

Signale und Systeme
Vorlesungsskript
Studiengang Technische Informatik
(Bachelor, 3./4. Semester)
Hochschule Albstadt-Sigmaringen

Prof.Dr. Andreas Knoblauch

15. September 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Motivation, Wiederholung und Überblick	5
1.1	Signale und Systeme: Was wir eigentlich schon wissen	5
1.2	Signale und Systeme: Was wir noch lernen werden	9
2	Diskrete Signale	13
2.1	Definitionen	13
2.2	Spezielle diskrete Signale	19
2.3	Einfache Verknüpfungen diskreter Signale	23
2.4	Faltung	25
2.5	Energie, Leistung, Skalarprodukt und Korrelation	33
3	Diskrete Systeme	39
3.1	Definition und Eigenschaften von Systemen	39
3.2	Impulsantwort und Faltung bei LTI-Systemen	44
3.3	Stabilität und Kausalität von LTI-Systemen	47
3.4	Spezielle diskrete LTI-Systeme und Blockdiagramme	49
3.5	Zustandsraum-Beschreibung	52
3.6	Die z -Transformation	54
3.7	Die Systemfunktion $H(z)$	61
3.8	Inverse z -Transformation und Partialbruchzerlegung	68
3.9	Verschaltung von LTI-Systemen	80
4	Analoge Signale	83
4.1	Definitionen und Eigenschaften	84
4.2	Kontinuierliche Faltung	89
4.3	Energie, Leistung, Skalarprodukt und Korrelation	92
5	Fourier- und Laplace-Transformation	101
5.1	Fourier-Reihen-Entwicklung	103
5.2	Die (allgemeine) Fourier-Transformation	115
5.2.1	Eigenschaften der Fourier-Transformation	119
5.3	Laplace-Transformation	130

5.4	Anwendung: Analyse elektrischer RLC-Netzwerke	136
6	Analoge Systeme	141
6.1	Analoge LTI Systeme	142
6.2	Elementare LTI-Systeme und Blockdiagramme	151
6.3	Verschaltung von LTI-Systemen	157
6.4	Stabilität analoger LTI-Systeme	158
6.5	Beschreibung von LTI-Systemen im Frequenzbereich	166
7	Diskrete und analoge Signale und Systeme	179
7.1	Ideale Signalabtastung und -rekonstruktion	180
7.2	Zeitdiskrete Fourier-Transformation	190
7.3	Fourier-Analyse zeitdiskreter LTI-Systeme	194
7.4	Diskrete Fourier-Transformation (DFT)	200
7.5	Fast Fourier Transformation (FFT)	211
	Anhang	214
A	Komplexes Rechnen	215
	Stichwortverzeichnis	217

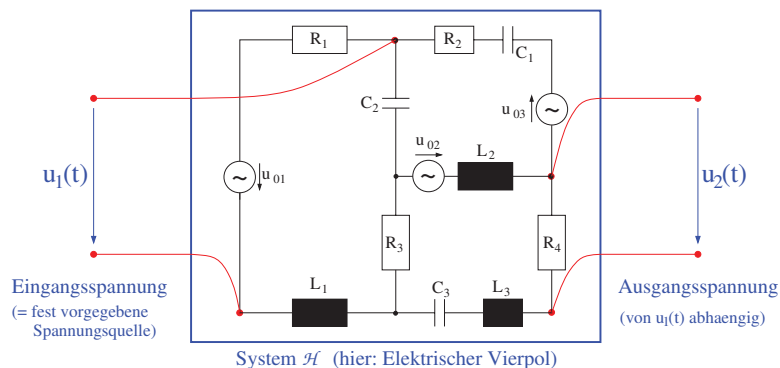
Kapitel 1

Motivation, Wiederholung und Überblick

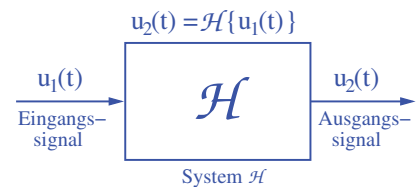
1.1 Signale und Systeme: Was wir eigentlich schon wissen

In der Vorlesung Elektrotechnik haben wir eigentlich schon Signale und Systeme kennengelernt: Ein **Signal** ist einfach ein zeitlicher Verlauf etwa einer Spannung $u_1(t)$ mit welchem z.B. Information von einem Ort 1 zu einem anderen Ort 2 übertragen werden kann. Ein **System** \mathcal{H} entspricht dann dem **Übertragungsmedium** welches das **Eingangssignal** $u_1(t)$ in ein **Ausgangssignal** $u_2(t)$ umwandelt. Z.B. kann man einen elektrischen Stromkreis als System auffassen, wobei man beliebige Zweigspannungen (oder -ströme) als Ein- und Ausgangssignal des Systems festlegen kann (siehe folgende Skizze).

(a) Elektrischer Stromkreis als System



(b) Systemtheoretische Darstellung



Für uns sind nun zwei Dinge von großem Interesse:

- **System-Analyse:** Wir möchten ein gegebenes System “verstehen”, z.B. für ein (beliebiges) Eingangssignal $u_1(t)$ voraussagen können wie das zugehörige Ausgangssignal $u_2(t)$ aussieht.
- **System-Synthese:** Wir wollen ein System mit vorgegebenen Eigenschaften aus bestimmten vorgegebenen Bauelementen realisieren können, z.B. ein Filter mit einem bestimmten Ein-/Ausgabeverhalten aus den bekannten elektrischen Bauelementen R , L , C .

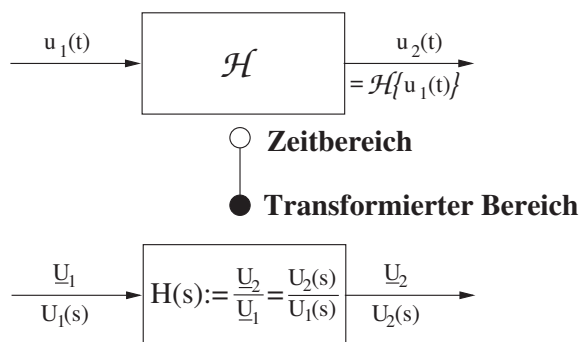
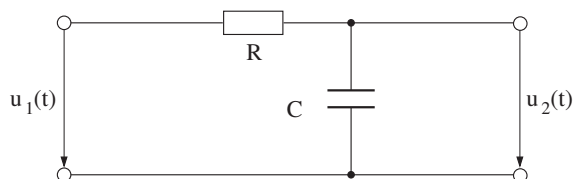
Für den Spezialfall, dass die Signale Sinussignale einer bestimmten Frequenz ω sind, beherrschen wir die System-Analyse schon aus der Vorlesung Elektrotechnik: Mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung können wir bereits beliebige Netzwerke aus komplexen Widerständen analysieren, d.h. zu beliebigen Verschaltungen aus Wechselspannungsquellen U_{0i} , Widerständen R_i , Kapazitäten C_i und Induktivitäten L_i können wir beliebige Zweigspannungen und -ströme berechnen (siehe Skript Elektrotechnik, S. 58, Satz 3.2 über komplexe Netzwerkanalyse).

Beispiel System-Analyse: Berechnen Sie das Ein-/Ausgabeverhalten des folgenden elektrischen Systems (RC-Tiefpass) für *sinusförmige* Signale und $R = 1k\Omega$, $C = 1mF$. Bestimmen Sie jeweils das Ausgangssignal $u_2(t) = \mathcal{H}\{u_1(t)\}$ für verschiedene Eingangssignale $u_1(t) = \hat{U}_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ mit $\hat{U}_1 = 30V$, $\varphi_1 = \pi/3$ und

$$\text{a) } \omega = 2\pi 0.5\text{Hz} \quad \text{b) } \omega = 2\pi 5\text{Hz} \quad \text{c) } \omega = 2\pi 500\text{Hz} .$$

Um Schreibarbeit zu sparen dürfen Sie in der komplexen Rechnung $j\omega$ durch s ersetzen. Um Rechenarbeit zu sparen können Sie außerdem die sogenannte Übertragungsfunktion $H(s) := \underline{U}_2 / \underline{U}_1$ verwenden (siehe Skizze).

RC-Tiefpass



Lösung: Wir gehen in drei Schritten vor (vgl. Skript Elektrotechnik, S. 58, Satz 3.2 über Komplexe Netzwerkanalyse):

1) Transformation der Netzwerkgrößen ins Komplexe: Ohne Einheiten (bzw. in Standardeinheiten) gilt für $s := j\omega$

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= U_1 \angle \varphi_1 = \frac{30}{\sqrt{2}} \angle \frac{\pi}{3} \\ \underline{Z}_R &= R = 1000 \\ \underline{Z}_C &= \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{sC} = \frac{1000}{s}\end{aligned}$$

1

2) Netzwerkanalyse im Komplexen: Die Schaltung entspricht einem Spannungsteiler (siehe Skript Elektrotechnik, Seite 32), d.h. für die Übertragungsfunktion gilt

$$H(s) := \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{1 + sRC} = \frac{1}{1 + s}$$

2

Nun kann man die Ausgangsspannung einfach durch Auflösen nach $\underline{U}_2 = H(s)\underline{U}_1$ berechnen. Da wir hier komplex multiplizieren müssen verwenden wir die Polarform $H(s) = |H(s)|e^{j\angle H(s)}$, d.h. mit $s = j\omega$ und $RC = 1000 \cdot 0.001 = 1$ ist

$$\begin{aligned}|H(j\omega)| &= \left| \frac{1}{1 + j\omega RC} \right| = \frac{1}{|1 + j\omega RC|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\omega RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}} \\ \angle H(j\omega) &= \angle \frac{1}{1 + j\omega RC} = \angle \frac{1 - j\omega RC}{1 + (\omega RC)^2} = \arctan\left(\frac{\frac{-\omega RC}{1 + (\omega RC)^2}}{\frac{1}{1 + (\omega RC)^2}}\right) \\ &= \arctan(\omega RC) = -\arctan(\omega) \\ \underline{U}_2 &= H(s) \cdot \underline{U}_1 = |H(j\omega)| \cdot |\underline{U}_1| \angle \varphi_1 + \angle H(j\omega) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}} \cdot |\underline{U}_1| \angle \left(\frac{\pi}{3} - \arctan(\omega)\right)\end{aligned}$$

3

Hier erkennt man die Wirkung des Systems H: Amplitude bzw. Effektivwert des Ausgangssignal \underline{U}_2 ist gegenüber dem Eingangssignal \underline{U}_1 um Faktor $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}}$ gedämpft, während sich der Nullphasenwinkel um $\angle H(j\omega) = -\arctan(\omega)$ verschiebt.

3) Rücktransformation: Nach Einsetzen des jeweiligen Eingangssignals ergibt sich also

$$\begin{aligned}a) \quad \underline{U}_2 &= \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi \cdot 0,5)^2}} \cdot 21,2 \angle \frac{\pi}{3} - \arctan(2\pi \cdot 0,5) \approx 6,43 \angle -0,21 \\ &\Rightarrow u_2(t) = 6,43 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(2\pi \cdot 0,5 \cdot t - 0,21) \approx 9,09 \text{ V} \cdot \sin(\pi t - 0,21) \\ b) \quad \underline{U}_2 &\approx 0,67 \angle -0,49 \Rightarrow u_2(t) \approx 0,95 \text{ V} \cdot \sin(10\pi t - 0,49) \\ c) \quad \underline{U}_2 &\approx 0,0067 \angle -0,523 \Rightarrow u_2(t) \approx 9,55 \text{ mV} \cdot \sin(100\pi t - 0,523)\end{aligned}$$

4

Bemerkungen: Wir erkennen nun bereits mit unserem beschränkten Wissen aus der komplexen Wechselstromrechnung für Sinussignale (siehe Skript Elektrotechnik, Kap. 3) wesentliche systemtheoretische Ergebnisse:

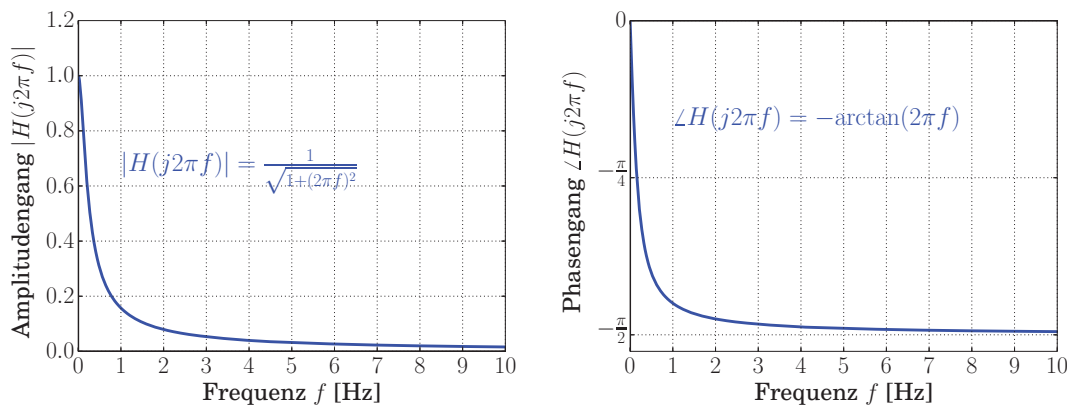
- Die durch das “Hantelsymbol” $u_1 \circ \text{---} \bullet \underline{U}_1$ dargestellte Transformation von realen Zeitsignalen ins Komplexe lohnt sich: Nur mit den komplexen Größen kann man sinnvoll Netzwerkanalyse machen (siehe Skript Elektrotechnik, S. 58, Satz 3.2 über komplexe Netzwerkanalyse).
- Die Übertragungsfunktion $H(s)$ ist sehr nützlich da “wiederverwendbar”: Hat man sie einmal berechnet, kann man mittels $\underline{U}_2 = H(s) \cdot \underline{U}_1$ für verschiedene Eingangssignale das zugehörige (komplexe) Ausgangssignal sehr einfach berechnen.
- Wie in dem Beispiel ist die Übertragungsfunktion elektrischer RLC -Netzwerke stets eine rationale Funktion in s , d.h. sie lässt sich immer in der Form “Zählerpolynom geteilt durch Nennerpolynom” darstellen (vgl. Skript Mathe-I, S. 90, Def. 4.2 von rationalen Funktionen):

$$H(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (1.1)$$

Beweis: Aus der Netzwerkanalyse wissen wir bereits, dass alle Zweigspannungen rationale Funktionen der Widerstände und Spannungsquellen sind (siehe Skript Elektrotechnik, S. 38,58, Satz 2.5 über Rationalität der Zweigströme und Zweigspannungen in Verbindung mit Satz 3.2 über komplexe Netzwerkanalyse). Da alle komplexen Widerstände R , sL , $1/sC$ rationale Funktionen von s sind (und außerdem alle Spannungsquellen als Festzeiger sogar konstant in s sind), müssen also alle Zweigspannungen und -ströme rational in s sein. \square

- Aus der Übertragungsfunktion $H(s)$ kann man das **Frequenzverhalten** eines Systems ablesen, d.h. die Art und Weise wie ein System ein sinusförmiges Eingangssignal mit Frequenz f bzw. $\omega = 2\pi f$ verändert: Dabei beschreibt der
 - Amplitudengang $|H(j\omega)|$ den Faktor um den sich die Amplitude des Eingangssignals ändert. Bei $|H(j\omega)| > 1$ spricht man von Verstärkung, bei $|H(j\omega)| < 1$ von Dämpfung des Eingangssignals;
 - ähnlich beschreibt der Phasengang $\angle H(j\omega)$ die Phasenverschiebung des Ausgangssignals gegenüber dem Eingangssignal.

Zum Beispiel ist obiges Netzwerk ein Tiefpass, denn Eingangsschwingungen mit niedriger Frequenz (a) werden relativ gut durchgelassen (kleine Dämpfung), während hohe Frequenzen stark gedämpft werden (c), vgl. folgende Skizze: .

Amplituden- und Phasengang eines RC-Tiefpass (von vorigem Bsp.)**1.2 Signale und Systeme: Was wir noch lernen werden**

Obwohl man mit der komplexen Wechselstromrechnung und obiger Definition der Übertragungsfunktion schon recht weit kommt werden wir in dieser Vorlesung noch wesentlich tiefer in die Signal- und Systemtheorie eindringen und dadurch unser Verständnis erweitern:

- Die größte Einschränkung der komplexen Wechselstromrechnung ist die Beschränkung auf kontinuierliche sinusförmige Signale. Stattdessen wollen wir das Systemverhalten für beliebige Signaltypen und Signalformen verstehen.
- Dazu werden wir als wichtige Systemeigenschaft die Linearität kennen lernen: Ein System \mathcal{H} heißt linear, falls für beliebige Signale $x(t)$ und $y(t)$

$$\mathcal{H}\{a \cdot x(t) + b \cdot y(t)\} = a \cdot \mathcal{H}\{x(t)\} + b \cdot \mathcal{H}\{y(t)\} \quad (1.2)$$

gilt, d.h. falls die Systemantworten zu Linearkombinationen $a \cdot x(t) + b \cdot y(t)$ zweier "einfacher" Eingangssignale $x(t)$ und $y(t)$ dieselbe Linearkombination der "einfachen" Systemantworten $\mathcal{H}\{x(t)\}$ und $\mathcal{H}\{y(t)\}$ ist.

Z.B. kann man leicht zeigen, dass elektrische Netze aus R,L,C immer linear sind (siehe Lemma 6.3 auf Seite 145), insbesondere ist auch der RC-Tiefpass von Seite 6 linear (siehe auch Übungen).

Beispiel: Bestimmen Sie mit Hilfe der Linearität für den RC-Tiefpass von Seite 6 mit $R = 1\text{k}\Omega$ und $C = 1\text{mF}$ das Ausgangssignal $u_2(t)$ falls am Eingang $u_1(t) = 15\text{V} \sin(\pi t + \pi/3) + 60\text{V} \sin(10\pi t + \pi/3)$ liegt.

Lösung: $u_1(t)$ enthält zwei Sinussignale $x(t)$ und $y(t)$ zu denen wir die Systemantworten $\mathcal{H}\{x(t)\}$ und $\mathcal{H}\{y(t)\}$ bereits im vorigen Beispiel berechnet haben (siehe Seite 7):

5

Für $x(t) = 30 \text{ V} \sin(\pi t + \pi/3)$ ist $\mathcal{H}\{x(t)\} = 9.09 \text{ V} \sin(\pi t - 0.21)$.
 Für $y(t) = 30 \text{ V} \sin(10\pi t + \pi/3)$ ist $\mathcal{H}\{y(t)\} = 0.95 \text{ V} \sin(10\pi t - 0.49)$.

Damit lässt sich das Eingangssignal $u_1(t) = ax(t) + by(t)$ als Linearkombination von $x(t)$ und $y(t)$ darstellen, und mit Hilfe der Linearität gilt:

6

$$u_1(t) = 15 \text{ V} \sin(\pi t + \pi/3) + 60 \text{ V} \sin(10\pi t + \pi/3) = 0,5x(t) + 2y(t)$$

und damit $a = 0,5, b = 2$ und

$$u_2(t) := \mathcal{H}\{u_1(t)\} = \mathcal{H}\{0,5x(t) + 2y(t)\} \stackrel{??}{=}$$

Bemerkung: Mit Hilfe der Linearität konnten wir nun also zum ersten Mal elektrische Netzwerke für nicht-sinusförmige Wechselspannungen analysieren (hier: gewichtete Summe (=Linearkombination) zweier Sinusspannungen unterschiedlicher Frequenz). Obiges vorgehen lässt sich für Linearkombinationen aus beliebig vielen Sinussignalen verallgemeinern, z.B. folgt aus der Linearität (1.2) durch “Hintereinanderanwenden” für Linearkombinationen $ax(t) + by(t) + cz(t)$ dreier Eingangssignale $x(t), y(t), z(t)$

7

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\{ax(t) + by(t) + cz(t)\} &= \mathcal{H}\{ax(t) + 1 \cdot (by(t) + cz(t))\} \\ &\stackrel{??}{=} a\mathcal{H}\{x(t)\} + 1 \cdot \mathcal{H}\{by(t) + cz(t)\} \stackrel{??}{=} a\mathcal{H}\{x(t)\} + b\mathcal{H}\{y(t)\} + c\mathcal{H}\{z(t)\} \end{aligned}$$

- Da wir für sinusförmige Signale die Systemantworten leicht berechnen können (wie in vorigem Beispiel auf Seite 6), stellt sich damit die Frage ob wir vielleicht *beliebige* Eingangssignale $u_1(t)$ in eine Linearkombination aus Sinussignalen (unterschiedlicher Frequenz) zerlegen können um damit die zugehörige Antwort $u_2(t)$ eines linearen Systems auszurechnen. In dem Fall könnte man wie folgt vorgehen:

- I) Man zerlegt das Eingangssignal $u_1(t)$ in eine Linearkombination aus Sinuskomponenten,

$$u_1(t) = \sum_i c_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) .$$

- II) Man berechnet für jede Sinuskomponente die Systemantwort

$$\mathcal{H}\{\sin(\omega_i t + \varphi_i)\} = c'_i \sin(\omega_i t + \varphi'_i) ,$$

genau wie wir es im vorigen Beispiel (Seite 6) getan haben.

- III) Dann ist das Ausgangssignal wegen der Linearität die Linearkombination

$$u_2(t) = \sum_i c_i \cdot c'_i \cdot \sin(\omega_i t + \varphi'_i) .$$

In Kapitel 5 werden wir sehen, dass man tatsächlich alle “vernünftigen” Signale in solche Sinuskomponenten zerlegen kann. Das Resultat dieser Zerlegung (d.h. die c_i und φ_i) nennt man dann Fourier-Transformation oder Fourier-Spektrum.

- Obiges Vorgehen verallgemeinert damit das bekannte 3-Schritt-Vorgehen der komplexen Wechselstromrechnung (siehe voriges Beispiel von Seite 6):
 - I) Fourier-Transformation des Zeitsignale in den “komplexen” oder sogenannten “Frequenzbereich”.
 - II) Berechnung des Ausgangssignals im Frequenzbereich.
 - III) Rücktransformation in den Zeitbereich.
- Neben der Komplexen Netzwerkanalyse und der Fourier-Transformation gibt es noch eine Reihe von weiteren Transformationen, die aber alle nach demselben Prinzip funktionieren:
 - Laplace-Transformation: Verallgemeinerung der Fouriertransformation auf noch mehr kontinuierliche Signalarten (siehe Kapitel 5.3).
 - z -Transformation: Entspricht Laplace-Transformation für Diskrete Signale (siehe Kapitel 3.6).
 - Verschiedene Varianten der diskreten Fourier-Transformation (zeitdiskrete Fourier-Trafo; DFT; FFT; siehe Kapitel 7).
- In jedem Fall führt man die Systemanalyse mit obigem 3-Schritt-Verfahren aus (Transformation, Berechnung des Ausgangssignals, Rücktransformation). Z.B. werden wir sehen, dass auch für die Netzwerk-Analyse mit der Laplace-Trafo

$$U_2(s) = H(s) \cdot U_1(s)$$

gilt. Der einzige Unterschied zur Komplexen Wechselstromrechnung ist, dass man statt den Festzeigern \underline{U}_1 , \underline{U}_2 nun die Laplace-Transformierten $U_1(s) \bullet \circ u_1(t)$ bzw. $U_2(s) \bullet \circ u_2(t)$ der (beliebigen) Zeitsignale $u_1(t)$, $u_2(t)$ verwendet. Die Übertragungsfunktion $H(s)$ bleibt dabei aber genau die gleiche wie die der Komplexen Wechselstromrechnung (1.1).

- Schließlich werden wir sehen, dass man aus der Übertragungsfunktion $H(s)$ (auch Systemfunktion genannt) alle wesentlichen Systemeigenschaften ablesen kann:
 - Signalübertragung mittels $U_2(s) = H(s) \cdot U_1(s)$ (siehe oben) bzw. $U_2(z) = H(z) \cdot U_1(z)$ (für z -Transformation; siehe Kap. 3.7);
 - Frequenzverhalten (Amplitudengang, Phasengang; siehe oben);
 - Impulsantwort $h(t) \circ \bullet H(s)$, d.h. die Systemantwort auf den sogenannten Dirac-Impuls $\delta(t)$ (ein unendlich schmales hohes rechteckförmiges Signal; siehe Kap. 2.2);
 - Stabilität des Systems (siehe Kap. 3.6 und insbes. S. 77,161);
 - Wie man das System aus elementaren Bausteinen realisieren kann (System-Synthese; siehe Kap. 3.4 und 6.2 und Sätze auf S. 64,149).

Da die den Transformationen zugrunde liegende Mathematik für den diskreten Fall am einfachsten ist, betrachten wir zunächst diskrete Signale und Systeme mit der z -Transformation. Danach wird uns die Betrachtung kontinuierlicher Signale und System mit Hilfe der Fourier- und Laplace-Transformation (hoffentlich) viel einfacher fallen.

Weitere Übungsaufgaben: Blatt ???: A???

Kapitel 2

Diskrete Signale

2.1 Definitionen

Wir benutzen die folgenden Zahlenmengen und Quantoren:

- I) Natürliche Zahlen $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ und $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$
- II) Ganze Zahlen $\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- III) Reelle Zahlen \mathbb{R}
- IV) Komplexe Zahlen \mathbb{C}
- V) Allquantor $\forall k$ bedeutet “für alle k gilt:”
- VI) Existenzquantor $\exists k$ bedeutet “es existiert ein k für das gilt:”

Definition 2.1: Diskretes Signal

Eine Folge $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ von reellen Zahlen (oder komplexen Zahlen $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$)

$$x[-\infty], \dots, x[-3], x[-2], x[-1], x[0], x[1], x[2], x[3], \dots, x[\infty]$$

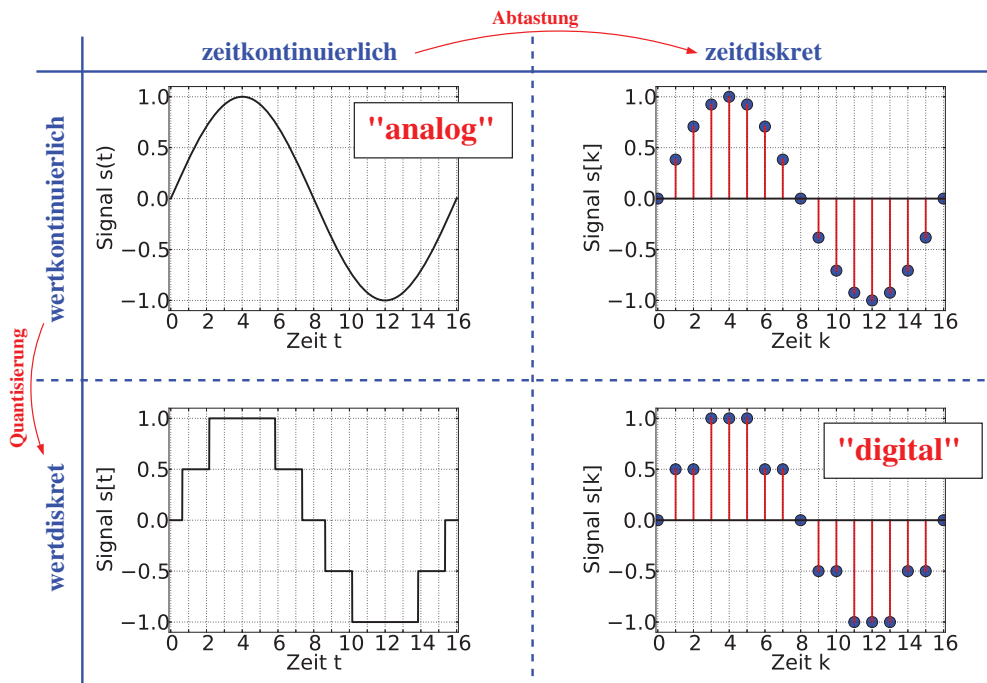
mit $x[k] \in \mathbb{R}$ (oder $x[k] \in \mathbb{C}$) und $k \in \mathbb{Z}$ heißt diskretes Signal oder genauer zeitdiskretes Signal.

Der Definitionsbereich ist die Menge der ganzen Zahlen, $k \in \mathbb{Z}$.

Der Wertebereich ist die Menge der reellen (oder komplexen) Zahlen, $x[k] \in \mathbb{R}$ (oder $x[k] \in \mathbb{C}$).

Bemerkungen:

- In Mathe-I haben wir bereits *einseitige* Folgen $\{a_n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ (und deren Grenzwerte) als Abbildungen $a : \mathbb{N} \rightarrow M$ aus den natürlichen Zahlen in beliebige Mengen M kennengelernt (siehe Skript Mathe-I, Kapitel 3 über Folgen und Grenzwerte). Allgemein betrachtet man aber in der Signaltheorie zweiseitige Folgen $\{x[k]\}$ für $k \in \mathbb{Z}$, d.h. die Signale beginnen zur Zeit $k = -\infty$ und gehen bis zur Zeit $k = +\infty$.
- Statt als Zahlenfolgen kann man sich Signale $x[k] = (\dots x[-1] x[0] x[1] x[2] \dots)^T$ auch als (i.Allg. unendlich dimensionale) Vektoren vorstellen (siehe Skript Mathe-I, Kapitel 8 über Vektorräume).
- Um diskrete Signale $x[k]$ von analogen Signalen $x(t)$ zu unterscheiden schreibt man die diskreten Zeitpunkte mit k (statt t) und setzt sie in eckige (statt runde) Klammern. Wir werden in einem späteren Kapitel den Zusammenhang zwischen diskreten und analogen Signalen genauer betrachten (siehe Kapitel 7).
- Die Signale nach Def. 2.1 sind zunächst zeitdiskret aber wertekontinuierlich (denn ihr Wertebereich sind ja die reellen oder sogar komplexen Zahlen). Allgemein unterscheidet man zwischen analogen und diskreten Signalen sowohl im Zeitbereich als auch im Wertebereich, sodass man folgendes Schema erhält:

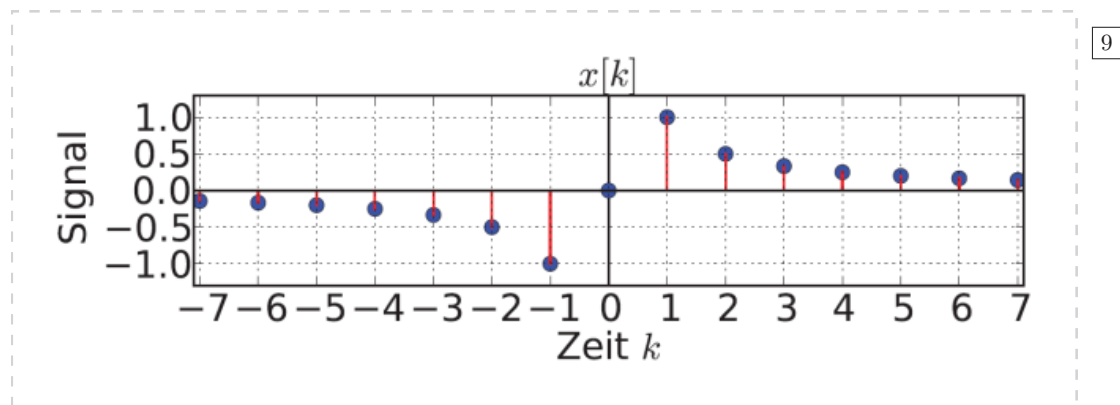


Den Übergang von Zeit-kontinuierlich zu Zeit-diskret bezeichnet man als Abtastung, den Übergang von Werte-kontinuierlich zu Werte-diskret bezeichnet

man als Quantisierung. Unter einem digitalen Signal versteht man ein Signal, das sowohl *zeitdiskret* als auch *wertdiskret* ist.

Beispiel: Skizzieren Sie das diskrete Signal $x[k]$ für

$$x[k] := \begin{cases} 1/k & , k \neq 0 \\ 0 & , k = 0 \end{cases} .$$



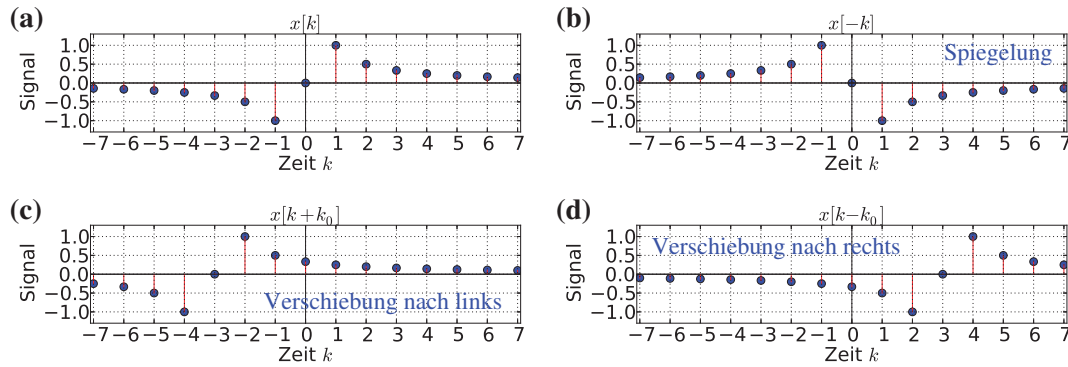
Ist ein Signal $x[k]$ (z.B. obiges) gegeben, so kann man es durch elementare Transformationen umformen, ähnlich wie wir das schon aus Mathe I kennen (siehe Skript Mathe-I, S. 24, Def. 1.15 über einfache Transformationen von Abbildungen).

Definition 2.2: Spiegelung und Verschiebung von diskreten Signalen

Sei $x[k]$ ein diskretes Signal und $k_0 \in \mathbb{Z}$. Dann heißt

- $x[-k]$ die Spiegelung von $x[k]$ an der Signalpegel-Achse
- $x[k + k_0]$ die Verschiebung von $x[k]$ um k_0 nach links
- $x[k - k_0]$ die Verschiebung von $x[k]$ um k_0 nach rechts

Beispiel: Die folgende Skizze zeigt für das Signal $x[k] := \begin{cases} 1/k & , k \neq 0 \\ 0 & , k = 0 \end{cases}$ (Teilfigur a) die Spiegelung $x[-k]$ (Teil b), die Verschiebung $x[k + k_0]$ um $k_0 := 3$ nach links (c) und die Verschiebung $x[k - k_0]$ um k_0 nach rechts (d):



11

Hierbei gilt:

$$\begin{aligned}
 (b) \quad x[-k] &= \begin{cases} -\frac{1}{k}, & k \neq 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases} \\
 (c) \quad x[k+k_0] = x[k+3] &= \begin{cases} \frac{1}{k+3}, & k \neq -3 \\ 0, & k = -3 \end{cases} \\
 (d) \quad x[k-k_0] = x[k-3] &= \begin{cases} \frac{1}{k-3}, & k \neq 3 \\ 0, & k = 3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

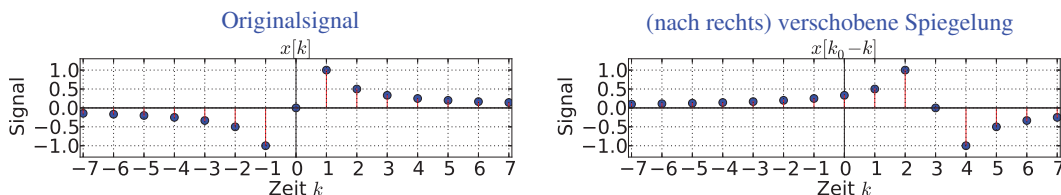
Bemerkung: Man kann die elementaren Transformationen auch verketteten (also hintereinander ausführen). Eine wichtige solche Verkettung ist für ein Signal $x[k]$ die verschobene Spiegelung $x[k_0 - k]$: Wegen

12

$$\begin{aligned}
 x[k_0 - k] &= x[-(k - k_0)] \\
 &= x[(-k) + k_0]
 \end{aligned}$$

sieht man, dass $x[k_0 - k]$ die Verschiebung des gespiegelten Signals $x[-k]$ um k_0 nach rechts ist. D.h. $x[k]$ wird zuerst gespiegelt und dann um k_0 nach rechts verschoben.

Beispiel: Die folgende Skizze zeigt für das Signal $x[k] := \begin{cases} 1/k, & k \neq 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases}$ (Teilfigur links) die um $k_0 = 3$ nach rechts verschobene Spiegelung $x[k_0 - k]$ (Teilfigur rechts)



$$\text{mit } x[k_0 - k] = x[3 - k] = \begin{cases} \frac{1}{3-k}, & k \neq 3 \\ 0, & k = 3 \end{cases}$$

13

Definition 2.3: Gerades und ungerades Signal

Sei $x[k]$ ein diskretes Signal.

- $x[k]$ heißt gerades Signal, falls $x[k] = x[-k] \forall k \in \mathbb{Z}$ gilt.
- $x[k]$ heißt ungerades Signal, falls $x[k] = -x[-k] \forall k \in \mathbb{Z}$ gilt.

14

Bemerkung: Anschaulich ist ein Signal gerade, genau dann, wenn es achsensymmetrisch zur Signalpegel-Achse ist. Entsprechend ist ein Signal ungerade, genau dann, wenn es punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

Beispiel: Sind die folgenden Signale gerade bzw. ungerade?

$$(a) \ x[k] = \begin{cases} \frac{1}{k} & , \ k \neq 0 \\ 0 & , \ k = 0 \end{cases} \quad (b) \ y[k] = \begin{cases} \frac{1}{k^2} & , \ k \neq 0 \\ 0 & , \ k = 0 \end{cases}$$

Lösung: Da

$$x[-k] = \begin{cases} \frac{1}{-k}, & k \neq 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{k}, & k \neq 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases} = -x[k]$$

15

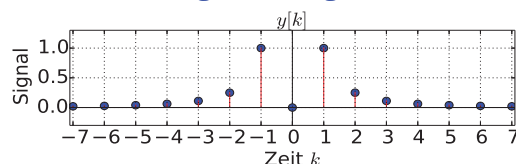
ist $x[k]$ ungerade, d.h. punktsymmetrisch zum Ursprung (siehe Skizze, rechts). Und wegen

$$y[-k] = \begin{cases} \frac{1}{(-k)^2}, & k \neq 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{k^2}, & k \neq 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases} = y[k]$$

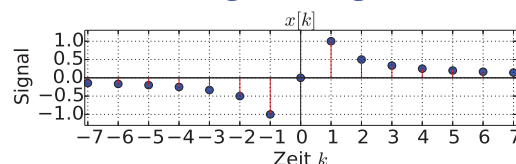
16

ist $y[k]$ gerade, d.h. achsensymmetrisch zur Signal-Achse (siehe Skizze, links).

gerades Signal



ungerades Signal



Definition 2.4: Kausales Signal

Sei $x[k]$ ein diskretes Signal.

17

- $x[k]$ heißt kausales Signal, falls gilt: $x[k] = 0 \ \forall k < 0$
- $x[k]$ heißt nicht-kausales Signal, falls gilt $\exists k < 0 : x[k] \neq 0$
- $x[k]$ heißt anti-kausales Signal, falls $x[-k-1]$ kausal ist, d.h. falls gilt: $x[k] = 0 \ \forall k \leq 0$

Bemerkung: Ein Signal heißt also kausal, falls es erst zur Zeit $k = 0$ “anfängt” (ungleich Null wird). Entsprechend heißt ein Signal anti-kausal falls es bei $k = 0$ “aufhört” (also für $k \geq 0$ Null ist). Falls ein Signal sowohl für $k < 0$ als auch für $k \geq 0$ von Null verschiedene Signal-Werte hat, dann ist es weder kausal noch anti-kausal! Achtung: Jedes anti-kausale Signal ist natürlich auch nicht kausal, aber nicht umgekehrt (d.h. es gibt nicht-kausale Signale, die nicht anti-kausal sind, siehe folgendes Bsp.).

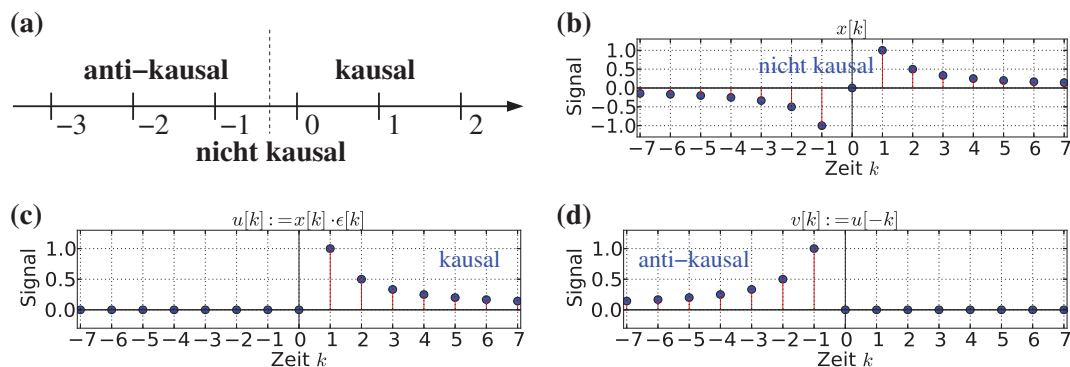
Beispiel: Sind die folgenden Signale kausal oder anti-kausal?

$$x[k] = \begin{cases} \frac{1}{k} & , k \neq 0 \\ 0 & , k = 0 \end{cases} \quad u[k] = \begin{cases} \frac{1}{k} & , k > 0 \\ 0 & , k \leq 0 \end{cases} \quad v[k] = \begin{cases} -\frac{1}{k} & , k < 0 \\ 0 & , k \geq 0 \end{cases}$$

18

Lösung (siehe auch Skizze):

- $x[k]$ ist nicht-kausal
- $u[k]$ ist kausal
- $v[k]$ ist anti-kausal



Weitere Übungsaufgaben: Blatt ???: A???

2.2 Spezielle diskrete Signale

Ähnlich wie in der analogen Signalverarbeitung sind auch bei der diskreten Signalverarbeitung der Dirac-Impuls und die Sprung-Funktion von grundlegender Bedeutung (siehe Skizze):

Definition 2.5: Impuls-Folge, Sprung-Folge

- Als Dirac-Impuls-Folge bezeichnet man das diskrete Signal

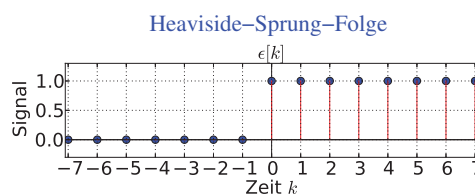
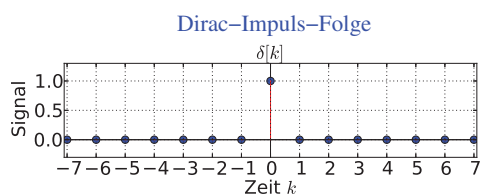
$$\delta[k] := \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

19

- Als Heaviside-Sprung-Folge bezeichnet man das diskrete Signal

$$\epsilon[k] := \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

20



Bemerkungen: Aus dieser Definition folgt:

- I) Dirac-Impuls $\delta[k]$ und Sprung-Folge $\epsilon[k]$ sind kausal, da $\delta[k] = \epsilon[k] = 0$ für alle $k < 0$.
- II) Der Dirac-Impuls ist ein gerades Signal, denn offensichtlich gilt $\delta[k] = \delta[-k]$ für $k \in \mathbb{Z}$ (vgl. Def. 2.3).
- III) Für $k_0 \in \mathbb{N}$ gilt für den um k_0 nach rechts bzw. links verschobenen Dirac-Impuls

21

$$\delta[k - k_0] = \begin{cases} 1, & k = k_0 \\ 0, & k \neq k_0 \end{cases}$$

bzw.

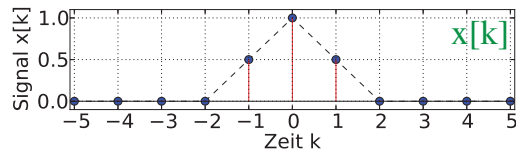
$$\delta[k + k_0] = \begin{cases} 1, & k \neq -k_0 \\ 0, & k = -k_0 \end{cases}$$

- IV) Es folgt also für beliebige Verschiebungen $i \in \mathbb{Z}$ und $k \in \mathbb{Z}$, dass

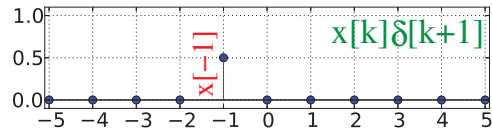
22

$$\begin{aligned} x[k] \cdot \delta[k - i] &= \begin{cases} x[i], & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases} \\ &= x[i] \cdot \delta[k - i] \end{aligned} \quad (2.1)$$

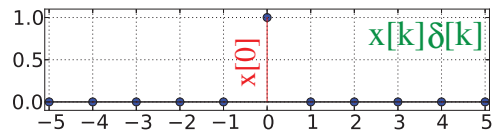
Siebeigenschaft



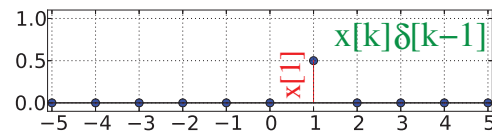
II



+



+



Letzteres nennt man auch die Siebeigenschaft oder Ausblendeigenschaft des Dirac-Impuls, denn multipliziert man zu einem Signal $x[k]$ einen um i verschobenen Dirac-Impuls $\delta[k - i]$, so blendet dies alle Werte von $x[k]$ aus, bis auf den Wert $x[i]$ zur Zeit i (siehe obige Skizze)

Die Siebeigenschaft kann man verwenden um ein beliebiges Signal $x[k]$ als gewichtete Summe (Linearkombination) von verschobenen Dirac-Folgen darzustellen. Dazu siebt man der Reihe nach für alle möglichen Verschiebungen $i = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ den Signalwert $x[i]$ mittels der Folge $x[k]\delta[k - i] = x[i] \cdot \delta[k - i]$ aus, und summiert dann all diese Folgen auf, sodass sich wieder $x[k]$ ergibt (siehe Skizze). Wir haben damit den folgenden Satz gezeigt:

Satz 2.6: Signaldarstellung mit verschobenen Dirac-Folgen

Jedes diskrete Signal $x[k]$ kann als Linearkombination von verschobenen Dirac-Folgen dargestellt werden:

$$x[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \cdot \delta[k-i] \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}$$

23

Bemerkungen:

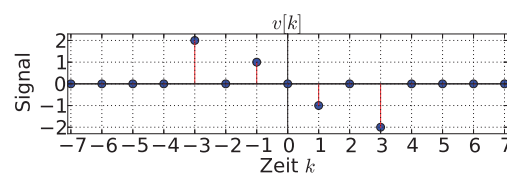
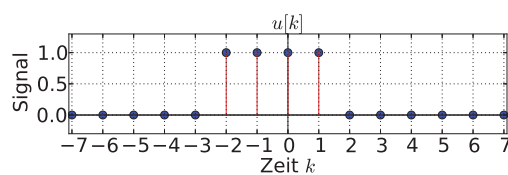
- I) Obige Summe ist eine sogenannte Faltungssumme. Wir werden dazu gleich die allgemeine Faltungsoperation $*$ definieren und sehen, dass die Dirac-Folge das neutrale Element der Faltung ist: $x[k] * \delta[k] = x[k]$ bzw. $\delta[k] * x[k] = x[k]$.
- II) Aus der Siebeigenschaft folgt außerdem, dass man zeitbeschränkte Signale (mit $x[k] = 0$ für $|k| > K$) als endliche Summe

$$x[k] = \sum_{i=-K}^K x[i] \cdot \delta[k-i]$$

24

darstellen kann.

Beispiel: Stellen Sie die durch die folgende Skizze gegebenen zeitbeschränkten Signale (z.B. $K = 5$) als gewichtete Summe von verschobenen Dirac-Folgen dar:



Lösung:

$$\begin{aligned} u[k] &= \delta[k+2] + \delta[k+1] + \delta[k] + \delta[k-1] \\ v[k] &= 2 \cdot \delta[k+3] + \delta[k+1] - \delta[k-1] - 2 \cdot \delta[k-3] \end{aligned}$$

25

Mit Hilfe der Sprung-Folge $\epsilon[k]$ lassen sich die wichtigsten diskreten Signale darstellen. Insbesondere gilt für die Dirac-Folge:

$$\delta[k] = \epsilon[k] - \epsilon[k-1]$$

Außerdem lassen sich die folgenden diskreten Signale mit Hilfe von $\epsilon[k]$ definieren:

Definition 2.7: Signum-, Kamm-, Rechteck- und Exponential-Folge

Weitere wichtige diskrete Signale sind wie folgt definiert (vgl. Skizze):

26

a) Signum-Folge:

$$\text{sgn}[k] := \epsilon[k] - \epsilon[-k] = \begin{cases} 1, & k > 0 \\ 0, & k = 0 \\ -1, & k < 0 \end{cases}$$

27

b) Kamm-Folge oder Scha-Folge:

$$\text{III}[k] := \epsilon[k] + \epsilon[-k - 1] = 1 \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}$$

28

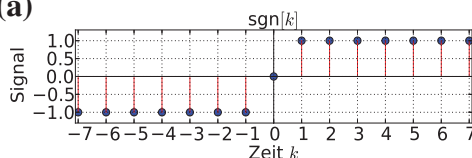
c) Rechteck-Folge: $\text{rect}_{k_1, k_2}[k] := \epsilon[k - k_1] - \epsilon[k - k_2 - 1] = \begin{cases} 1, & k_1 \leq k \leq k_2 \end{cases}$

29

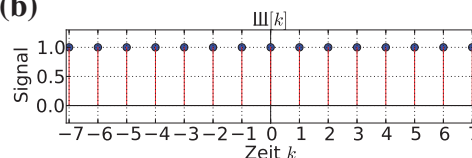
d) Kausale Exponential-Folge:

$$x[k] = q^k \cdot \epsilon[k]$$

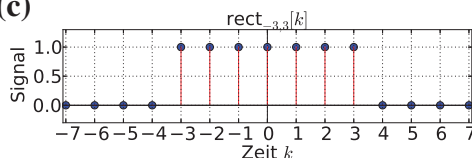
(a)



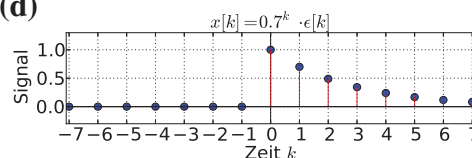
(b)



(c)



(d)

**Bemerkungen:**

- Die Signum-Folge $\text{sgn}[k]$ liefert das Vorzeichen von k (siehe Skizze (a)).
- Die Scha-Folge nimmt für jede diskrete Zeit $k \in \mathbb{Z}$ den Wert Eins an (siehe Skizze (b)).
- Die Rechteck-Folge $\text{rect}_{k_1, k_2}[k]$ hat Signal-Wert Eins zwischen k_1 und k_2 und sonst Null (siehe Skizze (c)).
- Für kausale Exponential-Folgen $x[k] = a^k \cdot \epsilon[k]$ ist es sinnvoll $|a| < 1$ zu wählen, denn nur dann gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} x[k] = 0$.

Beispiele:

I) Für $a = 0.7$ (siehe Skizze (d)) ergibt sich

$$x[k] : 0, \dots, 0, x[0] = 1, x[1] = -0.7, x[2] = 0.49, x[3] = 0.343, \dots$$

30

II) Für $a = -0.8$ ergibt sich

$$x[k] : 0, \dots, 0, x[0] = 1, x[1] = -0.8, x[2] = 0.64, x[3] = -0.512, \dots$$

31

Weitere Übungsaufgaben: Blatt ???: A???

2.3 Einfache Verknüpfungen diskreter Signale

Wie eingangs erwähnt kann man diskrete Signale $x[k]$ und $y[k]$ mittels

$$x[k] : x[-\infty], \dots, x[-1], x[0], x[1], \dots, x[\infty]$$

$$y[k] : y[-\infty], \dots, y[-1], y[0], y[1], \dots, y[\infty]$$

als zweiseitige Folgen bzw. unendlich-dimensionale Vektoren auffassen. Es ist dann naheliegend auf der Menge aller Signale \mathcal{S} die Operationen komponentenweise Addition $+$: $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$, komponentenweise Multiplikation \cdot : $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ sowie Skalierung \cdot : $\mathbb{R} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ (oder \cdot : $\mathbb{C} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$) zu definieren:

$$x[k] + y[k] : x[-\infty] + y[-\infty], \dots, x[0] + y[0], x[1] + y[1], \dots, x[\infty] + y[\infty]$$

$$x[k] \cdot y[k] : x[-\infty] \cdot y[-\infty], \dots, x[0] \cdot y[0], x[1] \cdot y[1], \dots, x[\infty] \cdot y[\infty]$$

$$c \cdot x[k] : c \cdot x[-\infty], \dots, c \cdot x[-1], c \cdot x[0], c \cdot x[1], \dots, c \cdot x[\infty]$$

32

wobei $c \in \mathbb{R}$ bzw. $c \in \mathbb{C}$. Auf die gleiche Weise definiert man auch die entsprechenden inversen Operationen komponentenweise Subtraktion $-$: $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ und komponentenweise Division $/$: $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$. Außerdem läßt sich leicht zeigen:

Satz 2.8: Vektorraum der diskreten Signale

- Die Menge \mathcal{S} aller Signale (mit Werten in \mathbb{R} oder \mathbb{C}) bildet mit Addition $+$ und Skalierung \cdot einen (unendlich-dimensionalen) Vektorraum.
- Die Menge aller auf $\{k_1, k_1 + 1, \dots, k_2\}$ zeitbeschränkten diskreten Signale

$$S_{k_1, k_2} := \{ \vec{x} \in \mathcal{S} \mid x[k] = 0 \ \forall k < k_1 \text{ oder } k > k_2 \}$$

33

bildet einen Vektorraum mit endlicher Dimension $n := k_2 - k_1 + 1$.

Beweis: Einfach die Gültigkeit der Vektorraum-Axiome für $(\mathcal{S}, +, \cdot)$ bzw. $(\mathcal{S}_{k_1, k_2}, +, \cdot)$ zeigen (siehe Übungen; vgl. Skript Mathe-I, S. 168, Def. 8.1 von Vektorräumen). \square

Bemerkungen:

- Gelegentlich schreiben wir Signale $x[k] \in \mathcal{S}$ als Vektoren \vec{x} oder \mathbf{x} , wobei mit $x_k = x[k] \in \mathbb{R}$ (oder $\in \mathbb{C}$) die k -te Vektorkomponente gemeint ist.

Beispiel: Stellen Sie die folgenden zeitbeschränkten Signale als Vektoren dar (wobei die erste Vektorkomponente der Zeit $k = 0$ entspricht), und führen Sie eine komponentenweise Addition, Subtraktion, Multiplikation und eine Skalierung von $x[k]$ mit $c = 5$ durch:

$$\begin{aligned} x[k] &:= 3\delta[k-1] + 2\delta[k-2] + 5\delta[k-3] & \text{bzw.} \\ y[k] &:= 2\delta[k-2] - 3\delta[k-3] + 2\delta[k-5] \end{aligned}$$

Lösung:

34

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (0 \quad 3 \quad 2 \quad 5 \quad 0 \quad 0) \\ \vec{y} &= (0 \quad 0 \quad 2 \quad -3 \quad 0 \quad 2) \\ \vec{x} + \vec{y} &= (0 \quad 3 \quad 4 \quad 2 \quad 0 \quad 2) \\ \vec{x} - \vec{y} &= (0 \quad 3 \quad 0 \quad 8 \quad 0 \quad -2) \\ \vec{x} \cdot \vec{y} &= (0 \quad 0 \quad 4 \quad -15 \quad 0 \quad 0) \\ c + \vec{x} &= (0 \quad 15 \quad 10 \quad 25 \quad 0 \quad 0) \end{aligned}$$

- In numerischen Software-Paketen wie z.B. Octave oder MATLAB werden diskrete Signale ebenfalls als Vektoren oder Listen von Signalwerten dargestellt.

Beispiel: In MATLAB stellt man obige Signale $x[k]$ und $y[k]$ wie folgt als Signale dar:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [0, 3, 2, 5, 0, 0] & \text{bzw.} \\ \mathbf{y} &= [0, 0, 2, -3, 0, 2] \end{aligned}$$

Da n -dimensionale Vektoren auch als $1 \times n$ bzw. $n \times 1$ Matrizen aufgefasst werden könnten muss man in MATLAB für die komponentenweise Operatoren einen Punkt voranstellen um sie von den Matrix-Operatoren zu unterscheiden: Z.B. ist in MATLAB $*$ die Matrizen-Multiplikation (siehe Skript Mathe-I, S. 196, Def. 8.19), während $.*$ die komponentenweise Multiplikation ist.

Während in Computersprachen der Stern $*$ üblicherweise die Multiplikation bedeutet steht in der Mathematik, Physik und Elektrotechnik $*$ für eine weitere wichtige Operation, nämlich die Faltung, die wir im folgenden definieren ...

Weitere Übungsaufgaben: Blatt ???: A???

2.4 Faltung

Die im folgenden definierte Faltungs-Operation hat eine extrem wichtige Bedeutung für die Realisierung linearer Systeme und Filter (siehe folgendes Kapitel). Z.B. erreicht man durch Falten mit einem Rechtecksignal ein Glätten von verrauschten Signalen (d.h. eine sogenannte Tiefpass-Filterung) oder kann einen gleitenden Mittelwerte (“moving average”) berechnen (siehe Übungen).

Definition 2.9: Faltung diskreter Signale

Seien $x \in \mathcal{S}$ und $y \in \mathcal{S}$ zwei diskrete Signale. Dann heißt die Operation $*$: $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ mit

$$(x * y)[k] := \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \cdot y[k - i]$$

35

Faltung von x mit y . Die Summe auf der rechten Seite nennt man auch Faltungssumme.

Bemerkungen:

- Statt $(x * y)[k]$ schreibt man manchmal auch ausführlicher $(x[k] * y[k])[k]$ oder ganz oft (etwas ungenau) einfach $x[k] * y[k]$ ohne runde Klammern.
- **Beachte:** Die Faltung $*$ ist eine Verknüpfung zwischen zwei *Signalen* $x \in \mathcal{S}$ und $y \in \mathcal{S}$, und nicht zwischen zwei einzelnen *Signalwerten* $x[k] \in \mathbb{R}$ und $y[k] \in \mathbb{R}$ wie die komponentenweisen Operationen $+$, $-$, \cdot , $/$.
- Für den Spezialfall $y[k] = \delta[k]$ erhalten wir mit Satz 2.6 $x[k] = x[k] * \delta[k]$ für $k \in \mathbb{Z}$, d.h. der Dirac-Stoß ist das neutrale Element der Faltung.
- Anhand der Faltungssumme in Def. 2.9 sieht man, dass die Faltung über (komponentenweise) Produkte der Signale $x[i]$ und $y[k - i]$ aufsummiert. Um die Faltung $x * y$ an einer festen Stelle $k \in \mathbb{Z}$ zu berechnen muss man also **folgende Schritte** tun:
 - I) Das erste Signal $x[i]$ lassen wir so wie es ist.
Beachte: Nun ist i die Zeitvariable, während k fest ist!
 - II) Das zweite Signal $y[i]$ spiegeln wir und verschieben es dann um k nach rechts, sodass wir die verschobene Spiegelung $y[k - i]$ erhalten (siehe Seite 16).
 - III) Nun multiplizieren wir komponentenweise $x[i] \cdot y[k - i]$ für alle Zeiten i .
 - IV) Wenn wir nun alle Komponenten des resultierenden Signals von (III) aufsummieren erhalten wir schließlich das Ergebnis $\sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \cdot y[k - i]$.

Der Name “Faltung” kommt tatsächlich daher, dass man die Faltungsoperation durch **Falten eines Papiers** simulieren kann: Dabei sind die beiden Signale x und y nebeneinander als Graph dargestellt. Faltet man nun das Papier zwischen den beiden Signalen um, sodass das rechte Signal auf dem linken liegt, so hat man y gespiegelt, und je nach Ort der Faltungskante gegenüber x um ein bestimmtes k verschoben. Der Überlapp der beiden Signale entspricht dann $x[k] * y[k]$. Durch mehrmaliges Falten an unterschiedlichen Stellen (verschiedene k) kann man so den Verlauf von $x[k] * y[k]$ auch ohne Rechnung graphisch abschätzen.

Beispiel 1: Berechnen Sie die Faltung $x * y$ der Signale

$$x[k] = 3\delta[k] + 2\delta[k - 1] + \delta[k - 2] \quad \text{und} \quad y[k] = \delta[k] - \delta[k - 1] + 2\delta[k - 2]$$

Lösung: Am einfachsten stellt man die Signale $x[i]$ und $y[k - i]$ (für Schritt I,II) als Vektoren dar. Als Referenz kann man mit einem Pfeil (mindestens) für eine Komponente die Zeit i angeben (z.B. für $i = 0$). Z.B. ergibt sich für Verschiebung $k = 0$:

36

$$\begin{array}{ccc} i=0 & i=0 & i=0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x[i] = (3 & 2 & 1), \quad y[i] = (1 & -1 & 2) \text{ bzw. } z[0-i] = (2 & -1 & 1) \end{array}$$

Da wir dies für jedes $k \in \mathbb{Z}$ separat machen müssen, stellen wir die Signale am besten in einer Tabelle dar (ohne Klammern, ohne Nullen). Dafür kann man beim kleinsten k anfangen, so dass sich $x[i]$ und $y[k - i]$ gerade noch überlappen (hier $k = 0$). Dann erhöht man k in jeder Zeile um 1 bis es keinen Überlapp mehr gibt:

37

	$x[i] =$	3	2	1	$\sum x[i]y[k-i] =$	$(x * y)[k]$
$k = 0$	$y[k-i] =$	2	-1	1	$3 \cdot 1$	$= 3$
$k = 1$			2	-1	$3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1$	$= -1$
$k = 2$				2	$3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1$	$= 5$
$k = 3$					$2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1)$	$= 3$
$k = 4$					$1 \cdot 2$	$= 2$

Damit ergibt sich also

38

$$x[k] * y[k] = 3\delta[k] - \delta[k - 1] + 5\delta[k - 2] + 3\delta[k - 3] + 2\delta[k - 4]$$

Das obige Schema kann man ganz allgemein für beliebige zeitbeschränkte Signale $x[k]$ und $y[k]$ anwenden, auch wenn sie bei beliebigen Zeiten “anfangen”. Dabei spiegelt man das zweite Signal y und legt seine rechte Seite an die linke Seite von x , bestimmt dann die zugehörige Verschiebung k und macht dann weiter wie vorher.

Beispiel 2: Berechnen Sie die Faltung $x * y$ der Signale

$$x[k] = -\delta[k + 43] + 3\delta[k + 42] - 2\delta[k + 41] \quad \text{und} \\ y[k] = \delta[k - 19] - 2\delta[k - 20] + 4\delta[k - 21] - \delta[k - 22]$$

Lösung: In Vektorschreibweise ergibt sich

$$\begin{array}{c} i = -43 \\ \downarrow \\ x[i] = (-1 \quad 3 \quad -2) \text{ und} \\ i = 19 \\ \downarrow \\ y[i] = (1 \quad -2 \quad 4 \quad -1) \text{ bzw. } y[-i] = (-1 \quad 4 \quad -2 \quad 1) \end{array}$$

39

Damit das rechte Ende von $y[k - i]$ gerade (zu einem Zeitpunkt) mit $x[i]$ überlappt, müssen wir also $y[-i]$ um $k = -43 - (-19) = -24$ verschieben (also um 24 nach links). Damit ergibt sich ähnlich wie im vorigen Beispiel das Tabellen-Schema

$i = -43$							
k	$x[i]$						
		-1	3	-2		$(x * y)[k]$	
-24	$y[k - i] =$	-1	4	-2	1	-1	
-23		-1	4	-2	1	$2 + 3 = 5$	
-22		-1	4	-2	1	$-4 - 6 - 2 = -12$	
-21		-1	4	-2	1	$1 + 12 + 4 = 17$	
-20			-1	4	-2	1	$-3 - 8 = -11$
-19				-1	4	-2	1
							2

40

und deshalb das Ergebnis

$$(x * y)[k] = -\delta[k + 24] + 5\delta[k + 23] - 12\delta[k + 22] + 17\delta[k + 21] \\ - 11\delta[k + 20] + 2\delta[k + 19]$$

41

Aus den Beispielen erkennt man, dass für zeitbeschränkte Signale folgendes gilt:

Lemma 2.10: Faltung zeitbeschränkter Signale, Faltung mit MATLAB

Seien $x[k] \in \mathcal{S}_{a,b}$ und $y[k] \in \mathcal{S}_{c,d}$ zeitbeschränkte diskrete Signale mit Längen $m := b - a + 1$ bzw. $n := d - c + 1$. Dann ist

$$x[k] * y[k] \in \mathcal{S}_{a+c,b+d} \quad \text{und hat Länge} \quad n + m - 1.$$

42

Beweis anhand des vorigen Beispiels 2:

- $x[i]$ beginnt zur Zeit $a = -43$, endet bei $b = -41$ und hat deshalb die Länge $m := b - a + 1 = 3$.
- $y[i]$ beginnt zur Zeit $c = 19$, endet bei $d = 22$ und hat deshalb die Länge $n := d - c + 1 = 4$.
- Das $y[-i]$ endet dann entsprechend zur Zeit $-c = -19$.
- Das kleinste k für das sich $x[i]$ und $y[k - i]$ überlappen ist also $k_{\min} = a - (-c) = a + c = -43 + 19 = -24$.
- Erhöhen wir k schrittweise so überlappt $y[k - i]$ insgesamt n mal mit dem Anfangswert $x[a]$. Danach kann man k noch $m - 1$ mal erhöhen bis es keinen Überlapp mit $x[b]$ mehr gibt, insgesamt gibt es also $n + m - 1$ Zeiten mit Überlapp.
- Deshalb ist das größte k für das sich $x[i]$ und $y[k - i]$ noch überlappen also $k_{\max} = k_{\min} + (n + m - 1) - 1 = a + c + (d - c + 1 + b - a + 1 - 1) - 1 = b + d$.
- Zusammengefasst beginnt also $x[k] * y[k]$ zur Zeit $a + c$, endet zur Zeit $b + d$ und hat die Länge $n + m - 1$. \square

Bemerkung: Das Lemma ist wichtig wenn man die Faltung mit numerischen Softwarepaketen berechnet. Z.B. berechnet man in MATLAB oder Octave die Faltung mit dem Befehl “conv”, welcher Vektoren ohne Zeitangaben erwartet. So liefert MATLAB (und auch Octave) bei Eingabe

```
x = [-1, 3, -2];      % Definition des Signals x
y = [1, -2, 4, -1];   % Definition des Signals y
h = conv(x,y);        % h = x * y
```

das Ergebnis

```
--> h = [-1, 5, -12, 17, -11, 2] .
```

Mit obigem Lemma generieren also folgende MATLAB-Befehle

```
a=-43; b=-41; c=19; d=22; % Anfangs/End-Zeitpunkte von x und y
k = (a+c):(b+d);          % Zeitvektor fuer h
```

den zu h gehörigen Zeitvektor

--> $k = [-24, -23, -22, -21, -20, -19]$,

sodass man das resultierende Signal $x * y$ etwa mit dem Plot-Befehl

```
stem(k,h);           % Plot-Befehl fuer diskrete Signale
```

grafisch darstellen kann. Die untenstehende Figur zeigt entsprechende Plots für Beispiel 2 (linke Seite). Es folgt ein weiteres...

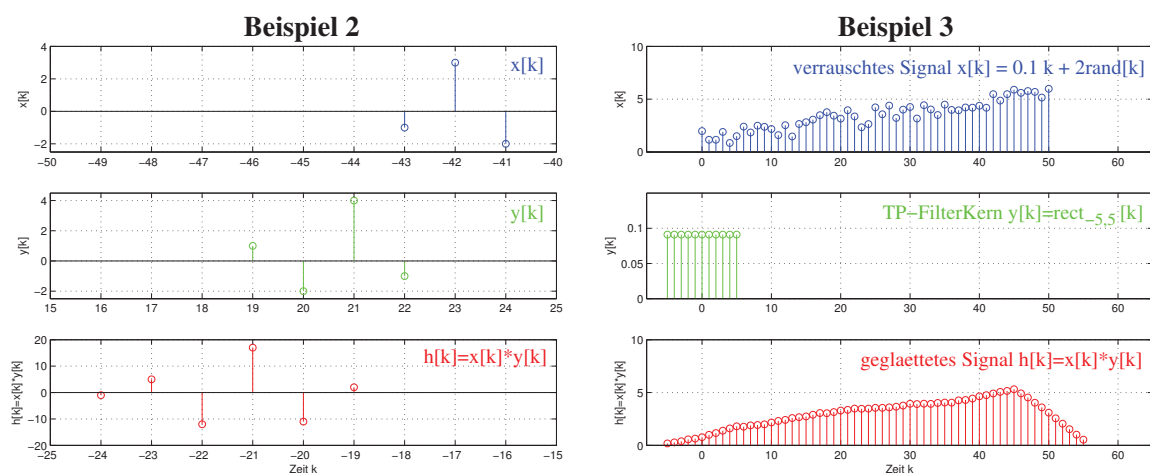
Beispiel 3: Gegeben sei ein verrauschtes Signal $x[k] = 0.1k + 2\text{rand}[k]$ im Zeitbereich $0 \leq k \leq 50$. Das Rauschen soll durch Faltung mit einem rechteckförmigen Signal $y[k] = \frac{1}{11} \text{rect}_{-5;5}[k]$ reduziert werden. Implementieren Sie die Filterung und plotten Sie die resultierenden Signale mit Hilfe von MATLAB.

Hinweis: Der MATLAB Befehl `rand(size(k))` generiert einen Zufalls-Vektor (Werte zwischen 0 und 1) der gleichen Größe wie der Zeitvektor $k = 0 : 50$. Ähnlich generiert der Befehl `ones(1,11)` einen Zeilenvektor der Länge 11 mit lauter Einsen für $y[k]$.

Lösungsfragment:

```
kx = 0:50; x=0.1*kx+2*rand(size(kx)); % berechne Signal x
ky = -5:5; y=ones(size(ky))/11.0;    % Rechtecksignal mit Summe 1
k=(0-5):(50+5); h=conv(x,y);         % gefaltetes Signal h=x*y
subplot(3,1,1); stem(kx,x);           % 1.Subplot fuer diskretes Signal x
subplot(3,1,2); stem(ky,y);           % 2.Subplot fuer diskretes Signal y
subplot(3,1,3); stem(k,h);            % 3.Subplot fuer diskretes Signal h
```

Die untenstehende Figur zeigt das Ergebnis (rechte Seite).



43

Satz 2.11: Eigenschaften der Faltung

Seien $x, y, w \in \mathcal{S}$ diskrete Signale, δ die Dirac-Impuls-Folge und $c, d \in \mathbb{R}$ (oder $\in \mathbb{C}$) Körperelemente. Dann gilt

- I) Kommutativität: $x * y = y * x$
- II) Assoziativität: $w * (x * y) = (w * x) * y$ und $c \cdot (x * y) = (c \cdot x) * y$
- III) Distributivität: $w * (x + y) = w * x + w * y$
- IV) Neutrales Element: $x * \delta = x$
- V) Verschiebung: $x[k] * \delta[k_0 - k] = x[k - k_0]$
- VI) Zeitinvarianz: $x[k] * y[k - k_0] = (x[k] * y[k])[k - k_0]$
- VII) Linearität: $(c \cdot x + d \cdot y) * w = c \cdot (x * w) + d \cdot (y * w)$

Beweis:

- I) Kommutativgesetz: Durch Substituieren von $i' := k - i$ (oder $i = k - i'$) in der Faltungssumme läuft i' immer noch von $-\infty$ bis ∞ , so dass

$$x[k] * y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]y[k-i] \stackrel{i'=k-i}{=} \sum_{i'=-\infty}^{\infty} x[k-i']y[i'] = y[k] * x[k] .$$

- II) 1. Assoziativgesetz: Verkettet man zwei Faltungen erhält man die Doppelsumme

$$\begin{aligned} w[k] * (x[k] * y[k]) &= w[k] * \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]y[k-i] \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} w[j] \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]y[k-j-i] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} w[j]x[i]y[k-(i+j)] \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung ($w[j]$ in die zweite Summe reinziehen) aus dem Distributivgesetz für Körper \mathbb{R} (bzw. \mathbb{C}) folgt (siehe Skript Mathe-I, S. 44, Def. 2.1 der Körperaxiome). Durch Substitution $i' := i + j$ bzw. $i = i' - j$ (sodass i' immer

noch von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft), dem Kommutativ- und Assoziativgesetz der Addition in Körpern (d.h. Vertauschung der Summationsreihenfolge ist erlaubt) und wieder dem Distributivgesetz ($y[k - i']$ ausklammern) ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}
 w[k] * (x[k] * y[k]) &\stackrel{i'=i+j}{=} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i'=-\infty}^{\infty} w[j]x[i' - j]y[k - i'] \\
 &= \sum_{i'=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} w[j]x[i' - j]y[k - i'] = \sum_{i'=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} w[j]x[i' - j] \right) y[k - i'] \\
 &= \sum_{i'=-\infty}^{\infty} (w[i'] * x[i'])y[k - i'] = (w[k] * x[k]) * y[k] .
 \end{aligned}$$

Das 2.Assoziativgesetz folgt viel einfacher, da man den Skalar c in die Faltungssumme ziehen darf.

III) Das Distributivgesetz folgt ähnlich aus den Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetzen für $+$ und \cdot :

$$\begin{aligned}
 w[k] * (x[k] + y[k]) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} w[i](x[k - i] + y[k - i]) \\
 &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} w[i]x[k - i] + \sum_{i=-\infty}^{\infty} w[i]y[k - i] = w[k] * x[k] + w[k] * y[k] .
 \end{aligned}$$

IV) Schon gezeigt (siehe Bemerkung unter Def. 2.9). Folgt ausserdem aus (V).

V) Mit Satz 2.6 auf Seite 21 folgt aus der Definition der Faltung

$$x[k] * \delta[k - k_0] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]\delta[k - k_0 - i] \stackrel{S. 2.6}{=} x[k - k_0] .$$

VI) Folgt aus (II) und (V):

$$\begin{aligned}
 x[k] * y[k - k_0] &\stackrel{(V)}{=} x[k] * (y[k] * \delta[k - k_0]) \stackrel{(II)}{=} (x[k] * y[k]) * \delta[k - k_0] \\
 &\stackrel{(V)}{=} (x[k] * y[k])[k - k_0]
 \end{aligned}$$

VII) Folgt sofort aus (II) und (III):

$$(c \cdot x + d \cdot y) * w \stackrel{(III)}{=} (c \cdot x) * w + (d \cdot y) * w \stackrel{(II)}{=} c \cdot (x * w) + d \cdot (y * w)$$

□

Bemerkung: Wegen (I), (II), (III) und (IV) bildet $(\mathcal{S}, +, *)$ einen Ring (also fast ein Körper), ähnlich wie die Menge der Polynome (siehe Skript Mathe-I, S. 99, Satz 4.9.IV zur Ringeigenschaft). Tatsächlich ist die Menge aller kausalen zeitbeschränkten Signale isomorph (also gleich bis auf Umbenamungen) zur Menge aller Polynome. Denn jedes Polynom

$$p(z) := a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots + a_n z^n$$

läßt sich ein-eindeutig dem kausalen zeitbeschränkten Signal $x[k] \in \mathcal{S}_{0,n}$ mit

$$x[k] = a_0 \delta[k] + a_1 \delta[k-1] + a_2 \delta[k-2] + \dots + a_n \delta[k-n]$$

zuordnen. D.h. die Signalwerte $x[k]$ entsprechen genau den Polynomkoeffizienten a_k für $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$. Tatsächlich wissen wir schon aus der Mathe-I Vorlesung, dass die Polynommultiplikation genau der Faltungsoperation entspricht:

Satz 2.12: Faltung und Polynommultiplikation

Seien $p(z) := a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ bzw. $q(z) := b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n$ zwei Polynome und $x[k] = a_k$ bzw. $y[k] = b_k$ die entsprechenden Signale. Dann gilt für die Polynommultiplikation

$$p(z) \cdot q(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_{2n} z^{2n} \quad \text{Mit Koeffizienten } c_k = (c * y)[k]$$

Beweis: Siehe Skript Mathe-I, S. 95, Satz 4.6 zur Polynommultiplikation. \square

Beispiel: Multiplizieren Sie die den Signalen $x[k] = 3\delta[k] + 2\delta[k-1] + \delta[k-2]$ und $y[k] = \delta[k] - \delta[k-1] + 2\delta[k-2]$ von Beispiel 1 entsprechenden Polynome $p(z)$ und $q(z)$:
Lösung: Die Polynome sind

$$p(z) = 3 + 2z + z^2 \text{ und } q(z) = 1 - z + 2z^2$$

und die Multiplikation ergibt also

$$\begin{aligned} p(z) \cdot q(z) &= (3 + 2z + z^2) \cdot (2z^2 - z + 1) \\ &= 3 \cdot 1 + z(3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1) + z^2(3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1) \\ &\quad + z^3(2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1)) + z^4(1 \cdot 2) \\ &= 3 - z + 5z^2 + 3z^3 + 2z^4 \end{aligned}$$

Man überzeuge sich durch Vergleichen der Tabelle und des Ergebnis auf Seite 26, dass man exakt diesselben Operationen gerechnet hat wie bei der Faltung $x[k] * y[k]$.

Bemerkung: Die Beziehung zwischen kausalen zeitbeschränkten Signalen und Polynomen läßt sich auch auf allgemeine Signale verallgemeinern. Dabei entspricht ein allgemeines Signal $x[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \delta[k-i]$ ein-eindeutig einer zweiseitigen unendlichen Reihe $\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i z^i$. Die Reihen-Darstellung $X(z) := \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i z^{-i}$ des gespiegelten Signals nennt man auch die z-Transformation von $x[k]$ (später ...).

Weitere Übungsaufgaben: Blatt ????: A???

2.5 Energie, Leistung, Skalarprodukt und Korrelation

Wir interpretieren Signale $x[k]$ oft als Spannungspegel $u[k]$ oder Stromstärken $i[k]$. In beiden Fällen ist die Momentanleistung $p[k]$ proportional zum Quadrat des Signals (da z.B. $p[k] = u^2[k]/R$ bzw. $p[k] = R \cdot i^2[k]$ für Ohm'schen Widerstand R). Deshalb definiert man die Leistung eines Signals $x[k]$ proportional zum Mittelwert der Momentanleistung, und die Energie eines Signals $x[k]$ proportional zum Integral (oder der Summe) der Momentanleistung:

Definition 2.13: Energie und Leistung eines Signals

Sei $x \in \mathcal{S}$ ein diskretes Signal.

- Dann definieren wir die Energie des Signals $x[k]$ als

$$E_x := \sum_{i=-\infty}^{\infty} |x[i]|^2$$

49

und $x[k]$ heißt Energiesignal falls $0 \leq E_x < \infty$.

- Entsprechend definieren wir die Leistung des Signals $x[k]$ als

$$P_x := \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{i=-K}^K |x[i]|^2$$

50

und $x[k]$ heißt Leistungssignal falls $0 < P_x < \infty$ oder $x[k] = 0 \forall k$.

- Die Mengen aller Energiesignale bzw. Leistungssignale bezeichnen wir mit \mathcal{S}^E bzw. \mathcal{S}^P .

Bemerkungen:

- Man kann leicht zeigen, dass auch $(\mathcal{S}^E, +, \cdot)$ und $(\mathcal{S}^P, +, \cdot)$ Vektorräume sind.
- Für kausale Leistungssignale definiert man manchmal auch

$$P_x := \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K+1} \sum_{i=0}^K |x[i]|^2$$

- Der Grund für eine Unterscheidung zwischen Energie und Leistungssignalen ist, dass man für Energie- bzw. Leistungssignale unterschiedliche Normen bzw. Skalarprodukte definieren muss, um die Resultate über normierte Vektorräume (siehe Skript Mathe-I, Kapitel 8.2 und 8.3) auch auf diskrete Signale anwenden zu können (etwa über Skalarprodukt, Winkel, Ähnlichkeit, ...):

Definition 2.14: Skalarprodukt zweier Signalvektoren

Seien $x[k]$ und $y[k]$ zwei Signale. Dann nennt man $\vec{x} \cdot \vec{y}$ oder gleichbedeutend $\langle x[k], y[k] \rangle$ Skalarprodukt oder Inneres Produkt der Signale $x[k]$ und $y[k]$. Dabei unterscheiden wir folgende Definitionen:

- Für Energiesignale $x[k], y[k] \in \mathcal{S}^E$ definieren wir das Skalarprodukt (wie üblich)

51

$$\langle x[k], y[k] \rangle_E := \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*[k] \cdot y[k]$$

wobei x^* das konjugiert komplexe Signal bezeichnet.

- Für Leistungssignale $x[k], y[k] \in \mathcal{S}^P$ definieren wir dagegen

52

$$\langle x[k], y[k] \rangle_P := \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{k=-K}^K x^*[k] \cdot y[k]$$

- Als Euklidische Norm der Signale bezeichnen wir jeweils

53

$$\begin{aligned} \|x[k]\|_E &:= \sqrt{\langle x[k], x[k] \rangle_E} = \sqrt{E_x} \text{ bzw.} \\ \|x[k]\|_P &:= \sqrt{\langle x[k], x[k] \rangle_P} = \sqrt{P_x} \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Die Definitionen entsprechen dem in Mathe-I definierten Skalarprodukt in Vektorräumen (siehe Skript Mathe-I, S. 180, Def. 8.9).
- Wenn es klar (oder unerheblich) ist ob wir Energie- oder Leistungssignale betrachten, dann schreiben wir einfach $\langle x[k], y[k] \rangle$ bzw. $\|x[k]\|$.
- Die Definitionen für Leistungssignale sind notwendig, da man ansonsten z.B. nicht die Norm $\|x[k]\|$ für eine Gleichspannungsquelle $x[k] = U_0 > 0 \forall k$ berechnen könnte (weil die unendliche Summe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2$ nicht konvergiert).
- Um das Skalarprodukt nicht mit der komponentenweise Multiplikation $x[k] \cdot y[k]$ zu verwechseln, verwenden wir meistens die Notation $\langle x[k], y[k] \rangle$.
- Man kann leicht zeigen, dass $(\mathcal{S}^E, +, \cdot, \|\cdot\|_E)$ bzw. $(\mathcal{S}^P, +, \cdot, \|\cdot\|_P)$ normierte Vektorräume sind (Gültigkeit der Axiome nachweisen, siehe Skript Mathe-I, Kapitel 8.1 und 8.2). Es übertragen sich also alle Ergebnisse über Skalarprodukt und Winkel von Vektoren auf diskrete Signale. Insbesondere kann man den Winkel Φ zwischen zwei Signalen als Ähnlichkeitsmaß verwenden:

Satz 2.15: Winkel zwischen Signalen, Eigenschaften des Skalarprodukts

Als Winkel Φ zwischen zwei Signalen $x[k]$ und $y[k]$ definiert man den Winkel zwischen den entsprechenden Signalvektoren, d.h. es gilt:

$$\cos \Phi = \frac{\langle x[k], y[k] \rangle}{\|x[k]\| \cdot \|y[k]\|}$$

54

Insbesondere ist das Skalarprodukt $\langle x[k], y[k] \rangle$ also ein Maß für die Ähnlichkeit der Signale $x[k]$ und $y[k]$, denn es gilt:

- $|\langle x[k], y[k] \rangle| \leq \|x[k]\| \cdot \|y[k]\|$.
- Maximale Ähnlichkeit: $\langle x[k], y[k] \rangle = \|x[k]\| \cdot \|y[k]\|$;
genau dann, wenn der Winkel zw. $x[k]$, $y[k]$ genau $\Phi = 0$ und $\cos \Phi = 1$ ist;
genau dann, wenn $x[k] = c \cdot y[k]$ für ein $c > 0$.
- Maximale Unähnlichkeit: $\langle x[k], y[k] \rangle = -\|x[k]\| \cdot \|y[k]\|$;
genau dann, wenn der Winkel $\Phi = \pi = 180^\circ$ und $\cos \Phi = -1$ ist;
genau dann, wenn $x[k] = -c \cdot y[k]$ für ein $c > 0$.
- Orthogonalität: $\langle x[k], y[k] \rangle = 0$
genau dann, wenn der Winkel $\Phi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ und $\cos \Phi = 0$ ist;
genau dann, wenn $x[k] \perp y[k]$.

Beweis: Folgt aus den Eigenschaften des Skalarprodukts (siehe Skript Mathe-I, S. 181, Satz 8.10.V). \square

Bemerkung: Für den Winkel verwenden wir ein großes griechisches Φ , während das kleine φ für die im folgenden definierte Korrelationsfunktion verwendet wird:

Definition 2.16: Korrelation

Seien $x[k], y[k] \in \mathcal{S}$ zwei diskrete Signal.

Dann definieren wir die Kreuzkorrelationsfunktion für $x[k]$ und $y[k]$ als

$$\varphi_{xy}[\kappa] := \langle x[k], y[k + \kappa] \rangle$$

55

und die Autokorrelationsfunktion von $x[k]$ als

$$\varphi_{xx}[\kappa] := \langle x[k], x[k + \kappa] \rangle$$

56

Bemerkungen:

- Die Kreuzkorrelationsfunktion $\varphi_{xy}[\kappa]$ ist einfach das Skalarprodukt des ersten Signals $x[k]$ mit dem um κ nach links verschobenen zweiten Signal $y[k]$.
- Die Autokorrelationsfunktion ist ein Spezialfall der Kreuzkorrelationsfunktion für $x[k] = y[k]$.
- Wenn man explizit zwischen Korrelationen zwischen Energiesignalen bzw. Leistungssignalen unterscheiden will schreibt man entsprechend $\varphi_{xy}^E[\kappa]$ bzw. $\varphi_{xy}^P[\kappa]$.
- Offensichtlich kann man Energie bzw. Leistung mit Hilfe der Autokorrelation (ohne Zeitverschiebung) berechnen:

$$E_x = \varphi_{xx}^E[0] \quad \text{bzw.} \quad P_x = \varphi_{xx}^P[0]$$

- Allgemein gilt, dass die Autokorrelationsfunktionen für Null Zeitverschiebung $\kappa = 0$ ihr absolutes Maximum annehmen (da dann $\Phi = 0^\circ$ und $\cos \Phi = 1$ am größten ist):

$$\varphi_{xx}[0] \geq \varphi_{xx}[\kappa] \quad \text{für alle } \kappa$$

- Sind die Signale normiert ($\|x[k]\| = \|y[k]\| = 1$) so spricht man von normierten Korrelationsfunktionen. Für nicht normierte Signale sind die normierten Korrelationsfunktionen durch

$$\varphi_{xy}^N[\kappa] := \frac{\langle x[k], y[k + \kappa] \rangle}{\|x[k]\| \cdot \|y[k]\|} \quad \text{bzw.} \quad \varphi_{xx}^N[\kappa] := \frac{\langle x[k], x[k + \kappa] \rangle}{\|x[k]\|^2}$$

definiert. Es gilt dann $|\varphi_{xy}^N[\kappa]| \leq 1$ bzw. $|\varphi_{xx}^N[\kappa]| \leq 1$.

- Man kann die Korrelation mit Hilfe der Faltungsoperation berechnen...

Satz 2.17: Korrelation und Faltung

Die Korrelation lässt sich mit Hilfe der Faltungsoperation berechnen. Es gilt:

$$\varphi_{xy}^E[\kappa] = x^*[-\kappa] * y[\kappa] \quad \text{bzw.} \quad \varphi_{xy}^P[\kappa] = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2K+1} x_K^*[-\kappa] * y_K[\kappa]$$

wobei im letzten Fall $x_K[\kappa] := x[\kappa] \cdot \text{rect}_{-K,K}[\kappa]$ bzw. $y_K[\kappa] := y[\kappa] \cdot \text{rect}_{-K,K}[\kappa]$ die auf Zeiten $-K \leq \kappa < K$ zeitbeschränkten Signale sind.

Beweis: Für Energiesignale folgt aus der Definition von Korrelation, Skalarprodukt und Faltung mit der Substitution $i := -k$:

$$\varphi_{xy}^E[\kappa] = \langle x[k], y[k + \kappa] \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*[k] y[k + \kappa] \stackrel{i=-k}{=} \sum_{i=-\infty}^{\infty} x^*[-i] y[\kappa - i] = x^*[-\kappa] * y[\kappa]$$

Für Leistungssignale gilt entsprechendes. \square

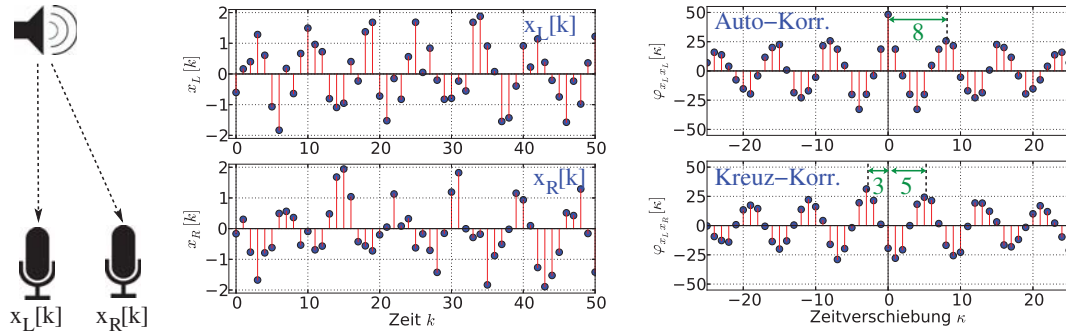
Bemerkungen: Für die Auto-Korrelationen gelten natürlich die entsprechenden Beziehungen, z.B. $\varphi_{xx}^E[\kappa] = x^*[-\kappa] * x[\kappa]$.

Anwendung Korrelationsanalyse:

- Mit der Autokorrelation kann man etwa die Periodizität eines Signals messen. Dazu ermittelt man den höchsten Peak neben dem Haupt-Peak bei $\kappa = 0$. Falls der höchste Peak bei κ_{\max} liegt so hat das Signal die Periode $T = |\kappa_{\max}|$. Falls es keine klaren Peaks gibt (flaches Korrelogramm) so ist das Signal nicht (oder nur schwach) periodisch.
- Mit der Kreuzkorrelation kann man z.B. Zeitverschiebungen zwischen zwei Signalen $x[k]$ und $y[k]$. Dazu ermittelt man wieder den höchsten Peak bei κ_{\max} . Das bedeutet, dass $x[k]$ und $y[k + \kappa_{\max}]$ sich unter allen möglichen Verschiebungen κ am ähnlichsten sind. D.h. falls die beiden Signale zeitlich gegeneinander verschobene Komponenten enthalten, dann ist es am wahrscheinlichsten, dass diese Verschiebung κ_{\max} war, genauer: $x[k]$ ist gegenüber $y[k]$ um die Zeit κ_{\max} verzögert.

Beispiel: Wie in untenstehender Figur illustriert, messen wir mit zwei Mikrofonen die Signale x_L (linkes Mikrofon) und x_R (rechtes Mikrofon) von einer Schallquelle (Lautsprechersymbol). Da die Laufzeit von der Schallquelle zu den beiden Mikrofonen unterschiedlich ist, erhält man eine zeitliche Verzögerung zwischen den beiden Signalen. Die folgenden Schaubilder zeigen die gemessenen Signale $x_L[k]$ (links oben) und $x_R[k]$ (links unten) und die berechnete Kreuzkorrelationsfunktion $\varphi_{x_L x_R}[\kappa]$ (rechts oben) und Autokorrelationsfunktion $\varphi_{x_L x_L}[\kappa]$ (rechts unten).

- Lesen Sie aus der Auto-Korrelationsfunktion die Periodizität des aufgenommenen Schallsignals ab.
- Bestimmen Sie aus der Kreuz-Korrelation die Zeitverzögerung zwischen den Aufnahmen vom linken und rechten Mikrofon.



Lösung:

- a) Im Autokorrelogramm ist der höchste Gipfel (abseits vom Zentralgipfel) bei $\kappa_{\max} = 8$. Also ist die Periode des Signals $T = 8$ Zeitschritte.
- b) Im Kreuzkorrelogramm $\varphi_{x_L x_R}[\kappa]$ liegt der höchste Gipfel bei $\kappa_{\max} = -3$ bzw. $\kappa_{\max} = 5$ (beide Gipfel sind ungefähr gleich hoch). D.h. entweder eilt das linke Signal x_L dem rechten Signal x_R um 3 Zeitschritte voraus, oder x_L ist gegenüber x_R um 5 Zeitschritte verzögert. Auch im Kreuzkorrelogramm kann man die Periodizität der Signale ablesen (Abstand zwischen zwei Peaks).

Bemerkung: Mit Hilfe der Korrelationsanalyse kann man Signalquellen lokalisieren: Die Signalquelle kann nur an den Orten \vec{p} liegen, die mit der von den Mikrofonen an den Orten \vec{m}_1 und \vec{m}_2 gemessenen Laufzeitdifferenz κ_{\max} übereinstimmt, d.h. für die

$$\kappa_{\max} \cdot v_S = \|\vec{p} - \vec{m}_1\| - \|\vec{p} - \vec{m}_2\|$$

gilt (wobei v_S die Schallgeschwindigkeit ist). Zwei Mikrofone und eine Laufzeitdifferenz erlauben leider noch keine eindeutige Bestimmung des Ortes der Signalquelle. Dafür bräuchte man mindestens drei Signale von drei Mikrofonen, mit denen man drei Laufzeitdifferenzen messen kann. Ein ähnliches Prinzip liegt auch der Lokalisation mit GPS zugrunde.

Weitere Übungsaufgaben: Blatt ???: A???

Kapitel 3

Diskrete Systeme

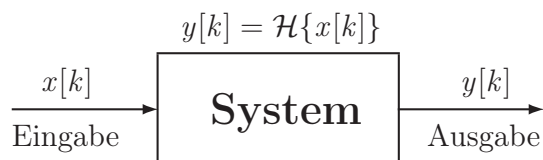
3.1 Definition und Eigenschaften von Systemen

Definition 3.1: Diskretes System

Sei \mathcal{S} die Menge aller diskreten Signale. Dann ist ein diskretes System eine Abbildung $\mathcal{H} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ welche ein Eingabe-Signal $x[k] \in \mathcal{S}$ auf ein Ausgabe-Signal $y[k] \in \mathcal{S}$ abbildet:

$$y[k] = \mathcal{H}\{x[k]\}$$

Das Eingabe-Signal nennt man auch Eingangssignal oder Inputsignal, das Ausgabe-Signal auch Ausgangssignal oder Outputsignal.



58

Bemerkungen:

- Für $\mathcal{H}\{x[k]\}$ benutzen wir geschwungene Klammern um klar zu machen, dass es sich bei \mathcal{H} nicht um eine Abbildung eines Eingangswerts auf einen Ausgangswert, sondern eines Eingangssignals $x \in \mathcal{S}$ auf ein Ausgangssignal $y \in \mathcal{S}$ handelt.
- Wir vernachlässigen hier zunächst Zufallsprozesse wie etwa Rauschen und nehmen an, dass es sich bei \mathcal{H} um ein deterministisches System handelt: D.h. für jedes Eingangssignal $x[k]$ ist das zugehörige Ausgangssignal $y[k]$ durch die Abbildung \mathcal{H} eindeutig bestimmt.
- Außerdem beschränken wir uns meist auf SISO-Systeme (“single input, single output”) mit 1-dimensionalen Signalen. Im allgemeinen können Ein- und Ausgangssignale aber auch mehrdimensional sein – in diesem Fall schreiben wir die Signale als Vektoren, z.B. \vec{x} (vgl. Kapitel 3.5).

59

Beispiel: Wir betrachten das System “Sparbuch” bei einer Bank. Wir nehmen an, das Sparbuch sei gebührenfrei und Einzahlungen werden mit Zinssatz p verzinst. Als Eingabe-Signal $x[k]$ definieren wir die Einzahlungen (z.B. zu Beginn) des Jahres k , und als Ausgabe-Signal $y[k]$ entsprechend das Guthaben des Sparbuchs.

- a) Berechnen Sie für eine einmalige Einzahlung x_0 im Jahr $k = 0$ das Guthaben nach i Jahren!
- b) Wie berechnet man für allgemeine Einzahlungen $x[k]$ das Guthaben $y[k]$?

Lösung: a) Für das Eingabe-Signal (bzw. die einmalige Einzahlung)

$$x[k] = x_0 \cdot \delta[k] = \begin{cases} x_0, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

entwickelt sich nun das Guthaben des Sparbuchs wie folgt:

zu Beginn: $y[0] = x_0$

nach 1 Jahr: $y[1] = x_0 + p \cdot x_0 = (1 + p) \cdot x_0$ nach 2 Jahren: $y[2] = (1 + p)x_0 + p \cdot (1 + p) \cdot x_0 = (1 + p) \cdot (1 + p) \cdot x_0 = (1 + p)^2 \cdot x_0$

nach 3 Jahren: $y[3] = \dots = (1 + p)^3 \cdot x_0$

nach i Jahren: $y[i] = (1 + p)^i \cdot x_0$

D.h. das Ausgangssignal ist die kausale Exponentialfolge $y[k] = x_0 \cdot (1 + p)^k \cdot \epsilon[k]$

60

- b) Allgemein errechnet sich das Guthaben im Jahr $k + 1$ durch folgende Rekursion:

$$y[k + 1] = y[k] \cdot (1 + p) + x[k + 1] \quad (3.1)$$

Das heißt $y[k + 1]$ ergibt sich aus dem verzinsten Guthaben $y[k]$ des vorigen Jahres und zusätzlich den neuen Einzahlungen $x[k + 1]$.

Im folgenden definieren wir wichtige Eigenschaften von diskreten Systemen.

Definition 3.2: Linearität

Ein System \mathcal{H} heißt linear falls die Abbildung $\mathcal{H} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ linear ist, d.h. falls für Eingabe-Signale $x_1[k]$, $x_2[k]$ und Konstanten c , d gilt:

$$\mathcal{H}\{c \cdot x_1[k] + d \cdot x_2[k]\} = c \cdot \mathcal{H}\{x_1[k]\} + d \cdot \mathcal{H}\{x_2[k]\}$$

61

Bemerkungen:

- Wir hatten Linearität schon kurz in Kapitel 1 motiviert (siehe (1.2) auf S. 9).
- Lineare Systeme kann man viel einfacher verstehen und analysieren als allgemeine nicht-lineare Systeme: Wenn wir bei einem linearen System z.B. zu Eingabe-Signalen $x_1[k]$ und $x_2[k]$ die zugehörigen Ausgabe-Signale $y_1[k]$ und $y_2[k]$ kennen (etwa indem wir sie messen), dann können wir bereits vorhersagen wie für *beliebige* Linearkombinationen $cx_1[k] + dx_2[k]$ am Eingang die zugehörigen Systemantworten am Ausgang aussehen werden (nämlich $cy_1[k] + dy_2[k]$).

Beispiel: Beurteilen Sie ob ein Sparbuch (siehe voriges Beispiel) ein lineares System darstellt?

Lösung: Man kann sich leicht überlegen, dass ein Sparbuch ein lineares System ist:

I) Verdoppelt man z.B. die Einzahlung, so verdoppelt sich auch das Guthaben $\forall k$.

II) Oder hat man zwei Sparbücher mit Guthaben $y_1[k]$ und $y_2[k]$ bei denen man jeweils Beträge $x_1[k]$ und $x_2[k]$ einzahlt, dann kann man die beiden Sparbücher auch zusammenlegen (also $x_1[k] + x_2[k]$ auf ein Sparbuch einzahlen) ohne dass sich das Gesamtguthaben $y_1[k] + y_2[k]$ ändert.

Man kann die Linearität auch formal mit Hilfe von (3.1) und vollständiger Induktion zeigen. Dazu sei wie zuvor $y_1[k]$ das Guthaben bei Einzahlungen $x_1[k]$, und $y_2[k]$ das Guthaben bei Einzahlungen $x_2[k]$. Außerdem seien die Sparbücher o.B.d.A. zur Zeit $k = 0$ eröffnet werden, also $x_1[k] = x_2[k] = 0 \forall k < 0$. Dann folgt für ein Sparbuch bei dem man $x[k] := c \cdot x_1[k] + d \cdot x_2[k]$ einzahlt folgendes Guthaben $y[k]$:

I.A. ($k = 0$): Wegen $y_1[0] = x_1[0]$ und $y_2[0] = x_2[0]$ folgt offensichtlich

$$y[0] = x[0] = c \cdot x_1[0] + d \cdot x_2[0]$$

62

I.S. ($k \rightarrow k + 1$): Aus der I.V. $y[k] = cy_1[k] + dy_2[k]$ und (3.1) folgt

$$\begin{aligned} y[k+1] &\stackrel{(3.1)}{=} y[k] \cdot (1+p) + x[k+1] \\ &\stackrel{(I.V.)}{=} (cy_1[k] + d \cdot y_2[k]) \cdot (1+p) + c \cdot x_1[k+1] + d \cdot x_2[k+1] \\ &= c \cdot (y_1[k] \cdot (1+p) + x_1[k+1]) + d \cdot (y_2[k] \cdot (1+p) + x_2[k+1]) \\ &\stackrel{(3.1)}{=} c \cdot y[k+1] + d \cdot y_2[k+1] \end{aligned}$$

63

□

Definition 3.3: Zeitinvarianz

Ein System \mathcal{H} heißt zeitinvariant, wenn aus $y[k] = \mathcal{H}\{x[k]\}$ stets folgt, dass

64

$$\mathcal{H}\{x[k - k_0]\} = y[k - k_0]$$

Bemerkung: Zeitinvarianz bedeutet also, dass sich bei zeitlicher Verschiebung des Eingangssignal das zugehörige Ausgangssignal um dieselbe Zeit verschiebt.

Beispiel: Solange der Zinssatz p konstant ist (d.h. nicht von der Zeit k abhängt) bildet das Sparbuch auf einer Bank ein zeitinvariantes System. Denn wenn man die Einzahlungen $x[k - k_0]$ um k_0 Jahre verschiebt, erhält man die gleiche Guthaben-Entwicklung $y[k - k_0]$ wie zuvor, aber um k_0 Jahre verschoben.

Formal: Sei $y[k] := \mathcal{H}\{x[k]\}$ das Guthaben bei Einzahlungen $x[k]$, und $z[k] := \mathcal{H}\{x[k - k_0]\}$ sei das Guthaben bei verschobenen Einzahlungen $x[k - k_0]$. Dann folgt $z[k] = y[k - k_0]$, denn (Beweis durch Induktion):

65

I.A. ($k = k_0$): Für die erste Einzahlung (o.B.d.A. bei $k = 0$) gilt wieder $y[0] = x[0]$ und $y[k] = 0$ für $k < 0$, und deshalb

$$\begin{aligned} z[k_0] &= x[k_0 - k_0] = x[k_0] = y[0] = y[k_0 - k_0] \\ \text{und } z[k] &= 0 = y[k - k_0] \text{ für } k < k_0 \end{aligned}$$

66

I.S. ($k \rightarrow k + 1$): Aus der I.V. $z[k] = y[k - k_0]$ und (3.1) folgt

$$\begin{aligned} z[k + 1] &\stackrel{(3.1)}{=} z[k] \cdot (1 + p) + x[k + 1 - k_0] \\ &\stackrel{(I.V.)}{=} y[k - k_0] \cdot (1 + p) + x[k - k_0 + 1] \\ &\stackrel{(3.1)}{=} y[k - k_0 + 1] \end{aligned}$$

Hängt aber der Zinssatz $p[k]$ von der Zeit k ab ist (wie es üblicherweise bei echten Bankkonten der Fall ist), dann ist das Sparbuch nicht zeitinvariant. Wenn es z.B. jedes Jahr weniger Zinsen gibt ($p[k + 1] < p[k]$), dann erhält man bei einer Verschiebung der Einzahlungen in die Zukunft immer weniger Zinsen und damit weniger Guthaben ($z[k - k_0] < y[k]$).

Definition 3.4: Kausalität von Systemen

Ein System \mathcal{H} heißt kausal, wenn der Ausgabewert $y[k_0]$ zur Zeit k_0 nur von früheren Eingabewerten $x[k], k \leq k_0$ abhängig ist.

67

Beispiele und Bemerkungen:

- Unser Sparbuch-Beispiel ist ein kausales System, denn entsprechende Gutschriften sind erst *nach* getätigten Einzahlungen vorhanden. D.h. das Guthaben $y[k_0]$ zur Zeit k_0 hängt nur von Einzahlungen $x[k]$ zu früheren Zeiten $k \leq k_0$ ab, nicht aber von zukünftigen Einzahlen $x[k]$ mit $k > k_0$.
- Unsere Welt als ganzes ist wohl auch kausal: Üblicherweise nimmt man an, dass die Zukunft von der Vergangenheit abhängt, aber nicht umgekehrt.

Definition 3.5: Stabilität von Systemen

Ein System \mathcal{H} heißt stabil, wenn es auf jede beschränkte Eingangsfolge $x[k]$ mit einer beschränkten Ausgangsfolge $y[k] := \mathcal{H}\{x[k]\}$ reagiert, d.h. falls es Konstanten $C, D < \infty$ gibt, sodass gilt:

$$|x[k]| < C \forall k \Rightarrow |y[k]| < D \forall k$$

68

Bemerkung: Ein solchermassen stabiles System nennt man auch BIBO-stabil (BIBO=bounded-input, bounded-output).

Beispiel: Unser Sparbuch-Beispiel ist ein instabiles System. Denn für eine einmalige Einzahlung $x[k] = x_0 \delta[k]$ zur Zeit 0 mit endlichem Wert $x_0 < \infty$ wächst das Guthaben bei konstantem Zinssatz $p > 0$ über alle Grenzen, d.h. trotz beschränktem Eingang $x[k] \leq x_0$ gilt (siehe oberhalb von (3.1) auf Seite 40)

$$y[k] = x_0 \cdot (1 + p)^k \cdot \epsilon[k] \rightarrow \infty \text{ für } k \rightarrow \infty$$

69

Für $p \leq 0$ würde es sich um ein stabiles System handeln (z.B. $y[k] \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$ und $p < 0$).