrisinājums:* Ja ir pirmskaitlis, tad tā kvadrātam ir tieši trīs dalītāji (, un ). Visu salikto skaitļu kvadrātiem ir vairāk dalītāju. Tādēļ jāatzīmē visi pirmskaitļi.

# Skaitļi ar simetrisku decimālpierakstu (nt.factorization.divisibilityrules)

**Q-12-1.** Pēterītis aprēķināja kā decimāldaļu: . Iekavas te apzīmē to, ka ciparu "142857" veidotais periods atkārtojas bezgalīgi daudz reižu: . Pēc tam Miķelītis pareizināja periodu ar un ieguva . Atrast mazāko skaitli , kura decimālpieraksts sastāv tikai no vieniniekiem un kas dalās ar .

***Atbilde:*** \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:* Ja dalās ar , tad arī dalās ar . Ja ar dalītos skaitlis ar mazāku vieninieku skaitu ( vai ), tad arī starpība (attiecīgi ) dalītos ar . Bet viegli pārbaudīt, ka ne , ne ar nedalās (un arī pēc reizināšanas ar desmitnieka pakāpi nedalās).

**Q-12-2.** Dalījums ir periodiska decimāldaļa (cipari "076923" bezgalīgi daudzas reizes atkārtojas). Kurš no dotajiem skaitļiem noteikti dalās ar ?

***Atbilde:*** Atzīmēt skaitli, kurš dalās ar :

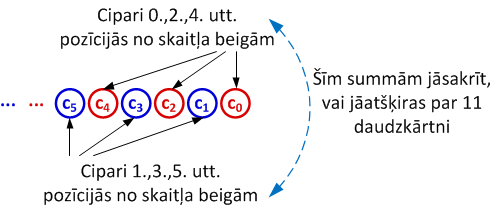
*Atrisinājums:* Periodā esošos ciparus reizinot ar , iegūsim . Tātad atbilde (D) der. Savukārt citas atbildes neder, jo tad attiecīgo skaitļu starpības ar dalīsies ar . Mēs iegūtu, ka vai (piereizināti ar desmitnieka pakāpēm) dalās ar . Pretruna.

**Q-12-3.** 6-ciparu skaitlis iegūts, uzrakstot tos pašus ciparus divas reizes. Ar kuru skaitli noteikti dalās :

***Atbilde:*** Atzīmēt vienu atbildi:

*Atrisinājums:* . Iegūstam, ka skaitlis dalās ar , bet ne ar kādu citu fiksētu skaitli tam nav jādalās, jo trīsciparu skaitlis var būt jebkāds.

**Q-12-4.** Skaitli sauc par *palindromu*, ja tā decimālpieraksts nemainās, skaitli pierakstot no otra gala. Kuri no palindromiem dalās ar ?  
*Var izmantot dalāmības pazīmi ar : ciparu summa pāru pozīcijās un ciparu summa nepāru pozīcijās sakrīt, vai arī dalās ar* .



Attēls: Dalāmības pazīme ar 11

***Atbilde:*** Atzīmēt visas atbildes:

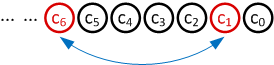
*Atrisinājums:* Tie palindromi, kuros ir pāra skaits ciparu, vienmēr dalās ar , jo viens no simetriskajiem cipariem nonāks pāru pozīcijā, otrs - nepāru pozīcijā. Savukārt palindromi ar nepāru skaitu ciparu jāpārbauda atsevišķi. Pārbaudot dalāmības pazīmi, iegūstam, ka nedalās ar , bet visi pārējie skaitļi dalās ar .

**Q-12-5.** Atrast mazāko -ciparu palindromu (skaitli, kas vienādi lasāms no abiem galiem, t.i. 1.cipars sakrīt ar 5.ciparu un 2.cipars sakrīt ar 4.ciparu), kurš dalās ar .

***Atbilde:*** Ierakstīt 5-ciparu skaitli: \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:* Neviens 5-ciparu skaitlis nevar būt mazāks par (skaitli, kas sākas ar cipariem "10"). Simetrijas dēļ, iegūstam, ka palindromā jābūt . Ja , tad dalās ar , jo ciparu summa pāru pozīcijās (sākot skaitīt ar 0.-to pozīciju) ir , bet ciparu summa nepāru pozīcijās ir . Un dalās ar . Var pārbaudīt arī bez pazīmes - ar dalīšanas algoritmu.

**Q-12-6.** Skaitli ieguva no skaitļa , decimālpierakstā samainot vietām ciparus, kuru attālums ir tieši pozīcijas. Piemēram, no skaitļa var iegūt skaitli . Ar kuru skaitli noteikti dalās starpība ?



Attēls: Skaitļa ciparu mainīšana 5 pozīciju atstatumā

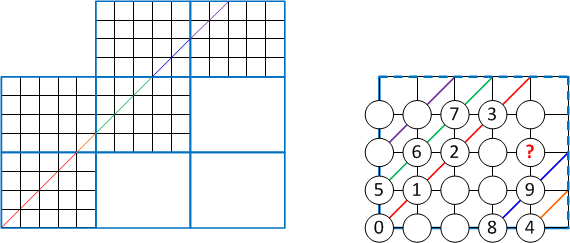
***Atbilde:*** Atzīmēt visas atbildes (skaitļus, ar ko noteikti dalās , neatkarīgi no izvēles un cipariem, kuri tika mainīti):

*Atrisinājums:* Mainot ciparus un , kas atrodas pozīciju attālumā (ja cipars atrodas skaitļa pašās beigās), skaitlis mainās par . Ja neatrodas pašās beigās, tad attiecīgā starpība ir , , utt. T.i. piereizināts ar pakāpi.

Iegūstam, ka visos gadījumos būs daudzkārtnis. Sadalām pirmreizinātājos: .  
Varam secināt, ka noteikti dalās ar un . Ar citiem skaitļiem šī starpība var nedalīties; var aplūkot piemēru ar jau minētajiem skaitļiem un .

# Taisne iet caur rūtiņu režģi (nt.gcd.chineseremainders)

**Q-13-1.** Caurspīdīgi ķieģelīši ar izmēriem rūtiņas ir salikti grēdā. Dažiem no tiem grādu leņķī pret to malām spīd cauri gaismas stars, kurš, ejot pāri ķieģelīšu robežai, ikreiz maina krāsu. Ja stara šķērsotos ķieģelīšus saliek vienu aiz otra, var atzīmēt, kādā secībā stars šķērso rūtiņu virsotnes - kā attēlots palielināti attēla labajā pusē. (Ja rūtiņu virsotne atrodas uz ķieģelīšu robežas, uzskatām, ka tā pieder ķieģelīša kreisajai vai apakšējai malai, nevis labajai vai augšējai).  
Ar kuru kārtas numuru stars šķērsos rūtiņu virsotni , kas attēlā apzīmēta ar jautājuma zīmi?



Attēls: Taisne šķērso ķieģelīšu grēdu

***Atbilde:*** Ierakstīt naturālu skaitli: \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:* Gaismas staram nepieciešami soļi, lai atgrieztos tanī pašā horizontālā pozīcijā. Zem jautājumzīmes ir divi aplīši, kurus stars apciemoja attiecīgi 4. solī un 9. solī. Tātad virsotnē ar jautājuma zīmi stars nonāks 14. solī. Par to var pārliecināties arī skaitli dalot ar atlikumu: dalot ar atlikums ir , bet dalot ar atlikums ir .

**Q-13-2.** Atrast piemēru skaitlim, kurš dalot ar dod atlikumu ; dalot ar dod atlikumu ; dalot ar dod atlikumu ; dalot ar dod atlikumu , un dalot ar dod atlikumu .

***Atbilde:*** Ierakstīt skaitļa piemēru: \_\_\_\_\_\_

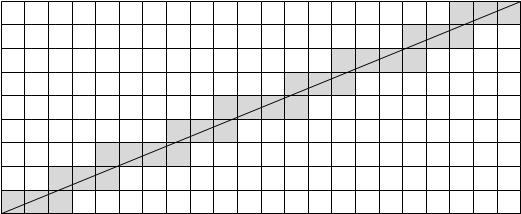
*Atrisinājums:* Ja skaitlim piemīt minētās īpašības, tad dalās bez atlikuma ar . Mazākais kopīgais dalāmais šiem skaitļiem ir . Tādēļ, piemēram, izpildīs vajadzīgos nosacījumus.

**Q-13-3.** Par skaitli zināms, ka tas dod atlikumu , dalot ar , un atlikumu , dalot ar . Kādu atlikumu dod skaitlis , ja to dala ar ?

***Atbilde:*** Ierakstīt atlikumu (no līdz ): \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:* Intervālā ir tikai nedaudzi skaitļi, kas dod atlikumu , dalot ar . Tie ir . No minētajiem skaitļiem tikai dod atlikumu , dalot ar . (Pieskaitot daudzkārtņus, varam iegūt arī citus skaitļus ar minēto īpašību, piemēram, , bet tiem būs tāds pats atlikums, dalot ar .) ir vienīgā atbilde.

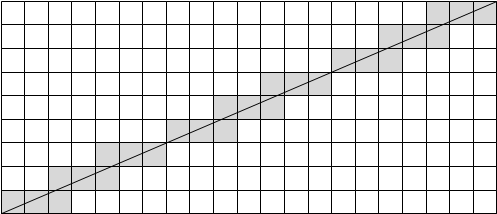
**Q-13-4.** Dots taisnstūris, ko veido kvadrātveida rūtiņas; tam novilkta diagonāle. Cik rūtiņu šķērso šī diagonāle (pieskaršanos rūtiņas stūrim neuzskatām par šķērsošanu).



Attēls: Diagonāles šķērsotās rūtiņas 9x22

***Atbilde:*** Atzīmēt vienu atbildi:

**Q-13-5.** Dots taisnstūris, ko veido kvadrātveida rūtiņas; tam novilkta diagonāle. Cik rūtiņu šķērso šī diagonāle (pieskaršanos rūtiņas stūrim neuzskatām par šķērsošanu).



Attēls: Diagonāles šķērsotās rūtiņas 9x21

***Atbilde:*** Izvēlēties vienu pareizo atbildi:

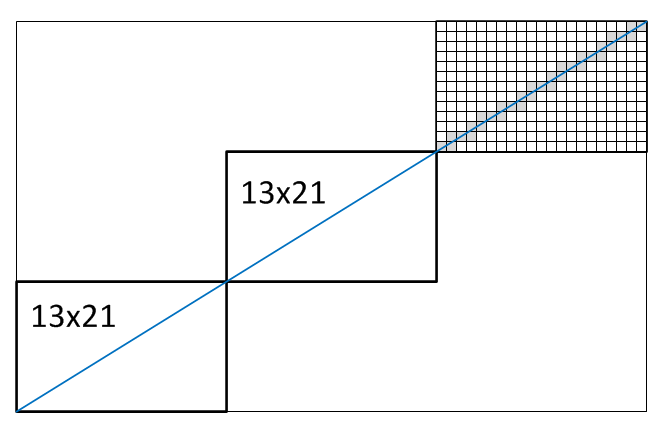
*Atrisinājums:* Lielākais kopīgais dalītājs skaitļiem un ir . Tas nozīmē, ka taisnstūra diagonāle taisnstūra iekšienē divas reizes iet caur rūtiņu virsotnēm. Uz lielā taisnstūra diagonāles var iezīmēt mazākus taisnstūrus . Katrā no šiem mazākajiem taisnstūriem diagonāle šķērso rūtiņas. Jo diagonāle iezīmē taisnstūra kreiso apakšējo stūri, turklāt tai reizes jābrauc uz augšu un reizes jābrauc pa labi; tādēļ pavisam šķērsotas . Visos trijos taisnstūrīšos kopā tiks šķērsotas .

**Q-13-6.** Taisnstūrī ar izmēriem rūtiņas novilkta diagonāle. Cik rūtiņas šī diagonāle šķērso? (Rūtiņu saucam par šķēŗsotu, ja diagonāle to sagriež divās daļās.). Aplūkot divus taisnstūru izmērus: un .

***Atbilde:***  
*I daļa.* Taisnstūrī šķērsoto rūtiņu skaits: \_\_\_\_\_\_  
*II daļa.* Taisnstūrī šķērsoto rūtiņu skaits: \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:* Taisnstūra izmēri ir savstarpēji pirmskaitļi; tādēļ diagonāle neies cauri nevienai rūtiņu virsotnei taisnstūra iekšienē. Varam uztvert diagonāles šķērsotās rūtiņas kā izvietotas uz šaha karaļa ceļa, kas katrā gājienā drīkst virzīties uz augšu vai pa labi. Iespējamo gājienu uz augšu ir , gājienu pa labi ir . Ieskaitot sākumrūtiņu, šķērsoto rūtiņu skaits ir .

Taisnstūra izmēru LKD ir , t.i. diagonāle taisnstūra iekšpusē šķērsos divas rūtiņu virsotnes (sk. attēlu). Tādēļ var aplūkot atsevišķi trīs mazākus taisnstūrus . Analizējot tos tāpat kā iepriekšējā piemērā, diagonāle šķērsos rūtiņas katrā no tiem. Savukārt visos trijos taisnstūros diagonāle šķērsos rūtiņas. (Turpinot analoģiju par šaha karali - šajā gadījumā karalis drīkst izdarīt divus gājienus pa diagonāli uz ziemeļaustrumiem, tādēļ šķērsoto rūtiņu skaits ir nevis (t.i. līdzīgi iepriekšējam gadījumam), bet gan par mazāks.)



Attēls: Taisnstūris, kura malas nav savstarpēji pirmskaitļi

# Dalīšana pirmreizinātājos (nt.factorization.plain)

**Q-14-1.** Kurš ir mazākais pilnais kvadrāts, kas dalās ar trim dažādiem pirmskaitļiem? (Skaitli sauc par *pilnu kvadrātu*, ja tas ir kādam naturālam .)

***Atbilde:*** Ierakstīt skaitli: \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:* Trīs mazākie pirmskaitļi ir , tādēļ šis skaitlis būs . Varētu izvēlēties arī citus pirmskaitļus, bet tad rezultāts sanāks lielāks.

**Q-14-2.** Skolas orķestris noskaidroja, ka viņi var sarindoties , vai vienādās rindās tā, lai neviens nepaliek pāri. Kāds ir mazākais skolēnu skaits šajā orķestrī?

***Atbilde:*** Ierakstīt skaitli: \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:* Skolēnu skaits orķestrī dalās ar , , . Mazākais šāds skaitlis būs , , lielākais kopīgais dalāmais. T.i. .

**Q-14-3.** Kāds ir mazākais veselais skaitlis, kurš dalās ar 7, bet dod atlikumu 1, ja to dala ar jebkuru skaitli no 2 līdz 6?

***Atbilde:*** Ierakstīt skaitli: \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:* Ja skaitlis dod atlikumu , to dalot ar skaitļiem no līdz , tad dalās ar šiem pašiem skaitļiem bez atlikuma. T.i. ir skaitļu mazākā kopīgā dalāmā daudzkārtnis. T.i. ir skaitļa daudzkārtnis, jeb .  
Aplūkojam dažādas iespējas: nedalās ar (atl.), nedalās ar (atl. ), Katrs nākamais skaitlis būs par lielāks, t.i. atlikumi pieaugs par (tāds ir atlikums, dalot ar ).

Iegūstam atlikumu virknīti . T.i. der. Tiešām - dalās ar , bet, dalot ar mazākiem skaitļiem intervālā , dod atlikumu .

**Q-14-4.** Divi velosipēdisti sāk braukt no kopīgas starta līnijas 12:15. Vienam velosipēdistam vajag minūtes, lai apbrauktu apli, kamēr otrs velosipēdists apbrauc apli katras minūtes. Pieņemot, ka viņu ātrumi ir nemainīgi, kad būs nākamais brīdis, kad viņi abi reizē šķērsos šo starta līniju?

***Atbilde:*** Ierakstīt pulksteņa laiku formā : \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:* Satikšanās uz tās pašas starta līnijas būs tad, kad pagājušo minūšu skaits būs un mazākais kopīgais dalāmais (t.i. minūtes). Šajā laikā viens velosipēdists būs apbraucis pilnus apļus, bet otrs - pilnus apļus. No laika brīža 12:15 šīs minūtes būs pagājušas 13:03.

**Q-14-5.** Divus skaitļus un sauc par "savstarpējiem pirmskaitļiem", ja to lielākais kopīgais dalītājs ir (jeb daļa ir nesaīsināma). Cik daudzi veselie skaitļi no līdz ir savstarpēji pirmskaitļi ar ?

***Atbilde:*** Ierakstīt skaitu: \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:* Skaitlis nedrīkst dalīties ar vai . Atrodam visus nepāru skaitļus (no tiem atskaitām vēl arī un , kuri gan ir nepāru skaitļi, bet dalās ar ). Tādēļ savstarpēju pirmskaitļu ar intervālā būs (izteiksme atrod nepāru skaitļus).

**Q-14-6.** Atrast piecus mazākos skaitļa daudzkārtņus, kuri ir pilni kvadrāti.

***Atbilde:*** Ierakstīt 5 skaitļus, atdalot ar semikoliem: \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:* Lai pilns kvadrāts dalītos ar , tam jādalās ar . Aplūkojam , , , , . (Reizinot ar skaitli, kurš nav pilns kvadrāts, arī rezultāts nebūs pilns kvadrāts, tādēļ tos neaplūkojam.) Tātad vajadzīgā virkne ir .

**Q-14-7.** Atrast piecus mazākos pilnos kvadrātus, kas dalās ar .

***Atbilde:*** Ierakstīt 5 skaitļus, atdalot ar semikoliem: \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:* Ar dalās visi tie pilnie kvadrāti, kas sadalījumā pirmreizinātājos satur gan , gan , t.i. dalās ar . Tie ir , , , , . (Reizinot ar skaitli, kurš nav pilns kvadrāts, arī rezultāts nebūs pilns kvadrāts, tādēļ tos neaplūkojam.) Tātad vajadzīgā skaitļu virkne ir .

**Q-14-8.** Burvju kases aparāts pašā sākumā izdrukāja mazāko skaitļa daudzkārtni, kas ir pilns kvadrāts (izsakāms kā veselam ); pašās beigās tas izdrukāja mazāko skaitļa daudzkārtni, kas ir pilns kubs (izsakāms kā veselam ) un pa vidu tiem - arī visus skaitļa daudzkārtņus, kuri atrodas starp šiem abiem skaitļiem. Cik skaitļu kases aparāts izdrukāja?

***Atbilde:*** Ierakstīt izdrukāto skaitļu skaitu: \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:* Katrs daudzkārtnis satur gan , gan kā pirmreizinātāju. Tādēļ mazākais daudzkārtnis, kurš ir pilns kvadrāts būs , bet mazākais pilnais kubs būs . Ja kases aparāts drukāja arī visus daudzkārtņus, tad pilna izdrukātā virkne bija šāda: . Tajā ir pavisam locekļi.

**Q-14-9.** Kurš ir mazākais četrciparu skaitlis, kurš dalās ar , , , , un ?

***Atbilde:*** Ierakstīt četrciparu skaitli: \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:* Mazākais kopīgais dalāmais skaitļiem ir . Lai kāds skaitlis dalītos ar ir nepieciešami un pietiekami, lai tas dalītos ar . Mazākais četrciparu skaitlis, kas ir daudzkārtnis, ir .

**Q-14-10.** Atrast mazāko četrciparu skaitli, kas dalās ar katru no četriem mazākajiem pirmskaitļiem.

***Atbilde:*** Ierakstīt četrciparu skaitli: \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:* Mazākais kopīgais dalāmais pirmskaitļiem ir šo skaitļu reizinājums jeb . Lai kāds skaitlis dalītos ar ir nepieciešami un pietiekami, lai tas dalītos ar . Mazākais četrciparu skaitlis, kas ir daudzkārtnis, ir .

# Skaitļa dalītāju struktūra (nt.factorization.structure)

**Q-15-1.** Planētām , un vajag attiecīgi , un dienas, lai veiktu pilnu apli ap to pašu sauli. Ja visas trīs planētas sākumā ir sarindojušās uz tā paša stara (kuram saule ir sākumpunkts), kāds ir mazākais pozitīvais dienu skaits, pirms viņas nonāks šajā pašā stāvoklī?

***Atbilde:*** Ierakstīt veselu skaitli: \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:* Atrodam minētajiem trim skaitļiem mazāko kopīgo dalāmo . Pēc dienām visas trīs planētas būs veikušas veselu skaitu apļu ap savas saulessistēmas centru. Dalām visus skaitļus pirmreizinātājos:

Mazākais kopīgais dalāmais satur tos pašus pirmreizinātājus , bet to pakāpes ir maksimums no pakāpēm, ar kurām tās ieiet triju planētu periodos. T.i. .

Var risināt arī no otra gala - ievērot, ka visi planētu periodi dalās ar ; pēc dalīšanas paliek pāri skaitļi . Šo skaitļu MKD ir . Piereizinot atpakaļ , iegūsim .

**Q-15-2.** Cik daudzi no skaitļa pozitīvajiem dalītājiem ir pāru skaitļi?

***Atbilde:*** Ierakstīt dalītāju skaitu: \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:* Atbildēsim uz pretējo jautājumu: Cik daudzi no pozitīvajiem dalītājiem NAV pāru skaitļi? Sadalām pirmreizinātājos: . Ir divi nepāru pirmreizinātāji (katrs ieiet pirmajā pakāpē): un . Nepāru reizinātāji tātad ir skaitlis , abi šie pirmskaitļi un arī viņu reizinājums: .

Savukārt skaitlim ir pavisam dalītāji (katra pirmreizinātāja pakāpei pieskaitām un sareizinām). Tātad no šiem dalītājiem būs pāru skaitļi.

**Q-15-3.** Cik daudzi no skaitļa dalītājiem nav daudzkārtņi nevienam pilnam kvadrātam lielākam par ?

***Atbilde:*** Ierakstīt dalītāju skaitu: \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:* satur trīs dažādus pirmreizinātājus - , un . Lai veidotos tāds dalītājs , kurš nav daudzkārtnis pilnam kvadrātam, neviens no šiem pirmreizinātājiem nedrīkst dalījumā pirmreizinātājos ieiet vairāk kā vienu reizi. Tādēļ dalītājs var būt vai nu , vai nu kāds no pirmskaitļiem , vai divu (vai visu trīs) šo pirmskaitļu reizinājums. Iegūstam atbildes. Kombinatorikā pazīstamajā *reizināšanas likumā*: par katru no trim pirmskaitļiem varam atsevišķi pieņemt divus lēmumus - ņemt to starp pirmreizinātājiem vai neņemt. Tādēļ iespējamo kombināciju skaits ir .

Šie astoņi dalītāji ir sekojoši: .

**Q-15-4.** Ar apzīmējam visu to skaitļu kopu, kurus var izteikt kā triju pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu summu. Kāds ir lielākais kopīgais dalītājs visiem skaitļiem kopā ?

***Atbilde:*** Ierakstīt veselu skaitli: \_\_\_\_\_\_

*Atrisinājums:* Šie skaitļi ir , , utt. Viegli redzēt, ka to kopīgais dalītājs nevar būt lielāks par . No otras puses, visi tie dalās ar , jo .