Margus Smotrova

1. nodarbības uzdevumu risinājumi

**Uzdevums 1.1**

Tā vietā, lai atrastu mazāko vērtību, ar kuru, izvēloties jebkurus skaitļus no , noteikti vismaz divi skaitļi nebūs savstarpēji pirmskaitļi, es mēģināšu atrast lielāko vērtību, ar kuru ir iespējams atlasīt skaitļus, starp kuriem visi ir savstarpēji pirmskaitļi.

Lai divi skaitļi būtu savstarpēji pirmskaitļi, tiem nedrīkst būt neviena kopīga pirmreizinātāja(un arī otrādi – ja diviem skaitļiem nav neviena kopīga pirmreizinātāja, tie ir savstarpēji pirmskaitļi), tādēļ, lai starp daudziem skaitļiem katri divi būtu savstarpēji pirmskaitļi, neviens pirmreizinātājs nedrīkst būt vairāk kā vienā pirmskaitlī. Tādēļ vispirms atradīsim visus pirmreizinātājus, kas vispār var būt skaitļos no līdz :

Vispirms, noteikti der visi tie pirmskaitļi, kas atrodas starp un , un tie ir: tātad kopā pirmskaitļi. Pirmreizinātājos var būt arī par mazāki pirmskaitļi, kurus sareizinot ar kādu citu skaitli, iegūst skaitli starp un , kas, sanāk, ir visi pirmskaitļi, mazāki par : tātad kopā pirmskaitļi.

Lai varētu izveidot pēc iespējas vairāk skaitļu, starp kuriem neviens pirmreizinātājs neatkārtojas, jāmēģina katrā skaitlī “ielikt” pēc iespējas mazāk dažādu pirmreizinātāju – labākajā gadījumā tikai vienu. Katru pirmreizinātāju no līdz mums visizdevīgāk ir ievietot katru savā skaitlī, kas ir vienādi ar tiem pašiem pirmreizinātājiem, tā iegūstot skaitļus, kuri visi ir savstarpēji pirmskaitļi. Arī katru no atlikušajiem saliktajiem skaitļiem jāmēģina veidot ar pēc iespējas mazāku dažādu pirmskaitļu skaitu. Pirmreizinātāju mēs varam “pārstāvēt” skaitlī , kā pirmreizinātājos ir tikai viens dažāds skaitlis , tādēļ tas mums ir izdevīgi. Līdzīgi pirmreizinātāju mums ir izdevīgi pārstāvēt skaitlī , pirmreizinātāju – skaitlī , bet pirmreizinātāju 13 – skaitlī . Pirmskaitļiem , un no līdz nevar atrast skaitli starp un , kurā tie būtu vienīgie pirmreizinātāji, tāpēc, ja tie būtu kādā mūsu izvēlētā skaitlī, tad kopā ar vismaz vienu citu pirmreizinātāju. Kopā no visiem šiem pirmreizinātājiem var izveidot tikai vēl divus derīgus skaitļus, piemēram, un , jo katri divi pirmskaitļi no līdz veido reizinājumu lielāku par , tātad nevienā pirmskaitlī nevar būt pārstāvēti divi no tiem, tātad, ja tie ir pārstāvēti, tad skaitlī kopā ar kādu no mazākajiem pirmskaitļiem, piemēram, vai . Tie varētu būt arī skaitlī, kurā ir arī , , vai , bet tas nekādi nesamazinātu kopējo savstarpējo pirmskaitļu skaitu.

Tātad esam atlasījuši savstarpējos pirmskaitļus, cik vien izdevīgi iespējams, un ieguvuši skaitļus, piemēram:

. Tā kā ir lielākais skaits, cik skaitļu mēs varam paņemt no , ka ir iespējams, ka visi tie ir savstarpēji pirmskaitļi, tad ir mazākā vērtība, ar kuru mēs varam apgalvot, ka, atlasot jebkurus skaitļus no , starp tiem noteikti atradīsies vismaz divi skaitļi, kuri nav savstarpēji pirmskaitļi.

**Uzdevums 1.3**

Jā, eksistē tāda bezgalīga, stingri augoša naturālu skaitļu virkne , ka ar jebkuru naturālu skaitli virknē ir galīgs skaits pirmskaitļu. Piemēram, der virkne, kurai . Tā kā dalās ar visiem skaitļiem no līdz , tad (šajos piemēros, ja ) arī dalās ar , jo ir pāra, un, tam pieskaitot , atkal iegūst skaitli, kas dalās ar , līdzīgi arī un . Vispārinot, visi skaitļi starp dalās ar , jo, tā kā , dalās ar , un, tā kā , tad arī dalās ar . Skaidrs, ka, tā kā , tad , kā arī pēc kreisās nevienādības puses varam izsecināt, ka . Tātad šis nav vienāds ne ar pašu , ne ar . Un, tā kā dalās ar šo , tad varam izsecināt, ka nav pirmskaitlis.

Otrās rindas -tais loceklis ir , un, tā kā ir naturāls skaitlis, tad . No otras puses, jebkuram rindas loceklim , ja , redzam, ka . No pirmā apgalvojuma izriet, ka otrajā virknē , bet no otrā apgalvojuma, aizstājot ar , iegūst, ka ja , tad . Savienojot to ar pirmajā rindkopā pierādīto, tā kā, ja , tad , iegūstam, ka visi virknes locekļi sākot no -mā nav pirmskaitļi, tā ka pirmskaitļi var būt tikai pirmie virknes locekļi, kas nozīmē, ka to ir tikai galīgā skaitā, kas arī bija jāpierāda.

**Uzdevums 1.4**

Lai pierādītu, ka virkne satur bezgalīgu apakšvirkni, kuras katri divi locekļi ir savstarpēji pirmskaitļi, parādīšu, kā no šīs virknes var bezgalīgi atlasīt skaitļus tā, lai katram nākamajam skaitlim nebūtu kopīgu pirmreizinātāju ar nevienu no iepriekšējiem skaitļiem. Redzam, ka virkne sastāv no visiem naturālajiem skaitļiem, kuru pierakstā izmanto tikai ciparu , tātad mēs varam atlasīt jebkādus naturālus skaitļus, kuru visi cipari ir . No sākuma atlasīsim skaitli . Tad sameklēsim kādu skaitli, kas sastāv tikai no vieniniekiem un kas dalās ar – viens no tiem ir pats . Tagad sareizināsim to ar – iegūstot skaitli , kas joprojām dalās ar – un pieskaitīsim tam , iegūstot . Tā kā tas ir par vienu lielāks nekā skaitlis, kas dalās ar , šim skaitlim noteikti nav neviena pirmreizinātāja, tātad tie abi noteikti ir savstarpēji pirmskaitļi. Tagad mums jāsameklē skaitlis, kas sastāv tikai no vieniniekiem un kas dalās gan ar , gan ar . Tādu noteikti var atrast, jo der, piemēram, skaitlis, kam ir tik vieninieku, cik ir visu jau esošo skaitļu vieninieku skaitu reizinājums – piemēram, ja mums ir skaitļi , un ar attiecīgi , un vieniniekiem un , tad skaitli ar vieniniekiem var izteikt kā , kas nozīmē, ka dalās ar , līdzīgi dalās arī ar un .

Tātad, mēs šoreiz atrodam skaitli, kam ir vieninieki – – un atkal sareizinām to ar un pieskaitām – pēc iepriekš apspriestā, šim skaitlim nav kopīgu pirmreizinātāju ne ar , ne , turklāt visi tā cipari ir . Un tā mēs varam turpināt bezgalīgi ilgi – paņemt skaitli ar tik vieniniekiem, cik ir visu jau esošo skaitļu vieninieku skaitu reizinājums, sareizināt to ar un pieskaitīt , iegūstot citu virknes locekli(jo loģiski, ka tam būs vairāk vieninieku nekā jebkuram jau atlasītam virknes loceklim, tāpēc tas nevar sakrist ar kādu no tiem), kas ir savstarpējs pirmskaitlis ar visiem iepriekšējiem, un atkārtot no jauna. Tādējādi esam pierādījuši, ka mēs varam izveidot un tātad eksistē dotās virknes apakšvirkne, kuras visi locekļi ir savstarpēji pirmskaitļi.

**Uzdevums 1.5**

No sākuma pierādīsim, ka visiem pirmskaitļiem tā kvadrātu ir iespējams izteikt kā , kur – atbilstošs naturāls skaitlis. Pārveidojot izteiksmi , iegūstam jeb . Tā kā , zināms, ka tas nedalās ne ar , ne ar . Tātad, tā kā ir nepāra, gan , gan jābūt pāra skaitļiem, turklāt, tā kā starp katriem diviem blakusesošiem pāra skaitļiem tieši viens dalās arī ar , tieši viens no vai dalās arī ar četri. Tas nozīmē, ka to reizinājums noteikti dalās ar , jo skaitlis, kas dalās ar , tiek sareizināts ar skaitli, kas dalās ar . No otras puses, ir zināms, ka tieši viens no katriem trīs blakusesošiem naturāliem skaitļiem, arī , un , dalās ar . Tā kā nedalās ar , ar ir jādalās vai nu , vai arī , kas nozīmē, ka to reizinājums arī dalīsies ar . Tātad dalās gan ar , gan ar , kas nozīmē, ka tas dalās arī ar . Tātad var izteikt kā jeb .

Mums gan interesē skaitlis . Mums vajag, lai tam būtu tieši dažādi dalītāji, bet te mums rodas problēma – redzams, ka šis skaitlis dalās ar , bet jau ir dažādi dalītāji, un mēs to sareizinām vēl ar skaitli , tā radot klāt vēl vismaz vienu papildu dalītāju – pašu skaitli . Tā nebūtu vienīgi tad, ja , bet tādā gadījumā un , kas netiek uzskatīts par pirmskaitli. Tāpēc liekas, ka pirmskaitļa , kam būtu tieši dalāmie, nav…

…Ja vienīgi formā varētu izteikt pilnīgi visu pirmskaitļu kvadrātus! Bet kā jau pieminēju, tas ir patiess tikai pirmskaitļiem, kas ir lielāki vai vienādi ar . Un tā kā ir vēl divi pirmskaitļi, kas ir mazāki par – un – arī tiem vēl jāpārbauda, cik ir dalītāju. Ja , tad , kam ir tikai četri dalītāji, tātad tas neder. Bet, ja , tad , kam ir tieši dalītāji – , , , , un ! Tātad ir vienīgais pirmskaitlis, kam ir tieši dažādi dalītāji.

**Uzdevums 1.6**

Diemžēl es šo uzdevumu nepaguvu atrisināt, tomēr es esmu izspriedis dažus faktus un domāju, ka minētā situācija, kurā uz tāfeles ir tikai devītnieki, nav iespējama.

Viens fakts ir, ka, lai sasniegtu šo nosacījumu, nevienā brīdī uz tāfeles nedrīkst būt kāds pirmskaitlis vai . Ja tāds būtu, tad vienīgais veids, kā to sadalīt reizinātājos, ir pats skaitlis un , kuram mēs varētu pieskaitīt un iegūt . Bet arī ir pirmskaitlis, kuru mēs varam sadalīt tikai kā un , no kuriem pēdējam pieskaitot , atkal iegūst . Es gan neesmu pārliecināts, vai drīkst arī no atņemt , iegūstot , bet pat ja drīkst, tik un tā vienam reizinātājam allaž būs jābūt vai , un, tam pieskaitot vai atņemot , nekādi nevarēs to “pārvērst” par . Tas arī nozīmē, ka pašu sākotnējo skaitli nedrīkst sadalīt reizinātājos vai , jo trijniekam vai deviņniekam pieskaitot vai atņemot , iznākums ir pirmskaitlis vai , kas, kā jau tikko pierādīju, nav pieļaujams. Tas nozīmē, ka ar dotajām darbībām ir iespējams iegūt tikai deviņniekus uz tāfeles tikai tad, ja nav pirmskaitlis, ko pierādīt, liekas, skolēnam nav pa spēkam. Toties šo uzdevumu pierādīt vajadzētu būt skolēnam pa spēkam, tāpēc laikam jau tomēr kaut kāda iemesla dēļ vajadzīgo situāciju nav iespējams sasniegt.

Sākot no otras puses, skaidrs, ka pēdējam skaitlim, ko sadalīja reizinātājos, bija jābūt , vai , lai iegūtu reizinātājus vai , kurus var pārvērst par , bet pirms tā jau it kā varēja būt dažādi skaitļi – gan , gan , un vispār jau diezgan dažādi skaitļi ar dažādiem dalītājiem, tā ka man neizdevās atrast kādu ierobežojošu iemeslu, kāpēc tie nevarētu ar laiku nonākt līdz sākotnējam skaitlim.