Signale und Systeme Boxen

Florian Lubitz & Steffen Hecht

18. April 2018

1 Motivation, Wiederholung und Überblick

a

6

$$u_1(t) = 15\,\mathrm{V}\sin(\pi t + \pi/3) + 60\,\mathrm{V}\sin(10\pi t + \pi/3) = 0,5x(t) + 2y(t)$$

und damit $a = 0,5, b = 2$ und

$$u_2(t) := \mathcal{H}\{u_1(t)\} = \mathcal{H}\{0,5x(t) + 2y(t)\} \overset{??}{=}$$

2 Diskrete Signale

11

$$(b) \quad x[-k] = \begin{cases} -\frac{1}{k}, k/ne0 \\ 0, k = 0 \end{cases}$$

$$(c) \quad x[k+k_0] = x[k+3] = \begin{cases} \frac{1}{k+3}, k/ne-3 \\ 0, k = -3 \end{cases}$$

$$(d) \quad x[k-k_0] = x[k-3] = \begin{cases} \frac{1}{k-3}, k/ne3 \\ 0, k = 3 \end{cases}$$

12

$$\begin{aligned} x[k_0 - k] &= x[-(k-k_0)] \\ &= x[(-k)+k_0] \end{aligned}$$

13

$$\text{mit} \quad x[k_0 - k] = x[3-k] = \begin{cases} \frac{1}{3-k}, k \neq 3 \\ 0, k = 3 \end{cases}$$

14

- $x[k]$ heißt <u>gerades Signal</u>, falls $x[k] = x[-k] \forall k \in \mathbb{Z}$ gilt.
- $x[k]$ heißt <u>ungerades Signal</u>, falls $x[k] = -x[-k] \forall k \in \mathbb{Z}$ gilt.

15

$$x[-k] = \begin{cases} \frac{1}{-k}, k \neq 0 \\ 0, k = 0 \end{cases} \quad = \begin{cases} -\frac{1}{k}, k/ne0 \\ 0, k = 0 \end{cases} \quad = -x[k]$$

16

$$y[-k] = \begin{cases} \frac{1}{(-k)^2}, k \neq 0 \\ 0, k = 0 \end{cases} \quad = \begin{cases} -\frac{1}{k^2}, k \neq 0 \\ 0, k = 0 \end{cases} \quad = y[k]$$

17

- $x[k]$ heißt kausales Signal, falls gilt: $x[k] = 0 \forall k < 0$
- $x[k]$ heißt nicht-kausales Signal, falls gilt $\exists k < 0 : x[k] \neq 0$
- $x[k]$ heißt anti-kausales Signal, falls $x[-k-1]$ kausal ist, d.h. falls gilt: $x[k] = 0 \forall k \leqslant 0$

18

- $x[k]$ ist nicht-kausal
- $u[k]$ ist kausal
- $v[k]$ ist anti-kausal

19

$$\delta[k] := \begin{cases} 1, k = 0 \\ 0, k \neq 0 \end{cases}$$

20

$$\epsilon[k] := \begin{cases} 1, k \geq 0 \\ 0, k < 0 \end{cases}$$

21

$$\delta[k-k_0] = \begin{cases} 1, k = k_0 \\ 0, k \neq k_0 \end{cases}$$

bzw.

$$\delta[k+k_0] = \begin{cases} 1, k \neq -k_0 \\ 0, k = -k_0 \end{cases}$$

22

$$\begin{aligned} x[k] \cdot \delta[k-i] &= \begin{cases} x[i], k = i \\ 0, k \neq i \end{cases} \\ &= x[i] \cdot \delta[k-i] \end{aligned} \tag{2.1}$$

Siebeigenschaft

23

$$x[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \cdot \delta[k-i] \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{Z}$$

24

$$x[k] = \sum_{i=-K}^{K} x[i] \cdot \delta[k-i]$$

25

$$u[k] = \delta[k+2] + \delta[k+1] + \delta[k] + \delta[k-1]$$
$$v[k] = 2 \cdot \delta[k+3] + \delta[k+1] - \delta[k-1] - 2 \cdot \delta[k-3]$$

26

$$sgn[k] := \epsilon[k] - \epsilon[-k] = \begin{cases} 1, k > 0 \\ 0, k = 0 \\ -1, k < 0 \end{cases}$$

27

$$Ш[k] := \epsilon[k] + \epsilon[-k-1] = 1 \text{für alle} k \in \mathbb{Z}$$

28

$$rect_{k_1,k_2}[k] :)\epsilon[k-k1] - \epsilon[k-k_2-1] = \begin{cases} 1, k_1 \leqslant k \leqslant k_2 \end{cases}$$

29

$$x[k] = q^k \cdot \epsilon[k]$$

30

$$x[k] : 0, ..., 0, x[0] = 1, x[1] = -0.7, x[2] = 0.49, x[3] = 0.343, ...$$

31

$$x[k] : 0, ..., 0, x[0] = 1, x[1] = -0.8, x[2] = 0.64, x[3] = -0.512, ...$$

32

$$x[k] + y[k] : x[-\infty] + y[-\infty]..., x[0] + y[0], x[1] + y[1], ..., x[\infty] + y[\infty]$$
$$x[k] \cdot y[k] : x[-\infty] \cdot y[-\infty]..., x[0] \cdot y[0], x[1] \cdot y[1], ..., x[\infty] \cdot y[\infty]$$
$$c \cdot x[k] : c \cdot x[-\infty]..., c \cdot x[0], c \cdot x[1], ..., c \cdot x[\infty]$$

$\boxed{33}$

$$S_{k_1,k_2} := \{\overrightarrow{x} \in S | x[k] = 0 \forall k < k_1 \text{oder} k > k_2\}$$

$\boxed{34}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{x} &= (0 \quad 3 \quad 2 \quad 5 \quad 0 \quad 0)\\
\overrightarrow{y} &= (0 \quad 0 \quad 2 \quad -3 \quad 0 \quad 2)\\
\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} &= (0 \quad 3 \quad 4 \quad 2 \quad 0 \quad 2)\\
\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y} &= (0 \quad 3 \quad 0 \quad 8 \quad 0 \quad -2)\\
\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} &= (0 \quad 0 \quad 4 \quad -15 \quad 0 \quad 0)\\
c + \overrightarrow{x} &= (0 \quad 15 \quad 10 \quad 25 \quad 0 \quad 0)
\end{aligned}$$

$\boxed{35}$

$$(x * y)[k] := \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \cdot y[k-i]$$

$\boxed{36}$

$$x[i] = (\underset{\substack{\downarrow \\ i=0}}{3} \quad 2 \quad 1), \quad y[i] = (\underset{\substack{\downarrow \\ i=0}}{1} \quad -1 \quad 2) \text{ bzw. } \quad z[0-i] = (2 \quad -1 \quad \underset{\substack{\downarrow \\ i=0}}{1})$$

$\boxed{37}$

	$x[i] =$			3	2	1			$\sum x[i]y[k-i] =$	$(x*y)[k]$
$k=0$	$y[k-i] =$	2	-1	1					$3 \cdot 1$	$= 3$
$k=1$			2	-1	1				$3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1$	$= -1$
$k=2$				2	-1	1			$3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1$	$= 5$
$k=3$					2	-1	1		$2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1)$	$= 3$
$k=4$						2	-1	1	$1 \cdot 2$	$= 2$

$\boxed{38}$

$$x[k] * y[k] = 3\delta[k] - \delta[k-1] + 5\delta[k-2] + 3\delta[k-3] + 2\delta[k-4]$$

39

$$\begin{array}{l} \qquad i = -43 \\ \qquad\ \downarrow \\ x[i] = (-1 \quad 3 \quad -2) \text{ und} \\ \qquad i = 19 \\ \qquad \downarrow \\ y[i] = (1 \quad -2 \quad 4 \quad -1) \text{ bzw. } y[-i] = (-1 \quad 4 \quad -2 \quad 1) \end{array}$$

40

$i = -43$ (pfeil)

k	$x[i]$				-1	3	-2				$(x*y)[k]$
-24	$y[k-i] =$	-1	4	-2	1						-1
-23			-1	4	-2	1					$2+3=5$
-22				-1	4	-2	1				$-4-6-2=-12$
-21					-1	4	-2	1			$1+12+4=17$
-20						-1	4	-2	1		$-3-8=-11$
-19							-1	4	-2	1	2

41

$$\begin{aligned}(x*y)[k] = &-\delta[k+24] + 5\delta[k+23] - 12\delta[k+22] + 17\delta[k+21] \\ &- 11\delta[k+20] + 2\delta[k+19]\end{aligned}$$

42

$$x[k] * y[k] \in \mathcal{S}_{a+c,b+d} \quad \text{und hat Länge} \quad n+m-1.$$

43

I) Kommutativität: $x * y = y * x$

II) Assoziativität: $w * (x * y) = (w * x) * y$ und $c \cdot (x * y) = (c \cdot) * y$

III) Distributivität: $w * (x + y) = w * x + w * y$

IV) Neutrales Element: $x * \delta = x$

V) Verschiebung: $x[k] * \delta[k_0 - k] = x[k - k_0]$

VI) Zeitinvarianz: $x[k] * y[k - k_0] = (x[k] * y[k])[k - k_0]$

VII) Linearität: $(c \cdot x + d \cdot y) * w = c \cdot (x * w) + d \cdot (y * w)$

44

$$p(z) := a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ... + a_n z^n$$

45

$$x[k] = a_0 \delta[k] + a_1 \delta[k-1] + a_2 \delta[k-2] + ... + a_n \delta[k-n]$$

46

$$p(z) \cdot q(z) = c_0 + c1_z + c_2 z^2 + ... + c_{2n} z^{2n} \quad \text{Mit Koeffizenten } c_k = (c * y)[k]$$

47

$$p(z) = 3 + 2z + z^2 \text{ und } q(z) = 1 - z + 2z^2$$

48

$$\begin{aligned} p(z) \cdot q(z) &= (3 + 2z + z^2) \cdot (2z^2 - z + 1) \\ &= 3 \cdot 1 + z(3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1) + z^2(3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1) \\ &\quad + z^3(2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1)) + z^4(1 \cdot 2) \\ &= 3 - z + 5z^2 + 3z^3 + 2z^4 \end{aligned}$$

$\boxed{49}$

$$E_x := \sum_{i=-\infty}^{\infty} |x[i]|^2$$

$\boxed{50}$

$$P_x := \lim_{K\to\infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{i=-K}^{K} |x[i]|^2$$

$\boxed{51}$

$$\langle x[k], y[k]\rangle_E := \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*[k] \cdot y[k]$$

$\boxed{52}$

$$\langle x[k], y[k]\rangle_P := \lim_{K\to\infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{k=-K}^{K} x^*[k] \cdot y[k]$$

$\boxed{53}$

$$||x[k]||_E := \sqrt{\langle x[k], x[k]\rangle_E} = \sqrt{E_x} \text{ bzw.}$$
$$||x[k]||_P := \sqrt{\langle x[k], x[k]\rangle_P} = \sqrt{P_x}$$

$\boxed{54}$

$$\cos\Phi = \frac{\langle x[k], y[k]\rangle}{||x[k]|| \cdot ||y[k]||}$$

$\boxed{55}$

$$\varphi_{xy}[\kappa] := \langle x[k], y[k+\kappa]\rangle$$

56

$$\varphi_{xx}[\kappa] := \langle x[k], x[k+\kappa] \rangle$$

57

$$\varphi^{E}_{xy}[\kappa] = x^*[-\kappa] * y[\kappa] \text{ bzw. } \varphi^{P}_{xy}[\kappa] = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{2K+1} x^*_K[-\kappa] * y_K[\kappa]$$

3 Diskrete Systeme

Inhalt...

58

$$y[k] = \mathcal{H}\{x[k]\}$$

59

$$x[k] = x_0 \cdot \delta[k] = \begin{cases} x_0, k = 0 \\ 0, k \neq 0 \end{cases}$$

entwickelt sich nun das Guthaben des Sparbuchs wie folgt:
zu Beginn: $y[0] = x_0$
nach 1 Jahr: $y[1] = x_0 + p \cdot x_0 = (1+p) \cdot x_0$ nach 2 Jahren: $y[2] = (1+p)x_0 + p \cdot (1+p) \cdot x_0 = (1+p) \cdot (1+p) \cdot x_0 = (1+p)^2 \cdot x_0$
nach 3 Jahren: $y[3] = ... = (1+p)^3 \cdot x_0$
nach i Jahren: $y[i] = (1+p)^i \cdot x_0$
D.h. das Ausgangssignal ist die kausale Exponentialfolge $y[k] = x_0 \cdot (1+p)^k \cdot \epsilon[k]$

60

$$y[k+1] = y[k] \cdot (1+p) + x[k+1] \tag{3.1}$$

Das heißt $y[k+1]$ ergibt sich aus dem verzinsten Guthaben $y[k]$ des vorigen Jahres und zusätzlich den neuen Einzahlungen $x[k+1]$.

61

$$\mathcal{H}\{c \cdot x_1[k] + d \cdot x_2[k]\} = c \cdot \mathcal{H}\{x_1[k]\} + d \cdot \mathcal{H}\{x_2[k]\}$$

62

$$y[0] = x[0] = c \cdot x_1[0] + d \cdot x_2[0]$$

63

$$\begin{aligned} y[k+1] &\overset{(3.1)}{=} y[k] \cdot (1+p) + x[k+1] \\ &\overset{(I.V)}{=} (cy_1[k] + d \cdot y_2[k]) \cdot (1+p) + c \cdot x_1[k+1] + d \cdot x_2[k+1] \\ &= c \cdot (y_1[k] \cdot (1+p) + x_1[k+1]) + d \cdot (y_2[k] \cdot (1+p) + x_2[k+1]) \\ &\overset{(3.1)}{=} c \cdot y[k+1] + d \cdot y_2[k+1] \end{aligned}$$

64

$$\mathcal{H}\{x[k-k_0]\} = y[k-k_0]$$

65

$$\begin{aligned} z[k_0] = x[k_0 - k_0] = x[k_0] = y[0] = y[k_0 - k_0] \\ \text{und } z[k] = 0 = y[k-k_0] \text{ für } k < k_0 \end{aligned}$$

66

$$\begin{aligned} z[k+1] &\overset{(3.1)}{=} z[k] \cdot (1+p) + x[k+1-k_0] \\ &\overset{(I.V.)}{=} y[k-k_0] \cdot (1+p) + x[k-k_0+1] \\ &\overset{(3.1)}{=} y[k-k_0+1] \end{aligned}$$

67 ... wenn der Ausgabewert $y[k_0]$ zur Zeit k_0 nur von früheren Eingabewerten $x[k], k \leq k_0$ abhängig ist.

68

$$|x[k]| < C \forall k \Rightarrow |y[k]| < D \forall k$$

69

$$y[k] = x_0 \cdot (1+p)^k \cdot \epsilon[k] \to \infty \text{ für } k \to \infty$$

70

..., wenn der Ausgang $y[k]$ zur Zeit k nur vom Eingang $x[k]$ zur Zeit k abhängt.

71

..., falls $y[k]$ nur von $x[\kappa]$ für $|\kappa - k| \leq L$ abhängt.

72

$$h[k] := \mathcal{H}\{\delta[k]\}$$

73

$$\begin{aligned} y[k] = \mathcal{H}\{x[k]\} &\overset{(2.6)}{=} \mathcal{H}\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \cdot \delta[k-i]\right\} \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]\mathcal{H}\{\delta[k-i]\} \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \cdot h[k-i] \\ &= x[k] * h[k] \end{aligned}$$

74

$$y[k] = x[k] * h[k] \text{ für alle } x[k] \in \mathcal{S}$$

75

$$h[k] := \mathcal{H}\{\delta[k]\} = (1+p)^k \epsilon[k]$$

$\boxed{76}$

$$y[k] = h[k] * x[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (1+p)^i \epsilon[i] \cdot x[k-i]$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} (1+p)^i \cdot x[k-i]$$

$\boxed{77}$

$$y[k] = \sum_{i=0}^{k} (1+p)^i \cdot x[k-i]$$

$\boxed{78}$

$$\sum_{y=-\infty}^{\infty} \|h[i]\| < \infty$$