Numerik Boxen

Florian Lubitz & Steffen Hecht

4. April 2018

1 1

1 Die <u>Gleitpunktzahlendarstellung</u> zerlegt jede reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ in drei Bestandteile:

I) ein Vorzeichen $(-1)^v$ mit $v \in \{0, 1\}$

II) eine Mantisse $m \in \mathbb{R}$ und

III) einen Exponenten $e \in \mathbb{Z}$, sodass

$$r = (-1)^v \cdot m \cdot 2^e \tag{1.1}$$

2

$$r = (-1)^v \cdot \sum_{i=0}^{t-1} r_i \cdot 2^{-i} \text{ mit } r_0 = 1 \text{ (sodass } 1 \leq m \leq 2) \tag{1.2}$$

3

$$\begin{aligned}
13,6 &= 2^3 + 5,6 \\
&= 2^3 + 2^2 + 1,6 \\
&= ... \\
&= 2^3 + 2^2 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-4} + 0,0375 \\
&= ...
\end{aligned}$$

Also können wir die Dezimalzahl $(13,6)_{10}$ als Binärzahl $(1101,1001...)_2$ darstellen.

4

$$
\begin{aligned}
(13,6)_{10} &= (1101,1001...)_2 \\
&= (-1)^0 \cdot (1,1011001...)_2 \cdot 2^3
\end{aligned}
$$

also $v = 0$, $m = (1,1011001...)_2$ und $e = 3$

5

Eine reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ mit der Darstellung

$$r = (-1)^v \cdot \sum_{i=0}^{t-1} r_i \cdot 2^{-i} \cdot 2^e \text{ mit } r_0 = 0 \tag{1.3}$$

gehört der Menge der nicht-normierten oder subnormalen Gleitpunktzahlen $\mathbb{M}_s$ an.

6

Es gilt analog zu Definition 1.2: Das Vorzeichen $(-1)^v$ wird durch das Vorzeichen-Bit $v \in \{0,1\}$, der Wert der Mantisse m durch die Ziffern $r_i \in \{0,1\}$, $i = 1,...,t-1$ und der Wert des Exponenten durch eine ganze Zahl $e \in \mathbb{Z}$ mit $e = e_{min}$ festgelegt.

7

$$0 = (-1)^v \cdot 0 \cdot 2^{e_{min}} \tag{1.4}$$

11

$$v + 134 = 16$$

12

$$f_{rd}(r) := \delta_r := rd(r) - r$$

13

$$f_{rel} := \epsilon_r := \frac{\delta_r}{r} = \frac{rd(r) - r}{r} \quad \text{für} \quad r \neq 0$$

16

$$|\delta_r| \leqslant 2^{e-t} \qquad \text{und} \qquad |\epsilon_r| \leqslant 2^{-t}$$

17

$$\epsilon = 2^{-t}$$

18

...die entsprechenden Maschinenoperationen, d.h. die Anwendung der jeweiligen Operation auf Zahlen im normierten Gleitpunkzahlenformat nach Def. 1.2

19

I) Verknüpfung der Maschinenzahlen mit höherer (ausreichend hoher) Genauigkeit
II) Runden des Ergebnisses auf eine Maschinenzahl

20

$$r \circ_{\mathbb{M}} s := rd(r \circ s)$$

$$
\begin{aligned}
r +_{\mathbb{M}} s = (1,11)_2 \cdot 2^0 +_{\mathbb{M}} (1,10)_2 \cdot 2^2 &= (111)_2 \cdot 2^{-2} + (1,10)_2 \cdot 2^{-2} \\
&= (1000,10)_2 \cdot 2^{-2} \\
&= (100010)_2 \cdot 2^1 \\
&= (1,00)_2 \cdot 2^1 = (2)_{10}
\end{aligned}
$$

wohingegen das exakte Ergebnis $r + s = \frac{7}{4} + \frac{3}{8} = \frac{17}{8}$ ist.
Der absolute Rundengsfehler ist also

21

$$
f_{rd} = (r +_{\mathbb{M}} s) - (r + s) = 2 - \frac{17}{8} = -\frac{1}{8}
$$

und der relative Rundungsfehler ist

$$
\begin{aligned}
|f_{rel}| &= |\frac{(1 +_{\mathbb{M}} s) - (r + s)}{r + s}| \\
&= \frac{\frac{1}{8}}{\frac{17}{8}} \\
&= \frac{1}{17} \\
&= 0,0588... \approx 5,88\%
\end{aligned}
$$

Das ist relativ gut, denn der maximale Rundungsfehler bei einer 3-stelligen Mantisse ist $\epsilon = 2^{-3} = 12,5\%$.

$$
r \circ_{\mathbb{M}} s = rd(r \circ s) = (r \circ s) \cdot (1 + \epsilon_0)
$$

23

wobei der relative Fehler ϵ_0 der Gleitpunktoperation wegen Def. 1.10 stets durh die Maschinengenauigkeit beschränkt ist,

$$
\epsilon_0 := \frac{(r \circ_{\mathbb{M}} s) - (r \circ s)}{r \circ s} = \frac{rd(r \circ s) - (r \circ s)}{r \circ s} \leqslant \epsilon
$$

$\boxed{24}$

$$
\begin{aligned}
\tilde{y} =& \tilde{x} +_{\mathbb{M}} c \\
&= (\tilde{x} + c) \cdot (1 + \epsilon_2) \\
&= ((a +_{\mathbb{M}} b) + c) \cdot (1 + \epsilon_2) \\
&= ((a + b) \cdot (1 + \epsilon_1) + c) \cdot (1 + \epsilon_2) \\
&= a + b + c + (a + b) \cdot \epsilon_1 + (a + b + c) \cdot \epsilon_2 + (a + b) \cdot \epsilon_1 \epsilon_2
\end{aligned}
$$

$\boxed{25}$

$$\tilde{y} \doteq a + b + c + (a + b) \cdot \epsilon_1 + (a + b + c) \cdot \epsilon_2$$

$\boxed{26}$

$$
\begin{aligned}
f_{rel}(y) = \frac{\tilde{y} - y}{y} &= \frac{(a + b) \cdot \epsilon_1 + (a + b + c) \cdot \epsilon_2}{a + b + c} \\
&= \frac{a + b}{a + b + c} \cdot \epsilon_1 + \epsilon_2
\end{aligned}
$$

$\boxed{27}$

$$
\begin{aligned}
|f_{rel}(y)| &= |\frac{a + b}{a + b + c} \cdot \epsilon_1 + \epsilon_2| \\
&\overset{(D.U.G)}{\leqslant} |\frac{a + b}{a + b + c}| \cdot |\epsilon_1| + |\epsilon_2|
\end{aligned}
$$

$\boxed{28}$

$$|f_{rel}(y)| \leqslant (1 + |\frac{a + b}{a + b + c}|) \cdot \epsilon = (a + \frac{1}{|1 + \frac{c}{a+b}|}) \cdot \epsilon$$

$$c \approx -(a+b)$$

29 ist. Denn für $c \to -(a+b)$ ist $\frac{|a+b|}{|a+b+c|} \to \infty$ und damit wird auch die obere Schranke von $|f_{rel}(y)|$ beliebig (unendlich) groß. In diesem Fall spricht man von **Auslöschung**