Pārskats

December 15, 2017

id

## [1] "000001"

# Algebriskas metodes skaitļu teorijā

* **Anotācija:** Tests par mainīgo apzīmējumu un algebras metožu izmantošanu skaitļu teorijas uzdevumos.
* **Pēdējās izmaiņas:** 2017-12-12

**nt-R4.q1:** Kāds ir mazākais skaitlis, kas dod atlikumu , dalot ar , bet šī skaitļa ciparu summa ir lielāka nekā ?

**Atbilde:** 89

**Skaidrojums:** Saskaņā ar skaitļa dalāmības pazīmi, atlikumu dalot ar dod tie skaitļi , kuru ciparu summa dod atlikumu dalot ar . Tātad var būt . Pēc uzdevuma nosacījuma nevar būt . Mazākā iespējamā ciparu summa ir . To var iegūt kā divciparu skaitli divos veidos: vai (t.i. un ). Mazākais no šiem skaitļiem ir .

**nt-R4.q2:** Kāds ir mazākais skaitlis , kura ciparu summa ?

**Atbilde:** 8999999999

**Daļējs kredīts:** Ja atbilde ir 10-ciparu skaitlis ar ciparu summu , bet nav mazākais iespējamais.

**Skaidrojums:** Skaitli var iegūt kā ciparu summu ļoti daudzos veido. Ar deviņiem cipariem nepietiek (pat ja visi tie ir deviņnieki, tad ir tikai ). Ar desmit cipariem var: jāizmanto deviņi cipari "9" un viens cipars "8". Mazākais no šiem skaitļiem būs tas, kur cipars "8" ir pašā sākumā: .

**nt-R4.q3:** Naturāliem lielākais kopīgais dalītājs ar : var pieņemt dažādas vērtības. Uzrakstīt, kuras tās ir.  
(**Norāde:** *Ierakstīt visas iespējamās lielākā kopīgā dalītāja vērtības, atdalot ar komatiem. Secība nav svarīga.*)

**Atbilde:** 1,2,5,10,25,50

**Skaidrojums:** Lai skaitlis būtu lielākais kopīgais dalītājs skaitļiem un , tam jābūt skaitļa dalītājam. Skaitlim ir tieši seši dalītāji () - tie iegūstami kā dažādas kombinācijas pakāpju reizinājumiem , kur un (t.i. divas vērtības kombinējot ar trim vērtībām iegūstam sešas kombinācijas).  
Acīmredzot, visas šīs vērtības ir iegūstamas. Piemēram, ja , tad .

**nt-R4.q4:** Kāds ir lielākais kopīgais dalītājs visiem četrciparu palindromiem?  
(Par palindromiem sauc skaitļus, kurus vienādi lasa no abiem galiem, piemēram '1001')  
(**Norāde:** Ierakstīt veselu pozitīvu skaitli.)

**Atbilde:** 11

**Skaidrojums:** Aplūkosim divus pēc kārtas sekojošus četriciparu palindromus un . Atradīsim to lielāko kopīgo dalītāju. Pēc Eiklīda algoritma:

Ja visi četrciparu palindromi dalās ar , tad visu šo palindromu lielākais kopīgais dalītājs ir un nevar būt lielāks, jo un abi dalās tikai ar . Ja turpretī ir daži palindromi, kas ar nedalās, tad lielākais kopīgais dalītājs var būt tikai .  
Varam viegli pārliecināties, ka visi palindromi dalās ar , jo katram četrciparu skaitlim :

**nt-R4.q5:** Atrast algebrisku izteiksmi, kur mainīgajiem piešķirot naturālas vērtības, iegūsim sekojošu skaitļu kopu:  
: 'Visi 6-ciparu skaitļi, kuru decimālpierakstā 3-ciparu grupa divreiz atkārtojas'.

1. ,
2. , kur , ,
3. ,
4. ,
5. , kur ,
6. ; kur .

**Skaidrojums:** Apzīmējam sešciparu skaitli , kur "a", "b", "c" ir pirmie trīs cipari. Tad skaitli var izteikt kā desmitnieka pakāpju summu:

Ja skaitlis ir lielāks par vai mazāks par , tad tas nav trīsciparu skaitlis (un to atkārtojot divas reizes neiegūsim sešciparu skaitli).  
Ievietojot vietā , iegūsim , , utml., kas arī ir visi sešciparu skaitļi, kuros ciparu grupa divreiz atkārtojas.

**nt-R4.q6:** Atrast algebrisku izteiksmi, kur mainīgajiem piešķirot naturālas vērtības, iegūsim sekojošu skaitļu kopu:  
: 'Skaitļi, kam pēdējais cipars ir '.

1. ,
2. , kur , ,
3. ,
4. ,
5. , kur ,
6. ; kur .

**Atbilde:** c

**Skaidrojums:** Skaitļa decimālpierakstā pēdējais cipars apzīmē atlikumu, dalot ar . Tādēļ skaitlis, kura pieraksts beidzas ar , ir izsakāms .

**nt-R4.q7:** Atrast algebrisku izteiksmi, kur mainīgajiem piešķirot naturālas vērtības, iegūsim sekojošu skaitļu kopu:  
: 'Visi skaitļa pozitīvie dalītāji'.

1. ,
2. , kur , ,
3. ,
4. ,
5. , kur ,
6. ; kur .

**Atbilde:** b

**Skaidrojums:** Skaitļa dalījums pirmreizinātājos: . Lai skaitlis būtu dalītājs ir nepieciešami un pietiekami, lai saturētu tikai pirmreizinātājus un , turklāt pakāpes nepārsniegtu tās pakāpes, kuras ir skaitlī (t.i. attiecīgi un ). Tādēļ , kur un " (t.i. ir pavisam kombinācijas , kas atbilst visiem dalītājiem).

**nt-R4.q8:** Atrast algebrisku izteiksmi, kur mainīgajiem piešķirot naturālas vērtības, iegūsim sekojošu skaitļu kopu:  
: 'Naturāli skaitļi, kam nav kopīgu dalītāju ar , izņemot '.

1. ,
2. , kur , ,
3. ,
4. ,
5. , kur ,
6. ; kur .

**Atbilde:** a

**Skaidrojums:** Naturāli skaitļi, kuriem nav kopīgu dalītāju ar ir sekojoši: . Šie skaitļi veido divas aritmētiskas progresijas (abas ar diferenci ) - viena satur skaitļus , kuri dod atlikumu , dalot ar , bet otra satur skaitļus , kuri dod atlikumu , dalot ar . Abas šīs skaitļu virknes var īsi pierakstīt kā (t.i. skaitļa daudzkārtņiem pieskaita vai atņem vieninieku).

**nt-R4.q9:** Atrast algebrisku izteiksmi, kur mainīgajiem piešķirot naturālas vērtības, iegūsim sekojošu skaitļu kopu:  
: '11 pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu summa'.

1. ,
2. , kur , ,
3. ,
4. ,
5. , kur ,
6. ; kur .

**Atbilde:** f

**Skaidrojums:** Aritmētiskai progresijai summas formula ir

kur un ir pirmais un pēdējais progresijas loceklis, bet - saskaitīto locekļu skaits. Tā kā ir nepāru skaitlis, tad un abi ir pāru (vai abi ir nepāru), un to aritmētiskais vidējais būs vesels skaitlis, kurš nevar būt mazāks par . Savukārt reizinātājs summas formulā nozīmē, ka vienmēr dalīsies ar . Tādēļ pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu summa būs , kur .  
Viegli pamanīt, ka jebkuru skaitli var izteikt kā pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu summu, ja to progresijas vidējais loceklis vienāds ar .

**nt-R4.q10:** Atrast algebrisku izteiksmi, kur mainīgajiem piešķirot naturālas vērtības, iegūsim sekojošu skaitļu kopu:  
: 'Skaitļi, kam nav nepāru dalītāju, izņemot '.

1. ,
2. , kur , ,
3. ,
4. ,
5. , kur ,
6. ; kur .

**Atbilde:** d

**Atbilde:** Ja skaitļa dalījumā pirmreizinātājos ir kaut viens pirmskaitlis , tad tas arī ir skaitļa nepāru dalītājs, kas lielāks par . Tātad skaitlim nevar būt nepāru pirmreizinātāju, un vienīgais pāru pirmreizinātājs ir . Tātad skaitlis izsakāms kā divnieka pakāpe .

# Dirihlē princips

* **Anotācija:** Tests par Dirihlē principu.
* **Pēdējās izmaiņas:** 2017-12-12

**nt-R5.q1:** Makā ir monētas (eiro vai centu). Vai makā noteikti ir vismaz vienādas vērtības monētas?

1. true
2. false

**Atbilde:** a

**Skaidrojums:** Pavisam ir astoņu vērtību monētas centu, un eiro. No pretējā: Ja nebūtu vismaz monētu ar vienādu vērtību (vienalga kādas vērtības), tad varētu būt ne vairāk kā monētu katrai no astoņām vērtībām, t.i. to kopskaits nevarētu pārsniegt .

**nt-R5.q2:** Autobusā brauc cilvēki. Vai var apgalvot, ka vismaz no tiem dzimuši vienā mēnesī?

1. true
2. false

**Atbilde:** b

**Skaidrojums:** Tā kā ir pavisam mēneši, var gadīties, ka katrā no tiem dzimuši vai cilvēki no autobusā klātesošajiem (desmit mēnešos dzimuši , bet divos mēnešos dzimuši ). Tad . Šajā gadījumā nebūs neviena mēneša, kurā dzimuši vismaz cilvēki.

**nt-R5.q3:** Auto dīlerim ir Audi, BMW, VW un Volvo automašīnas. Kāds mazākais mašīnu skaits jānopērk, lai varētu apgalvot, ka ir nopirktas vismaz piecas vienas markas automašīnas?

**Atbilde:** 17

**Skaidrojums:** Ja nopirktas tikai mašīnas, tad var būt pa četrām no katras markas. Ja nopirktas mašīnas, tad nevar gadīties, ka no katras markas nopirktas mazāk kā piecas, jo .

**nt-R5.q4** Kāds ir mazākais skaits skolēnu, kam jābūt klasē, lai varētu apgalvot, ka vismaz 5 no tiem ir dzimuši vienā nedēļas dienā? (**Norāde:** *Ierakstīt veselu pozitīvu skaitli.*)

**Atbilde:** 29

**Skaidrojums:** Ja skolēnu ir , tad katrā no septiņām nedēļas dienām var būt dzimuši tikai skolēni. Ja skolēnu ir , tad nevar gadīties, ka katrā nedēļas dienā dzimuši mazāk kā skolēni, jo .

**nt-R5.q5:** Uz galda ir spēļu kārtis. Kāds lielākais skaits no tām noteikti ir vienā krāsā? (**Norāde:** *Ierakstīt veselu pozitīvu skaitli.*)

**Atbilde:** 8

**Skaidrojums:** Spēļu kārtīm ir divas krāsas (melna un sarkana). Ja tikai septiņas būtu katrā no krāsām, tad to kopskaits nevarētu pārsniegt . Tāpēc vismaz ir vienādā krāsā (nav zināms kādā). Nav obligāti, lai lielāks skaits būtu vienādā krāsā, jo var būt kārtis vienā krāsā, bet kārtis - otrā krāsā.

**nt-R5.q6** Kāds ir mazākais skaits skolēnu, kam jābūt skolā, lai divi no tiem noteikti būtu dzimuši vienā datumā (dd.mm). Arī tikai garajos gados esošie datumi (29.februāris) ir iespējami. (**Norāde:** *Ierakstīt veselu pozitīvu skaitli.*)

**Atbilde:** 367

**Skaidrojums:** Garajos gados ir datumi (parastajos gados datumi). Ja skolēnu skaits būs , tad noteikti kāds no datumiem atkārtosies, jo katram skolēnam nevarēs iedot "savu" datumu. Ja skolēnu ir tikai , tad var gadīties, ka katrs dzimis citā datumā.

**nt-R5.q7:** Taisnstūrim ir šāda īpašība: ja to pārgriež pa nogriezni, kas savieno tā garāko malu viduspunktus iegūst divus vienādus taisnstūrus, kas abi līdzīgi . Kāda ir garākās un īsākās malas attiecība?

1. ,
2. ,
3. ,
4. .

**Atbilde:** b

**Skaidrojums:** Ja un ir garākās malas, apzīmēsim to viduspunktus ar un . Sākotnējā taisnstūrī garākās un īsākās malas attiecība ir . Pēc pārgriešanas uz pusēm iegūtajā taisnstūrī malu attiecība ir . Tā kā , tad

Apzīmēsim , tad jeb . Tādēļ .

**nt-R5.q8:** Taisnstūrim ir šāda īpašība: ja tam nogriež kvadrātu, kura malas garums vienāds ar īsākās malas garumu, tad paliek pāri taisnstūris, kurš līdzīgs . Kāda ir garākās un īsākās malas attiecība?

1. ,
2. ,
3. ,
4. .

**Atbilde:** c

**Skaidrojums:** Ja un ir garākās malas, atzīmēsim uz šīm malām nogriežņus attiecīgi un tā, lai . Tad pēc kvadrāta nogriešanas paliks taisnstūris . Tā kā , tad

Apzīmēsim , tad jeb . Vienīgā sakne vienādojumam

ir .

**nt-R5.q9:** Dots bezgalīgs decimāldaļskaitlis . Uzrakstīt nesaīsināmu racionālu daļu, ar ko tas vienāds. (**Norāde:** *Ierakstīt atbildi formā a/b.*)

**Atbilde:** 2/9

**Skaidrojums:** Varam sasummēt bezgalīgu ģeometrisku progresiju:

Šeit izmantota formula , kur - ģeometriskās progresijas pirmais loceklis, bet ir kvocients.  
Varam šo pašu rezultātu iegūt arī apzīmējot . Tad . Atņemot šos abus skaitļus, iegūsim . No šejienes var izteikt .

**nt-R5.q10** Dots bezgalīgs decimāldaļskaitlis $0.(114)=0.114114114\\ldots$. Uzrakstīt nesaīsināmu racionālu daļu, ar ko tas vienāds. (**Norāde:** *Ierakstīt atbildi formā a/b.*)

**Skaidrojums:** Varam sasummēt bezgalīgu ģeometrisku progresiju:

# Dalāmības pazīmes

**nt-R6.q1** Skaitlis dod atlikumu , dalot ar , tad un tikai tad, ja

1. tas ir nepāra un tā pēdējais cipars dalās ar ,
2. tā ciparu summa dalās ar ,
3. tā ciparu summa dod atlikumu , dalot ar ,
4. tā pēdējo divu ciparu veidotais skaitlis dod atlikumu , dalot ar .

**Atbilde:** c

**Skaidrojums:** Dots skaitlis ar decimālpierakstu . Šajā gadījumā var izteikt skaitli sekojošā veidā:

Ja kādu no saskaitāmajiem šajā summā aizstāj ar , tad summa samazinās par . Ievērosim, ka skaitlis satur decimālpierakstā tikai deviņniekus, t.i. šis skaitlis dalās ar .  
Tātad aizstājot ar , nemainās atlikums, dalot ar . Ja aizstājam visus saskaitāmos ar attiecīgajiem cipariem, iegūsim, ka skaitļa ciparu summa dod tādu pašu atlikumu, dalot ar , kā pats skaitlis . Tātad pazīme skaitļiem , kuri dod atlikumu , dalot ar , ir tā, ka ciparu summa dod atlikumu , dalot ar .

**nt-R6.q2:** Skaitlis dalās ar tad un tikai tad, ja

1. tas ir pāra skaitlis un tā ciparu summa dalās ar ,
2. tas ir pāra skaitlis un tā pēdējais cipars dalās ar ,
3. tā pēdējo divu ciparu veidotais skaitlis dalās ar ,
4. tā pēdējais cipars dalās ar un tā ciparu summa dalās ar .

**Atbilde:** d

**Skaidrojums:** Lai skaitlis dalītos ar ir nepieciešami un pietiekami, lai tas dalītos ar un . Tādēļ var kombinēt attiecīgās dalāmības pazīmes: skaitļa pēdējais cipars dalās ar (dalāmības pazīme ar ) un ciparu summa dalās ar (dalāmības pazīme ar ).

**nt-R6.q3:** Kurš no dotajiem skaitļiem dalās ar ?

1. ,
2. ,
3. ,
4. .

**Atbilde:** c

**Skaidrojums:** Visi dotie skaitļi dalās ar . Tādēļ jāpārbauda dalāmība ar : kuram no skaitļiem ciparu summa dalās ar . Tas izpildās tikai skaitlim , jo , kas dalās ar .

**nt-R6.q4:** Kurš no dotajiem skaitļiem dalās ar ?

1. ,
2. ,
3. ,
4. ".

**Atbilde:** a

**Skaidrojums:** Lai skaitlis dalītos ar ir nepieciešams, lai tas dalītos ar un . Skaitlis nedalās ar . Savukārt vai nedalās ar . Atliek vienīgi .

**nt-R6.q5:** Skaitlis dalās ar , ja

1. tas dalās ar un ,
2. tā pēdējo divu ciparu veidotais skaitlis dalās ar ,
3. tas ir pāra un dalās ar ,
4. tas ir pāra un dalās ar .

**Atbilde:** a

**Skaidrojums:** Skaitlis izsakāms kā divu savstarpēju pirmskaitļu un reizinājums. Tādēļ ar dalās tad, ja tas dalās ar un .

**nt-R6.q6:** Kurš no dotajiem skaitļiem nedalās ar ?

1. ,
2. ,
3. ,
4. .

**Atbilde:** b

**Skaidrojums:** Ar dalās tieši tie skaitļi, kas dalās ar un . Visi uzrakstītie skaitļi dalās ar . Bet ne visi dalās ar : ja ciparu grupa "48" atkārtojas astoņas reizes, tad ciparu summa ir , kas dalās ar , bet ne ar .

**nt-R6.q7:** Lai pārbaudītu, vai skaitlis dalās ar , jāpārbauda, vai tas dalās ar

1. , un ,
2. un ,
3. , un ,
4. un .

**Atbilde:** a

**Skaidrojums:** Skaitlis dalās pirmreizinātājos šādi: . Skaitļi , un ir savstarpēji pirmskaitļi, tādēļ ar dalīsies tieši tie skaitļi, kas dalās ar , un .

**nt-R6.q8:** Kurš no dotajiem skaitļiem dalās ar ?

1. ,
2. ,
3. ,
4. .

**Atbilde:** d

**Skaidrojums:** Skaitlis, kas beidzas ar "660" nedalās ar (dalāmības pazīme ar - skaitļa pēdējiem trim cipariem jādalās ar ). Savukārt skaitļi , nedalās ar , jo ciparu summas un nedalās ar .

**nt-R6.q9:** Kurš no dotajiem skaitļiem dalās ar ?

1. ,
2. ,
3. ,
4. .

**Atbilde:** b

**Skaidrojums:** Skaitlis apmierina dalāmības pazīmi - ciparu summas pāru un nepāru pozīcijās dalās ar . Citi skaitļi neapmierina šo dalāmības pazīmi:  
Skaitlim : nedalās ar .  
Skaitlim : nedalās ar .  
Skaitlim : nedalās ar .

**nt-R6.q10:** Kurš no dotajiem skaitļiem dalās ar visiem skaitļiem no līdz ?

1. ,
2. ,
3. ,
4. .

**Atbilde:** c

**Skaidrojums:** Skaitlis dalās ar . (Dalāmību ar pārbauda tieši dalot; ar un izmantojam dalāmības pazīmi par pēdējo ciparu un pēdējiem trim cipariem; ar izmantojam dalāmības pazīmi par ciparu summu.)  
Starp citu,   
Citi skaitļi ar kaut ko nedalās:  
 nedalās ar .  
 nedalās ar .  
 nedalās ar .

**nt-R6.q11:** Kāds cipars jāievieto vietā skaitlī , lai tas dalītos ar ?

1. ,
2. ,
3. ,
4. ,
5. .

**Atbilde:** c

**Skaidrojums:** Skaitlis beidzas ar , tātad, acīmredzot, dalās ar . Tam jādalās arī ar , t.i. jādalās ar . Tātad vietā var ievietot vai , bet tikai ir cipars.

**nt-part1-04.q12:** Sareizināja visus naturālos skaitļus, kas mazāki par . Kādi ir pēdējie četri cipari reizinājumā:

**Atbilde:** 0000

**Skaidrojums:** Starp skaitļiem no līdz būs pietiekami daudzi skaitļi, kas dalās ar . Tos sareizinot iegūsim skaitli, kas dalās ar . Tātad reizinājums beidzas ar četrām nullēm.

**nt-part1-04.q13:** Sareizināja visus nepāru divciparu skaitļus, kas mazāki par . Kāds ir pēdējais cipars reizinājumā

**Atbilde:** 5

**Skaidrojums:** Starp nepāru skaitļiem atradīsies tie, kas dalās ar , tādēļ arī reizinājums dalīsies ar (turklāt ir nepāru skaitlis kā nepāru skaitļu reizinājums). Tātad reizinājums beidzas ar ciparu (nevis ar ).