

Signale und Systeme
Vorlesungsskript
Studiengang Technische Informatik
(Bachelor, 3./4. Semester)
Hochschule Albstadt-Sigmaringen

Prof.Dr. Andreas Knoblauch

15. September 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Motivation, Wiederholung und Überblick	5
1.1	Signale und Systeme: Was wir eigentlich schon wissen	5
1.2	Signale und Systeme: Was wir noch lernen werden	9
2	Diskrete Signale	13
2.1	Definitionen	13
2.2	Spezielle diskrete Signale	19
2.3	Einfache Verknüpfungen diskreter Signale	23
2.4	Faltung	25
2.5	Energie, Leistung, Skalarprodukt und Korrelation	33
3	Diskrete Systeme	39
3.1	Definition und Eigenschaften von Systemen	39
3.2	Impulsantwort und Faltung bei LTI-Systemen	44
3.3	Stabilität und Kausalität von LTI-Systemen	47
3.4	Spezielle diskrete LTI-Systeme und Blockdiagramme	49
3.5	Zustandsraum-Beschreibung	52
3.6	Die z -Transformation	54
3.7	Die Systemfunktion $H(z)$	61
3.8	Inverse z -Transformation und Partialbruchzerlegung	68
3.9	Verschaltung von LTI-Systemen	80
4	Analoge Signale	83
4.1	Definitionen und Eigenschaften	84
4.2	Kontinuierliche Faltung	89
4.3	Energie, Leistung, Skalarprodukt und Korrelation	92
5	Fourier- und Laplace-Transformation	101
5.1	Fourier-Reihen-Entwicklung	103
5.2	Die (allgemeine) Fourier-Transformation	115
5.2.1	Eigenschaften der Fourier-Transformation	119
5.3	Laplace-Transformation	130

5.4	Anwendung: Analyse elektrischer RLC-Netzwerke	136
6	Analoge Systeme	141
6.1	Analoge LTI Systeme	142
6.2	Elementare LTI-Systeme und Blockdiagramme	151
6.3	Verschaltung von LTI-Systemen	157
6.4	Stabilität analoger LTI-Systeme	158
6.5	Beschreibung von LTI-Systemen im Frequenzbereich	166
7	Diskrete und analoge Signale und Systeme	179
7.1	Ideale Signalabtastung und -rekonstruktion	180
7.2	Zeitdiskrete Fourier-Transformation	190
7.3	Fourier-Analyse zeitdiskreter LTI-Systeme	194
7.4	Diskrete Fourier-Transformation (DFT)	200
7.5	Fast Fourier Transformation (FFT)	211
	Anhang	214
A	Komplexes Rechnen	215
	Stichwortverzeichnis	217

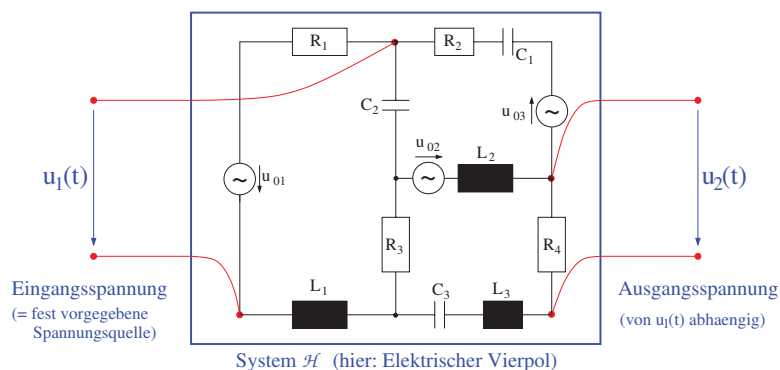
Kapitel 1

Motivation, Wiederholung und Überblick

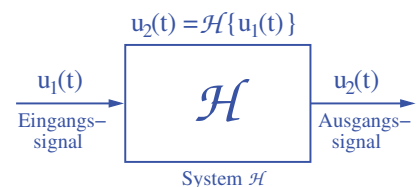
1.1 Signale und Systeme: Was wir eigentlich schon wissen

In der Vorlesung Elektrotechnik haben wir eigentlich schon Signale und Systeme kennengelernt: Ein **Signal** ist einfach ein zeitlicher Verlauf etwa einer Spannung $u_1(t)$ mit welchem z.B. Information von einem Ort 1 zu einem anderen Ort 2 übertragen werden kann. Ein **System** \mathcal{H} entspricht dann dem **Übertragungsmedium** welches das **Eingangssignal** $u_1(t)$ in ein **Ausgangssignal** $u_2(t)$ umwandelt. Z.B. kann man einen elektrischen Stromkreis als System auffassen, wobei man beliebige Zweigspannungen (oder -ströme) als Ein- und Ausgangssignal des Systems festlegen kann (siehe folgende Skizze).

(a) Elektrischer Stromkreis als System



(b) Systemtheoretische Darstellung



Für uns sind nun zwei Dinge von großem Interesse:

- **System-Analyse:** Wir möchten ein gegebenes System “verstehen”, z.B. für ein (beliebiges) Eingangssignal $u_1(t)$ voraussagen können wie das zugehörige Ausgangssignal $u_2(t)$ aussieht.
- **System-Synthese:** Wir wollen ein System mit vorgegebenen Eigenschaften aus bestimmten vorgegebenen Bauelementen realisieren können, z.B. ein Filter mit einem bestimmten Ein-/Ausgabeverhalten aus den bekannten elektrischen Bauelementen R , L , C .

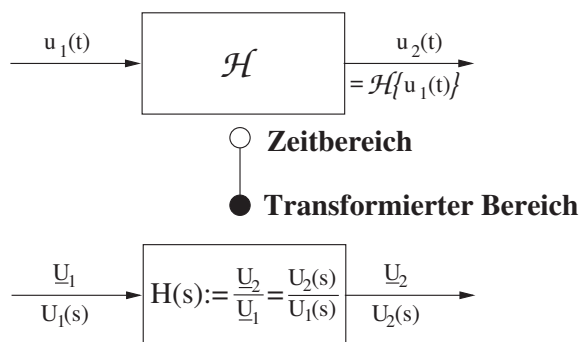
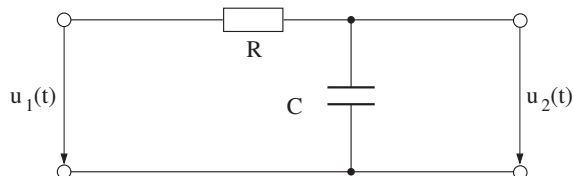
Für den Spezialfall, dass die Signale Sinussignale einer bestimmten Frequenz ω sind, beherrschen wir die System-Analyse schon aus der Vorlesung Elektrotechnik: Mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung können wir bereits beliebige Netzwerke aus komplexen Widerständen analysieren, d.h. zu beliebigen Verschaltungen aus Wechselspannungsquellen U_{0i} , Widerständen R_i , Kapazitäten C_i und Induktivitäten L_i können wir beliebige Zweigspannungen und -ströme berechnen (siehe Skript Elektrotechnik, S. 58, Satz 3.2 über komplexe Netzwerkanalyse).

Beispiel System-Analyse: Berechnen Sie das Ein-/Ausgabeverhalten des folgenden elektrischen Systems (RC-Tiefpass) für *sinusförmige* Signale und $R = 1k\Omega$, $C = 1mF$. Bestimmen Sie jeweils das Ausgangssignal $u_2(t) = \mathcal{H}\{u_1(t)\}$ für verschiedene Eingangssignale $u_1(t) = \hat{U}_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ mit $\hat{U}_1 = 30V$, $\varphi_1 = \pi/3$ und

$$\text{a) } \omega = 2\pi 0.5\text{Hz} \quad \text{b) } \omega = 2\pi 5\text{Hz} \quad \text{c) } \omega = 2\pi 500\text{Hz} .$$

Um Schreibarbeit zu sparen dürfen Sie in der komplexen Rechnung $j\omega$ durch s ersetzen. Um Rechenarbeit zu sparen können Sie außerdem die sogenannte Übertragungsfunktion $H(s) := \underline{U}_2 / \underline{U}_1$ verwenden (siehe Skizze).

RC-Tiefpass



Lösung: Wir gehen in drei Schritten vor (vgl. Skript Elektrotechnik, S. 58, Satz 3.2 über Komplexe Netzwerkanalyse):

1) Transformation der Netzwerkgrößen ins Komplexe: Ohne Einheiten (bzw. in Standardeinheiten) gilt für $s := j\omega$

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= U_1 \angle \varphi_1 = \frac{30}{\sqrt{2}} \angle \frac{\pi}{3} \\ \underline{Z}_R &= R = 1000 \\ \underline{Z}_C &= \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{sC} = \frac{1000}{s}\end{aligned}$$

1

2) Netzwerkanalyse im Komplexen: Die Schaltung entspricht einem Spannungsteiler (siehe Skript Elektrotechnik, Seite 32), d.h. für die Übertragungsfunktion gilt

$$H(s) := \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{1 + sRC} = \frac{1}{1 + s}$$

2

Nun kann man die Ausgangsspannung einfach durch Auflösen nach $\underline{U}_2 = H(s)\underline{U}_1$ berechnen. Da wir hier komplex multiplizieren müssen verwenden wir die Polarform $H(s) = |H(s)|e^{j\angle H(s)}$, d.h. mit $s = j\omega$ und $RC = 1000 \cdot 0.001 = 1$ ist

$$\begin{aligned}|H(j\omega)| &= \left| \frac{1}{1 + j\omega RC} \right| = \frac{1}{|1 + j\omega RC|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\omega RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}} \\ \angle H(j\omega) &= \angle \frac{1}{1 + j\omega RC} = \angle \frac{1 - j\omega RC}{1 + (\omega RC)^2} = \arctan\left(\frac{\frac{-\omega RC}{1 + (\omega RC)^2}}{\frac{1}{1 + (\omega RC)^2}}\right) \\ &= \arctan(\omega RC) = -\arctan(\omega) \\ \underline{U}_2 &= H(s) \cdot \underline{U}_1 = |H(j\omega)| \cdot |\underline{U}_1| \angle \varphi_1 + \angle H(j\omega) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}} \cdot |\underline{U}_1| \angle \left(\frac{\pi}{3} - \arctan(\omega)\right)\end{aligned}$$

3

Hier erkennt man die Wirkung des Systems H: Amplitude bzw. Effektivwert des Ausgangssignal \underline{U}_2 ist gegenüber dem Eingangssignal \underline{U}_1 um Faktor $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}}$ gedämpft, während sich der Nullphasenwinkel um $\angle H(j\omega) = -\arctan(\omega)$ verschiebt.

3) Rücktransformation: Nach Einsetzen des jeweiligen Eingangssignals ergibt sich also

$$\begin{aligned}a) \quad \underline{U}_2 &= \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi \cdot 0,5)^2}} \cdot 21,2 \angle \frac{\pi}{3} - \arctan(2\pi \cdot 0,5) \approx 6,43 \angle -0,21 \\ &\Rightarrow u_2(t) = 6,43 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(2\pi \cdot 0,5 \cdot t - 0,21) \approx 9,09 \text{ V} \cdot \sin(\pi t - 0,21) \\ b) \quad \underline{U}_2 &\approx 0,67 \angle -0,49 \Rightarrow u_2(t) \approx 0,95 \text{ V} \cdot \sin(10\pi t - 0,49) \\ c) \quad \underline{U}_2 &\approx 0,0067 \angle -0,523 \Rightarrow u_2(t) \approx 9,55 \text{ mV} \cdot \sin(100\pi t - 0,523)\end{aligned}$$

4

Bemerkungen: Wir erkennen nun bereits mit unserem beschränkten Wissen aus der komplexen Wechselstromrechnung für Sinussignale (siehe Skript Elektrotechnik, Kap. 3) wesentliche systemtheoretische Ergebnisse:

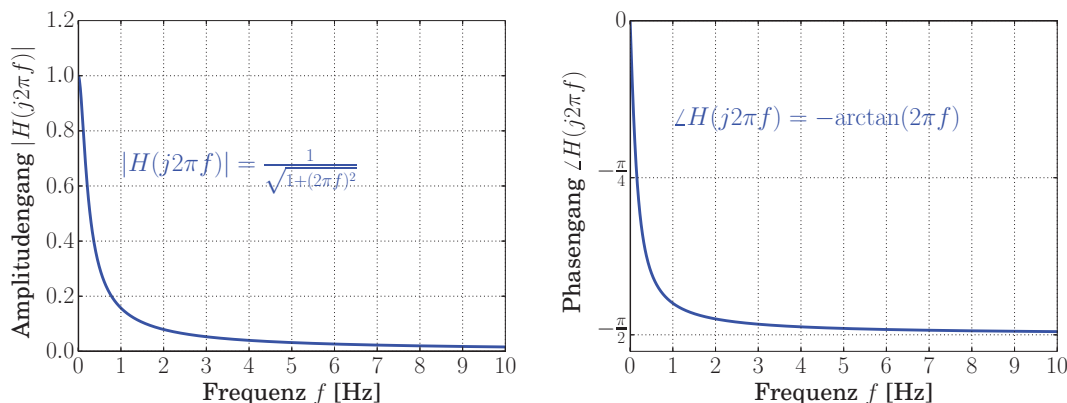
- Die durch das “Hantelsymbol” $u_1 \circ \text{---} \bullet \underline{U}_1$ dargestellte Transformation von realen Zeitsignalen ins Komplexe lohnt sich: Nur mit den komplexen Größen kann man sinnvoll Netzwerkanalyse machen (siehe Skript Elektrotechnik, S. 58, Satz 3.2 über komplexe Netzwerkanalyse).
- Die Übertragungsfunktion $H(s)$ ist sehr nützlich da “wiederverwendbar”: Hat man sie einmal berechnet, kann man mittels $\underline{U}_2 = H(s) \cdot \underline{U}_1$ für verschiedene Eingangssignale das zugehörige (komplexe) Ausgangssignal sehr einfach berechnen.
- Wie in dem Beispiel ist die Übertragungsfunktion elektrischer RLC -Netzwerke stets eine rationale Funktion in s , d.h. sie lässt sich immer in der Form “Zählerpolynom geteilt durch Nennerpolynom” darstellen (vgl. Skript Mathe-I, S. 90, Def. 4.2 von rationalen Funktionen):

$$H(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (1.1)$$

Beweis: Aus der Netzwerkanalyse wissen wir bereits, dass alle Zweigspannungen rationale Funktionen der Widerstände und Spannungsquellen sind (siehe Skript Elektrotechnik, S. 38,58, Satz 2.5 über Rationalität der Zweigströme und Zweigspannungen in Verbindung mit Satz 3.2 über komplexe Netzwerkanalyse). Da alle komplexen Widerstände R , sL , $1/sC$ rationale Funktionen von s sind (und außerdem alle Spannungsquellen als Festzeiger sogar konstant in s sind), müssen also alle Zweigspannungen und -ströme rational in s sein. \square

- Aus der Übertragungsfunktion $H(s)$ kann man das **Frequenzverhalten** eines Systems ablesen, d.h. die Art und Weise wie ein System ein sinusförmiges Eingangssignal mit Frequenz f bzw. $\omega = 2\pi f$ verändert: Dabei beschreibt der
 - Amplitudengang $|H(j\omega)|$ den Faktor um den sich die Amplitude des Eingangssignals ändert. Bei $|H(j\omega)| > 1$ spricht man von Verstärkung, bei $|H(j\omega)| < 1$ von Dämpfung des Eingangssignals;
 - ähnlich beschreibt der Phasengang $\angle H(j\omega)$ die Phasenverschiebung des Ausgangssignals gegenüber dem Eingangssignal.

Zum Beispiel ist obiges Netzwerk ein Tiefpass, denn Eingangsschwingungen mit niedriger Frequenz (a) werden relativ gut durchgelassen (kleine Dämpfung), während hohe Frequenzen stark gedämpft werden (c), vgl. folgende Skizze: .

Amplituden- und Phasengang eines RC-Tiefpass (von vorigem Bsp.)**1.2 Signale und Systeme: Was wir noch lernen werden**

Obwohl man mit der komplexen Wechselstromrechnung und obiger Definition der Übertragungsfunktion schon recht weit kommt werden wir in dieser Vorlesung noch wesentlich tiefer in die Signal- und Systemtheorie eindringen und dadurch unser Verständnis erweitern:

- Die größte Einschränkung der komplexen Wechselstromrechnung ist die Beschränkung auf kontinuierliche sinusförmige Signale. Stattdessen wollen wir das Systemverhalten für beliebige Signaltypen und Signalformen verstehen.
- Dazu werden wir als wichtige Systemeigenschaft die Linearität kennen lernen: Ein System \mathcal{H} heißt linear, falls für beliebige Signale $x(t)$ und $y(t)$

$$\mathcal{H}\{a \cdot x(t) + b \cdot y(t)\} = a \cdot \mathcal{H}\{x(t)\} + b \cdot \mathcal{H}\{y(t)\} \quad (1.2)$$

gilt, d.h. falls die Systemantworten zu Linearkombinationen $a \cdot x(t) + b \cdot y(t)$ zweier "einfacher" Eingangssignale $x(t)$ und $y(t)$ dieselbe Linearkombination der "einfachen" Systemantworten $\mathcal{H}\{x(t)\}$ und $\mathcal{H}\{y(t)\}$ ist.

Z.B. kann man leicht zeigen, dass elektrische Netze aus R,L,C immer linear sind (siehe Lemma 6.3 auf Seite 145), insbesondere ist auch der RC-Tiefpass von Seite 6 linear (siehe auch Übungen).

Beispiel: Bestimmen Sie mit Hilfe der Linearität für den RC-Tiefpass von Seite 6 mit $R = 1\text{k}\Omega$ und $C = 1\text{mF}$ das Ausgangssignal $u_2(t)$ falls am Eingang $u_1(t) = 15\text{V} \sin(\pi t + \pi/3) + 60\text{V} \sin(10\pi t + \pi/3)$ liegt.

Lösung: $u_1(t)$ enthält zwei Sinussignale $x(t)$ und $y(t)$ zu denen wir die Systemantworten $\mathcal{H}\{x(t)\}$ und $\mathcal{H}\{y(t)\}$ bereits im vorigen Beispiel berechnet haben (siehe Seite 7):

5

Für $x(t) = 30 \text{ V} \sin(\pi t + \pi/3)$ ist $\mathcal{H}\{x(t)\} = 9.09 \text{ V} \sin(\pi t - 0.21)$.
 Für $y(t) = 30 \text{ V} \sin(10\pi t + \pi/3)$ ist $\mathcal{H}\{y(t)\} = 0.95 \text{ V} \sin(10\pi t - 0.49)$.

Damit lässt sich das Eingangssignal $u_1(t) = ax(t) + by(t)$ als Linearkombination von $x(t)$ und $y(t)$ darstellen, und mit Hilfe der Linearität gilt:

6

$$u_1(t) = 15 \text{ V} \sin(\pi t + \pi/3) + 60 \text{ V} \sin(10\pi t + \pi/3) = 0,5x(t) + 2y(t)$$

und damit $a = 0,5, b = 2$ und

$$u_2(t) := \mathcal{H}\{u_1(t)\} = \mathcal{H}\{0,5x(t) + 2y(t)\} \stackrel{??}{=}$$

Bemerkung: Mit Hilfe der Linearität konnten wir nun also zum ersten Mal elektrische Netzwerke für nicht-sinusförmige Wechselspannungen analysieren (hier: gewichtete Summe (=Linearkombination) zweier Sinusspannungen unterschiedlicher Frequenz). Obiges vorgehen lässt sich für Linearkombinationen aus beliebig vielen Sinussignalen verallgemeinern, z.B. folgt aus der Linearität (1.2) durch “Hintereinanderanwenden” für Linearkombinationen $ax(t) + by(t) + cz(t)$ dreier Eingangssignale $x(t), y(t), z(t)$

7

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\{ax(t) + by(t) + cz(t)\} &= \mathcal{H}\{ax(t) + 1 \cdot (by(t) + cz(t))\} \\ &\stackrel{??}{=} a\mathcal{H}\{x(t)\} + 1 \cdot \mathcal{H}\{by(t) + cz(t)\} \stackrel{??}{=} a\mathcal{H}\{x(t)\} + b\mathcal{H}\{y(t)\} + c\mathcal{H}\{z(t)\} \end{aligned}$$

- Da wir für sinusförmige Signale die Systemantworten leicht berechnen können (wie in vorigem Beispiel auf Seite 6), stellt sich damit die Frage ob wir vielleicht *beliebige* Eingangssignale $u_1(t)$ in eine Linearkombination aus Sinussignalen (unterschiedlicher Frequenz) zerlegen können um damit die zugehörige Antwort $u_2(t)$ eines linearen Systems auszurechnen. In dem Fall könnte man wie folgt vorgehen:

- I) Man zerlegt das Eingangssignal $u_1(t)$ in eine Linearkombination aus Sinuskomponenten,

$$u_1(t) = \sum_i c_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) .$$

- II) Man berechnet für jede Sinuskomponente die Systemantwort

$$\mathcal{H}\{\sin(\omega_i t + \varphi_i)\} = c'_i \sin(\omega_i t + \varphi'_i) ,$$

genau wie wir es im vorigen Beispiel (Seite 6) getan haben.

- III) Dann ist das Ausgangssignal wegen der Linearität die Linearkombination

$$u_2(t) = \sum_i c_i \cdot c'_i \cdot \sin(\omega_i t + \varphi'_i) .$$

In Kapitel 5 werden wir sehen, dass man tatsächlich alle “vernünftigen” Signale in solche Sinuskomponenten zerlegen kann. Das Resultat dieser Zerlegung (d.h. die c_i und φ_i) nennt man dann Fourier-Transformation oder Fourier-Spektrum.

- Obiges Vorgehen verallgemeinert damit das bekannte 3-Schritt-Vorgehen der komplexen Wechselstromrechnung (siehe voriges Beispiel von Seite 6):
 - I) Fourier-Transformation des Zeitsignale in den “komplexen” oder sogenannten “Frequenzbereich”.
 - II) Berechnung des Ausgangssignals im Frequenzbereich.
 - III) Rücktransformation in den Zeitbereich.
- Neben der Komplexen Netzwerkanalyse und der Fourier-Transformation gibt es noch eine Reihe von weiteren Transformationen, die aber alle nach demselben Prinzip funktionieren:
 - Laplace-Transformation: Verallgemeinerung der Fouriertransformation auf noch mehr kontinuierliche Signalarten (siehe Kapitel 5.3).
 - z -Transformation: Entspricht Laplace-Transformation für Diskrete Signale (siehe Kapitel 3.6).
 - Verschiedene Varianten der diskreten Fourier-Transformation (zeitdiskrete Fourier-Trafo; DFT; FFT; siehe Kapitel 7).
- In jedem Fall führt man die Systemanalyse mit obigem 3-Schritt-Verfahren aus (Transformation, Berechnung des Ausgangssignals, Rücktransformation). Z.B. werden wir sehen, dass auch für die Netzwerk-Analyse mit der Laplace-Trafo

$$U_2(s) = H(s) \cdot U_1(s)$$

gilt. Der einzige Unterschied zur Komplexen Wechselstromrechnung ist, dass man statt den Festzeigern \underline{U}_1 , \underline{U}_2 nun die Laplace-Transformierten $U_1(s) \bullet \circ u_1(t)$ bzw. $U_2(s) \bullet \circ u_2(t)$ der (beliebigen) Zeitsignale $u_1(t)$, $u_2(t)$ verwendet. Die Übertragungsfunktion $H(s)$ bleibt dabei aber genau die gleiche wie die der Komplexen Wechselstromrechnung (1.1).

- Schließlich werden wir sehen, dass man aus der Übertragungsfunktion $H(s)$ (auch Systemfunktion genannt) alle wesentlichen Systemeigenschaften ablesen kann:
 - Signalübertragung mittels $U_2(s) = H(s) \cdot U_1(s)$ (siehe oben) bzw. $U_2(z) = H(z) \cdot U_1(z)$ (für z -Transformation; siehe Kap. 3.7);
 - Frequenzverhalten (Amplitudengang, Phasengang; siehe oben);
 - Impulsantwort $h(t) \circ \bullet H(s)$, d.h. die Systemantwort auf den sogenannten Dirac-Impuls $\delta(t)$ (ein unendlich schmales hohes rechteckförmiges Signal; siehe Kap. 2.2);
 - Stabilität des Systems (siehe Kap. 3,6 und insbes. S. 77,161);
 - Wie man das System aus elementaren Bausteinen realisieren kann (System-Synthese; siehe Kap. 3.4 und 6.2 und Sätze auf S. 64,149).

Da die den Transformationen zugrunde liegende Mathematik für den diskreten Fall am einfachsten ist, betrachten wir zunächst diskrete Signale und Systeme mit der z -Transformation. Danach wird uns die Betrachtung kontinuierlicher Signale und System mit Hilfe der Fourier- und Laplace-Transformation (hoffentlich) viel einfacher fallen.

Weitere Übungsaufgaben: Blatt ???: A???

Kapitel 2

Diskrete Signale

2.1 Definitionen

Wir benutzen die folgenden Zahlenmengen und Quantoren:

- I) Natürliche Zahlen $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ und $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$
- II) Ganze Zahlen $\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- III) Reelle Zahlen \mathbb{R}
- IV) Komplexe Zahlen \mathbb{C}
- V) Allquantor $\forall k$ bedeutet “für alle k gilt:”
- VI) Existenzquantor $\exists k$ bedeutet “es existiert ein k für das gilt:”

Definition 2.1: Diskretes Signal

Eine Folge $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ von reellen Zahlen (oder komplexen Zahlen $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$)

$$x[-\infty], \dots, x[-3], x[-2], x[-1], x[0], x[1], x[2], x[3], \dots, x[\infty]$$

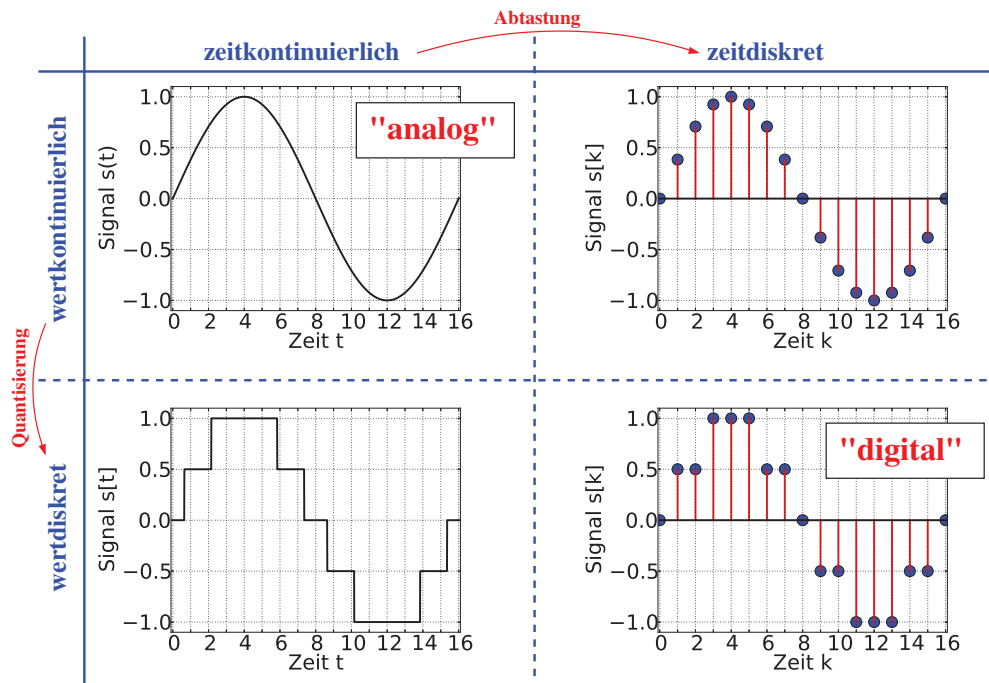
mit $x[k] \in \mathbb{R}$ (oder $x[k] \in \mathbb{C}$) und $k \in \mathbb{Z}$ heißt diskretes Signal oder genauer zeitdiskretes Signal.

Der Definitionsbereich ist die Menge der ganzen Zahlen, $k \in \mathbb{Z}$.

Der Wertebereich ist die Menge der reellen (oder komplexen) Zahlen, $x[k] \in \mathbb{R}$ (oder $x[k] \in \mathbb{C}$).

Bemerkungen:

- In Mathe-I haben wir bereits *einseitige* Folgen $\{a_n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ (und deren Grenzwerte) als Abbildungen $a : \mathbb{N} \rightarrow M$ aus den natürlichen Zahlen in beliebige Mengen M kennengelernt (siehe Skript Mathe-I, Kapitel 3 über Folgen und Grenzwerte). Allgemein betrachtet man aber in der Signaltheorie zweiseitige Folgen $\{x[k]\}$ für $k \in \mathbb{Z}$, d.h. die Signale beginnen zur Zeit $k = -\infty$ und gehen bis zur Zeit $k = +\infty$.
- Statt als Zahlenfolgen kann man sich Signale $x[k] = (\dots x[-1] x[0] x[1] x[2] \dots)^T$ auch als (i.Allg. unendlich dimensionale) Vektoren vorstellen (siehe Skript Mathe-I, Kapitel 8 über Vektorräume).
- Um diskrete Signale $x[k]$ von analogen Signalen $x(t)$ zu unterscheiden schreibt man die diskreten Zeitpunkte mit k (statt t) und setzt sie in eckige (statt runde) Klammern. Wir werden in einem späteren Kapitel den Zusammenhang zwischen diskreten und analogen Signalen genauer betrachten (siehe Kapitel 7).
- Die Signale nach Def. 2.1 sind zunächst zeitdiskret aber wertekontinuierlich (denn ihr Wertebereich sind ja die reellen oder sogar komplexen Zahlen). Allgemein unterscheidet man zwischen analogen und diskreten Signalen sowohl im Zeitbereich als auch im Wertebereich, sodass man folgendes Schema erhält:

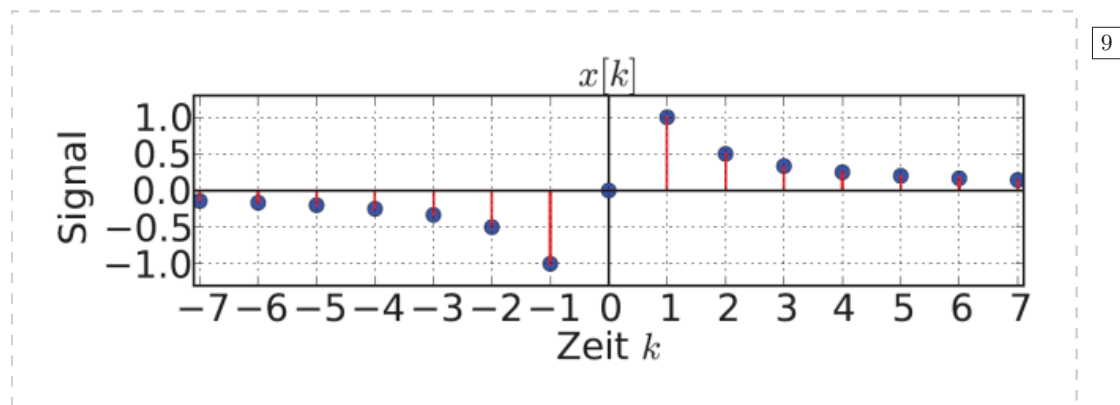


Den Übergang von Zeit-kontinuierlich zu Zeit-diskret bezeichnet man als Abtastung, den Übergang von Werte-kontinuierlich zu Werte-diskret bezeichnet

man als Quantisierung. Unter einem digitalen Signal versteht man ein Signal, das sowohl *zeitdiskret* als auch *wertdiskret* ist.

Beispiel: Skizzieren Sie das diskrete Signal $x[k]$ für

$$x[k] := \begin{cases} 1/k & , k \neq 0 \\ 0 & , k = 0 \end{cases} .$$



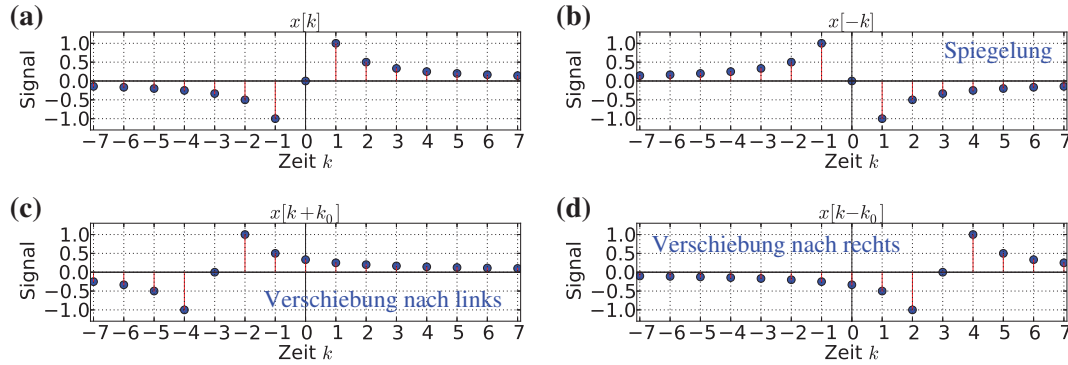
Ist ein Signal $x[k]$ (z.B. obiges) gegeben, so kann man es durch elementare Transformationen umformen, ähnlich wie wir das schon aus Mathe I kennen (siehe Skript Mathe-I, S. 24, Def. 1.15 über einfache Transformationen von Abbildungen).

Definition 2.2: Spiegelung und Verschiebung von diskreten Signalen

Sei $x[k]$ ein diskretes Signal und $k_0 \in \mathbb{Z}$. Dann heißt

- $x[-k]$ die Spiegelung von $x[k]$ an der Signalpegel-Achse
- $x[k + k_0]$ die Verschiebung von $x[k]$ um k_0 nach links
- $x[k - k_0]$ die Verschiebung von $x[k]$ um k_0 nach rechts

Beispiel: Die folgende Skizze zeigt für das Signal $x[k] := \begin{cases} 1/k & , k \neq 0 \\ 0 & , k = 0 \end{cases}$ (Teilfigur a) die Spiegelung $x[-k]$ (Teil b), die Verschiebung $x[k + k_0]$ um $k_0 := 3$ nach links (c) und die Verschiebung $x[k - k_0]$ um k_0 nach rechts (d):



11

Hierbei gilt:

$$\begin{aligned}
 (b) \quad x[-k] &= \begin{cases} -\frac{1}{k}, & k \neq 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases} \\
 (c) \quad x[k+k_0] = x[k+3] &= \begin{cases} \frac{1}{k+3}, & k \neq -3 \\ 0, & k = -3 \end{cases} \\
 (d) \quad x[k-k_0] = x[k-3] &= \begin{cases} \frac{1}{k-3}, & k \neq 3 \\ 0, & k = 3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

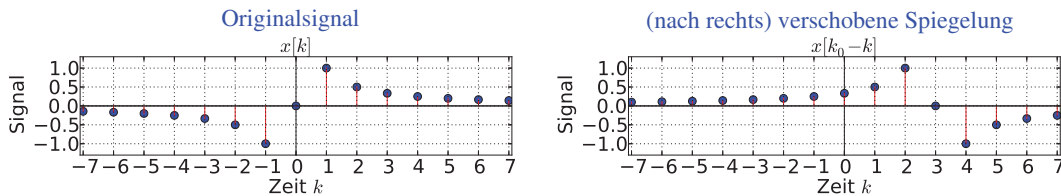
Bemerkung: Man kann die elementaren Transformationen auch verketteten (also hintereinander ausführen). Eine wichtige solche Verkettung ist für ein Signal $x[k]$ die verschobene Spiegelung $x[k_0 - k]$: Wegen

12

$$\begin{aligned}
 x[k_0 - k] &= x[-(k - k_0)] \\
 &= x[(-k) + k_0]
 \end{aligned}$$

sieht man, dass $x[k_0 - k]$ die Verschiebung des gespiegelten Signals $x[-k]$ um k_0 nach rechts ist. D.h. $x[k]$ wird zuerst gespiegelt und dann um k_0 nach rechts verschoben.

Beispiel: Die folgende Skizze zeigt für das Signal $x[k] := \begin{cases} 1/k, & k \neq 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases}$ (Teilfigur links) die um $k_0 = 3$ nach rechts verschobene Spiegelung $x[k_0 - k]$ (Teilfigur rechts)



$$\text{mit } x[k_0 - k] = x[3 - k] = \begin{cases} \frac{1}{3-k}, & k \neq 3 \\ 0, & k = 3 \end{cases}$$

13

Definition 2.3: Gerades und ungerades Signal

Sei $x[k]$ ein diskretes Signal.

- $x[k]$ heißt gerades Signal, falls $x[k] = x[-k] \forall k \in \mathbb{Z}$ gilt.
- $x[k]$ heißt ungerades Signal, falls $x[k] = -x[-k] \forall k \in \mathbb{Z}$ gilt.

14

Bemerkung: Anschaulich ist ein Signal gerade, genau dann, wenn es achsensymmetrisch zur Signalpegel-Achse ist. Entsprechend ist ein Signal ungerade, genau dann, wenn es punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

Beispiel: Sind die folgenden Signale gerade bzw. ungerade?

$$(a) \ x[k] = \begin{cases} \frac{1}{k} & , \ k \neq 0 \\ 0 & , \ k = 0 \end{cases} \quad (b) \ y[k] = \begin{cases} \frac{1}{k^2} & , \ k \neq 0 \\ 0 & , \ k = 0 \end{cases}$$

Lösung: Da

$$x[-k] = \begin{cases} \frac{1}{-k}, & k \neq 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{k}, & k \neq 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases} = -x[k]$$

15

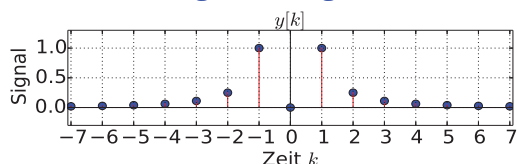
ist $x[k]$ ungerade, d.h. punktsymmetrisch zum Ursprung (siehe Skizze, rechts). Und wegen

$$y[-k] = \begin{cases} \frac{1}{(-k)^2}, & k \neq 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{k^2}, & k \neq 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases} = y[k]$$

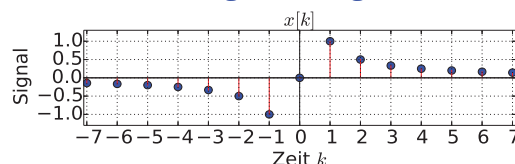
16

ist $y[k]$ gerade, d.h. achsensymmetrisch zur Signal-Achse (siehe Skizze, links).

gerades Signal



ungerades Signal



Definition 2.4: Kausales Signal

Sei $x[k]$ ein diskretes Signal.

17

- $x[k]$ heißt kausales Signal, falls gilt: $x[k] = 0 \ \forall k < 0$
- $x[k]$ heißt nicht-kausales Signal, falls gilt $\exists k < 0 : x[k] \neq 0$
- $x[k]$ heißt anti-kausales Signal, falls $x[-k-1]$ kausal ist, d.h. falls gilt: $x[k] = 0 \ \forall k \leq 0$

Bemerkung: Ein Signal heißt also kausal, falls es erst zur Zeit $k = 0$ “anfängt” (ungleich Null wird). Entsprechend heißt ein Signal anti-kausal falls es bei $k = 0$ “aufhört” (also für $k \geq 0$ Null ist). Falls ein Signal sowohl für $k < 0$ als auch für $k \geq 0$ von Null verschiedene Signal-Werte hat, dann ist es weder kausal noch anti-kausal! Achtung: Jedes anti-kausale Signal ist natürlich auch nicht kausal, aber nicht umgekehrt (d.h. es gibt nicht-kausale Signale, die nicht anti-kausal sind, siehe folgendes Bsp.).

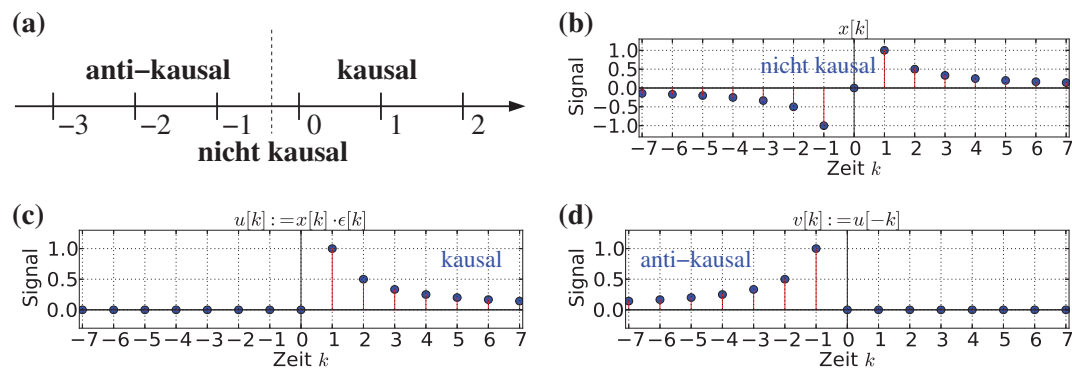
Beispiel: Sind die folgenden Signale kausal oder anti-kausal?

$$x[k] = \begin{cases} \frac{1}{k} & , \ k \neq 0 \\ 0 & , \ k = 0 \end{cases} \quad u[k] = \begin{cases} \frac{1}{k} & , \ k > 0 \\ 0 & , \ k \leq 0 \end{cases} \quad v[k] = \begin{cases} -\frac{1}{k} & , \ k < 0 \\ 0 & , \ k \geq 0 \end{cases}$$

18

Lösung (siehe auch Skizze):

- $x[k]$ ist nicht-kausal
- $u[k]$ ist kausal
- $v[k]$ ist anti-kausal



Weitere Übungsaufgaben: Blatt ???: A???

2.2 Spezielle diskrete Signale

Ähnlich wie in der analogen Signalverarbeitung sind auch bei der diskreten Signalverarbeitung der Dirac-Impuls und die Sprung-Funktion von grundlegender Bedeutung (siehe Skizze):

Definition 2.5: Impuls-Folge, Sprung-Folge

- Als Dirac-Impuls-Folge bezeichnet man das diskrete Signal

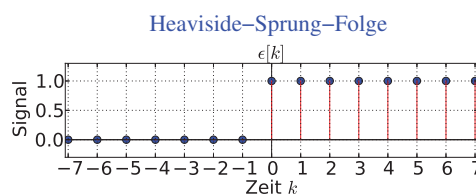
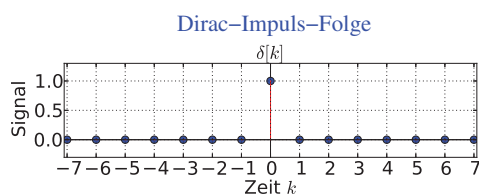
$$\delta[k] := \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

19

- Als Heaviside-Sprung-Folge bezeichnet man das diskrete Signal

$$\epsilon[k] := \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

20



Bemerkungen: Aus dieser Definition folgt:

- I) Dirac-Impuls $\delta[k]$ und Sprung-Folge $\epsilon[k]$ sind kausal, da $\delta[k] = \epsilon[k] = 0$ für alle $k < 0$.
- II) Der Dirac-Impuls ist ein gerades Signal, denn offensichtlich gilt $\delta[k] = \delta[-k]$ für $k \in \mathbb{Z}$ (vgl. Def. 2.3).
- III) Für $k_0 \in \mathbb{N}$ gilt für den um k_0 nach rechts bzw. links verschobenen Dirac-Impuls

21

$$\delta[k - k_0] = \begin{cases} 1, & k = k_0 \\ 0, & k \neq k_0 \end{cases} \quad \text{bzw.}$$

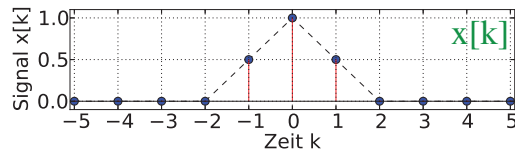
$$\delta[k + k_0] = \begin{cases} 1, & k = -k_0 \\ 0, & k \neq -k_0 \end{cases}$$

- IV) Es folgt also für beliebige Verschiebungen $i \in \mathbb{Z}$ und $k \in \mathbb{Z}$, dass

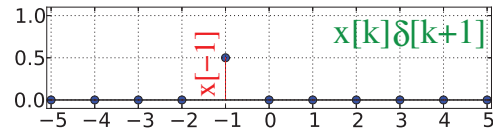
22

$$x[k] \cdot \delta[k - i] = \begin{cases} x[i], & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases} = x[i] \cdot \delta[k - i] \quad (2.1)$$

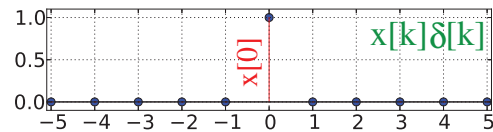
Siebeigenschaft



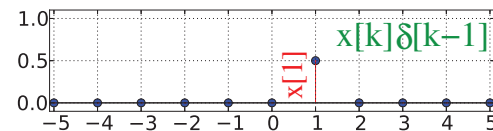
II



+



+



Letzteres nennt man auch die Siebeigenschaft oder Ausblendeigenschaft des Dirac-Impuls, denn multipliziert man zu einem Signal $x[k]$ einen um i verschobenen Dirac-Impuls $\delta[k - i]$, so blendet dies alle Werte von $x[k]$ aus, bis auf den Wert $x[i]$ zur Zeit i (siehe obige Skizze)

Die Siebeigenschaft kann man verwenden um ein beliebiges Signal $x[k]$ als gewichtete Summe (Linearkombination) von verschobenen Dirac-Folgen darzustellen. Dazu siebt man der Reihe nach für alle möglichen Verschiebungen $i = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ den Signalwert $x[i]$ mittels der Folge $x[k]\delta[k - i] = x[i] \cdot \delta[k - i]$ aus, und summiert dann all diese Folgen auf, sodass sich wieder $x[k]$ ergibt (siehe Skizze). Wir haben damit den folgenden Satz gezeigt:

Satz 2.6: Signaldarstellung mit verschobenen Dirac-Folgen

Jedes diskrete Signal $x[k]$ kann als Linearkombination von verschobenen Dirac-Folgen dargestellt werden:

$$x[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \cdot \delta[k-i] \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}$$

23

Bemerkungen:

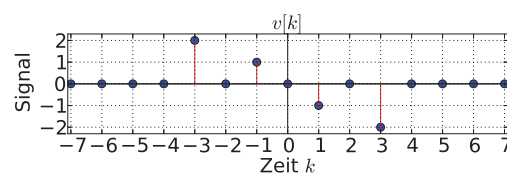
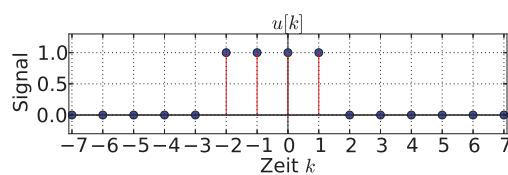
- I) Obige Summe ist eine sogenannte Faltungssumme. Wir werden dazu gleich die allgemeine Faltungsoperation $*$ definieren und sehen, dass die Dirac-Folge das neutrale Element der Faltung ist: $x[k] * \delta[k] = x[k]$ bzw. $\delta[k] * x[k] = x[k]$.
- II) Aus der Siebeigenschaft folgt außerdem, dass man zeitbeschränkte Signale (mit $x[k] = 0$ für $|k| > K$) als endliche Summe

$$x[k] = \sum_{i=-K}^K x[i] \cdot \delta[k-i]$$

24

darstellen kann.

Beispiel: Stellen Sie die durch die folgende Skizze gegebenen zeitbeschränkten Signale (z.B. $K = 5$) als gewichtete Summe von verschobenen Dirac-Folgen dar:



Lösung:

$$\begin{aligned} u[k] &= \delta[k+2] + \delta[k+1] + \delta[k] + \delta[k-1] \\ v[k] &= 2 \cdot \delta[k+3] + \delta[k+1] - \delta[k-1] - 2 \cdot \delta[k-3] \end{aligned}$$

25

Mit Hilfe der Sprung-Folge $\epsilon[k]$ lassen sich die wichtigsten diskreten Signale darstellen. Insbesondere gilt für die Dirac-Folge:

$$\delta[k] = \epsilon[k] - \epsilon[k-1]$$

Außerdem lassen sich die folgenden diskreten Signale mit Hilfe von $\epsilon[k]$ definieren:

Definition 2.7: Signum-, Kamm-, Rechteck- und Exponential-Folge

Weitere wichtige diskrete Signale sind wie folgt definiert (vgl. Skizze):

26

a) Signum-Folge:

$$\text{sgn}[k] := \epsilon[k] - \epsilon[-k] = \begin{cases} 1, & k > 0 \\ 0, & k = 0 \\ -1, & k < 0 \end{cases}$$

27

b) Kamm-Folge oder Scha-Folge:

$$\text{III}[k] := \epsilon[k] + \epsilon[-k - 1] = 1 \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}$$

28

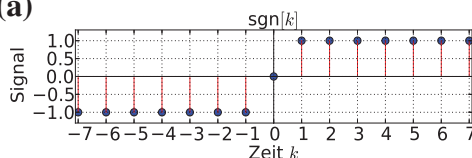
c) Rechteck-Folge: $\text{rect}_{k_1, k_2}[k] := \epsilon[k - k_1] - \epsilon[k - k_2 - 1] = \begin{cases} 1, & k_1 \leq k \leq k_2 \end{cases}$

29

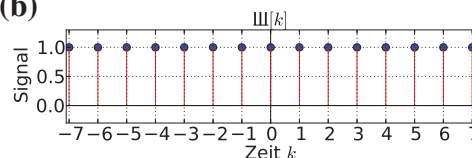
d) Kausale Exponential-Folge:

$$x[k] = q^k \cdot \epsilon[k]$$

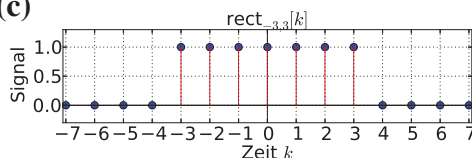
(a)



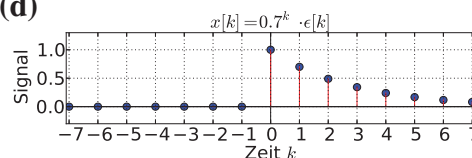
(b)



(c)



(d)

**Bemerkungen:**

- Die Signum-Folge $\text{sgn}[k]$ liefert das Vorzeichen von k (siehe Skizze (a)).
- Die Scha-Folge nimmt für jede diskrete Zeit $k \in \mathbb{Z}$ den Wert Eins an (siehe Skizze (b)).
- Die Rechteck-Folge $\text{rect}_{k_1, k_2}[k]$ hat Signal-Wert Eins zwischen k_1 und k_2 und sonst Null (siehe Skizze (c)).
- Für kausale Exponential-Folgen $x[k] = a^k \cdot \epsilon[k]$ ist es sinnvoll $|a| < 1$ zu wählen, denn nur dann gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} x[k] = 0$.

Beispiele:

I) Für $a = 0.7$ (siehe Skizze (d)) ergibt sich

$$x[k] : 0, \dots, 0, x[0] = 1, x[1] = -0.7, x[2] = 0.49, x[3] = 0.343, \dots$$

30

II) Für $a = -0.8$ ergibt sich

$$x[k] : 0, \dots, 0, x[0] = 1, x[1] = -0.8, x[2] = 0.64, x[3] = -0.512, \dots$$

31

Weitere Übungsaufgaben: Blatt ???: A???

2.3 Einfache Verknüpfungen diskreter Signale

Wie eingangs erwähnt kann man diskrete Signale $x[k]$ und $y[k]$ mittels

$$x[k] : x[-\infty], \dots, x[-1], x[0], x[1], \dots, x[\infty]$$

$$y[k] : y[-\infty], \dots, y[-1], y[0], y[1], \dots, y[\infty]$$

als zweiseitige Folgen bzw. unendlich-dimensionale Vektoren auffassen. Es ist dann naheliegend auf der Menge aller Signale \mathcal{S} die Operationen komponentenweise Addition $+$: $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$, komponentenweise Multiplikation \cdot : $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ sowie Skalierung \cdot : $\mathbb{R} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ (oder \cdot : $\mathbb{C} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$) zu definieren:

$$x[k] + y[k] : x[-\infty] + y[-\infty], \dots, x[0] + y[0], x[1] + y[1], \dots, x[\infty] + y[\infty]$$

$$x[k] \cdot y[k] : x[-\infty] \cdot y[-\infty], \dots, x[0] \cdot y[0], x[1] \cdot y[1], \dots, x[\infty] \cdot y[\infty]$$

$$c \cdot x[k] : c \cdot x[-\infty], \dots, c \cdot x[-1], c \cdot x[0], c \cdot x[1], \dots, c \cdot x[\infty]$$

32

wobei $c \in \mathbb{R}$ bzw. $c \in \mathbb{C}$. Auf die gleiche Weise definiert man auch die entsprechenden inversen Operationen komponentenweise Subtraktion $-$: $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ und komponentenweise Division $/$: $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$. Außerdem läßt sich leicht zeigen:

Satz 2.8: Vektorraum der diskreten Signale

- Die Menge \mathcal{S} aller Signale (mit Werten in \mathbb{R} oder \mathbb{C}) bildet mit Addition $+$ und Skalierung \cdot einen (unendlich-dimensionalen) Vektorraum.
- Die Menge aller auf $\{k_1, k_1 + 1, \dots, k_2\}$ zeitbeschränkten diskreten Signale

$$S_{k_1, k_2} := \{ \vec{x} \in \mathcal{S} \mid x[k] = 0 \ \forall k < k_1 \text{ oder } k > k_2 \}$$

33

bildet einen Vektorraum mit endlicher Dimension $n := k_2 - k_1 + 1$.

Beweis: Einfach die Gültigkeit der Vektorraum-Axiome für $(\mathcal{S}, +, \cdot)$ bzw. $(\mathcal{S}_{k_1, k_2}, +, \cdot)$ zeigen (siehe Übungen; vgl. Skript Mathe-I, S. 168, Def. 8.1 von Vektorräumen). \square

Bemerkungen:

- Gelegentlich schreiben wir Signale $x[k] \in \mathcal{S}$ als Vektoren \vec{x} oder \mathbf{x} , wobei mit $x_k = x[k] \in \mathbb{R}$ (oder $\in \mathbb{C}$) die k -te Vektorkomponente gemeint ist.

Beispiel: Stellen Sie die folgenden zeitbeschränkten Signale als Vektoren dar (wobei die erste Vektorkomponente der Zeit $k = 0$ entspricht), und führen Sie eine komponentenweise Addition, Subtraktion, Multiplikation und eine Skalierung von $x[k]$ mit $c = 5$ durch:

$$\begin{aligned} x[k] &:= 3\delta[k-1] + 2\delta[k-2] + 5\delta[k-3] & \text{bzw.} \\ y[k] &:= 2\delta[k-2] - 3\delta[k-3] + 2\delta[k-5] \end{aligned}$$

Lösung:

34

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (0 \quad 3 \quad 2 \quad 5 \quad 0 \quad 0) \\ \vec{y} &= (0 \quad 0 \quad 2 \quad -3 \quad 0 \quad 2) \\ \vec{x} + \vec{y} &= (0 \quad 3 \quad 4 \quad 2 \quad 0 \quad 2) \\ \vec{x} - \vec{y} &= (0 \quad 3 \quad 0 \quad 8 \quad 0 \quad -2) \\ \vec{x} \cdot \vec{y} &= (0 \quad 0 \quad 4 \quad -15 \quad 0 \quad 0) \\ c + \vec{x} &= (0 \quad 15 \quad 10 \quad 25 \quad 0 \quad 0) \end{aligned}$$

- In numerischen Software-Paketen wie z.B. Octave oder MATLAB werden diskrete Signale ebenfalls als Vektoren oder Listen von Signalwerten dargestellt.

Beispiel: In MATLAB stellt man obige Signale $x[k]$ und $y[k]$ wie folgt als Signale dar:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [0, 3, 2, 5, 0, 0] & \text{bzw.} \\ \mathbf{y} &= [0, 0, 2, -3, 0, 2] \end{aligned}$$

Da n -dimensionale Vektoren auch als $1 \times n$ bzw. $n \times 1$ Matrizen aufgefasst werden könnten muss man in MATLAB für die komponentenweise Operatoren einen Punkt voranstellen um sie von den Matrix-Operatoren zu unterscheiden: Z.B. ist in MATLAB $*$ die Matrizen-Multiplikation (siehe Skript Mathe-I, S. 196, Def. 8.19), während $.*$ die komponentenweise Multiplikation ist.

Während in Computersprachen der Stern $*$ üblicherweise die Multiplikation bedeutet steht in der Mathematik, Physik und Elektrotechnik $*$ für eine weitere wichtige Operation, nämlich die Faltung, die wir im folgenden definieren ...

Weitere Übungsaufgaben: Blatt ???: A???

2.4 Faltung

Die im folgenden definierte Faltungs-Operation hat eine extrem wichtige Bedeutung für die Realisierung linearer Systeme und Filter (siehe folgendes Kapitel). Z.B. erreicht man durch Falten mit einem Rechtecksignal ein Glätten von verrauschten Signalen (d.h. eine sogenannte Tiefpass-Filterung) oder kann einen gleitenden Mittelwerte (“moving average”) berechnen (siehe Übungen).

Definition 2.9: Faltung diskreter Signale

Seien $x \in \mathcal{S}$ und $y \in \mathcal{S}$ zwei diskrete Signale. Dann heißt die Operation $*$: $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ mit

$$(x * y)[k] := \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \cdot y[k - i]$$

35

Faltung von x mit y . Die Summe auf der rechten Seite nennt man auch Faltungssumme.

Bemerkungen:

- Statt $(x * y)[k]$ schreibt man manchmal auch ausführlicher $(x[k] * y[k])[k]$ oder ganz oft (etwas ungenau) einfach $x[k] * y[k]$ ohne runde Klammern.
- **Beachte:** Die Faltung $*$ ist eine Verknüpfung zwischen zwei *Signalen* $x \in \mathcal{S}$ und $y \in \mathcal{S}$, und nicht zwischen zwei einzelnen *Signalwerten* $x[k] \in \mathbb{R}$ und $y[k] \in \mathbb{R}$ wie die komponentenweisen Operationen $+$, $-$, \cdot , $/$.
- Für den Spezialfall $y[k] = \delta[k]$ erhalten wir mit Satz 2.6 $x[k] = x[k] * \delta[k]$ für $k \in \mathbb{Z}$, d.h. der Dirac-Stoß ist das neutrale Element der Faltung.
- Anhand der Faltungssumme in Def. 2.9 sieht man, dass die Faltung über (komponentenweise) Produkte der Signale $x[i]$ und $y[k - i]$ aufsummiert. Um die Faltung $x * y$ an einer festen Stelle $k \in \mathbb{Z}$ zu berechnen muss man also **folgende Schritte** tun:
 - I) Das erste Signal $x[i]$ lassen wir so wie es ist.
Beachte: Nun ist i die Zeitvariable, während k fest ist!
 - II) Das zweite Signal $y[i]$ spiegeln wir und verschieben es dann um k nach rechts, sodass wir die verschobene Spiegelung $y[k - i]$ erhalten (siehe Seite 16).
 - III) Nun multiplizieren wir komponentenweise $x[i] \cdot y[k - i]$ für alle Zeiten i .
 - IV) Wenn wir nun alle Komponenten des resultierenden Signals von (III) aufsummieren erhalten wir schließlich das Ergebnis $\sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \cdot y[k - i]$.

Der Name “Faltung” kommt tatsächlich daher, dass man die Faltungsoperation durch **Falten eines Papiers** simulieren kann: Dabei sind die beiden Signale x und y nebeneinander als Graph dargestellt. Faltet man nun das Papier zwischen den beiden Signalen um, sodass das rechte Signal auf dem linken liegt, so hat man y gespiegelt, und je nach Ort der Faltungskante gegenüber x um ein bestimmtes k verschoben. Der Überlapp der beiden Signale entspricht dann $x[k] * y[k]$. Durch mehrmaliges Falten an unterschiedlichen Stellen (verschiedene k) kann man so den Verlauf von $x[k] * y[k]$ auch ohne Rechnung graphisch abschätzen.

Beispiel 1: Berechnen Sie die Faltung $x * y$ der Signale

$$x[k] = 3\delta[k] + 2\delta[k - 1] + \delta[k - 2] \quad \text{und} \quad y[k] = \delta[k] - \delta[k - 1] + 2\delta[k - 2]$$

Lösung: Am einfachsten stellt man die Signale $x[i]$ und $y[k - i]$ (für Schritt I,II) als Vektoren dar. Als Referenz kann man mit einem Pfeil (mindestens) für eine Komponente die Zeit i angeben (z.B. für $i = 0$). Z.B. ergibt sich für Verschiebung $k = 0$:

36

$$\begin{array}{ccc} i=0 & i=0 & i=0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x[i] = (3 & 2 & 1), \quad y[i] = (1 & -1 & 2) \text{ bzw. } z[0-i] = (2 & -1 & 1) \end{array}$$

Da wir dies für jedes $k \in \mathbb{Z}$ separat machen müssen, stellen wir die Signale am besten in einer Tabelle dar (ohne Klammern, ohne Nullen). Dafür kann man beim kleinsten k anfangen, so dass sich $x[i]$ und $y[k - i]$ gerade noch überlappen (hier $k = 0$). Dann erhöht man k in jeder Zeile um 1 bis es keinen Überlapp mehr gibt:

37

	$x[i] =$	3	2	1	$\sum x[i]y[k-i] =$	$(x * y)[k]$
$k = 0$	$y[k-i] =$	2	-1	1	$3 \cdot 1$	$= 3$
$k = 1$			2	-1	$3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1$	$= -1$
$k = 2$				2	$3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1$	$= 5$
$k = 3$					$2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1)$	$= 3$
$k = 4$					$1 \cdot 2$	$= 2$

Damit ergibt sich also

38

$$x[k] * y[k] = 3\delta[k] - \delta[k - 1] + 5\delta[k - 2] + 3\delta[k - 3] + 2\delta[k - 4]$$

Das obige Schema kann man ganz allgemein für beliebige zeitbeschränkte Signale $x[k]$ und $y[k]$ anwenden, auch wenn sie bei beliebigen Zeiten “anfangen”. Dabei spiegelt man das zweite Signal y und legt seine rechte Seite an die linke Seite von x , bestimmt dann die zugehörige Verschiebung k und macht dann weiter wie vorher.

Beispiel 2: Berechnen Sie die Faltung $x * y$ der Signale

$$x[k] = -\delta[k + 43] + 3\delta[k + 42] - 2\delta[k + 41] \quad \text{und} \\ y[k] = \delta[k - 19] - 2\delta[k - 20] + 4\delta[k - 21] - \delta[k - 22]$$

Lösung: In Vektorschreibweise ergibt sich

$$\begin{array}{c} i = -43 \\ \downarrow \\ x[i] = (-1 \quad 3 \quad -2) \text{ und} \\ i = 19 \\ \downarrow \\ y[i] = (1 \quad -2 \quad 4 \quad -1) \text{ bzw. } y[-i] = (-1 \quad 4 \quad -2 \quad 1) \end{array}$$

39

Damit das rechte Ende von $y[k - i]$ gerade (zu einem Zeitpunkt) mit $x[i]$ überlappt, müssen wir also $y[-i]$ um $k = -43 - (-19) = -24$ verschieben (also um 24 nach links). Damit ergibt sich ähnlich wie im vorigen Beispiel das Tabellen-Schema

$i = -43$									
k	$x[i]$			-1	3	-2			
									$(x * y)[k]$
-24	$y[k - i] =$	-1	4	-2	1				-1
-23			-1	4	-2	1			$2 + 3 = 5$
-22				-1	4	-2	1		$-4 - 6 - 2 = -12$
-21					-1	4	-2	1	$1 + 12 + 4 = 17$
-20						-1	4	-2	$-3 - 8 = -11$
-19							-1	4	$-2 + 1 = 2$

40

und deshalb das Ergebnis

$$(x * y)[k] = -\delta[k + 24] + 5\delta[k + 23] - 12\delta[k + 22] + 17\delta[k + 21] \\ - 11\delta[k + 20] + 2\delta[k + 19]$$

41

Aus den Beispielen erkennt man, dass für zeitbeschränkte Signale folgendes gilt:

Lemma 2.10: Faltung zeitbeschränkter Signale, Faltung mit MATLAB

Seien $x[k] \in \mathcal{S}_{a,b}$ und $y[k] \in \mathcal{S}_{c,d}$ zeitbeschränkte diskrete Signale mit Längen $m := b - a + 1$ bzw. $n := d - c + 1$. Dann ist

$$x[k] * y[k] \in \mathcal{S}_{a+c,b+d} \quad \text{und hat Länge } n + m - 1.$$

42

Beweis anhand des vorigen Beispiels 2:

- $x[i]$ beginnt zur Zeit $a = -43$, endet bei $b = -41$ und hat deshalb die Länge $m := b - a + 1 = 3$.
- $y[i]$ beginnt zur Zeit $c = 19$, endet bei $d = 22$ und hat deshalb die Länge $n := d - c + 1 = 4$.
- Das $y[-i]$ endet dann entsprechend zur Zeit $-c = -19$.
- Das kleinste k für das sich $x[i]$ und $y[k - i]$ überlappen ist also $k_{\min} = a - (-c) = a + c = -43 + 19 = -24$.
- Erhöhen wir k schrittweise so überlappt $y[k - i]$ insgesamt n mal mit dem Anfangswert $x[a]$. Danach kann man k noch $m - 1$ mal erhöhen bis es keinen Überlapp mit $x[b]$ mehr gibt, insgesamt gibt es also $n + m - 1$ Zeiten mit Überlapp.
- Deshalb ist das größte k für das sich $x[i]$ und $y[k - i]$ noch überlappen also $k_{\max} = k_{\min} + (n + m - 1) - 1 = a + c + (d - c + 1 + b - a + 1 - 1) - 1 = b + d$.
- Zusammengefasst beginnt also $x[k] * y[k]$ zur Zeit $a + c$, endet zur Zeit $b + d$ und hat die Länge $n + m - 1$. \square

Bemerkung: Das Lemma ist wichtig wenn man die Faltung mit numerischen Softwarepaketen berechnet. Z.B. berechnet man in MATLAB oder Octave die Faltung mit dem Befehl “conv”, welcher Vektoren ohne Zeitangaben erwartet. So liefert MATLAB (und auch Octave) bei Eingabe

```
x = [-1, 3, -2];      % Definition des Signals x
y = [1, -2, 4, -1];   % Definition des Signals y
h = conv(x,y);         % h = x * y
```

das Ergebnis

```
--> h = [-1, 5, -12, 17, -11, 2] .
```

Mit obigem Lemma generieren also folgende MATLAB-Befehle

```
a=-43; b=-41; c=19; d=22; % Anfangs/End-Zeitpunkte von x und y
k = (a+c):(b+d);          % Zeitvektor fuer h
```

den zu h gehörigen Zeitvektor

--> $k = [-24, -23, -22, -21, -20, -19]$,

sodass man das resultierende Signal $x * y$ etwa mit dem Plot-Befehl

```
stem(k,h);           % Plot-Befehl fuer diskrete Signale
```

grafisch darstellen kann. Die untenstehende Figur zeigt entsprechende Plots für Beispiel 2 (linke Seite). Es folgt ein weiteres...

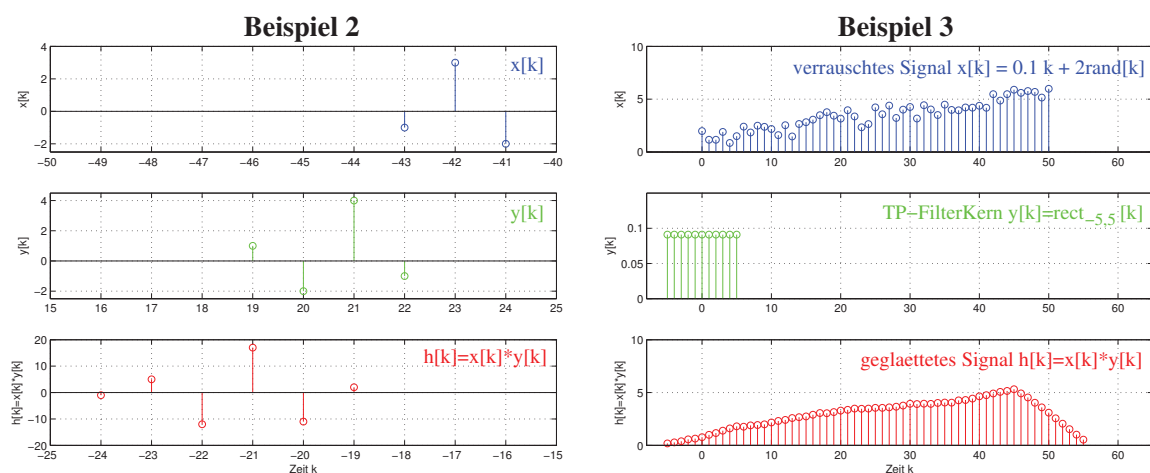
Beispiel 3: Gegeben sei ein verrauschtes Signal $x[k] = 0.1k + 2\text{rand}[k]$ im Zeitbereich $0 \leq k \leq 50$. Das Rauschen soll durch Faltung mit einem rechteckförmigen Signal $y[k] = \frac{1}{11} \text{rect}_{-5;5}[k]$ reduziert werden. Implementieren Sie die Filterung und plotten Sie die resultierenden Signale mit Hilfe von MATLAB.

Hinweis: Der MATLAB Befehl `rand(size(k))` generiert einen Zufalls-Vektor (Werte zwischen 0 und 1) der gleichen Größe wie der Zeitvektor $k = 0 : 50$. Ähnlich generiert der Befehl `ones(1,11)` einen Zeilenvektor der Länge 11 mit lauter Einsen für $y[k]$.

Lösungsfragment:

```
kx = 0:50; x=0.1*kx+2*rand(size(kx)); % berechne Signal x
ky = -5:5; y=ones(size(ky))/11.0;    % Rechtecksignal mit Summe 1
k=(0-5):(50+5); h=conv(x,y);         % gefaltetes Signal h=x*y
subplot(3,1,1); stem(kx,x);           % 1.Subplot fuer diskretes Signal x
subplot(3,1,2); stem(ky,y);           % 2.Subplot fuer diskretes Signal y
subplot(3,1,3); stem(k,h);            % 3.Subplot fuer diskretes Signal h
```

Die untenstehende Figur zeigt das Ergebnis (rechte Seite).



Satz 2.11: Eigenschaften der Faltung

Seien $x, y, w \in \mathcal{S}$ diskrete Signale, δ die Dirac-Impuls-Folge und $c, d \in \mathbb{R}$ (oder $\in \mathbb{C}$) Körperelemente. Dann gilt

43

- I) Kommutativität: $x * y = y * x$
- II) Assoziativität: $w * (x * y) = (w * x) * y$ und $c \cdot (x * y) = (c \cdot x) * y$
- III) Distributivität: $w * (x + y) = w * x + w * y$
- IV) Neutrales Element: $x * \delta = x$
- V) Verschiebung: $x[k] * \delta[k_0 - k] = x[k - k_0]$
- VI) Zeitinvarianz: $x[k] * y[k - k_0] = (x[k] * y[k])[k - k_0]$
- VII) Linearität: $(c \cdot x + d \cdot y) * w = c \cdot (x * w) + d \cdot (y * w)$

Beweis:

- I) Kommutativgesetz: Durch Substituieren von $i' := k - i$ (oder $i = k - i'$) in der Faltungssumme läuft i' immer noch von $-\infty$ bis ∞ , so dass

$$x[k] * y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]y[k-i] \stackrel{i'=k-i}{=} \sum_{i'=-\infty}^{\infty} x[k-i']y[i'] = y[k] * x[k] .$$

- II) 1. Assoziativgesetz: Verkettet man zwei Faltungen erhält man die Doppelsumme

$$\begin{aligned} w[k] * (x[k] * y[k]) &= w[k] * \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]y[k-i] \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} w[j] \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]y[k-j-i] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} w[j]x[i]y[k-(i+j)] \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung ($w[j]$ in die zweite Summe reinziehen) aus dem Distributivgesetz für Körper \mathbb{R} (bzw. \mathbb{C}) folgt (siehe Skript Mathe-I, S. 44, Def. 2.1 der Körperaxiome). Durch Substitution $i' := i + j$ bzw. $i = i' - j$ (sodass i' immer

noch von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft), dem Kommutativ- und Assoziativgesetz der Addition in Körpern (d.h. Vertauschung der Summationsreihenfolge ist erlaubt) und wieder dem Distributivgesetz ($y[k - i']$ ausklammern) ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}
 w[k] * (x[k] * y[k]) &\stackrel{i'=i+j}{=} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i'=-\infty}^{\infty} w[j]x[i' - j]y[k - i'] \\
 &= \sum_{i'=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} w[j]x[i' - j]y[k - i'] = \sum_{i'=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} w[j]x[i' - j] \right) y[k - i'] \\
 &= \sum_{i'=-\infty}^{\infty} (w[i'] * x[i'])y[k - i'] = (w[k] * x[k]) * y[k] .
 \end{aligned}$$

Das 2.Assoziativgesetz folgt viel einfacher, da man den Skalar c in die Faltungssumme ziehen darf.

III) Das Distributivgesetz folgt ähnlich aus den Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetzen für $+$ und \cdot :

$$\begin{aligned}
 w[k] * (x[k] + y[k]) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} w[i](x[k - i] + y[k - i]) \\
 &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} w[i]x[k - i] + \sum_{i=-\infty}^{\infty} w[i]y[k - i] = w[k] * x[k] + w[k] * y[k] .
 \end{aligned}$$

IV) Schon gezeigt (siehe Bemerkung unter Def. 2.9). Folgt ausserdem aus (V).

V) Mit Satz 2.6 auf Seite 21 folgt aus der Definition der Faltung

$$x[k] * \delta[k - k_0] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]\delta[k - k_0 - i] \stackrel{S. 2.6}{=} x[k - k_0] .$$

VI) Folgt aus (II) und (V):

$$\begin{aligned}
 x[k] * y[k - k_0] &\stackrel{(V)}{=} x[k] * (y[k] * \delta[k - k_0]) \stackrel{(II)}{=} (x[k] * y[k]) * \delta[k - k_0] \\
 &\stackrel{(V)}{=} (x[k] * y[k])[k - k_0]
 \end{aligned}$$

VII) Folgt sofort aus (II) und (III):

$$(c \cdot x + d \cdot y) * w \stackrel{(III)}{=} (c \cdot x) * w + (d \cdot y) * w \stackrel{(II)}{=} c \cdot (x * w) + d \cdot (y * w)$$

□

Bemerkung: Wegen (I), (II), (III) und (IV) bildet $(\mathcal{S}, +, *)$ einen Ring (also fast ein Körper), ähnlich wie die Menge der Polynome (siehe Skript Mathe-I, S. 99, Satz 4.9.IV zur Ringeigenschaft). Tatsächlich ist die Menge aller kausalen zeitbeschränkten Signale isomorph (also gleich bis auf Umbenamungen) zur Menge aller Polynome. Denn jedes Polynom

$$p(z) := a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots + a_n z^n$$

läßt sich ein-eindeutig dem kausalen zeitbeschränkten Signal $x[k] \in \mathcal{S}_{0,n}$ mit

$$x[k] = a_0 \delta[k] + a_1 \delta[k-1] + a_2 \delta[k-2] + \dots + a_n \delta[k-n]$$

zuordnen. D.h. die Signalwerte $x[k]$ entsprechen genau den Polynomkoeffizienten a_k für $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$. Tatsächlich wissen wir schon aus der Mathe-I Vorlesung, dass die Polynommultiplikation genau der Faltungsoperation entspricht:

Satz 2.12: Faltung und Polynommultiplikation

Seien $p(z) := a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ bzw. $q(z) := b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n$ zwei Polynome und $x[k] = a_k$ bzw. $y[k] = b_k$ die entsprechenden Signale. Dann gilt für die Polynommultiplikation

$$p(z) \cdot q(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_{2n} z^{2n} \quad \text{Mit Koeffizienten } c_k = (c * y)[k]$$

Beweis: Siehe Skript Mathe-I, S. 95, Satz 4.6 zur Polynommultiplikation. \square

Beispiel: Multiplizieren Sie die den Signalen $x[k] = 3\delta[k] + 2\delta[k-1] + \delta[k-2]$ und $y[k] = \delta[k] - \delta[k-1] + 2\delta[k-2]$ von Beispiel 1 entsprechenden Polynome $p(z)$ und $q(z)$:
Lösung: Die Polynome sind

$$p(z) = 3 + 2z + z^2 \text{ und } q(z) = 1 - z + 2z^2$$

und die Multiplikation ergibt also

$$\begin{aligned} p(z) \cdot q(z) &= (3 + 2z + z^2) \cdot (2z^2 - z + 1) \\ &= 3 \cdot 1 + z(3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1) + z^2(3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1) \\ &\quad + z^3(2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1)) + z^4(1 \cdot 2) \\ &= 3 - z + 5z^2 + 3z^3 + 2z^4 \end{aligned}$$

Man überzeuge sich durch Vergleichen der Tabelle und des Ergebnis auf Seite 26, dass man exakt diesselben Operationen gerechnet hat wie bei der Faltung $x[k] * y[k]$.

Bemerkung: Die Beziehung zwischen kausalen zeitbeschränkten Signalen und Polynomen läßt sich auch auf allgemeine Signale verallgemeinern. Dabei entspricht ein allgemeines Signal $x[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \delta[k-i]$ ein-eindeutig einer zweiseitigen unendlichen Reihe $\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i z^i$. Die Reihen-Darstellung $X(z) := \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i z^{-i}$ des gespiegelten Signals nennt man auch die z-Transformation von $x[k]$ (später ...).

Weitere Übungsaufgaben: Blatt ????: A???

2.5 Energie, Leistung, Skalarprodukt und Korrelation

Wir interpretieren Signale $x[k]$ oft als Spannungspegel $u[k]$ oder Stromstärken $i[k]$. In beiden Fällen ist die Momentanleistung $p[k]$ proportional zum Quadrat des Signals (da z.B. $p[k] = u^2[k]/R$ bzw. $p[k] = R \cdot i^2[k]$ für Ohm'schen Widerstand R). Deshalb definiert man die Leistung eines Signals $x[k]$ proportional zum Mittelwert der Momentanleistung, und die Energie eines Signals $x[k]$ proportional zum Integral (oder der Summe) der Momentanleistung:

Definition 2.13: Energie und Leistung eines Signals

Sei $x \in \mathcal{S}$ ein diskretes Signal.

- Dann definieren wir die Energie des Signals $x[k]$ als

$$E_x := \sum_{i=-\infty}^{\infty} |x[i]|^2$$

49

und $x[k]$ heißt Energiesignal falls $0 \leq E_x < \infty$.

- Entsprechend definieren wir die Leistung des Signals $x[k]$ als

$$P_x := \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{i=-K}^K |x[i]|^2$$

50

und $x[k]$ heißt Leistungssignal falls $0 < P_x < \infty$ oder $x[k] = 0 \forall k$.

- Die Mengen aller Energiesignale bzw. Leistungssignale bezeichnen wir mit \mathcal{S}^E bzw. \mathcal{S}^P .

Bemerkungen:

- Man kann leicht zeigen, dass auch $(\mathcal{S}^E, +, \cdot)$ und $(\mathcal{S}^P, +, \cdot)$ Vektorräume sind.
- Für kausale Leistungssignale definiert man manchmal auch

$$P_x := \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K+1} \sum_{i=0}^K |x[i]|^2$$

- Der Grund für eine Unterscheidung zwischen Energie und Leistungssignalen ist, dass man für Energie- bzw. Leistungssignale unterschiedliche Normen bzw. Skalarprodukte definieren muss, um die Resultate über normierte Vektorräume (siehe Skript Mathe-I, Kapitel 8.2 und 8.3) auch auf diskrete Signale anwenden zu können (etwa über Skalarprodukt, Winkel, Ähnlichkeit, ...):

Definition 2.14: Skalarprodukt zweier Signalvektoren

Seien $x[k]$ und $y[k]$ zwei Signale. Dann nennt man $\vec{x} \cdot \vec{y}$ oder gleichbedeutend $\langle x[k], y[k] \rangle$ Skalarprodukt oder Inneres Produkt der Signale $x[k]$ und $y[k]$. Dabei unterscheiden wir folgende Definitionen:

- Für Energiesignale $x[k], y[k] \in \mathcal{S}^E$ definieren wir das Skalarprodukt (wie üblich)

51

$$\langle x[k], y[k] \rangle_E := \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*[k] \cdot y[k]$$

wobei x^* das konjugiert komplexe Signal bezeichnet.

- Für Leistungssignale $x[k], y[k] \in \mathcal{S}^P$ definieren wir dagegen

52

$$\langle x[k], y[k] \rangle_P := \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{k=-K}^K x^*[k] \cdot y[k]$$

- Als Euklidische Norm der Signale bezeichnen wir jeweils

53

$$\begin{aligned} \|x[k]\|_E &:= \sqrt{\langle x[k], x[k] \rangle_E} = \sqrt{E_x} \text{ bzw.} \\ \|x[k]\|_P &:= \sqrt{\langle x[k], x[k] \rangle_P} = \sqrt{P_x} \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Die Definitionen entsprechen dem in Mathe-I definierten Skalarprodukt in Vektorräumen (siehe Skript Mathe-I, S. 180, Def. 8.9).
- Wenn es klar (oder unerheblich) ist ob wir Energie- oder Leistungssignale betrachten, dann schreiben wir einfach $\langle x[k], y[k] \rangle$ bzw. $\|x[k]\|$.
- Die Definitionen für Leistungssignale sind notwendig, da man ansonsten z.B. nicht die Norm $\|x[k]\|$ für eine Gleichspannungsquelle $x[k] = U_0 > 0 \forall k$ berechnen könnte (weil die unendliche Summe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2$ nicht konvergiert).
- Um das Skalarprodukt nicht mit der komponentenweise Multiplikation $x[k] \cdot y[k]$ zu verwechseln, verwenden wir meistens die Notation $\langle x[k], y[k] \rangle$.
- Man kann leicht zeigen, dass $(\mathcal{S}^E, +, \cdot, \|\cdot\|_E)$ bzw. $(\mathcal{S}^P, +, \cdot, \|\cdot\|_P)$ normierte Vektorräume sind (Gültigkeit der Axiome nachweisen, siehe Skript Mathe-I, Kapitel 8.1 und 8.2). Es übertragen sich also alle Ergebnisse über Skalarprodukt und Winkel von Vektoren auf diskrete Signale. Insbesondere kann man den Winkel Φ zwischen zwei Signalen als Ähnlichkeitsmaß verwenden:

Satz 2.15: Winkel zwischen Signalen, Eigenschaften des Skalarprodukts

Als Winkel Φ zwischen zwei Signalen $x[k]$ und $y[k]$ definiert man den Winkel zwischen den entsprechenden Signalvektoren, d.h. es gilt:

$$\cos \Phi = \frac{\langle x[k], y[k] \rangle}{\|x[k]\| \cdot \|y[k]\|}$$

54

Insbesondere ist das Skalarprodukt $\langle x[k], y[k] \rangle$ also ein Maß für die Ähnlichkeit der Signale $x[k]$ und $y[k]$, denn es gilt:

- $|\langle x[k], y[k] \rangle| \leq \|x[k]\| \cdot \|y[k]\|$.
- Maximale Ähnlichkeit: $\langle x[k], y[k] \rangle = \|x[k]\| \cdot \|y[k]\|$;
genau dann, wenn der Winkel zw. $x[k]$, $y[k]$ genau $\Phi = 0$ und $\cos \Phi = 1$ ist;
genau dann, wenn $x[k] = c \cdot y[k]$ für ein $c > 0$.
- Maximale Unähnlichkeit: $\langle x[k], y[k] \rangle = -\|x[k]\| \cdot \|y[k]\|$;
genau dann, wenn der Winkel $\Phi = \pi = 180^\circ$ und $\cos \Phi = -1$ ist;
genau dann, wenn $x[k] = -c \cdot y[k]$ für ein $c > 0$.
- Orthogonalität: $\langle x[k], y[k] \rangle = 0$
genau dann, wenn der Winkel $\Phi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ und $\cos \Phi = 0$ ist;
genau dann, wenn $x[k] \perp y[k]$.

Beweis: Folgt aus den Eigenschaften des Skalarprodukts (siehe Skript Mathe-I, S. 181, Satz 8.10.V). \square

Bemerkung: Für den Winkel verwenden wir ein großes griechisches Φ , während das kleine φ für die im folgenden definierte Korrelationsfunktion verwendet wird:

Definition 2.16: Korrelation

Seien $x[k], y[k] \in \mathcal{S}$ zwei diskrete Signal.

Dann definieren wir die Kreuzkorrelationsfunktion für $x[k]$ und $y[k]$ als

$$\varphi_{xy}[\kappa] := \langle x[k], y[k + \kappa] \rangle$$

55

und die Autokorrelationsfunktion von $x[k]$ als

$$\varphi_{xx}[\kappa] := \langle x[k], x[k + \kappa] \rangle$$

56

Bemerkungen:

- Die Kreuzkorrelationsfunktion $\varphi_{xy}[\kappa]$ ist einfach das Skalarprodukt des ersten Signals $x[k]$ mit dem um κ nach links verschobenen zweiten Signal $y[k]$.
- Die Autokorrelationsfunktion ist ein Spezialfall der Kreuzkorrelationsfunktion für $x[k] = y[k]$.
- Wenn man explizit zwischen Korrelationen zwischen Energiesignalen bzw. Leistungssignalen unterscheiden will schreibt man entsprechend $\varphi_{xy}^E[\kappa]$ bzw. $\varphi_{xy}^P[\kappa]$.
- Offensichtlich kann man Energie bzw. Leistung mit Hilfe der Autokorrelation (ohne Zeitverschiebung) berechnen:

$$E_x = \varphi_{xx}^E[0] \quad \text{bzw.} \quad P_x = \varphi_{xx}^P[0]$$

- Allgemein gilt, dass die Autokorrelationsfunktionen für Null Zeitverschiebung $\kappa = 0$ ihr absolutes Maximum annehmen (da dann $\Phi = 0^\circ$ und $\cos \Phi = 1$ am größten ist):

$$\varphi_{xx}[0] \geq \varphi_{xx}[\kappa] \quad \text{für alle } \kappa$$

- Sind die Signale normiert ($\|x[k]\| = \|y[k]\| = 1$) so spricht man von normierten Korrelationsfunktionen. Für nicht normierte Signale sind die normierten Korrelationsfunktionen durch

$$\varphi_{xy}^N[\kappa] := \frac{\langle x[k], y[k + \kappa] \rangle}{\|x[k]\| \cdot \|y[k]\|} \quad \text{bzw.} \quad \varphi_{xx}^N[\kappa] := \frac{\langle x[k], x[k + \kappa] \rangle}{\|x[k]\|^2}$$

definiert. Es gilt dann $|\varphi_{xy}^N[\kappa]| \leq 1$ bzw. $|\varphi_{xx}^N[\kappa]| \leq 1$.

- Man kann die Korrelation mit Hilfe der Faltungsoperation berechnen...

Satz 2.17: Korrelation und Faltung

Die Korrelation lässt sich mit Hilfe der Faltungsoperation berechnen. Es gilt:

$$\varphi_{xy}^E[\kappa] = x^*[-\kappa] * y[\kappa] \quad \text{bzw.} \quad \varphi_{xy}^P[\kappa] = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2K+1} x_K^*[-\kappa] * y_K[\kappa]$$

wobei im letzten Fall $x_K[\kappa] := x[\kappa] \cdot \text{rect}_{-K,K}[\kappa]$ bzw. $y_K[\kappa] := y[\kappa] \cdot \text{rect}_{-K,K}[\kappa]$ die auf Zeiten $-K \leq \kappa < K$ zeitbeschränkten Signale sind.

Beweis: Für Energiesignale folgt aus der Definition von Korrelation, Skalarprodukt und Faltung mit der Substitution $i := -k$:

$$\varphi_{xy}^E[\kappa] = \langle x[k], y[k + \kappa] \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*[k] y[k + \kappa] \stackrel{i=-k}{=} \sum_{i=-\infty}^{\infty} x^*[-i] y[\kappa - i] = x^*[-\kappa] * y[\kappa]$$

Für Leistungssignale gilt entsprechendes. \square

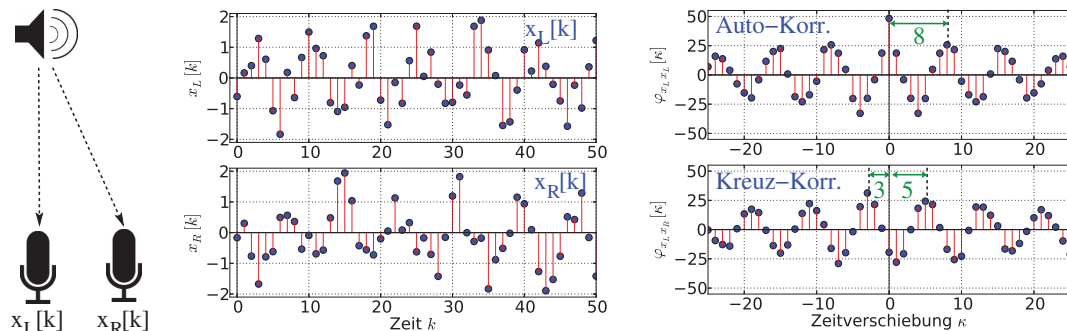
Bemerkungen: Für die Auto-Korrelationen gelten natürlich die entsprechenden Beziehungen, z.B. $\varphi_{xx}^E[\kappa] = x^*[-\kappa] * x[\kappa]$.

Anwendung Korrelationsanalyse:

- Mit der Autokorrelation kann man etwa die Periodizität eines Signals messen. Dazu ermittelt man den höchsten Peak neben dem Haupt-Peak bei $\kappa = 0$. Falls der höchste Peak bei κ_{\max} liegt so hat das Signal die Periode $T = |\kappa_{\max}|$. Falls es keine klaren Peaks gibt (flaches Korrelogramm) so ist das Signal nicht (oder nur schwach) periodisch.
- Mit der Kreuzkorrelation kann man z.B. Zeitverschiebungen zwischen zwei Signalen $x[k]$ und $y[k]$. Dazu ermittelt man wieder den höchsten Peak bei κ_{\max} . Das bedeutet, dass $x[k]$ und $y[k + \kappa_{\max}]$ sich unter allen möglichen Verschiebungen κ am ähnlichsten sind. D.h. falls die beiden Signale zeitlich gegeneinander verschobene Komponenten enthalten, dann ist es am wahrscheinlichsten, dass diese Verschiebung κ_{\max} war, genauer: $x[k]$ ist gegenüber $y[k]$ um die Zeit κ_{\max} verzögert.

Beispiel: Wie in untenstehender Figur illustriert, messen wir mit zwei Mikrofonen die Signale x_L (linkes Mikrofon) und x_R (rechtes Mikrofon) von einer Schallquelle (Lautsprechersymbol). Da die Laufzeit von der Schallquelle zu den beiden Mikrofonen unterschiedlich ist, erhält man eine zeitliche Verzögerung zwischen den beiden Signalen. Die folgenden Schaubilder zeigen die gemessenen Signale $x_L[k]$ (links oben) und $x_R[k]$ (links unten) und die berechnete Kreuzkorrelationsfunktion $\varphi_{x_L x_R}[\kappa]$ (rechts oben) und Autokorrelationsfunktion $\varphi_{x_L x_L}[\kappa]$ (rechts unten).

- a) Lesen Sie aus der Auto-Korrelationsfunktion die Periodizität des aufgenommenen Schallsignals ab.
- b) Bestimmen Sie aus der Kreuz-Korrelation die Zeitverzögerung zwischen den Aufnahmen vom linken und rechten Mikrofon.



Lösung:

- a) Im Autokorrelogramm ist der höchste Gipfel (abseits vom Zentralgipfel) bei $\kappa_{\max} = 8$. Also ist die Periode des Signals $T = 8$ Zeitschritte.
- b) Im Kreuzkorrelogramm $\varphi_{x_L x_R}[\kappa]$ liegt der höchste Gipfel bei $\kappa_{\max} = -3$ bzw. $\kappa_{\max} = 5$ (beide Gipfel sind ungefähr gleich hoch). D.h. entweder eilt das linke Signal x_L dem rechten Signal x_R um 3 Zeitschritte voraus, oder x_L ist gegenüber x_R um 5 Zeitschritte verzögert. Auch im Kreuzkorrelogramm kann man die Periodizität der Signale ablesen (Abstand zwischen zwei Peaks).

Bemerkung: Mit Hilfe der Korrelationsanalyse kann man Signalquellen lokalisieren: Die Signalquelle kann nur an den Orten \vec{p} liegen, die mit der von den Mikrofonen an den Orten \vec{m}_1 und \vec{m}_2 gemessenen Laufzeitdifferenz κ_{\max} übereinstimmt, d.h. für die

$$\kappa_{\max} \cdot v_S = \|\vec{p} - \vec{m}_1\| - \|\vec{p} - \vec{m}_2\|$$

gilt (wobei v_S die Schallgeschwindigkeit ist). Zwei Mikrofone und eine Laufzeitdifferenz erlauben leider noch keine eindeutige Bestimmung des Ortes der Signalquelle. Dafür bräuchte man mindestens drei Signale von drei Mikrofonen, mit denen man drei Laufzeitdifferenzen messen kann. Ein ähnliches Prinzip liegt auch der Lokalisation mit GPS zugrunde.

Weitere Übungsaufgaben: Blatt ???: A???

Kapitel 3

Diskrete Systeme

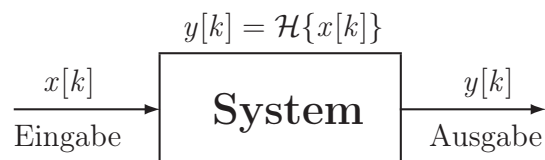
3.1 Definition und Eigenschaften von Systemen

Definition 3.1: Diskretes System

Sei \mathcal{S} die Menge aller diskreten Signale. Dann ist ein diskretes System eine Abbildung $\mathcal{H} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ welche ein Eingabe-Signal $x[k] \in \mathcal{S}$ auf ein Ausgabe-Signal $y[k] \in \mathcal{S}$ abbildet:

$$y[k] = \mathcal{H}\{x[k]\}$$

Das Eingabe-Signal nennt man auch Eingangssignal oder Inputsignal, das Ausgabe-Signal auch Ausgangssignal oder Outputsignal.



58

Bemerkungen:

- Für $\mathcal{H}\{x[k]\}$ benutzen wir geschwungene Klammern um klar zu machen, dass es sich bei \mathcal{H} nicht um eine Abbildung eines Eingangswerts auf einen Ausgangswert, sondern eines Eingangssignals $x \in \mathcal{S}$ auf ein Ausgangssignal $y \in \mathcal{S}$ handelt.
- Wir vernachlässigen hier zunächst Zufallsprozesse wie etwa Rauschen und nehmen an, dass es sich bei \mathcal{H} um ein deterministisches System handelt: D.h. für jedes Eingangssignal $x[k]$ ist das zugehörige Ausgangssignal $y[k]$ durch die Abbildung \mathcal{H} eindeutig bestimmt.
- Außerdem beschränken wir uns meist auf SISO-Systeme (“single input, single output”) mit 1-dimensionalen Signalen. Im allgemeinen können Ein- und Ausgangssignale aber auch mehrdimensional sein – in diesem Fall schreiben wir die Signale als Vektoren, z.B. \vec{x} (vgl. Kapitel 3.5).

59

Beispiel: Wir betrachten das System “Sparbuch” bei einer Bank. Wir nehmen an, das Sparbuch sei gebührenfrei und Einzahlungen werden mit Zinssatz p verzinst. Als Eingabe-Signal $x[k]$ definieren wir die Einzahlungen (z.B. zu Beginn) des Jahres k , und als Ausgabe-Signal $y[k]$ entsprechend das Guthaben des Sparbuchs.

- a) Berechnen Sie für eine einmalige Einzahlung x_0 im Jahr $k = 0$ das Guthaben nach i Jahren!
- b) Wie berechnet man für allgemeine Einzahlungen $x[k]$ das Guthaben $y[k]$?

Lösung: a) Für das Eingabe-Signal (bzw. die einmalige Einzahlung)

$$x[k] = x_0 \cdot \delta[k] = \begin{cases} x_0, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

entwickelt sich nun das Guthaben des Sparbuchs wie folgt:

zu Beginn: $y[0] = x_0$

nach 1 Jahr: $y[1] = x_0 + p \cdot x_0 = (1 + p) \cdot x_0$ nach 2 Jahren: $y[2] = (1 + p)x_0 + p \cdot (1 + p) \cdot x_0 = (1 + p) \cdot (1 + p) \cdot x_0 = (1 + p)^2 \cdot x_0$

nach 3 Jahren: $y[3] = \dots = (1 + p)^3 \cdot x_0$

nach i Jahren: $y[i] = (1 + p)^i \cdot x_0$

D.h. das Ausgangssignal ist die kausale Exponentialfolge $y[k] = x_0 \cdot (1 + p)^k \cdot \epsilon[k]$

60

- b) Allgemein errechnet sich das Guthaben im Jahr $k + 1$ durch folgende Rekursion:

$$y[k + 1] = y[k] \cdot (1 + p) + x[k + 1] \quad (3.1)$$

Das heißt $y[k + 1]$ ergibt sich aus dem verzinsten Guthaben $y[k]$ des vorigen Jahres und zusätzlich den neuen Einzahlungen $x[k + 1]$.

Im folgenden definieren wir wichtige Eigenschaften von diskreten Systemen.

Definition 3.2: Linearität

Ein System \mathcal{H} heißt linear falls die Abbildung $\mathcal{H} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ linear ist, d.h. falls für Eingabe-Signale $x_1[k]$, $x_2[k]$ und Konstanten c , d gilt:

$$\mathcal{H}\{c \cdot x_1[k] + d \cdot x_2[k]\} = c \cdot \mathcal{H}\{x_1[k]\} + d \cdot \mathcal{H}\{x_2[k]\}$$

61

Bemerkungen:

- Wir hatten Linearität schon kurz in Kapitel 1 motiviert (siehe (1.2) auf S. 9).
- Lineare Systeme kann man viel einfacher verstehen und analysieren als allgemeine nicht-lineare Systeme: Wenn wir bei einem linearen System z.B. zu Eingabe-Signalen $x_1[k]$ und $x_2[k]$ die zugehörigen Ausgabe-Signale $y_1[k]$ und $y_2[k]$ kennen (etwa indem wir sie messen), dann können wir bereits vorhersagen wie für *beliebige* Linearkombinationen $cx_1[k] + dx_2[k]$ am Eingang die zugehörigen Systemantworten am Ausgang aussehen werden (nämlich $cy_1[k] + dy_2[k]$).

Beispiel: Beurteilen Sie ob ein Sparbuch (siehe voriges Beispiel) ein lineares System darstellt?

Lösung: Man kann sich leicht überlegen, dass ein Sparbuch ein lineares System ist:

I) Verdoppelt man z.B. die Einzahlung, so verdoppelt sich auch das Guthaben $\forall k$.

II) Oder hat man zwei Sparbücher mit Guthaben $y_1[k]$ und $y_2[k]$ bei denen man jeweils Beträge $x_1[k]$ und $x_2[k]$ einzahlt, dann kann man die beiden Sparbücher auch zusammenlegen (also $x_1[k] + x_2[k]$ auf ein Sparbuch einzahlen) ohne dass sich das Gesamtguthaben $y_1[k] + y_2[k]$ ändert.

Man kann die Linearität auch formal mit Hilfe von (3.1) und vollständiger Induktion zeigen. Dazu sei wie zuvor $y_1[k]$ das Guthaben bei Einzahlungen $x_1[k]$, und $y_2[k]$ das Guthaben bei Einzahlungen $x_2[k]$. Außerdem seien die Sparbücher o.B.d.A. zur Zeit $k = 0$ eröffnet werden, also $x_1[k] = x_2[k] = 0 \forall k < 0$. Dann folgt für ein Sparbuch bei dem man $x[k] := c \cdot x_1[k] + d \cdot x_2[k]$ einzahlt folgendes Guthaben $y[k]$:

I.A. ($k = 0$): Wegen $y_1[0] = x_1[0]$ und $y_2[0] = x_2[0]$ folgt offensichtlich

$$y[0] = x[0] = c \cdot x_1[0] + d \cdot x_2[0]$$

62

I.S. ($k \rightarrow k + 1$): Aus der I.V. $y[k] = cy_1[k] + dy_2[k]$ und (3.1) folgt

$$\begin{aligned} y[k+1] &\stackrel{(3.1)}{=} y[k] \cdot (1+p) + x[k+1] \\ &\stackrel{(I.V.)}{=} (cy_1[k] + d \cdot y_2[k]) \cdot (1+p) + c \cdot x_1[k+1] + d \cdot x_2[k+1] \\ &= c \cdot (y_1[k] \cdot (1+p) + x_1[k+1]) + d \cdot (y_2[k] \cdot (1+p) + x_2[k+1]) \\ &\stackrel{(3.1)}{=} c \cdot y[k+1] + d \cdot y_2[k+1] \end{aligned}$$

63

□

Definition 3.3: Zeitinvarianz

Ein System \mathcal{H} heißt zeitinvariant, wenn aus $y[k] = \mathcal{H}\{x[k]\}$ stets folgt, dass

64

$$\mathcal{H}\{x[k - k_0]\} = y[k - k_0]$$

Bemerkung: Zeitinvarianz bedeutet also, dass sich bei zeitlicher Verschiebung des Eingangssignal das zugehörige Ausgangssignal um dieselbe Zeit verschiebt.

Beispiel: Solange der Zinssatz p konstant ist (d.h. nicht von der Zeit k abhängt) bildet das Sparbuch auf einer Bank ein zeitinvariantes System. Denn wenn man die Einzahlungen $x[k - k_0]$ um k_0 Jahre verschiebt, erhält man die gleiche Guthaben-Entwicklung $y[k - k_0]$ wie zuvor, aber um k_0 Jahre verschoben.

Formal: Sei $y[k] := \mathcal{H}\{x[k]\}$ das Guthaben bei Einzahlungen $x[k]$, und $z[k] := \mathcal{H}\{x[k - k_0]\}$ sei das Guthaben bei verschobenen Einzahlungen $x[k - k_0]$. Dann folgt $z[k] = y[k - k_0]$, denn (Beweis durch Induktion):

65

I.A. ($k = k_0$): Für die erste Einzahlung (o.B.d.A. bei $k = 0$) gilt wieder $y[0] = x[0]$ und $y[k] = 0$ für $k < 0$, und deshalb

$$\begin{aligned} z[k_0] &= x[k_0 - k_0] = x[k_0] = y[0] = y[k_0 - k_0] \\ \text{und } z[k] &= 0 = y[k - k_0] \text{ für } k < k_0 \end{aligned}$$

66

I.S. ($k \rightarrow k + 1$): Aus der I.V. $z[k] = y[k - k_0]$ und (3.1) folgt

$$\begin{aligned} z[k + 1] &\stackrel{(3.1)}{=} z[k] \cdot (1 + p) + x[k + 1 - k_0] \\ &\stackrel{(I.V.)}{=} y[k - k_0] \cdot (1 + p) + x[k - k_0 + 1] \\ &\stackrel{(3.1)}{=} y[k - k_0 + 1] \end{aligned}$$

Hängt aber der Zinssatz $p[k]$ von der Zeit k ab ist (wie es üblicherweise bei echten Bankkonten der Fall ist), dann ist das Sparbuch nicht zeitinvariant. Wenn es z.B. jedes Jahr weniger Zinsen gibt ($p[k + 1] < p[k]$), dann erhält man bei einer Verschiebung der Einzahlungen in die Zukunft immer weniger Zinsen und damit weniger Guthaben ($z[k - k_0] < y[k]$).

Definition 3.4: Kausalität von Systemen

Ein System \mathcal{H} heißt kausal, wenn der Ausgabewert $y[k_0]$ zur Zeit k_0 nur von früheren Eingabewerten $x[k], k \leq k_0$ abhängig ist.

67

Beispiele und Bemerkungen:

- Unser Sparbuch-Beispiel ist ein kausales System, denn entsprechende Gutschriften sind erst *nach* getätigten Einzahlungen vorhanden. D.h. das Guthaben $y[k_0]$ zur Zeit k_0 hängt nur von Einzahlungen $x[k]$ zu früheren Zeiten $k \leq k_0$ ab, nicht aber von zukünftigen Einzahlen $x[k]$ mit $k > k_0$.
- Unsere Welt als ganzes ist wohl auch kausal: Üblicherweise nimmt man an, dass die Zukunft von der Vergangenheit abhängt, aber nicht umgekehrt.

Definition 3.5: Stabilität von Systemen

Ein System \mathcal{H} heißt stabil, wenn es auf jede beschränkte Eingangsfolge $x[k]$ mit einer beschränkten Ausgangsfolge $y[k] := \mathcal{H}\{x[k]\}$ reagiert, d.h. falls es Konstanten $C, D < \infty$ gibt, sodass gilt:

$$|x[k]| < C \forall k \Rightarrow |y[k]| < D \forall k$$

68

Bemerkung: Ein solchermassen stabiles System nennt man auch BIBO-stabil (BIBO=bounded-input, bounded-output).

Beispiel: Unser Sparbuch-Beispiel ist ein instabiles System. Denn für eine einmalige Einzahlung $x[k] = x_0 \delta[k]$ zur Zeit 0 mit endlichem Wert $x_0 < \infty$ wächst das Guthaben bei konstantem Zinssatz $p > 0$ über alle Grenzen, d.h. trotz beschränktem Eingang $x[k] \leq x_0$ gilt (siehe oberhalb von (3.1) auf Seite 40)

$$y[k] = x_0 \cdot (1 + p)^k \cdot \epsilon[k] \rightarrow \infty \text{ für } k \rightarrow \infty$$

69

Für $p \leq 0$ würde es sich um ein stabiles System handeln (z.B. $y[k] \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$ und $p < 0$).

Definition 3.6: Gedächtnis

70

Ein System heißt gedächtnislos, wenn der Ausgang $y[k]$ zur Zeit k nur vom Eingang $x[k]$ zur Zeit k abhängt.

71

Dagegen hat ein System ein Gedächtnis der Länge L , falls $y[k]$ nur von $x[\kappa]$ für $|\kappa - k| \leq L$ abhängt.

Bemerkung: Z.B. hängt bei einem kausalen System mit Gedächtnis der Länge L der Ausgang $y[k]$ zur Zeit k nur von $x[k], x[k-1], x[k-2], \dots, x[k-L]$ ab.

Beispiel: Das Sparbuch hat Gedächtnis unendlich mit $L = \infty$, denn das Guthaben $y[k]$ zur Zeit k hängt von allen vorher getätigten Einzahlungen $x[-\infty], \dots, x[-1], x[0], x[1], \dots, x[k]$ ab.

Wir werden im folgenden Abschnitt Systeme mit endlichem Gedächtnis kennenlernen, sogenannte FIR-Systeme.

Weitere Übungsaufgaben: Blatt ???: A???

3.2 Impulsantwort und Faltung bei LTI-Systemen

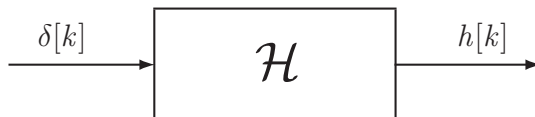
Definition 3.7: Impulsantwort, Stoßantwort

Als Impulsantwort oder Stoßantwort eines Systems \mathcal{H} bezeichnet man die System-Ausgabe $h[k]$ mit

72

$$h[k] := \mathcal{H}\{\delta[k]\}$$

wenn am Eingang der Dirac-Impuls $\delta[k]$ liegt.



Wie wir gleich sehen werden, spielt die Impulsantwort $h[k]$ eine sehr wichtige Rolle bei linearen und zeitinvarianten Systeme, da man durch sie das Ein-/Ausgabeverhalten eines solchen Systems *vollständig* beschreiben kann. Ob ihrer Wichtigkeit verwendet man für lineare zeitinvariante Systeme auch folgende Abkürzung:

Definition 3.8: LTI- oder LZI-System

Ein System, das linear und zeitinvariant ist bezeichnet man abkürzend auch als LTI-System oder LZI-System.

Bemerkung: **LZI** steht für **L**inear **Z**eit**I**nvariant, während das englische **LTI** für **L**inear **T**ime-**I**nvariant steht.

Bei der folgenden Betrachtung eines LTI-Systems mit Impulsantwort $h[k]$ stellen wir ein beliebiges Eingangssignal $x[k]$ als Linearkombination von verschobenen Dirac-Impulsen $\delta[k-i]$ dar (Satz 2.6 auf Seite 21) und wenden dann die Linearitäts- und Zeitinvarianzeigenschaften an um ganz allgemein das zugehörige Ausgangssignal $y[k]$ zu berechnen:

$$\begin{aligned} y[k] = \mathcal{H}\{x[k]\} &\stackrel{(2.6)}{=} \mathcal{H}\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \cdot \delta[k-i]\right\} \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \mathcal{H}\{\delta[k-i]\} \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \cdot h[k-i] \\ &= x[k] * h[k] \end{aligned}$$

73

Damit folgt schon beinahe der folgende Satz:

Satz 3.9: LTI-Systeme und Faltung

Die folgenden beiden Aussagen über ein System \mathcal{H} sind äquivalent:

- I) \mathcal{H} ist linear und zeitinvariant, d.h. ein LTI-System.
- II) Die Systemausgabe $y[k] := \mathcal{H}\{x[k]\}$ ergibt sich durch Faltung der Systemeingabe $x[k]$ mit der Impulsantwort $h[k] := \mathcal{H}\{\delta[k]\}$, d.h.

$$y[k] = x[k] * h[k] \text{ für alle } x[k] \in \mathcal{S}$$

74

Beweis: '(I) \Rightarrow (II)': Haben wir eben oben gezeigt.

'(II) \Rightarrow (I)': Wir müssen zeigen, dass aus $\mathcal{H}\{x[k]\} = x[k] * h[k]$ folgt, dass \mathcal{H} linear und zeitinvariant ist. Aus Satz 2.11 von Seite 30 folgt mit $x * h = h * x$ (Kommutativität) für beliebige Konstanten c, d und Signale $x_1[k], x_2[k] \in \mathcal{S}$ auch

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\{cx_1 + dx_2\} &= h * (cx_1 + dx_2) && \text{(Voraussetzung und Kommutativität von *)} \\ &= h * (cx_1) + h * (dx_2) && \text{(Distributivität der Faltung *)} \\ &= c(x_1 * h) + d(x_2 * h) && \text{(Kommutativität und Assoziativität von *)} \\ &= c\mathcal{H}\{x_1\} + d\mathcal{H}\{x_2\} \end{aligned}$$

und damit die Linearität von \mathcal{H} (Def. 3.2). Ähnlich folgt auch die Zeitinvarianz (Def. 3.3) da für beliebiges $x[k] \in \mathcal{S}$ mit Systemantwort $y[k] := \mathcal{H}\{x[k]\}$ gilt, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\{x[k - k_0]\} &= h[k] * x[k - k_0] && \text{(Voraussetzung und Kommutativität von *)} \\ &= (h[k] * x[k])[k - k_0] && \text{(Zeitinvarianz von *)} \\ &= y[k - k_0] && \text{(Voraussetzung) .} \end{aligned}$$

□

Bemerkungen:

- Der Satz zeigt also, dass LTI Systeme genau die Systeme sind, bei denen der Zusammenhang zwischen Eingabe $x[k]$ und Ausgabe $y[k]$ durch die Faltung mit der Impulsantwort $h[k]$ beschrieben werden kann.
- Wegen der Kommutativität der Faltung,

$$y[k] = x[k] * h[k] = h[k] * x[k],$$

folgt, dass ein LTI-System mit Impulsantwort $h[k]$ bei Eingabe $x[k]$ dieselbe Ausgabe $y[k]$ hat (Skizze, links), wie ein LTI-System mit Impulsantwort $x[k]$ und Eingabe $h[k]$ (Skizze, rechts):



- Bei der Darstellung eines LTI-Systems in Blockschaltbildern schreibt man üblicherweise ihre Impulsantwort $h[k]$ in die System-Box (wie in obiger Skizze).

Beispiel: Wir können also mit der Faltungsoperation leicht die Guthaben-Entwicklung unseres Sparbuchs \mathcal{H} bei beliebigen Eingaben $x[k]$ ausrechnen. Die Impulsantwort haben wir bereits oberhalb von (3.1) auf Seite 40. Für eine impulsartige einmalige Einzahlung $x[k] = \delta[k]$ eines Betrags $x_0 = 1$ zur Zeit $k = 0$ erhalten wir für Zinssatz p die Impulsantwort

$$h[k] := \mathcal{H}\{\delta[k]\} = (1+p)^k \epsilon[k] \quad (3.2) \quad 75$$

und deshalb für eine beliebige Folge $x[k] \in \mathcal{S}$ von Einzahlungen zu beliebigen Zeiten $k \in \mathbb{Z}$ als Ausgabe die Guthaben-Folge $y[k]$ mit

$$y[k] = h[k] * x[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (1+p)^i \epsilon[i] \cdot x[k-i] = \sum_{i=0}^{\infty} (1+p)^i \cdot x[k-i] \quad 76$$

Für kausale Eingabesignale $x[k]$ mit $x[k] = 0 \forall k < 0$ (d.h. das Sparbuch wird erst zur Zeit $k = 0$ eröffnet) kann man dann $y[k]$ durch eine endliche Summe berechnen:

$$y[k] = \sum_{i=0}^k (1+p)^i \cdot x[k-i] \quad 77$$

Weitere Übungsaufgaben: Blatt ???: A???

3.3 Stabilität und Kausalität von LTI-Systemen

Im folgenden zeigen wir, dass man anhand der Impulsantwort $h[k]$ eines LTI-Systems auch (relativ) leicht die Kausalität und Stabilität des Systems beurteilen kann:

Satz 3.10: Stabilität von LTI-Systemen

Ein LTI-System \mathcal{H} ist stabil genau dann, wenn seine Impulsantwort $h[k] := \mathcal{H}\{\delta[k]\}$ absolut summierbar ist, d.h. falls

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |h[i]| < \infty \quad 78$$

Beweis:

- ' \Leftarrow ': Wir setzen die rechte Seite des Satzes voraus und folgern daraus die Stabilität. Wir nehmen also an es gebe eine Konstante $C < \infty$ mit $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |h[i]| < C$, und außerdem sei $x[k]$ ein beliebiges beschränktes Eingangssignal mit $|x[k]| < M \forall k \in \mathbb{Z}$, wobei $M < \infty$ eine weitere Konstante ist. Dann gilt für das zugehörige Ausgangssignal $y[k]$ wegen der Dreiecksungleichung (DUG; siehe Skript Mathe-I, S. 70, Satz 2.25.IV)

$$\begin{aligned} |y[k]| &= |h[k] * x[k]| = \left| \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i] x[k-i] \right| \stackrel{DUG}{\leq} \sum_{i=-\infty}^{\infty} |h[i] \cdot x[k-i]| \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} |h[i]| \cdot |x[k-i]| < M \sum_{i=-\infty}^{\infty} |h[i]| < M \cdot C < \infty \end{aligned} \quad 79$$

d.h. auch das Ausgangssignal $y[k]$ ist beschränkt und damit das System \mathcal{H} stabil.

- '⇒': Sei nun umgekehrt das LTI-System \mathcal{H} mit Impulsantwort $h[k]$ stabil. Zu zeigen ist, dass $h[k]$ absolut summierbar ist. Wir machen die gegenteilige Annahme und führen diese zum Widerspruch: Annahme: Sei $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |h[i]| = \infty$ divergent. Dann sei durch

80

$$x[k] := \operatorname{sgn}(h[-k]) = \begin{cases} 1, & h[-k] > 0 \\ 0, & h[-k] = 0 \\ -1, & h[-k] < 0 \end{cases}$$

ein spezielles Eingangssignal definiert. Offenbar ist $x[k]$ beschränkt, denn es gilt $|x[k]| \leq 1 \forall k$, und außerdem gilt

81

$$x[k] \cdot h[-k] = \operatorname{sgn}(h[-k]) \cdot h[-k] = |h[-k]| \geq 0$$

Daraus folgt aber, dass das zugehörige Ausgangssignal $y[k] = x[k] * h[k]$ z.B. zur Zeit $k = 0$ nicht beschränkt ist,

82

$$|x[0]| = |(x \cdot h)[0]| = \left| \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \cdot h[-i] \right| = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |h[-i]| = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |h[i]| = \infty$$

und damit ein Widerspruch zur Annahme \mathcal{H} sei stabil. *Wid.!*

□

Beispiel: Für welche Zinssätze handelt es sich bei unserem Sparbuch um ein stabiles System? Argumentieren Sie mit der Impulsantwort!

Lösung: Die Impulsantwort $h[k] = (1+p)^k \cdot \epsilon[k]$ haben wir bereits in (3.2) auf Seite 47 ausgerechnet. Unser Sparbuch ist also nach Satz 3.10 genau dann ein stabiles System falls die unendliche Reihe

83

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |h[i]| = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (1+p)^i \cdot \epsilon[i] = \sum_{i=0}^{\infty} (1+p)^i$$

konvergiert. Wir erkennen eine geometrische Reihe und wissen, dass diese genau dann konvergiert wenn für den Zinssatz p gilt (siehe Skript Mathe-I, S. 84, Satz 3.12):

84

$$|1+p| < 1 \quad \text{bzw. äquivalent für} \quad -2 < p < 0$$

Satz 3.11: Kausalität von LTI-Systemen

Ein LTI-System \mathcal{H} ist kausal genau dann, wenn seine Impulsantwort $h[k] := \mathcal{H}\{\delta[k]\}$ kausal ist, d.h. falls

$$h[k] = 0, \quad \forall k < 0$$

85

Beweis:

- ' \Rightarrow ': Sei also \mathcal{H} kausal. Annahme: $h[k]$ sei nicht kausal, d.h. $\exists k_1 < 0$ mit $h[k_1] = c \neq 0$. Dann folgt aber für das kausale Eingangssignal $x[k] := d\delta[k]$ ein nicht-kausales Ausgangssignal $y[k] := x[k] * h[k] = dh[k]$. Insbesondere hängt also der Ausgang $y[k_1] = dh[k_1] = cd$ zur Zeit $k_1 < 0$ vom Eingang $x[0] = d$ zur Zeit 0 ab. D.h. \mathcal{H} ist nicht kausal, was ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung ist! Wid.! Also war die Annahme falsch, und $h[k]$ muss kausal sein.
- ' \Leftarrow ': Sei $h[k]$ kausal mit $h[k] = 0 \forall k < 0$. Dann ist bei Eingabe $x[k]$ die System-Ausgabe

$$y[k] = h[k] * x[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i] \cdot x[k-i] = \sum_{i=0}^{\infty} h[i] \cdot x[k-i]$$

86

d.h. die Ausgabe $y[k]$ hängt tatsächlich nur von den vorherigen Eingaben $x[k]$, $x[k-1]$, $x[k-2]$, ... ab, und damit ist \mathcal{H} kausal.

□

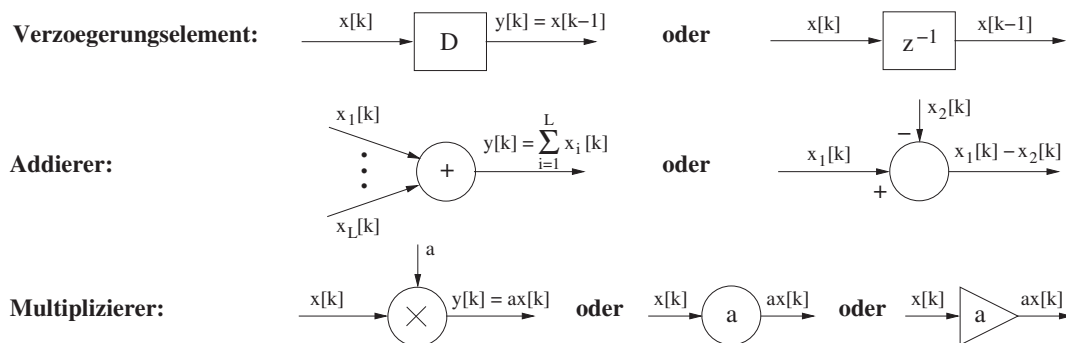
Beispiel: Die Impulsantwort unseres Sparbuches ist $h[k] = (1+p)^k \cdot \epsilon[k]$ (siehe (3.2) auf Seite 47).

Da $h[k]$ kausal ist ($h[k] = 0 \forall k < 0$) folgt, dass auch das System Sparbuch kausal ist.

Weitere Übungsaufgaben: Blatt ???: A???

3.4 Spezielle diskrete LTI-Systeme und Blockdiagramme

Allgemein kann man LTI-Systeme mit den Grundelementen Verzögerung, Addition und Multiplikation darstellen. Die folgende Skizze zeigt Symbole dieser Grundelemente, die man üblicherweise in Blockdiagrammen verwendet:



Man kann leicht zeigen, dass es sich dabei tatsächlich um LTI-Systeme handelt:

Satz 3.12: LTI-Eigenschaft der Grundelemente

Die elementaren diskreten Systeme Verzögerung, Addition und Multiplikation mit einer Konstanten (siehe obige Skizze) sind LTI-Systeme.

Beweis: Z.B. gilt für das System Verzögerung \mathcal{H}_D mit

$$\mathcal{H}_D\{x[k]\} = x[k-1]$$

Linearität und Zeitinvarianz, da

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_D\{cx_1[k] + dx_2[k]\} &= cx_1[k-1] + dx_2[k-1] = c\mathcal{H}_D\{x_1[k]\} + d\mathcal{H}_D\{x_2[k]\} \quad \text{und} \\ \mathcal{H}_D\{x[k-k_0]\} &= x[k-k_0-1] = \mathcal{H}_D\{x[k]\}[k-k_0]. \end{aligned}$$

Für die anderen Grundelemente zeigt man die LTI-Eigenschaft auf ähnliche Weise. \square

Beispiel: Skizzieren Sie ein Blockdiagramm für das System Sparbuch, welches aus obigen Grundelementen besteht.

87

Lösung: Folgendes Blockschaltbild realisiert die Rekursion $y[k+1] = y[k] \cdot (1+p) + x[k+1]$ von (3.1) auf Seite 40: $y[k] = y[k-1] \cdot (1+p) + x[k]$

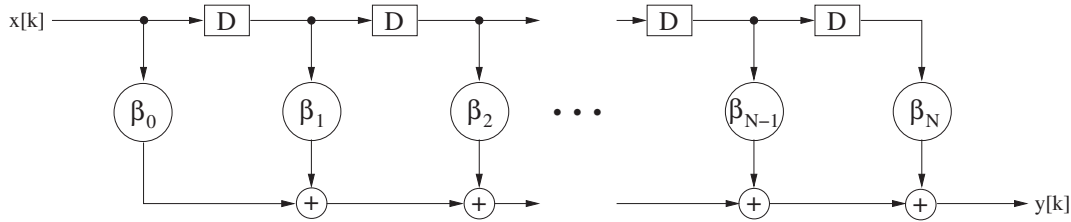
Man kann auch ganz allgemeine LTI-Systeme mit Hilfe der Grundelemente in Blockdiagrammen darstellen. Z.B. gilt für allgemeine kausale LTI-Systeme mit endlicher Impulsantwort

$$h[k] = \begin{cases} \beta_k, & 0 \leq k \leq N \\ 0, & k < 0 \text{ oder } k > N \end{cases}$$

– d.h. sogenannten FIR-Systemen (engl.: FIR = finite impulse response) bzw. Transversalfilter –, dass für Eingangssignal $x[k]$ sich das Ausgangssignal $y[k]$ als endliche Summe

$$y[k] = h[k] * x[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i] \cdot x[k-i] = \sum_{i=0}^n \beta_i \cdot x[k-i] \quad (3.3) \quad \boxed{88}$$

schreiben lässt, was genau folgendem Blockdiagramm eines FIR-Systems entspricht:



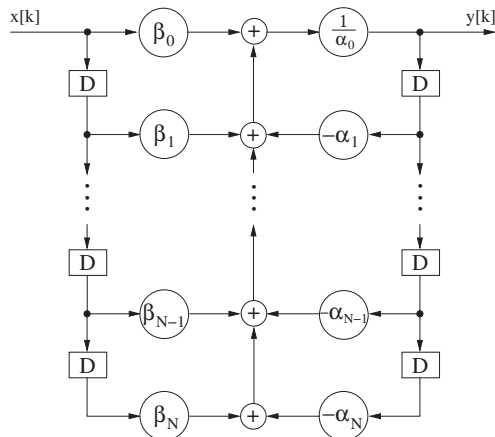
Im Gegensatz zu FIR-Systemen entstehen unendliche Impulsantworten z.B. durch Rückkopplung des Ausgangssignals (siehe z.B. das vorige Beispiel-System Sparbuch). Solche LTI-Systeme nennt man auch IIR-Systeme (von engl. IIR = Infinite Impulse Response). Im allgemeinen entsprechen solche Systeme Rekursionsgleichungen oder Differenzgleichungen, bei denen sowohl die Eingangssignale $x[k-i]$ als auch die Ausgangssignale $y[k-i]$ bis zur Verzögerung $i \leq N$ vorkommen. Als Verallgemeinerung von (3.3) erhält man also die Differenzgleichung

$$\sum_{i=0}^N \alpha_i y[k-i] = \sum_{i=0}^N \beta_i x[k-i] \quad (3.4)$$

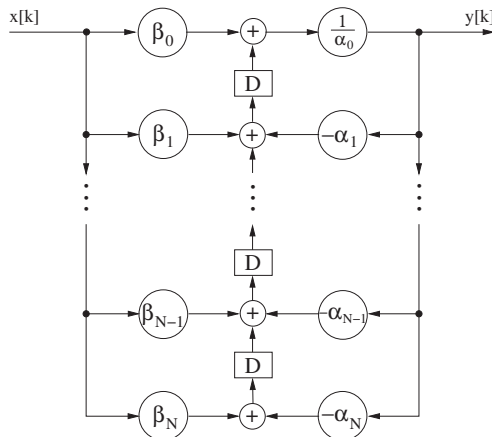
bzw. durch Auflösen nach $y[k]$ die Rekursion

$$y[k] = \frac{1}{\alpha_0} \cdot \left(\sum_{i=0}^N \beta_i \cdot x[k-i] - \sum_{i=0}^N \alpha_i \cdot y[k-i] \right) \quad (3.5) \quad \boxed{89}$$

Die folgende Skizze zeigt entsprechende Blockdiagramme eines IIR-Systems, wobei die linke Seite eine direkte Realisierung von (3.5) zeigt (man spricht deshalb auch von der 1.Direktform), und die rechte Seite eine Optimierung die nur halb so viele Speicherglieder/Verzögerungselemente benötigt (2.Direktform):



Diskretes IIR-System in 1.Direktform



2.Direktform (transponiert)

Weitere Übungsaufgaben: Blatt ???: A???

3.5 Zustandsraum-Beschreibung

Unser **Ziel** ist eine möglichst vollständige und kompakte Beschreibung eines Systems. Insbesondere wollen wir in der Lage sein für ein gegebenes Eingangssignal $x[k]$ das Ausgangssignal $y[k]$ zu bestimmen, am besten analytisch (durch Angabe einer expliziten Formel für y) oder wenigstens numerisch (mit Hilfe von Rechnern). In der folgenden Betrachtung wollen wir mehrdimensionaler Signale $\vec{x}[k]$ und $\vec{y}[k]$ einschließen und jeweils als Vektor darstellen (für jede Zeit k).

Im allgemeinen kann man (kausalen) Systemen dann einen Zustand $\vec{u}[k]$ zuordnen, der alle relevanten Variablen zusammenfaßt von denen das zukünftige Verhalten des Systems abhängt. Insbesondere läßt sich das Systemverhalten mit Hilfe der Zustandsvariable immer durch eine Differenzengleichung erster Ordnung darstellen:

90

$$\vec{v}[k+1] = f_v(\vec{v}[k], \vec{x}[k])$$

$$\vec{y}[k] = f_y(\vec{v}[k], \vec{x}[k])$$

Falls der Zustand $\vec{u}[k_0]$ des Systems zur Zeit k_0 bekannt ist, können wir das Systemverhalten für beliebiges Eingangssignal $x[k]$ numerisch berechnen, z.B. durch folgende Rechenschritte:

91

$$\begin{aligned} \text{I) } \vec{y}[k_0] &= f_y(\vec{v}[k_0], \vec{x}[k_0]) & \text{II) } \vec{v}[k_0 + 1] &= f_v(\vec{v}[k_0], \vec{x}[k_0]) \\ \text{III) } \vec{y}[k_0 + 1] &= f_y(\vec{v}[k_0 + 1], \vec{x}[k_0 + 1]) & \text{IV) } \vec{v}[k_0 + 2] &= f_v(\vec{v}[k_0 + 1], \vec{x}[k_0 + 1]) \\ \text{V) } \vec{y}[k_0 + 2] &= \dots \end{aligned}$$

Bei *linearen* Systemen sind f_u und f_y lineare Funktionen

$$\begin{aligned}\vec{u}[k+1] &= \mathbf{A}\vec{u}[k] + \mathbf{B}\vec{x}[k] \\ \vec{y}[k] &= \mathbf{C}\vec{u}[k] + \mathbf{D}\vec{x}[k]\end{aligned}\quad (3.6)$$

wobei im allgemeinen $\vec{x}[k]$, $\vec{y}[k]$, $\vec{u}[k]$ für jede Zeit k (Spalten-) vektoren und \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} Matrizen sind. Hierbei hat \vec{u} die Länge n , \vec{x} hat Länge m und \vec{y} hat Länge l . Entsprechend hat die sogenannte Systemmatrix \mathbf{A} Größe $n \times n$, die Eingangsmatrix \mathbf{B} Größe $n \times m$, die Ausgangsmatrix \mathbf{C} Größe $l \times n$, und die Durchgangsmatrix \mathbf{D} Größe $l \times m$.

Beispiel: Zustandsraumbeschreibung eines endlichen Transversalfilters bzw. FIR-Systems (siehe Seite 51): Das Ausgangssignal $y[k] = \sum_{i=0}^L a_i x[k-i]$ hängt außer von $x[k]$ auch noch von $x[k-1], x[k-2], \dots, x[k-L]$ ab. Um die letzteren Abhängigkeiten zu eliminieren können wir den Zustandsvektor

$$\vec{v}[k] : (x[k-1] \quad x[k-2] \quad x[k-3] \quad \dots \quad x[k-L])$$

92

definieren, sodass sich das Systemverhalten in der Form (3.6) schreiben läßt. Zum Beispiel gilt dann für einen Transversalfilter der Länge $L = 4$

$$\begin{aligned}\vec{v}[k+1] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{v}[k] + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x[k] \\ y[k] &= (a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4) \cdot \vec{v}[k] + (a_0) \cdot x[k]\end{aligned}$$

93

mit $n = L = 4$, $m = 1$, und $l = 1$. Diese Gleichungen lassen sich sehr einfach mit einem Rechner *numerisch* evaluieren. Z.B. berechnet folgendes MATLAB-Programm den gleitenden Mittelwert ($a_i = 1/5$) eines zufälligen Eingangssignals:

```
% (I) Spezifiziere System
A=[0 0 0 0; 1 0 0 0;...
   0 1 0 0; 0 0 1 0]; % Systemmatrix
B=[1;0;0;0]; % Eingangsmatrix
C=[1 1 1 1]/5; % Ausgangsmatrix
D=1./5; % Durchgangsmatrix
u=[0;0;0;0]; % initialer Zustandsvektor
% (II) Spezifiziere Eingangssignal
kmax=1234; % Ziel: Berechne y[kmax]
vecx=rand(1,kmax); % zufaelliges Eingangssignal
% (III) Berechne Ausgangssignal
for k=1:kmax,
    x=vecx(k); % Input x[k]
    y=C*u+D*x; % Output y[k]
    u=A*u+B*x; % neuer Zustand u[k+1]
end;
y,mean(vecx(kmax-4:kmax)) % Ergebnis y[kmax], Mittel der 5 letzten Eingangswerte
```

Weitere Übungsaufgaben: Blatt ???: A???

3.6 Die z -Transformation

Oftmals möchten wir das Systemverhalten nicht nur numerisch berechnen können (wie im vorigen Abschnitt beschrieben), sondern eine explizite Formel für $y[k] = f(k)$ herleiten. Vorteile einer expliziten Formel:

- I) Exaktes Ergebnis: Keine Fortpflanzung numerischer Berechnungsfehler wie bei der iterativen Methode.
- II) Kompakte effiziente Berechnung: Man kann $y[k]$ direkt ausrechnen ohne vorher iterativ $\vec{u}[1], \vec{u}[2], \dots, \vec{u}[k]$ berechnen zu müssen.

Leider lassen sich die meisten nichtlinearen Systeme nur numerisch berechnen. Immerhin können wir viele LTI-Systeme exakt berechnen.

Wie vorher beschrieben könnten wir zum Beispiel die Impulsantwort $h[k]$ berechnen sodass sich das Ausgangssignal $y[k] = x[k] * h[k]$ als Faltung der Impulsantwort $h[k]$ mit dem Eingangssignal $x[k]$ darstellen lässt. Jedoch kann die Faltungssumme sehr viele oder sogar unendliche viele Summanden enthalten, z.B. für IIR-Systeme (vgl. Skizze auf Seite 51). In solchen Fällen ist es oft einfacher die Signale mit Hilfe der z -Transformation in den “ z -Bereich” zu transformieren, dort zu verknüpfen, und dann wieder zurückzutransformieren.

Definition 3.13: z -Transformation

Sei $z \in \mathbb{C}$ und $x[k]$ eine Folge mit $k \in \mathbb{Z}$. Dann definieren wir die z -Transformierte von $x[k]$ als

$$X(z) := \mathcal{Z}\{x[k]\} := \sum x[k] \cdot z^{-k}$$

und schreiben kurz auch $x[k] \circ \bullet X(z)$ bzw. äquivalent $X(z) \bullet \circ x[k]$.

94

Bemerkungen:

- Wir haben bereits die Darstellung eines *kausalen* Signals $x[k]$ als Polynom kennengelernt (siehe Seite 32). Dabei entsprach dem (gesiebten) i -ten Signalwert $x[i]\delta[k-i]$ der Polynom-Term $x[i]z^i$.
Die z -Transformation verallgemeinert dieses Vorgehen für *allgemeine* Signale und negative Exponenten $i < 0$, wobei allerdings das das gespiegelte Signal $x[-k]$ als (verallgemeinertes) Polynom dargestellt wird (vgl. Bemerkungen am Ende von Kapitel 2.4). D.h. bei der z -Transformation entspricht der i -te Signalwert $x[i]\delta[k-i]$ dem Term $x[i]z^{-i}$.

- $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} x[-k]z^k$ ist eine zweiseitige Potenz-Reihe, d.h. eine sogenannte Laurent-Reihe.
- Zum Konvergenzbereich, d.h. der Frage für welche z die Laurent-Reihe $X(z) < \infty$ konvergiert:

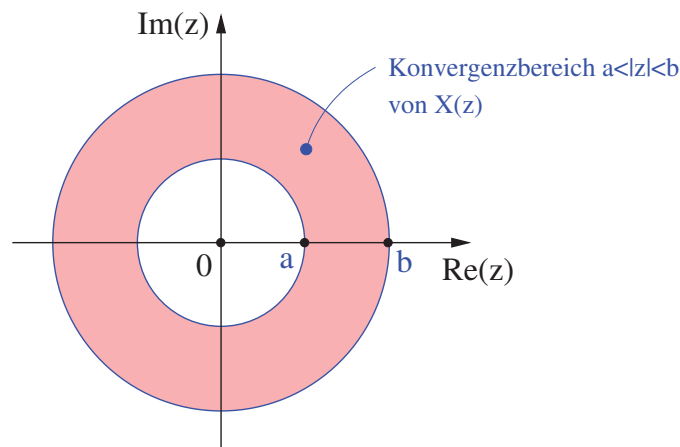
Wir haben bereits in Mathe-1 (Übungsblatt 6, Aufgabe 9c) mit Hilfe des Wurzelkriteriums (Skript Mathe-I, S. 87, Satz 3.14) gezeigt, dass $X(z)$ konvergiert, falls z in einem Ring der komplexen Ebene mit den Radien a und b liegt, d.h. für $a < |z| < b$ mit

$$a := \limsup_{h \rightarrow \infty} \sqrt[h]{|x[h]|}$$

$$b := \frac{1}{\limsup_{h \rightarrow \infty} \sqrt[h]{|x[-h]|}}$$

95

und divergiert, falls z außerhalb des Rings liegt (siehe Skizze).



- Manchmal benutzt man auch die einseitige z-Transformation

$$X^+(z) := \mathcal{Z}\{x[k]\} := \sum_{h=0}^{\infty} x[h] \cdot z^{-h}$$

96

Sie hat einen größeren Konvergenzbereich $a < |z|$. Im Falle von kausalen Folgen ist $X^+(z) = X(z)$ und $b = \infty$.

- Die z -Transformation ist nur eindeutig durch zusätzliche Angabe des Konvergenzbereichs (siehe folgende Beispiele (c) vs. (d)).

Beispiele: Einige einfache z -Transformationen:

97

$$\begin{aligned}
 a) \quad \mathcal{Z}\{\delta[k]\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k] \cdot z^{-k} = z^{-0} = 1 \text{ für } z \in \mathbb{C} \\
 b) \quad \mathcal{Z}\{\delta[k-i]\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k-i] \cdot z^{-k} = z^{-i} \text{ für } 0 < |z| < \infty \\
 c) \quad \mathcal{Z}\{\epsilon[k]\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \epsilon[k] \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k \\
 &\stackrel{\text{geom.}}{=} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1} \text{ für } \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \text{ bzw. } |z| > 1 \\
 d) \quad \mathcal{Z}\{a^k \cdot \epsilon[k]\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k \cdot \epsilon[k] \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} \\
 &= \frac{z}{z-a} \text{ für } \left|\frac{a}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > |a| \\
 e) \quad \mathcal{Z}\{a^k \cdot \epsilon[-k-1]\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} -a^k \cdot \epsilon[-k-1] \cdot z^{-k} = - \sum_{k=-\infty}^{-1} a^k \cdot z^{-k} \\
 &= - \sum_{k=1}^{\infty} a^{-k} \cdot z^k = - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^k = -\frac{z}{a} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^k = \frac{z}{a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{a}} \\
 &= \frac{z}{z-a} \text{ für } \left|\frac{z}{a}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < |a|
 \end{aligned}$$

In folgendem Satz fassen wir diese Ergebnisse mit der kompakteren “Hantel-Schreibweise” ($\circ \text{---} \bullet$) zusammen:

Satz 3.14: Korrespondenzen der z -Transformation

Für die z -Transformation gelten folgende Korrespondenzen:

$$\begin{array}{lll}
 \text{I)} & \delta[k] \circ \text{---} \bullet 1 & \text{für } z \in \mathbb{C} \\
 \text{II)} & \delta[k-i] \circ \text{---} \bullet z^{-i} & \text{für } 0 < |z| < \infty \\
 \text{III)} & \left. \begin{array}{l} \epsilon[k] \\ -\epsilon[-k-1] \end{array} \right\} \circ \text{---} \bullet \frac{z}{z-1} & \text{für } \begin{cases} |z| > 1 \\ |z| < 1 \end{cases} \\
 \text{IV)} & \left. \begin{array}{l} a^k \epsilon[k] \\ -a^k \epsilon[-k-1] \end{array} \right\} \circ \text{---} \bullet \frac{z}{z-a} & \text{für } \begin{cases} |z| > |a| \\ |z| < |a| \end{cases}
 \end{array}$$

Bemerkung: Aus (III) und (IV) sieht man, dass die z -Transformierte $X(z)$ nur in Verbindung mit dem Konvergenzbereich eindeutig ist. Insbesondere sieht

man aus (IV), dass die kausale Exponentialfunktion $a^k \epsilon[k]$ und die negative antikausale Exponentialfunktion $-a^k \epsilon[-k-1]$ zwar dieselbe z -Transformierte $z/(z-a)$ aber unterschiedliche Konvergenzbereiche $|z| > |a|$ bzw. $|z| < |a|$ haben. (III) folgt aus (IV) für $a = 1$.

Im folgenden zeigen wir einige wichtigen Eigenschaften der z -Transformation:

Satz 3.15: Eigenschaften der z -Transformation

Seien $x[k]$ und $y[k]$ diskrete Signale mit den Korrespondenzen $x[k] \circ \bullet X(z)$ für $a < |z| < b$ und $y[k] \circ \bullet Y(z)$ für $c < |z| < d$. Außerdem seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (oder $\in \mathbb{C}$) und $k_0 \in \mathbb{Z}$ Konstanten. Dann gelten folgende Eigenschaften der z -Transformation:

- | | |
|----------------------------------|--|
| I) <u>Linearität:</u> | $\alpha \cdot x[k] + \beta \cdot y[k] \circ \bullet \alpha \cdot X(z) + \beta \cdot Y(z)$
für $\max(a, c) < z < \min(b, d)$ |
| II) <u>Verschiebungssatz:</u> | $x[k + k_0] \circ \bullet z^{k_0} \cdot X(z)$ für $a < z < b$ |
| III) <u>Faltungssatz:</u> | $x[k] * y[k] \circ \bullet X(z) \cdot Y(z)$
für $\max(a, c) < z < \min(b, d)$ |
| IV) <u>Dämpfungssatz:</u> | $\alpha^k \cdot x[k] \circ \bullet X\left(\frac{z}{\alpha}\right)$ für $ \alpha a < z < \alpha b$ |
| V) <u>Lineare Gewichtung:</u> | $k \cdot x[k] \circ \bullet -z \frac{d}{dz} X(z)$ für $a < z < b$ |
| VI) <u>Spiegelung:</u> | $x[-k] \circ \bullet X\left(\frac{1}{z}\right)$ für $\frac{1}{b} < z < \frac{1}{a}$ |
| VII) <u>Konj. kompl. Signal:</u> | $x^*[k] \circ \bullet X^*(z^*)$ für $a < z < b$ |

Beweis:

I) Die Linearität folgt wegen

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}\{\alpha x[k] + \beta y[k]\} &\stackrel{Def.}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha x[k] + \beta y[k]) \cdot z^{-k} \\
 &= \alpha \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k} \right) + \beta \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k] z^{-k} \right) \\
 &= \alpha X(z) + \beta Y(z)
 \end{aligned}$$

98

Da dafür sowohl $X(z)$ als auch $Y(z)$ konvergieren müssen, ist der Konvergenzbereich der Schnittbereich $\max(a, c) < |z| < \min(b, d)$.

II) Der Verschiebungssatz folgt mit der Substitution $k' = k + k_0$ wegen

99

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{x[k + k_0]\} &\stackrel{Def.}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k + k_0] z^{-k} \stackrel{k' = k + k_0}{(k = k' - k_0)} \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \underbrace{x[k'] z^{-k' + k_0}}_{= z^{-k'}, z^{k_0}} \\ &= z^{k_0} \cdot \underbrace{\sum_{k'=-\infty}^{\infty} x[k'] z^{-k'}}_{= X(z)} = z^{k_0} \cdot X(z)\end{aligned}$$

Offensichtlich ändert sich der Konvergenzbereich nicht.

III) Der Faltungssatz verallgemeinert Satz 2.12 und folgt mit dem Verschiebungssatz (II) wegen

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{x[k] * y[k]\} &= \mathcal{Z}\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] y[k - i]\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] y[k - i] z^{-k} \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k - i] z^{-k} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \mathcal{Z}\{y[k - i]\} \\ &\stackrel{(II)}{=} \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] z^{-i} Y(z) = Y(z) \cdot \mathcal{Z}\{x[k]\} = X(z) \cdot Y(z)\end{aligned}$$

Da dafür sowohl $X(z)$ als auch $Y(z)$ konvergieren müssen, ist der Konvergenzbereich der Schnittbereich $\max(a, c) < |z| < \min(b, d)$.

IV) Die Dämpfungssatz folgt wegen

100

$$\mathcal{Z}\{a^k \cdot x[k]\} \stackrel{Def.}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{a^k}_{=(\frac{1}{\alpha})^{-k}} \cdot x[k] \cdot z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \left(\frac{z}{\alpha}\right)^{-k} = X\left(\frac{z}{\alpha}\right)$$

Letzteres konvergiert für $a < |z/\alpha| < b$ bzw. äquivalent $|\alpha|a < |z| < |\alpha|b$.

V) Der Satz über lineare Gewichtung folgt wegen

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{k \cdot x[k]\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} k x[k] z^{-k} = z \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] k z^{-k-1} = z \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \left(-\frac{d}{dz} z^{-k}\right) \\ &= -z \frac{d}{dz} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k} = -z \frac{d}{dz} X(z)\end{aligned}$$

mit unverändertem Konvergenzbereich.

VI) Die Spiegelungssatz folgt mit $k' = -k$ wegen

$$\mathcal{Z}\{x[-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-k]z^{-k} \stackrel{k'=-k}{=} \sum_{k'=-\infty}^{\infty} x[k']z^{k'} = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} x[k'] \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^{-k'} = X\left(\frac{1}{z}\right)$$

101

mit Konvergenzbereich $a < |1/z| < b$ bzw. äquivalent $\frac{1}{b} < |z| < \frac{1}{a}$.

VII) Der Satz über konjugiert komplexe Signale folgt aus den Rechengesetzen für komplexe Zahlen $((z^k)^* = (z^*)^k$ (1), $(a + b)^* = a^* + b^*$ (2) und $a = (a^*)^*$ (3); vgl. Skript Mathe-I, S. 69, Satz 2.23, für (1) in Verb. mit S. 148, Satz 7.2) wegen

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x^*[k]\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*[k]z^{-k} \stackrel{(3)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*[k] \left((z^{-k})^*\right)^* \stackrel{(1)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*[k] \left((z^*)^{-k}\right)^* \\ &\stackrel{(2)}{=} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] (z^*)^{-k} \right)^* = X^*(z^*) \end{aligned}$$

mit unverändertem Konvergenzbereich. □

Bemerkungen: Für die einseitige z-Transformation $\mathcal{Z}^+\{x[k]\} := \sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k}$ gelten außerdem folgende spezielle Eigenschaften:

a) Anfangswertsatz: Falls folgender Grenzwert überhaupt existiert gilt

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \quad (3.7)$$

102

denn $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k} = \lim_{z \rightarrow \infty} x(0) + \frac{x[1]}{z} + \frac{x[2]}{z^2} + \dots = x[0]$.

b) Endwertsatz: Falls $X(z)$ nur Pole im Inneren des Einheitskreises und höchstens einfache Pole bei $z = 1$ hat gilt (Beweis siehe Übungen)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x[k] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \cdot X(z) \quad (3.8)$$

103

c) Verschiebungssatz: Vorsicht! Bei einseitiger Transformation kommen zu (II) noch k_0 Korrekturterme hinzu. Bei Linksverschiebungen um $k_0 > 0$ gilt etwa

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^+\{x[k + k_0]\} &= \sum_{k=0}^{\infty} x[k + k_0]z^{-k} = z^{k_0} \sum_{k=0}^{\infty} x[k + k_0]z^{-(k+k_0)} = z^{k_0} \sum_{k=k_0}^{\infty} x[k]z^{-k} \\ &= z^{k_0} \mathcal{Z}^+\{x[k]\} - z^{k_0} \sum_{k=0}^{k_0-1} x[k]z^{-k} . \end{aligned} \quad (3.9)$$

und bei Rechtsverschiebung um $k_0 > 0$ gilt entsprechend

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^+\{x[k - k_0]\} &= \sum_{k=0}^{\infty} x[k - k_0] z^{-k} = z^{-k_0} \sum_{k=0}^{\infty} x[k - k_0] z^{-(k-k_0)} = z^{-k_0} \sum_{k=-k_0}^{\infty} x[k] z^{-k} \\ &= z^{-k_0} \mathcal{Z}^+\{x[k]\} + z^{-k_0} \sum_{k=-k_0}^{-1} x[k] z^{-k}.\end{aligned}\quad (3.10)$$

Beispiele: Mit Satz 3.15 kann man einige weitere wichtige Korrespondenzen herleiten:

- a) Für die verschobene Exponentialfunktion gilt wegen dem Verschiebungssatz (II) und Satz 3.14.IV

104

$$\mathcal{Z}\{\alpha^{k-1} \cdot \epsilon[k-1]\} = z^{-1} \cdot \mathcal{Z}\{\alpha^k \cdot \epsilon[k]\} = z^{-1} \cdot \frac{z}{z-\alpha} = \frac{1}{z-\alpha}$$

- b) Mit der Linearität (I) gilt allgemeiner für $A \in \mathbb{C}$ und $k_0 \in \mathbb{Z}$

105

$$\mathcal{Z}\{A \cdot \alpha^{k-k_0} \cdot \epsilon[k-k_0]\} = A \cdot z^{-k_0} \cdot \mathcal{Z}\{\alpha^k \epsilon[k]\} = A \cdot z^{-k_0} \cdot \frac{z}{z-\alpha} = \frac{A \cdot z^{-(k_0-1)}}{z-\alpha}$$

- c) Mit der linearen Gewichtung (V) folgt aus Satz 3.14.IV mit der Quotientenregel der Ableitung (siehe Skript Mathe-I, S. 114, Satz 5.3.III)

106

$$\mathcal{Z}\{k \cdot \alpha^k \cdot \epsilon[k]\} = -z \cdot \frac{d}{dz} \mathcal{Z}\{\alpha^k \epsilon[k]\} = -z \cdot \left(\frac{z}{z-\alpha} \right)' = -z \cdot \left(\frac{1 \cdot (z-\alpha) - z \cdot 1}{(z-\alpha)^2} \right) = \frac{\alpha \cdot z}{(z-\alpha)^2}$$

Aus den Beispielen ergibt sich folgender Satz:

Satz 3.16: Weitere Korrespondenzen der z -Transformation

Für Konstanten $A, \alpha \in \mathbb{C}$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}\text{I)} \quad & \frac{A}{z-\alpha} \bullet \circ A \cdot \alpha^{k-1} \cdot \epsilon[k-1] \\ \text{II)} \quad & \frac{A}{(z-\alpha)^2} \bullet \circ \frac{A}{\alpha} \cdot (k-1) \cdot \alpha^{k-1} \cdot \epsilon[k-1] \\ \text{III)} \quad & \frac{A}{(z-\alpha)^m} \bullet \circ A \binom{k-1}{m-1} \alpha^{k-m} \epsilon[k-1]\end{aligned}$$

Beweis: (I) folgt aus Beispiel (a) bzw. (b). (II) folgt mit Verschiebungssatz und Linearität sofort aus Beispiel (c). (III) erhält man durch mit vollständiger Induktion aus (I), (II) und durch iteratives Anwenden des Satzes über lineare Gewichtung. \square

Die Nützlichkeit der z -Transformation zeigt sich im folgenden Abschnitt, wenn wir LTI-System im z -Bereich betrachten.

Weitere Übungsaufgaben: Blatt ???: A???

3.7 Die Systemfunktion $H(z)$

Bisher konnten wir das Ein-/Ausgabeverhalten von LTI-Systemen \mathcal{H} durch ihre Impulsantwort $h[k] := \mathcal{H}\{\delta[k]\}$ beschreiben: Das Ausgangssignal $y[k] = h[k] * x[k]$ ergibt sich als Faltung des Eingangssignals $x[k]$ mit der Impulsantwort $h[k]$. Leider ist die Faltung $*$ eine recht aufwändige und nicht immer einfach durchzuführende Operation. Wir werden im folgenden sehen, dass sich das Ein-/Ausgabeverhalten eines LTI-Systems sehr viel einfacher im z -Bereich beschreiben lässt, wenn wir statt der Zeitsignale $x[k]$, $y[k]$ und $h[k]$ die entsprechenden z -Transformierten verwenden.

Satz 3.17: Systemfunktion der Übertragungsfunktion von LTI-Systemen

Gegeben sei ein LTI-System \mathcal{H} mit Impulsantwort $h[k]$, ein Eingangssignal $x[k]$ und ein Ausgangssignal $y[k] = h[k] * x[k]$ (siehe Satz 3.9). Dann seien $H(z) \bullet \circ h[k]$, $X(z) \bullet \circ x[k]$ und $Y(z) \bullet \circ y[k]$ die zugehörigen z -Transformierten, sodass aus $y[k] = h[k] * x[k]$ mit dem Faltungssatz (Satz 3.15.III) folgt, dass

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

ist (siehe Skizze). Hierbei wird die z -Transformierte der Impulsantwort

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Systemfunktion oder Übertragungsfunktion des Systems \mathcal{H} genannt.

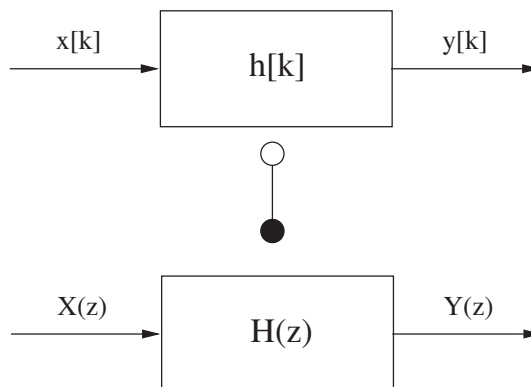
Zeitbereich

$$y[k] = h[k] * x[k]$$

(Faltungstheorem)

$$Y[z] = H[z] \cdot X[z]$$

z -Bereich



Beweis: Die Behauptungen folgen direkt aus den Sätzen 3.9 und 3.15.III. □

Beispiel 1: Berechnen Sie die Systemfunktion des Systems Sparbuch auf zwei Weisen (siehe Seite 40) : (a) als z -Transformierte der Impulsantwort $h[k] = (1 + p)^k \epsilon[k]$. (b) direkt aus der Differenzengleichung (3.1).

Lösung: (a) Nach Satz 3.14 (mit $a = 1 + p$) ist die z -Transformierte von $h[k]$

109

$$h[k] = (1 + p)^k \cdot \epsilon[k]$$

$$H(z) = \frac{z}{z - (1 + p)}$$

(b) z -Transformation der Differenzengleichung (3.1) mit Hilfe von Satz 3.15.I,II ergibt

110

$$y[k + 1] = y[k] \cdot (1 + p) + x[k + 1]$$

$$\circ \longrightarrow \bullet$$

$$Y(z) = Y(z) \cdot (1 + p) + zX(z) \Leftrightarrow Y(z)(z - (1 + p)) = zX(z)$$

und damit ist die Systemfunktion nach Satz 3.17 wieder

111

$$H(z) := \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z}{z - (1 + p)} \quad (3.11)$$

Beispiel 2: Berechnen Sie mit Hilfe der Systemfunktion $H(z)$ des Sparbuch-Systems die Entwicklung des Guthabens $y[k]$ nach k Jahren, falls jedes Jahr ein fester Betrag x_0 eingezahlt wird. (a) Berechnen Sie zunächst die z -Transformierte $Y(z) \circ \bullet y[k]$ des Ausgangssignals. (b) Versuchen Sie aus $Y(z)$ auf das zugehörige Zeitsignal $y[k]$ zu schließen.

Lösung: (a) Das Eingangssignal und dessen z -Transformierte sind mit Satz 3.14 und der Linearität Satz 3.15.I

112

$$x[k] = x_0 \cdot \epsilon[k]$$

$$\circ \longrightarrow \bullet$$

$$X(z) = x_0 \cdot \frac{z}{z - 1}$$

Damit ergibt sich mit Satz 3.17 ganz einfach die z -Transformierte des Ausgangssignals

113

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \frac{z}{z - (a + p)} \cdot x_0 \cdot \frac{z}{z - q} = x_0 \cdot z^2 \cdot \frac{1}{(z - (a + p)) \cdot (z - 1)}$$

(b) Wie können wir die “Rücktransformation” in den Zeit-Bereich bewerkstelligen? Unser Ziel ist es, die gebrochenrationale Funktion auf der rechten Seite in einfachere Terme zu zerlegen, zu denen wir die Korrespondenzen schon kennen. Z.B. durch “Probieren” erhält man

$$\frac{1}{(z - (a + p)) \cdot (z - 1)} = \frac{p^{-1}}{z - (a + p)} - \frac{p^{-1}}{z - 1} \quad (3.12)$$

114

Für die beiden Summanden auf der rechten Seite kennen wir die Korrespondenzen aus Satz 3.16 (Seite 60):

$$\frac{p^{-1}}{z - (a + p)} \bullet \circ p^{-1}(a + p)^{K-1} \epsilon[K - 1] \text{ und } \frac{p^{-1}}{z - 1} \bullet \circ p^{-1} 1^{K-1} \epsilon[K - 1] = p^{-1} \epsilon[K - 1]$$

115

und damit gelingt mit der Linearität und dem Verschiebungssatz (Satz 3.15I,II auf Seite 57; k um 2 erhöhen):

$$\begin{aligned} Y(z) &= x_0 \cdot z^2 \cdot \left(\frac{p^{-1}}{z - (1 + p)} - \frac{p^{-1}}{z - 1} \right) \\ &\quad \bullet \circ \\ y[k] &= x_0 \cdot (p^{-1}(1 + p)^{k+1} \cdot \epsilon[k + 1]) \cdot p^{-1} - \epsilon[k + 1] \\ &= \frac{x_0}{p} \cdot ((1 + p)^{k+1} - 1) \cdot \epsilon[k + 1] \end{aligned}$$

116

Bemerkungen:

- Mit Hilfe der Systemfunktion $H(z)$ kann man also aus $X(z)$ sehr einfach (durch Multiplikation von $H(z)$) auf $Y(z)$ schließen.
- Um auch noch das zugehörige Zeitsignal ausrechnen zu können bleibt der Knackpunkt wie man im allgemeinen $Y(z)$ zurück in den Zeitbereich transformieren kann. Dazu gehört die Frage welche Form $X(z)$ und insbesondere die Systemfunktion $H(z)$ haben.
- In (3.11) war die Systemfunktion $H(z)$ (und deshalb auch $Y(z)$) eine gebrochenrationale Funktion. Wir werden gleich sehen, dass dies kein Zufall war, sondern dass $H(z)$ für allgemeine Differenzengleichungen immer eine gebrochenrationale Funktion ist.
- Im folgenden Kapitel lernen wir dann mit der Partialbruchzerlegung eine Methode kennen mit der wir ähnlich wie bei (3.12) beliebige gebrochenrationale Funktionen in einfache Summanden (nämlich die Partialbrüche) zerlegen können, zu denen wir die Korrespondenzen der z -Transformation kennen (z.B. aus Satz 3.16).

Wir betrachten nun ein allgemeines LTI-System (ähnlich dem IIR-System von Seite 52) und transformieren deren Differenzengleichung (3.4) in den z -Bereich (so wie wir es für das Sparbuch im vorigen Beispiel gemacht haben):

117

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \alpha_i y[k-i] &= \sum_{i=N-M}^N \beta_i x[k-i] \quad (a_0 \neq 0, \beta_{N-M} \neq 0) \\ &\quad \downarrow \\ \sum_{i=0}^N \alpha_i \cdot z^{-i} \cdot Y(z) &= \sum_{i=N-M}^N \beta_i \cdot z^{-i} \cdot X(z) \\ \Leftrightarrow Y(z) \cdot \sum_{i=0}^N \alpha_i \cdot z^{-i} &= X(z) \cdot \sum_{i=N-M}^N \beta_i \cdot z^{-i} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Systemfunktion $H(z)$ als

118

$$\begin{aligned} H(z) := \frac{Y(z)}{X(z)} &= \frac{\sum_{i=N-M}^N \beta_i \cdot z^{-i}}{\sum_{i=0}^N \alpha_i \cdot z^{-i}} \\ &= \frac{\sum_{i=N-M}^N \beta_i \cdot z^{N-i}}{\sum_{i=0}^N \alpha_i \cdot z^{N-i}} \\ &= \frac{\beta_{N-M} \cdot z^M + \beta_{N-M+1} \cdot z^{M-1} + \dots + \beta_N}{\alpha_0 \cdot z^N + \alpha_1 \cdot z^{N-1} + \dots + \alpha_N} \end{aligned}$$

Mit den Substitutionen $a_i := \alpha_{N-i}$ und $b_i := \beta_{N-i}$ ergibt sich also der folgende Satz:

Satz 3.18: Systemfunktion eines allgemeinen LTI-Systems

Die Systemfunktion $H(z)$ eines allgemeinen LTI-Systems mit der Differenzengleichung

$$\sum_{i=0}^M \alpha_i y[k-i] = \sum_{i=N-M}^N \beta_i x[k-i] \quad (\text{mit } \alpha_0 \neq 0 \text{ und } \beta_{N-M} \neq 0)$$

ist eine gebrochenrationale Funktion mit Koeffizienten $a_i := \alpha_{N-i}$, $b_i := \beta_{N-i}$,

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{b_M z^M + b_{M-1} z^{M-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \dots + a_1 z + a_0} \\ &= \frac{b_M}{a_N} \cdot \frac{(z - \kappa_1) \cdot (z - \kappa_2) \cdot \dots \cdot (z - \kappa_M)}{(z - \lambda_1) \cdot (z - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (z - \lambda_N)}, \end{aligned}$$

sodass Zähler bzw. Nenner Polynome vom Grad M bzw. N mit $b_M \neq 0$ bzw. $a_N \neq 0$ sind, und κ_i bzw. λ_i die Nullstellen bzw. Polstellen von $H(z)$ sind.

Bemerkungen:

- I) Aus der ersten Form $H(z) = (\sum b_i z^i) / (\sum a_i z^i)$ kann man mit $\alpha_i = a_{N-i}$ bzw. $\beta_i = b_{N-i}$ aus der (nach $y[k]$ aufgelösten) Differenzengleichung

$$y(k) = \frac{1}{\alpha_0} \left(\sum_{i=N-M}^N \beta_i x[k-i] - \sum_{i=1}^N \alpha_i y[k-i] \right)$$

119

sofort ablesen wie das System implementiert werden: Für $M \leq N$ entspricht $H(z)$ genau den Blockschaltbildern für kausale IIR-Systeme auf Seite 51. Für $M > N$ kann $H(z)$ ähnlich realisiert werden, ist aber nicht mehr kausal, da $y[k]$ von den zukünftigen Eingaben $x[k-N+M], \dots, x[k+2], x[k+1]$ abhängt.

- II) Die zweite Form von $H(z)$ ergibt sich aus dem Fundamentalsatz der Algebra (vgl. Skript Mathe-I, S. 100, Satz 4.10), welcher besagt, dass in \mathbb{C} jedes Polynom in ein Produkt von Linearfaktoren $(z - \kappa_i)$ bzw. $(z - \lambda_i)$ zerfällt. Im allgemeinen sind hierbei die Nullstellen κ_i bzw. die Polstellen λ_i komplex.
- III) Ein allgemeines diskretes LTI System ist also auf folgende Weisen vollständig bestimmt:
- Durch die Koeffizientenvektoren (a_0, a_1, \dots, a_M) bzw. (b_0, b_1, \dots, b_N) des Zähler- bzw. Nennerpolynoms von $H(z)$.
 - Durch den Nullstellenvektor $(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_M)$, den Polstellenvektor $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ und zusätzlich den Vorfaktor b_M/a_N .
 - Durch die Koeffizientenvektoren $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N)$ bzw. $(\beta_{N-M}, \beta_{N-M+1}, \dots, \beta_N)$ der Differenzengleichung.
- IV) Falls also die z -Transformierte $X(z) \bullet \circ x[k]$ des Eingangssignal ebenfalls gebrochenrational ist, so ist auch die z -Transformierte des Ausgangssignals $Y(z) \bullet \circ y[k]$ eine gebrochenrationale Funktion in z (vgl. Satz 2.12 von Seite 32). Wir lernen im folgenden Kapitel mit der Partialbruchzerlegung eine Methode kennen wie man solche gebrochenrationalen Funktionen allgemein in den Zeitbereich zurücktransformiert.

Beispiele:

- a) Gegeben sei ein LTI-System mit Impulsantwort $h[k] = 3 \cdot 5^{-k} \epsilon[k] + 2 \cdot 2^{-k} \epsilon[k]$. Bestimmen Sie die zugehörige Systemfunktion $H(z)$, die Differenzengleichung und geben Sie eine mögliche Implementierung mit Hilfe eines Blockdiagramms an.
Lösung: Nach Satz 3.17 (Seite 61) ergibt sich die Systemfunktion $H(z) \bullet \circ h[k]$ mit Hilfe von Satz 3.14 (Seite 56) zu

120

$$\begin{aligned}
 h[k] &= 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^k \cdot \epsilon[k] + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \epsilon[k] \\
 &\quad \circ \bullet \\
 H(z) &= 3 \cdot \frac{z}{z - \frac{1}{5}} + 2 \cdot \frac{z}{z - \frac{1}{2}} = \frac{15z}{5z - 1} + \frac{4z}{2z - 1} \\
 &= \frac{15z(2z - 1) + 4z(5z - 1)}{(5z - 1)(2z - 1)} = \frac{50z^2 - 19z}{10z^2 - 7z + 1}
 \end{aligned}$$

Daraus lassen sich nach Satz 3.18 die Koeffizienten der Differenzengleichung ablesen ($M = N = 2$ und $\alpha_i = a_{N-i}$, $\beta_i = b_{N-i}$)

121

$$\alpha_0 = a_2 = 10, \alpha_1 = -7, \alpha_2 = 1 \text{ und } \beta_0 = 50, \beta_1 = -19, \beta_2 = 0$$

so dass sich folgende Differenzengleichung ergibt:

122

$$\begin{aligned}
 10y[k] - 7y[k-1] + y[k-2] &= 50x[k] - 19x[k-1] \text{ bzw. äquivalent} \\
 y[k] &= \frac{1}{10} \cdot (50x[k] - 19x[k-1] + 7y[k-1] - y[k-2])
 \end{aligned}$$

Ein entsprechendes Blockschaltbild ergibt sich nach dem Muster von Seite 52 (siehe Skizze unten, links)

- b) Bestimmen Sie nun für ein LTI-System mit nicht-kausaler Impulsantwort $h[k] = 3 \cdot 5^{-(k+2)}\epsilon[k+2] + 2 \cdot 2^{-k}\epsilon[k]$ wieder Systemfunktion $H(z)$, Differenzengleichung und Blockdiagramm.

Lösung: Die Impulsantwort ist ähnlich wie im vorigen Beispiel, aber der erste Summand ist nicht kausal (da k durch $k+2$ ersetzt wurde). Mit dem Verschiebungssatz 3.15.II (Seite 57) ist $\mathcal{H}\{5^{-(k+2)}\epsilon[k+2]\} \circ \bullet z^2 \mathcal{H}\{5^{-k}\epsilon[k]\}$, und deshalb ergibt sich nun nach Satz 3.17 (Seite 61) mit Satz 3.14 (Seite 56)

123

$$\begin{aligned}
 h[k] &= 3 \cdot 5^{-(k+2)}\epsilon[k+2] + 2 \cdot 2^{-k}\epsilon[k] \\
 &\quad \circ \bullet \\
 H(z) &= 3 \cdot z^2 \frac{z}{z - \frac{1}{5}} + 2 \cdot \frac{z}{z - \frac{1}{2}} \\
 &= \frac{15z^3}{5z - 1} + \frac{4z}{2z - 1} = \frac{30z^4 - 15z^3 + 20z^2 - 4z}{10z^2 - 7z + 1} \\
 &\quad (\Rightarrow M = 4, N = 2)
 \end{aligned}$$

Daraus lassen sich nach Satz 3.18 die Koeffizienten der Differenzengleichung ablesen ($M = 4, N = 2$ und $\alpha_i = a_{N-i}, \beta_i = b_{N-i}$),

$$\alpha_0 = a_{2-0} = 10, \alpha_1 = -7, \alpha_2 = 1 \text{ und} \\ \beta_{-2} = b_4 = 30, \beta_{-1} = 15, \beta_0 = 20, \beta_1 = -4$$

124

so dass sich folgende Differenzengleichung ergibt:

$$10y[k] - 7y[k-1] + y[k-2] = 30x[k+2] - 15x[k+1] + 20x[k] - 4x[k-1] \\ y[k] = \frac{1}{10} (30x[k+2] - 15x[k+1] + 20x[k] - 4x[k-1] + 7y[k-1] - y[k-2])$$

125

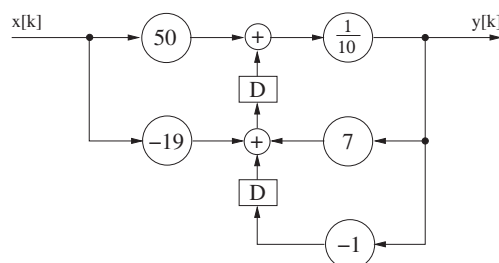
Dieses System ist nun offensichtlich nicht-kausal, denn $y[k]$ hängt von den zukünftigen Eingaben $x[k+1]$ und $x[k+2]$ ab. Man kann aber nicht-kausale Systeme trotzdem realisieren: Ersetzen wir in der Differenzengleichung k durch $k-2$ erhalten wir äquivalent

$$y[k-2] = \frac{1}{10} (30x[k+2] - 15x[k+1] + 20x[k-2] - 4x[k-3] + 7y[k-3] - y[k-4])$$

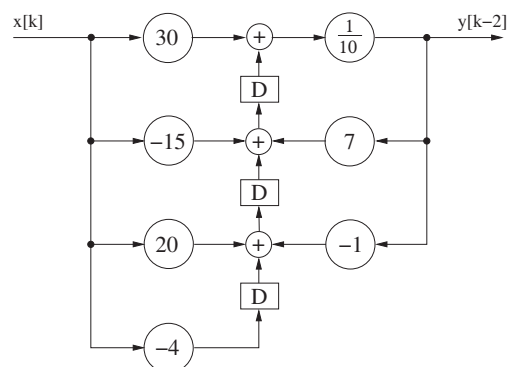
126

d.h. wir können zur Zeit k immer erst $y[k-2]$ berechnen, sodass die Berechnung des Ausgangssignals $y[k]$ gegenüber dem Eingangssignal $x[k]$ um zwei Schritte zeitverzögert ist. Das Blockschaltbild ist wie folgt (Skizze, rechts):

Beispiel (a)



Beispiel (b) – nicht kausal



Wir können nun aus der Impulsantwort $h[k]$ eines Systems die Systemfunktion $H(z)$ berechnen und daraus sogar eine Implementierung des Systems ablesen. Außerdem können wir durch z -Transformation des Eingangssignals $x[k] \circ \bullet X(z)$ leicht die z -Transformierte des Ausgangssignals $Y(z) = H(z) \cdot X(z)$ berechnen. Was uns noch fehlt ist wie man aus $Y(z)$ allgemein wieder das zugehörige Zeitsignal $y[k] \bullet \circ Y(z)$ berechnet. Das nächste Kapitel stellt für den wichtigsten Fall gebrochenrationaler $Y(z)$ (vgl. letzte Bemerkung auf Seite 65) eine Methode zur Rücktransformation vor.

Weitere Übungsaufgaben: Blatt ???: A???

3.8 Inverse z -Transformation und Partialbruchzerlegung

Definition 3.19: Inverse z -Transformation

Die inverse z -Transformation generiert zu einer z -Transformierten $X(z)$ das zugehörige Zeitsignal $x[k]$. Man schreibt dafür $X(z) \bullet \longrightarrow x[k]$ oder

127

$$x[k] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}\right\}$$

Wie zuvor die z -Transformation ist auch die inverse z -Transformation nur eindeutig mit Konvergenzbereich!

Bemerkung: Es gibt drei gängige Methoden um die inverse z -Transformation von $X(z)$ zu berechnen:

- I) Potenzreihenentwicklung der z -Transformierten $X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}$ und Ablesen der Koeffizienten $x[k]$.
- II) Partialbruchzerlegung von $X(z)$ in eine Summe von einfachen Termen zu denen die Korrespondenzen bekannt sind.
- III) Mittels Residuensatz aus der höheren Analysis.

Beispiel Potenzreihenentwicklung: Nutzen Sie die (aus der Analysis bekannte) Potenzreihenentwicklung für die Logarithmusfunktion

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{i+1} \frac{x^i}{i} + \dots$$

um zur z -Transformierten $Y(z) := \ln(1+z^{-1})$ das zugehörige Zeitsignal $y[k] \circ \bullet \longrightarrow Y(z)$ zu finden.

Lösung: Aus

128

$$Y(z) = 1 \cdot z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2} + \frac{1}{3}z^{-3} - \frac{1}{4}z^{-4} + \dots + \frac{(-1)^{k+1}}{k}z^{-k} + \dots$$

ergibt sich mit der Definition der z -Transformierten $Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k]z^{-k}$ (siehe Def. 3.13 von Seite 54) durch Ablesen der Koeffizienten das kausale Signal

129

$$y[k] = \begin{cases} 0 & , k \leq 0 \\ (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k} & , k > 0 \end{cases}$$

Partialbruchzerlegung: Wegen Satz 3.18 sind im Normalfall die z -Transformierten $Y(z)$ aber meist gebrochenrationale Funktionen vom Typ

$$Y(z) = c \cdot \frac{(z - \kappa_1)^{m_1} \cdot (z - \kappa_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (z - \kappa_L)^{m_L}}{(z - \lambda_1)^{n_1} \cdot (z - \lambda_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (z - \lambda_K)^{n_K}}$$

wobei die m_i bzw. n_i die Vielfachheit der Nullstellen κ_i bzw. der Polstellen λ_i sind, sodass wir den Zählergrad $M := \sum_{i=1}^L m_i$ und Nennergrad $N := \sum_{i=1}^K n_i$ erhalten. Wir können dabei annehmen, dass die L Nullstellen und K Polstellen verschieden sind (d.h. Zähler und Nenner gekürzt sind). Solche Funktionen kann man mit der folgenden Partialbruchzerlegung in einfache Terme zerlegen:

Partialbruchzerlegung, Fall 1: Wir betrachten zunächst den Spezialfall, dass alle Polstellen die Vielfachheit $n_i = 1$ haben und das Zählerpolynom einen kleineren Grad als das Nennerpolynom hat, sodass sich $Y(z)$ als

$$Y(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_M z^M}{(z - \lambda_1) \cdot (z - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (z - \lambda_N)} \quad (3.13)$$

schreiben lässt, wobei $M < N$ und a_0, a_1, \dots, a_M die Koeffizienten des Zählerpolynoms sind, welche man durch Ausmultiplizieren der Linearfaktoren des Zählers (inklusive der führenden Konstanten) c erhält. Dann lässt sich $Y(z)$ mittels geeigneter aber zunächst unbekannten Konstanten $A_1, A_2, \dots, A_N \in \mathbb{C}$ durch

$$Y(z) \stackrel{!}{=} \frac{A_1}{z - \lambda_1} + \frac{A_2}{z - \lambda_2} + \dots + \frac{A_n}{z - \lambda_n} \quad (3.14) \quad \boxed{130}$$

in eine Summe von sogenannte Partialbrüche $A_i/(z - \lambda_i)$ zerlegen: Denn bringen wir die rechte Seite von (3.14) wieder auf den Hauptnenner $HN = (z - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (z - \lambda_N)$ wie bei (3.13) so erhalten wir

$$Y(z) \stackrel{!}{=} \frac{A_1(\lambda_2) \dots (z - \lambda_N) + \dots + A_N(z - \lambda_1) \dots (z - \lambda_{N-1})}{HN} \quad \boxed{131}$$

Durch Ausmultiplizieren ergibt der Zähler von $Y(z)$ also wieder ein Polynom vom Grad $N - 1$ mit Koeffizienten $c_i(A_1, \dots, A_N)$ welche (lineare) Funktionen der Unbekannten A_1, \dots, A_N sind, welches identisch mit dem Zähler von (3.13) sein muss,

$$\begin{aligned} & c_0(A_1, \dots, A_N) + c_1(A_1, \dots, A_N) \cdot z + \dots + c_{N-1}(A_1, \dots, A_N) \cdot z^{N-1} \\ & \stackrel{!}{=} a_0 + a_1 z + \dots + a_M z^M. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich zwischen linker und rechter Seite ergibt das lineare Gleichungssystem (LGS)

$$\begin{aligned} c_0(A_1, \dots, A_N) &= a_0 \\ c_1(A_1, \dots, A_N) &= a_1 \\ &\vdots \\ c_M(A_1, \dots, A_N) &= a_M \\ c_{M+1}(A_1, \dots, A_N) &= 0 \\ &\vdots \\ c_{N-1}(A_1, \dots, A_N) &= 0 \end{aligned}$$

Da es also N Gleichungen und N Unbekannte gibt, erhält man eine eindeutige Lösung für die A_1, \dots, A_N und man kann mit Satz 3.16.I (und der Linearität Satz 3.15.I) das zugehörige Zeitsignal $y[k]$ finden:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{A_1}{z - \lambda_1} + \frac{A_2}{z - \lambda_2} + \dots + \frac{A_N}{z - \lambda_N} \\ &\quad \downarrow \\ y[k] &= A_1 \cdot \lambda_1^{k-1} \cdot \epsilon[k-1] + A_2 \cdot \lambda_2^{k-1} \cdot \epsilon[k-1] + \dots + A_N \cdot \lambda_N^{k-1} \cdot \epsilon[k-1] \\ &= (A_1 \lambda_1^{k-1} + \dots + A_N \lambda_N^{k-1}) \epsilon[k-1] . \end{aligned}$$

Beispiel: Berechnen Sie mit Hilfe der Partialbruchzerlegung das zu $Y(z) = \frac{1}{(z-(1+p))(z-1)}$ gehörige Zeitsignal $y[k]$ (vgl. das Sparbuch-Beispiel (3.12) auf Seite 63).
Lösung: Wir machen also den Ansatz

132

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{(z - (1+P)) \cdot (z - 1)} = \frac{A(z - 1) + B(z - (1 + P))}{HN} \\ &= \frac{(A + B) \cdot z - A - B(a + P)}{HN} \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich mit dem ursprünglichen Zähler 1 ergibt das LGS

133

$$\begin{aligned} -A - (a + p)B &= 1 \quad (1) \\ A + B &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Addition (1)+(2) ergibt

$$(-1 - p + 1) \cdot B = 1 \text{ bzw. } B = -\frac{1}{p}$$

134

und Einsetzen in (2)

$$A = -B = \frac{1}{p}$$

135

und damit mit Satz 3.16.I von Seite 60

$$Y(z) = \frac{p^{-1}}{z - (a + p)} - \frac{p^{-1}}{z - 1}$$

$$\downarrow$$

$$y[k] = p^{-1} \cdot ((1 + p)^{k-1} - 1) \cdot \epsilon[k - 1]$$

136

Partialbruchzerlegung, Fall 2: Kommen Polstellen mit Vielfachheit $n_i > 1$ vor, so muss man im Ansatz (3.14) den Partialbruch $A_i/(z - \lambda_i)$ jeweils durch eine Summe von n_i Partialbrüchen

$$\frac{A_{i,1}}{z - \lambda_i} + \frac{A_{i,2}}{(z - \lambda_i)^2} + \dots + \frac{A_{i,n_i}}{(z - \lambda_i)^{n_i}}$$

ersetzen (denn nur so ergibt sich beim Zusammenfassen zu einem Bruch im Zähler ein allgemeines Polynom vom Grad $N-1$). Insgesamt ergibt das also bei Q unterschiedlichen Polstellen mit $N = \sum_{i=1}^Q n_i$ den Ansatz

$$Y(z) = \sum_{i=1}^Q \sum_{v=1}^{n_i} \frac{A_{i,v}}{(z - \lambda_i)^v}$$

Offensichtlich hat man also wieder genau N Unbekannte $A_{i,v}$. Bringen wir $Y(z)$ wieder wie zuvor bei Fall 1 auf den Hauptnenner ist der Zähler wieder ein Polynom $c_0 + c_1 z + \dots + c_{N-1} z^{N-1}$ vom Grad $N-1$, wobei die Koeffizienten wie zuvor wieder lineare Funktionen der $A_{i,v}$ sind. Durch Koeffizientenvergleich mit dem ursprünglichen Zählerpolynom erhält man also wieder ein entsprechendes Gleichungssystem wie im Fall 1 mit N Gleichungen, sodass man alle Unbekannten $A_{i,v}$ eindeutig bestimmen kann. Mit Hilfe von Satz 3.16.III von Seite 60 lassen sich damit alle Partialbrüche rücktransformieren und man erhält das Zeitsignal $y[k]$.

Beispiel: Führen Sie eine Partialbruchzerlegung von $Y(z) = \frac{2z^2-9z+3}{(z-5)(z-3)^2}$ durch.

Lösung: Wir wählen den Ansatz

137

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{A}{z-5} + \frac{B}{z-3} + \frac{C}{(z-3)^2} = \frac{A(z-3)^2 + B(z-5)(z-3) + C(z-5)}{HN} \\ &= \frac{A(z^2 - 6z + 9) + B(z^2 - 8z + 15) + C(z-5)}{HN} \\ &= \frac{z^2(A+B) + z(-6A-8B+C) + 9A+15B-5C}{HN} \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich mit dem ursprünglichen Zähler von $Y(z)$ ergibt das LGS

138

$$\begin{array}{rclcl} A & + & B & & = & 2 & (1) \\ -6A & - & 8B & + & 1C & = & -9 & (2) \\ 9A & + & 15B & - & 5C & = & 3 & (3) \\ 5 \cdot (2) + (3) : & -21A & - & 25B & & = & -42 & (4) \\ 21 \cdot (1) + (4) : & & -4B & & = & 0 & (5) \end{array}$$

Aus (5) erhält man also $B = 0$ und damit aus (4) $A = -42/(-21) = 2$ und damit aus (2) $C = -9 + 6 \cdot 2 = 3$. Also gilt mit Satz 3.16.I,II von Seite 60

139

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{2}{z-5} + \frac{3}{(z-3)^2} \\ &\quad \downarrow \\ y[k] &= 2 \cdot 5^{k-1} \epsilon[k-1] + (k-1)3^{k-1} \epsilon[k-1] \end{aligned} \quad (3.15)$$

Partialbruchzerlegung, Allgemeiner Fall 3: Ist bei $Y(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ der Zählergrad $M := \deg(p)$ größer oder gleich dem Nennergrad $N := \deg(q)$, d.h. $M \geq N$, so macht man zunächst eine Polynomdivision (siehe Skript Mathe-I, S. 97, Def. 4.7), sodass

140

$$Y(z) = s(z) + \frac{r(z)}{q(z)}$$

wobei das Polynom $s(z)$ den Grad $M-N$ hat und das Restpolynom $r(z)$ einen kleineren Grad als $q(z)$ (siehe Skript Mathe-I, S. 98, Satz 4.8). Dann kann man mit $r(z)/q(z)$ wie in Fall 2 verfahren und das Polynom $s(z) = s_{M-N}z^{M-N} + \dots + s_0$ ergibt im Zeitbereich eine Summe von verschobenen δ -Impulsen (siehe Satz 3.14.II von Seite 56):

141

$$\begin{aligned} s(z) &= s_0 + s_1 z + \dots + s_{M-N} z^{M-N} \\ &\quad \downarrow \\ s[k] &= s_0 \delta[k] + s_1 \delta[k+1] + \dots + s_{M-N} \delta[k+M-N] \end{aligned}$$

Beispiel: Berechnen Sie das Zeitsignal zu $Y(z) = \frac{(3z^2-2z+1)(z-5)(z-3)^2+2z^2-9z+3}{(z-5)(z-3)^2}$.

Lösung: Offensichtlich ergibt Polynomdivision (geht hier ausnahmsweise auch ohne “echte” Polynomdivision...)

$$Y(z) = 3z^2 - 2z + 1 \frac{2z^2 - 9z + 3}{(z-5)(z-3)^2}$$

142

Die übriggebliebene gebrochenrationale Funktion (letzter Term) ist offensichtlich wie im vorigen Beispiel (3.15) von Seite 72. Damit ergibt sich mit Satz 3.14 von Seite 56

$$Y(z) = 3z^2 - 2z + 1 \frac{2z^2 - 9z + 3}{(z-5)(z-3)^2}$$

143



$$y[k] = 3\delta[k+2] - 2\delta[k+1] + \delta[k] + 2 \cdot 5^{k-1}\epsilon[k-1] + (k-1)3^{k-1}\epsilon[k-1]$$

Wir fassen unsere Ergebnisse im folgenden Satz zusammen:

Satz 3.20: Partialbruchzerlegung

Sei $Y(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ eine gebrochenrationale Funktion mit Zähler- und Nenner-Polynomen $p(z)$ und $q(z)$ vom Grad M und N . Letzteres sei nach dem Fundamentalsatz der Algebra ein Produkt von Linearfaktoren (der Vorfaktor sei in $p(z)$ enthalten)

$$q(z) = (z - \lambda_1)^{n_1} \cdot (z - \lambda_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (z - \lambda_Q)^{n_Q}$$

mit den Q Polstellen λ_i , deren Vielfachheiten sich zu $N := n_1 + \dots + n_Q$ addieren. Dann hat $Y(z)$ nach Polynomdivision und Partialbruchzerlegung (PBZ) die Darstellung

$$Y(z) = s(z) + \frac{r(z)}{q(z)} = s(z) + \sum_{i=1}^Q \sum_{v=1}^{n_i} \frac{A_{i,v}}{(z - \lambda_i)^v}$$

wobei $s(z)$ ein Polynom vom Grad $M - N$ ist (oder $s(x) = 0$ für $M < N$) und $r(z)$ ein Polynom mit Grad kleiner als N . Die Summanden in der Summe heißen Partialbrüche und ergeben sich mit der oben beschriebenen Methode (Partialbruchzerlegung, Fall 2) aus den Koeffizienten von $r(z)$ und den Polstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_Q$.

Bemerkungen:

- I) Nach Partialbruchzerlegung ergibt sich nach Satz 3.16 von Seite 60 das zu $Y(z)$ gehörige Zeitsignal mittels

144

$$Y(z) = \sum_{i=0}^{M-N} s_i z^i + \sum_{i=1}^Q \sum_{v=1}^{n_i} \frac{A_{i,v}}{(z - \lambda_i)^v}$$

$$\downarrow$$

$$y[k] = \sum_{i=0}^{M-N} s_i \delta[k+i] + \sum_{i=1}^Q \sum_{v=1}^{n_i} A_{i,v} \cdot \binom{k-1}{v-1} \lambda_i^{k-v} \epsilon[k-1] \quad (3.16)$$

- II) Ist das Nennerpolynom $q(z) = q_0 + q_1 z + \dots + q^N$ in der Koeffizientenform gegeben, dann muss man zunächst alle Nullstellen von $q(z)$ bestimmen um es als Produkt von Linearfaktoren schreiben zu können. Dies ist im Allgemeinen schwierig (insbesondere für größere $N > 4$).
- III) Man kann die Koeffizienten $A_{i,v}$ der Partialbruchzerlegung außer durch die oben beschriebenen Methoden (LGS aufstellen und lösen) alternativ auch mit Hilfe des Residuensatzes (aus der Höheren Analysis, hier ohne Herleitung) berechnen:

$$A_{i,v} = \frac{1}{(n_i - v)!} \cdot \left(\frac{d}{dz} \right)^{n_i - v} [(z - \lambda_i)^{n_i} \cdot Y(z)]|_{z=\lambda_i} \quad (3.17)$$

Beispiel: Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung für $Y(z) = \frac{z}{z^2-1}$.

Lösung: Mit dem Ansatz

145

$$Y(z) = \frac{z}{(z+1)(z-1)} = \frac{A}{(z-1)} + \frac{B}{(z+1)}$$

ergibt sich aus dem Residuensatz (3.17) mit der Quotientenregel die Lösung

146

$$A = \frac{1}{0!} \left(\frac{d}{dz} \right)^0 [(z-1) \cdot \frac{z}{z-1} (z+1)]|_{z=1} = \frac{z}{z+1}|_{z=1} = \frac{1}{2}$$

$$B = \frac{1}{0!} \left(\frac{d}{dz} \right)^0 [(z+1) \cdot \frac{z}{z-1} (z+1)]|_{z=-1} = \frac{z}{z-1}|_{z=-1} = \frac{1}{2}$$

- IV) In MATLAB kann man Partialbruchzerlegungen mit dem Befehl $[A, L, S] = \text{residue}(b, a)$ berechnen wobei Argumente $b = (b_M, \dots, b_0)$ und $a = (a_N, \dots, a_0)$ die Koeffizienten des Zähler- bzw. Nennerpolynoms sind (auf Reihenfolge achten: zuerst die höchstwertigen Koeffizienten!), und die Rückgabewerte $A = (A_{1,1}, \dots, A_{1,n_1}, A_{2,1}, \dots, A_{Q,n_Q})$ die Koeffizienten der Partialbrüche ("Residuen"), $L = \lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_Q$ die Polstellen (n -fache Polstellen haben n Einträge) und $S = (s_0, \dots, s_{M-N})$ die Koeffizienten des Polynoms $s(z)$.

Beispiel: Berechnen Sie mit MATLAB die Partialbruchzerlegung der Funktion $Y(z) = \frac{z}{z^2-1}$ vom vorigen Beispiel.

Lösung: Die MATLAB-Befehle

```
b=[1, 0];           % Zaehlerpolynom b(z)=z+0
a=[1, 0, -1];       % Nennerpolynom a(z)=z^2+0z-1
[A,L,S] = residue(b,a) % Partialbruchzerlegung berechnen
```

ergeben die Ausgabe

```
--> A=[0.5, 0.5]    % PB-Koeffizienten A_{1,1}, A_{2,1}
--> L=[-1, 1]       % Polstellen lambda_1, lambda_2
--> S=[]             % leer, da kein ganzrationaler Anteil (M<N)
```

und entsprechen dem Ergebnis der PBZ $Y(z) = \frac{0.5}{z-(-1)} + \frac{0.5}{z-1}$ von oben.

Der folgende Satz zeigt *allgemeine* Partialbruchzerlegungen für einige häufige Typen von gebrochenrationalen Funktionen:

Satz 3.21: Partialbruchzerlegung, wichtige Spezialfälle

$$\begin{aligned}
 \text{I)} \quad & \frac{az+b}{(z-\alpha)(z-\beta)} = \frac{A}{z-\alpha} + \frac{B}{z-\beta} \\
 & \text{mit } A = \frac{a \cdot \alpha + b}{\alpha - \beta}, \quad B = \frac{a \cdot \beta + b}{\beta - \alpha} \\
 \text{II)} \quad & \frac{az^2+bz+c}{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)} = \frac{A}{z-\alpha} + \frac{B}{z-\beta} + \frac{C}{z-\gamma} \\
 & \text{mit } A = \frac{a\alpha^2+b\alpha+c}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}, \quad B = \frac{a\beta^2+b\beta+c}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)}, \quad C = \frac{a\gamma^2+b\gamma+c}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)} \\
 \text{III)} \quad & \frac{az^2+bz+c}{(z-\alpha)^2(z-\gamma)} = \frac{A}{z-\alpha} + \frac{B}{(z-\alpha)^2} + \frac{C}{z-\gamma} \\
 & \text{mit } A = \frac{a\alpha(\alpha-2\gamma)-b\gamma-c}{(\alpha-\gamma)^2}, \quad B = \frac{a\alpha^2+b\alpha+c}{\alpha-\gamma}, \quad C = \frac{a\gamma^2+b\gamma+c}{(\alpha-\gamma)^2}.
 \end{aligned}$$

Beweis:

- I) Man kann die Konstanten A, B genauso wie im Beispiel zur Partialbruchzerlegung (Fall 1) durch Aufstellen und Lösen eines LGS herleiten. Alternativ auch einfach durch Nachprüfen von

147

$$\begin{aligned}
\frac{A}{z \cdot \alpha} + \frac{B}{z \cdot \beta} &= \frac{\frac{a \cdot \alpha + b}{\alpha - \beta}(z - \beta) + \frac{a \cdot \beta + b}{\beta - \alpha}(z - \alpha)}{(z - \alpha)(z - \beta)} \\
&= \frac{z \cdot (a \cdot \alpha + b) - (a \cdot \beta + b) - \beta(a \cdot \alpha + b) + \alpha(a \cdot \beta + b)}{(\alpha - \beta)(z - \alpha)(z - \beta)} \\
&= \frac{z \cdot a \cdot (\alpha - \beta) + b \cdot (\alpha - \beta)}{(\alpha - \beta)(z - \alpha)(z - \beta)} = \frac{a \cdot z + b}{(z - \alpha)(z - \beta)}
\end{aligned}$$

II) Kann man genauso zeigen: Bringt man die rechte Seite von (II) auf den Hauptnenner $(z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma)$, so ist der Zähler Z

$$\begin{aligned}
Z &= A(z^2 - z(\beta + \gamma) + \beta\gamma) + B(z^2 - z(\alpha + \gamma) + \alpha\gamma) + C(z^2 - z(\alpha + \beta) + \alpha\beta) \\
&= z^2(A + B + C) - z(A(\beta + \gamma) + B(\alpha + \gamma) + C(\alpha + \beta)) + A\beta\gamma + B\alpha\gamma + C\alpha\beta
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich mit der linken Seite ergibt das LGS

$$A + B + C = a \quad (1)$$

$$(\beta + \gamma)A + (\alpha + \gamma)B + (\alpha + \beta)C = b \quad (2)$$

$$\beta\gamma A + \alpha\gamma B + \alpha\beta C = c \quad (3)$$

Man kann nun das LGS wie üblich nach A, B, C auflösen (bzw. nachprüfen, dass die A, B, C aus dem Satz das LGS lösen). Rest siehe Übungen.

III) Entsprechendes Vorgehen. Siehe Übungen.

□

Beispiel: Für PBZ von $Y(z) = \frac{z}{z^2 - 1} = \frac{z}{(z-1)(z+1)}$ aus den vorigen Beispielen erhält man aus Satz 3.21.I mit $a = 1, b = 0, \alpha = 1, \beta = -1$ durch einfaches Einsetzen

148

$$A = \frac{a \cdot \alpha + b}{\alpha - \beta} = \frac{1 \cdot 1 + 0}{1 - (-1)} = \frac{1}{2} \quad B = \frac{a \cdot \beta + b}{\alpha - \beta} = \frac{1 \cdot (-1) + 0}{-1 - 1} = -\frac{1}{2}$$

und damit

149

$$Y(z) = \frac{A}{z - \alpha} + \frac{B}{z - \beta} = \frac{0.5}{z - 1} + \frac{0.5}{z + 1}$$

Aus unserer Analyse der Rücktransformation durch PBZ folgt auch, dass man aus den Polstellen der Systemfunktion $H(z)$ direkt auf die Stabilität des Systems schließen kann:

Satz 3.22: Polstellen der Systemfunktion und Stabilität

Seien $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ die Polstellen der Systemfunktion $H(z)$ eines diskreten LTI-Systems \mathcal{H} . Dann ist \mathcal{H} stabil, genau dann wenn

$$|\lambda_i| < 1 \quad \forall i = 1, \dots, N$$

150

d.h. genau dann, wenn alle Polstellen betragsmäßig kleiner als 1 sind, (bzw. alle Polstellen sich innerhalb des komplexen Einheitskreises befinden).

Beweis: Nach Satz 3.10 ist ein LTI-System genau dann stabil, wenn seine Impulsantwort $h[k]$ absolut integrierbar ist, d.h. falls $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$ absolut konvergiert. Nun erhält man nach Satz 3.17 die Impulsantwort $h[k] \circ \bullet H(z)$ durch Rücktransformation der Systemfunktion $H(z)$, wobei $H(z)$ nach Satz 3.18 eine gebrochenrationale Funktion ist, welche mittels PBZ nach Satz 3.20 auf die Form

$$H(z) = \sum_{i=0}^{M-N} s_i z^i + \sum_{i=1}^Q \sum_{v=1}^{n_i} \frac{A_{i,v}}{(z - \lambda_i)^v}$$

mit den Polstellen λ_i gebracht werden kann. Rücktransformation wie in Gleichung (3.16) auf Seite 74 ergibt die Impulsantwort

$$h[k] = \sum_{i=0}^{M-N} s_i \delta[k+i] + \sum_{i=1}^Q \sum_{v=1}^{n_i} A_{i,v} \binom{k-1}{v-1} \lambda_i^{k-v} \epsilon[k-1] .$$

und damit (mit der Dreiecksungleichung)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \leq \sum_{i=0}^{M-N} |s_i| + \sum_{i=1}^Q \sum_{v=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{\infty} |A_{i,v} \binom{k-1}{v-1} \lambda_i^{k-v}|$$

D.h. jede Polstelle λ_i der erzeugt mindestens eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |A_{i,v} \binom{k-1}{v-1} \lambda_i^{k-v}| \sim \sum_{k=0}^{\infty} k^{v-1} |\lambda_i|^k$ vom geometrischen Typ, welche genau dann konvergiert, wenn $|\lambda_i| < 1$ (Skript Mathe-I, S. 84,85, Satz 3.12 u. Majoranten-/Minorantenkriterium 3.13), denn:

- Für $v = 1$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} k^{v-1} |\lambda_i|^k = \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_i|^k$ eine geometrische Reihe und konvergiert genau dann, wenn $|\lambda_i| < 1$.
- Für $v > 1$ und $|\lambda_i| \geq 1$ ist klar, dass die Reihe $R := \sum_{k=0}^{\infty} k^{v-1} |\lambda_i|^k$ divergiert (da die geometrische Reihe eine divergente Minorante ist).
- Für $v > 1$ und $|\lambda_i| < 1$ konvergiert R , da die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_i + \epsilon|^k$ für geeignetes ϵ mit $|\lambda_i| < |\lambda_i + \epsilon| < 1$ eine konvergente Majorante ist (denn $|\lambda_i + \epsilon|^k$ wächst $\forall v$ viel schneller als $k^v |\lambda_i|^k$, wie man z.B. durch Logarithmieren leicht einsieht). \square

Im abschließenden Beispiel wollen wir eine vollständige Systemanalyse durchführen:

Beispiel: Fibonacci-Zahlen (nach Leonardo “Fibonacci” von Pisa, 1202). In einem (sehr großen) Stall erzeugt ein im Monat k geborenes Kaninchenpaar ab dem zweiten Monat $k+2$ seiner Existenz an jeden Monat ein weiteres Paar; selbiges gilt für die Nachkommen; kein Kaninchen stirbt im betrachteten Zeitraum. Wie vermehren sich die Kaninchen wenn zur Zeit $k=1$ ein Paar in den (zuvor leeren) Stall gesetzt wird?

- Stellen Sie eine Differenzengleichung für das “Kaninchenstall-System” auf. Hierbei sei das Eingangssignal $x[k]$ die Zahl der neugeborenen Kaninchenpaare die im k -ten Monat *von außen* in den Stall gegeben werden, und das Ausgangssignal $y[k]$ die Anzahl der Kaninchenpaare im Stall im k -ten Monat.
- Bestimmen Sie daraus die Systemfunktion $H(z)$ und das Ausgangssignal $y[k]$ für Eingangssignal $x[k] = \delta[k-1]$, d.h. falls zur Zeit $k=1$ genau ein Kaninchenpaar in den Stall gesetzt wird.

Lösung: Die Anzahl $y[k]$ der Kaninchenpaare zur Zeit k ergibt sich als Summe der alten Anzahl Paare $y[k-1]$ plus der neugeborenen Kaninchenpaare ($= y[k-2]$ wegen Mindestalter 2 Monate) plus der neu in den Stall gesetzten Paare $x[k]$. Die Differenzengleichung und deren z -Transformierte lautet also

151

$$y[k] = y[k-1] + y[k-2] + x[k]$$

(3.18)



$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + z^{-2}Y(z) + X(z) \Leftrightarrow Y(z) \cdot (1 - z^{-1} - z^{-2}) = X(z)$$

Daraus (oder mit Satz 3.18 schon direkt aus der Differenzengleichung) ergibt sich die Systemfunktion

152

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{(1 - z^{-1} - z^{-2})} = \frac{z^2}{z^2 - z - 1}$$

Die Polstellen von $H(z)$ ergeben sich mit der Mitternachtsformel

153

$$\lambda_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

also $\lambda_1 = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.61$ und $\lambda_2 = (1 - \sqrt{5})/2 \approx -0.61$. Wegen $|\lambda_1| > 1$ ist das System also instabil (Satz 3.22). Wegen $x[k] = \delta[k-1] \circ \bullet X(z) = z^{-1}$ gilt für die z -Transformierte des Ausgangssignals

154

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1} \cdot z^{-1} = \frac{z}{z^2 - z - 1} = \frac{z}{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)}$$

Das Ausgangssignal $y[k]$ erhält man dann durch Rücktransformation von $Y(z)$. PBZ nach Satz 3.21.I von Seite 75 ergibt

$$Y(z) = \frac{1z+0}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)} = \frac{A}{z-\lambda_1} + \frac{B}{z-\lambda_2}$$

155

und mit $a = 1$, $b = 0$, $\alpha = \lambda_1$, $\beta = \lambda_2$

$$A = \frac{a \cdot \alpha + b}{\alpha - \beta} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

$$B = \frac{a \cdot \beta + b}{\alpha - \beta} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{1 - \sqrt{5}}{-2\sqrt{5}}$$

156

Rücktransformation mit Satz 3.16 (bzw. Gleichung 3.16 auf Seite 74) ergibt also

$$Y(z) = \frac{A}{z-\lambda_1} + \frac{B}{z-\lambda_2}$$

157



$$y[k] = A \cdot \lambda_1^{k-1} \epsilon[k-1] + B \cdot \lambda_2^{k-1} \epsilon[k-1]$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \cdot \epsilon[k-1] + \frac{1-\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}}$$

$$- \frac{1-\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \cdot \epsilon[k-1]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \right) \epsilon[k-1] \quad (3.19)$$

Man nennt $\{y[k]\}_{k \in \mathbb{N}}$ die Fibonacci-Zahlenfolge: Ab $k = 2$ berechnet sich $y[k] = y[k-1] + y[k-2]$ als Summe der beiden vorigen Folgenwerte (siehe (3.18)). Der Vorteil der Darstellung (3.19) ist, dass wir mit ihr $y[k]$ für beliebig großes k in *geschlossener* Form berechnen können, d.h. ohne vorher $y[1], y[2], \dots, y[k-1]$ berechnen zu müssen.

Die folgende Tabelle zeigt die ersten 16 Fibonacci-Zahlen:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
y[k]	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987

Weitere Übungsaufgaben: Blatt ???: A???

3.9 Verschaltung von LTI-Systemen

Mit Hilfe der Systemfunktion kann man recht einfach Verschaltungen mehrerer LTI-Systeme analysieren. Der folgenden Skizze (siehe folgender Satz) entsprechend seien dazu zwei beliebige diskrete LTI- Teilsysteme mit Impulsantworten $h_1[k]$ und $h_2[k]$ und entsprechenden Systemfunktionen $H_1(z) \bullet \circ h_1[k]$ und $H_2(z) \bullet \circ h_2[k]$ gegeben, welche auf verschiedene Weisen zu einem Gesamtsystem mit Impulsantwort $h[k]$ und Systemfunktion $H(z) \bullet \circ h[k]$ verschaltet werden können. Dabei sei jeweils $x[k] \circ \bullet X(z)$ das Eingangssignal und $y[k] \circ \bullet Y(z)$ das Ausgangssignal. Außerdem gebe es im Inneren der Gesamtsysteme weitere Zwischensignale $u[k] \circ \bullet U(z)$, $v[k] \circ \bullet V(z)$ und $w[k] \circ \bullet W(z)$. Wir betrachten im folgenden häufig auftretende Verschaltungsmuster (siehe Skizze im folgenden Satz) und versuchen aus Satz 3.17 (mit Satz 3.15) Impulsantwort und Systemfunktion des Gesamtsystems herzuleiten:

- I) **Reihenschaltung:** Werden H_1 und H_2 hintereinander in Reihe geschaltet (Skizze I) so gilt wegen

158

$$U(z) = H_1(z) \cdot X(z) \text{ und} \\ Y(z) = H_2(z) \cdot U(z) = H_2(z) \cdot H_1(z) \cdot X(z)$$

und dem Faltungstheorem für das Gesamtsystem

159

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = H_1(z) \cdot H_2(z) \\ \bullet \\ \circ \\ h[k] = h_1[k] * h_2[k]$$

- II) **Parallelschaltung:** Werden H_1 und H_2 parallel geschaltet (Skizze II) so gilt wegen

160

$$V(z) = H_1(z) \cdot X(z) \text{ und} \\ W(z) = H_2(z) \cdot X(z) \text{ und also } Y(z) = V(z) + W(z) = H_1(z) \cdot X(z) + H_2(z) \cdot X(z) \\ = (H_1(z) + H_2(z)) \cdot X(z)$$

und der Linearität der z -Transformation für das Gesamtsystem

161

$$H(z) := \frac{Y(z)}{X(z)} = H_1(z) + H_2(z) \\ \bullet \\ \circ \\ h[k] = h_1[k] + h_2[k]$$

III) **Rückkopplung:** Wird der Ausgang $y[k]$ negativ über H_2 auf den Eingang von H_1 rückgekoppelt (Skizze III) so gilt wegen

$$\begin{aligned} V(z) &= X(z) - W(z) \text{ und } W(z) = H_2(z) \cdot Y(z) \text{ und} \\ Y(z) &= V(z) \cdot H_1(z) = H_1(z) \cdot (X(z) - H_2(z) \cdot Y(z)) \\ &= H_1(z) \cdot X(z) - H_1(z) \cdot H_2(z) \cdot Y(z) \\ &\Leftrightarrow Y(z) \cdot (1 + H_1(z) \cdot H_2(z)) = H_1(z) \cdot X(z) \end{aligned}$$

162

für die Systemfunktion des Gesamtsystems

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z) \cdot H_2(z)}$$

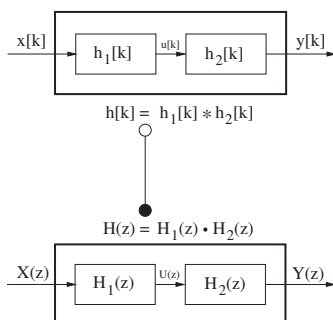
163

Wir fassen diese Resultate in folgendem Satz zusammen:

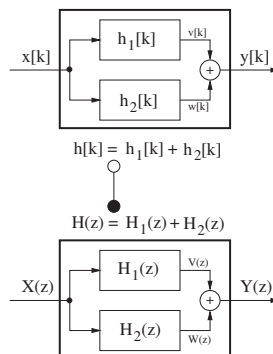
Satz 3.23: Verschaltungsmuster von diskreten LTI-Systemen

Gegeben seien zwei diskrete LTI-Teilsysteme \mathcal{H}_1 bzw. \mathcal{H}_2 mit Impulsantworten $h_1[k]$ bzw. $h_2[k]$ und Systemfunktionen $H_1(z) \bullet \circ h_1[k]$ bzw. $H_2(z) \bullet \circ h_2[k]$. Dann kann man die Teilsysteme wie folgt durch Reihenschaltung, Parallelschaltung und Rückkopplung zu einem LTI Gesamtsystem \mathcal{H} mit Impulsantwort $h[k]$ und Systemfunktion $H(z) \bullet \circ h[k]$ verschalten:

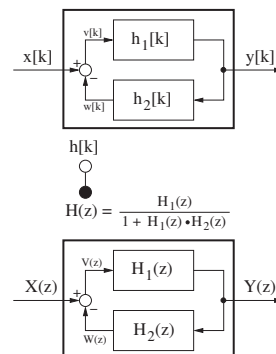
I) Reihenschaltung



II) Parallelschaltung



III) Rueckkopplung



Beweis: Siehe obige Herleitung. □

Bemerkung: Wir können den Satz z.B. dazu benutzen um die Gesamt-Systemfunktion $H(z)$ und damit den Berechnungsalgorithmus für eine Verschaltung mehrerer einfacher LTI-Systemen zu ermitteln.

Beispiele: Gegeben seien zwei einfache LTI-Systeme durch ihre Systemfunktionen

$$H_1(z) = \frac{z+3}{z^2-1}, \quad \text{und} \quad H_2(z) = \frac{z+1}{(z+3)(z-1)}.$$

Ermitteln Sie die Systemfunktion $H(z)$ des Gesamtsystems für a) Reihenschaltung, b) Parallelschaltung und c) negative Rückkopplung der Teilsysteme wie im vorigen Satz beschrieben. Geben Sie jeweils auch einen rekursiven Algorithmus zur Berechnung der Systemausgabe $y[k]$ bei gegebenem Eingangssignal $x[k]$ an.

Lösungen:

a) Bei Reihenschaltung ist nach Satz 3.23 die Systemfunktion des Gesamtsystems

164

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) = \frac{(z+3)(z-1)}{(z^2-1)(z+3)(z-1)} = \frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{z^2-2z+1}$$

Damit kann man das System nach Satz 3.18 (Seite 64) durch die Differenzengleichung ($N = 2$, $\alpha_i = a_{N-i}$, $\beta_i = b_{N-i}$)

165

$$y[k] - 2y[k-1] + y[k-2] = x[k-2]$$

beschreiben. Auflösen nach $y[k]$ ergibt den rekursiven Algorithmus

166

$$y[k] = 2y[k-1] - y[k-2] + x[k-2]$$

b) Bei Parallelschaltung gilt entsprechend

167

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) = \frac{z+3}{z^2-1} + \frac{z+1}{(z+3)(z-1)} = \frac{(z+3)^2 + (z+1)^2}{(z^2-1)(z+3)}$$

$$= \frac{2z^2 + 8z + 10}{z^3 + 3z^2 - z - 3} \quad (\text{Systemfunktion})$$

$$y[k] + 3y[k-1] - y[k-2] - 3y[k-3] = 2x[k-1] + 8x[k-2] + 10x[k-3] \quad (\text{DLG})$$

$$y[k] = 2x[k-1] + 8x[k-2] + 10x[k-3] - 3y[k-1] + y[k-2] + 3y[k-3] \quad (\text{Alg.})$$

c) Bei Rückkopplung gilt entsprechend

168

$$H(z) = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z) + H_2(z)} = \frac{\frac{z+3}{z^2-1}}{1 + \frac{(z+3)(z+1)}{(z^2-1)(z+3)(z-1)}} = \frac{\frac{z+3}{z^2-1}}{\frac{(z-1)^2+1}{(z-1)^2}} = \frac{\frac{z+3}{z+1}}{\frac{z^2-2z+2}{z-1}}$$

$$= \frac{(z+3)(z-1)}{(z+1)(z^2-2z+2)} = \frac{z^2+2z-3}{z^3-z^2+2} \quad (\text{Systemfunktion})$$

$$y[k] - y[k-1] + 2y[k-3] = x[k-1] + 2x[k-2] + 3x[k-3] \quad (\text{DLG})$$

$$y[k] = x[k-1] + 2x[k-2] - 3x[k-3] + y[k-1] - 2y[k-3] \quad (\text{Alg.})$$

Weitere Übungsaufgaben: Blatt ???; A???

Kapitel 4

Analoge Signale

Wie in Kapitel 1 argumentiert, kennen wir eigentlich schon wesentliche Resultate aus der kontinuierlichen (=analogen) Signalverarbeitung und Systemtheorie aus unserer Betrachtung von elektrischen Stromkreisen (siehe Skizze auf Seite 1.1; siehe Skript Elektrotechnik). Wir werden in diesem und dem nächsten Kapitel diese Resultate wiederholen und erweitern. Dabei werden wir sehen, dass sich kontinuierliche Signale und Systeme sehr ähnlich wie diskrete Signale und Systeme verhalten, d.h. die meisten Sätze die wir bisher für den diskreten Fall in Kapitel 2 und 3 hergeleitet haben gibt es auch für den kontinuierlichen Fall, außer dass in den Sätzen Summen durch Integrale ersetzt werden. Man erinnere sich hierbei daran, dass Integrale letztlich auch nichts anderes als Summen sind: Im Skript Mathe-I (S. 134, Def. 6.5) hatten wir Riemann-Integrale einer Funktion $f(t)$ als Grenzfall einer endlichen Summierung von (immer schmaler werdenden) Rechteck-Flächen

$$\int_a^b f(t) dt := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i \cdot \Delta t_n) \quad (4.1) \quad \boxed{169}$$

unter der Funktion $f(t)$ definiert. Hierbei hatte jedes Rechteck eine dem Funktionswert $f(t)|_{t=a+i\Delta t_n}$ entsprechende Höhe und die mit n abnehmende Breite

$$\Delta t_n = \frac{b-a}{n} \quad \boxed{170}$$

wobei die Rechteckbreite Δt_n im Grenzfall “unendlich schmaler” Rechtecke zum Differenzial dt des Integrals wird.

Aus dieser Korrespondenz folgt insbesondere, dass sich auch für kontinuierlich LTI-Systeme die Systemausgabe als (kontinuierlich) Faltung der Systemeingabe mit der Impulsantwort ergibt. Dabei werden Faltungs-Summen zu Integralen, Differenzengleichungen zu Differentialgleichungen und die z -Transformation entspricht der Laplace-Transformation. Ansonsten gelten aber die wesentlichen Definitionen und Sätze aus der diskreten Welt in entsprechender Weise auch in der analogen Welt.

4.1 Definitionen und Eigenschaften

Wir wiederholen kurz die wichtigsten Definitionen für kontinuierliche Signale.

Definition 4.1: Definition und Eigenschaften kontinuierlicher Signale

- I) Definition: Ein kontinuierliches Signal $x(t)$ ist eine reelle oder komplexe Funktion $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}) der Zeit $t \in \mathbb{R}$.
- II) Sei $x(t)$ ein kontinuierliches Signal. Dann heißt
 - $x(-t)$ die Spiegelung von $x(t)$ an der Signalpegel-Achse.
 - $x(t - t_0)$ bzw. $x(t + t_0)$ die Verschiebung um t_0 nach rechts bzw. links.
 - $x(t_0 - t)$ die um t_0 nach rechts verschobene Spiegelung.
- III) $x(t)$ heißt gerade bzw. ungerade falls $x(-t) = x(t)$ bzw. $x(-t) = -x(t)$.
- IV) $x(t)$ heißt kausal bzw. anti-kausal falls $x(t) = 0 \ \forall t < 0$ bzw. $x(t) = 0 \ \forall t \geq 0$.
- V) $x(t)$ heißt zeitbeschränkt auf das Zeit-Intervall $[t_1, t_2]$, falls $x(t) = 0$ für $t < t_1$ oder $t > t_2$.
- VI) $x(t)$ heißt periodisch mit Periode T oder kurz T -periodisch, falls $x(t) = x(t + kT)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle ganzzahligen $k \in \mathbb{Z}$.
- VII) \mathcal{V} bezeichnet die Menge aller Signale.
 $\mathcal{V}_{[t_1, t_2]}$ bezeichnet die Menge aller auf $[t_1, t_2]$ zeitbeschränkten Signale.
 \mathcal{V}_T bezeichnet die Menge aller T -periodischen Signale.

Bemerkungen:

- I-IV entsprechen genau Def. 2.1-2.4 für diskrete Signale aus Kapitel 2. V und VI entsprechen den Definitionen der diskreten Signalmengen in Kapitel 2.3.
- Die Rechenoperationen $+$, $-$, \cdot , $/$ der Körper \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} lassen sich entsprechend auch für Funktionen bzw. Signale anwenden. Ähnlich wie in Kapitel 2.3 auf Seite 23 definiert man diese Rechenoperationen “komponentenweise”, d.h. für Signale x, y und Operationen $\circ \in \{+, -, \cdot, /\}$

$$\circ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \quad \text{mit} \quad (x \circ y)(t) := x(t) \circ y(t) .$$

Außerdem definiert man wie üblich die Skalierung eines Signals $x(t)$ mit einem Skalar $k \in K$ aus einem Körper $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ durch

$$\cdot : K \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \quad \text{mit} \quad (k \cdot x)(t) := k \cdot x(t) .$$

Der folgende Satz zeigt, dass auch die Mengen der kontinuierlichen Signale Vektorräume bilden (vgl. Satz 2.8 auf Seite 2.8), d.h. man darf mit Signalen genauso wie mit Vektoren rechnen (siehe Skript Mathe-I, Kapitel 8).

Satz 4.2: Vektorraum der kontinuierlichen Signale

- Die Menge \mathcal{V} aller Signale (mit Werten in \mathbb{R} oder \mathbb{C}) bildet mit Addition $+$ und Skalierung \cdot einen (unendlich-dimensionalen) Vektorraum $(\mathcal{V}, +, \cdot)$.
- Die Menge aller auf $[t_1, t_2]$ zeitbeschränkten kontinuierlichen Signale bildet ebenfalls einen (unendlich-dimensionalen) Vektorraum $(\mathcal{V}_{[t_1, t_2]}, +, \cdot)$.
- Die Menge \mathcal{V}_T aller T -periodischen Signale bildet ebenfalls einen (unendlich-dimensionalen) Vektorraum $(\mathcal{V}_T, +, \cdot)$.

Beweis: Offenbar sind Addition $+$ und Skalierung \cdot auf allen Signalmengen \mathcal{V} , \mathcal{V}_{t_1, t_2} , \mathcal{V}_T abgeschlossen. Außerdem kann man leicht überprüfen, dass die Vektorraumaxiome erfüllt sind: Denn die Addition $+$ ist offenbar sowohl kommutativ als auch assoziativ und besitzt ein eindeutiges neutrales Element $n(t) = 0$ sowie inverse Elemente $(-x)(t) = -x(t)$. Weiter ist die Skalierung \cdot offenbar assoziativ, und es gelten offenbar sowohl $1 \cdot x = x$ als auch die Distributivgesetze. Für einen detaillierten Beweis siehe Übungen ????. \square

Ähnlich wie in Def. 2.5-2.7 definieren wir im folgenden einige wichtige kontinuierliche Signale:

Definition 4.3: Wichtige kontinuierliche Signale

Einige wichtige kontinuierliche Signale sind die folgenden (vgl. folgende Skizze):

a) Sprung- oder Heaviside-Funktion: $\epsilon(t) := \begin{cases} 1 & , t > 0 \\ 0.5 & , t = 0. \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$

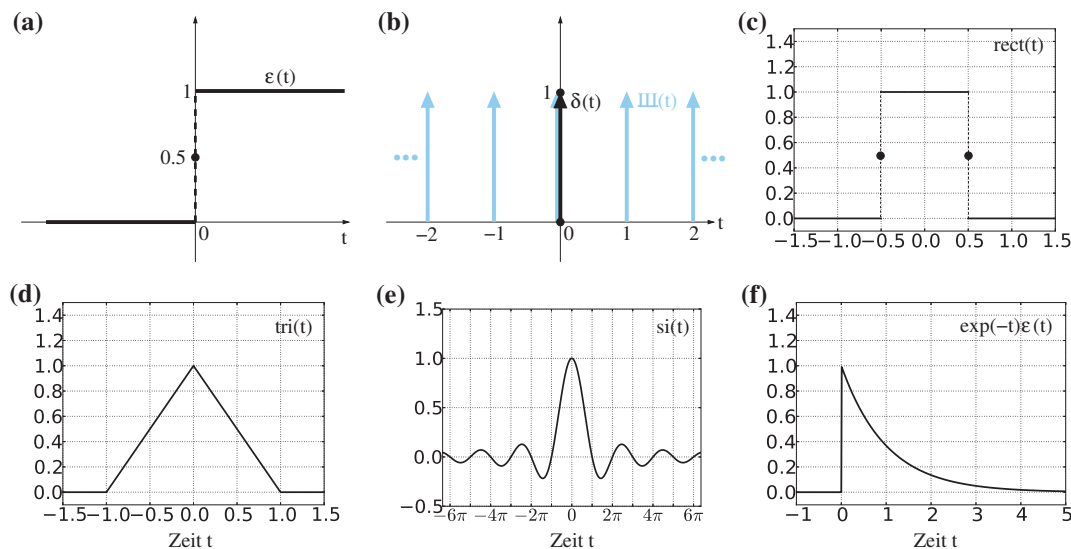
b) Dirac- oder Delta-Impuls: $\delta(t) := \frac{d}{dt}\epsilon(t)$, sowie
Kamm- oder Scha-Signal: $\text{III}(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k)$.

c) Rechteck-Signal: $\text{rect}(t) := \epsilon(t + \frac{1}{2}) - \epsilon(t - \frac{1}{2})$

d) Dreieck-Signal: $\text{tri}(t) := \begin{cases} 1 - |t| & , |t| \leq 1 \\ 0 & , |t| > 1 \end{cases}$

e) Si-Signal: $\text{si}(t) = \frac{\sin(t)}{t}$.

f) Kausale Exponential-Funktion: $f(t) = e^{at} \cdot \epsilon(t)$.

**Bemerkungen:**

- Schaubilder der Signale sind in obiger Skizze dargestellt (für die kausale Exponentialfunktion wurde $a = -1$ verwendet).
- In alternativen Definitionen der Sprungfunktion bleibt $\epsilon(0)$ undefiniert oder man definiert $\epsilon(0) := 1$.
- Integriert man die Sprungfunktion $\epsilon(t)$ erhält man das Rampensignal

171

$$\int_{-\infty}^t \epsilon(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & , t \leq 0 \\ \int_0^1 1 d\tau = [\tau]_0^t = t & , t > 0 \end{cases} = t \cdot \epsilon(t) =: \text{ramp}(t) \quad (4.2)$$

- Die Ableitung von $\epsilon(t)$ an der Stelle $t = 0$ ist eigentlich nicht definiert, da $\epsilon(t)$ dort unstetig ist. Man kann aber die Ableitung allgemeiner als Umkehrung der Integration auffassen, d.h. unsere Definition von $\delta(t)$ meint dann, dass $\delta(t)$ so definiert ist, dass gilt:

172

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \epsilon(t) \quad (4.3)$$

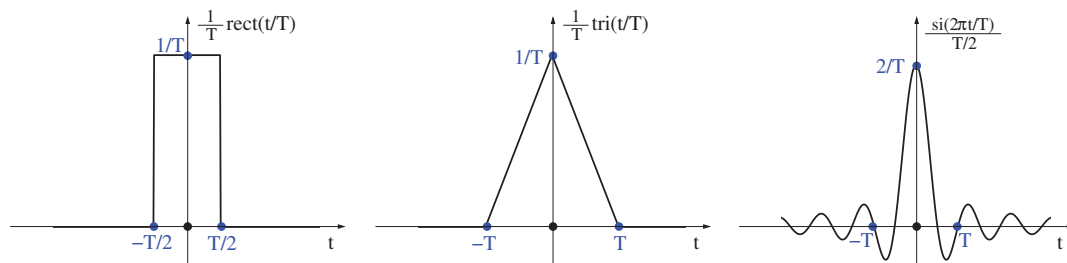
Daraus folgt, dass $\delta(t) = 0$ für $t \neq 0$ (da dort $\epsilon(t)$ konstant ist), und um die Stelle $t = 0$ herum muss $\delta(t)$ das "Integrations-Gewicht" 1 haben, also "unendlich hoch" sein, so dass die "Fläche" unter $\delta(t)$ genau 1 ergibt. Man zeichnet deshalb den Dirac-Impuls als nach oben gerichteten Pfeil der Länge 1 (siehe obige Skizze b).

- Wie in der folgenden Skizze illustriert kann man den Dirac-Impuls z.B. als Grenzfall einer sehr schmalen aber hohen Rechteckfunktion mit Fläche 1 auffassen (siehe linke Skizze; Rechteck mit Breite T und Höhe $1/T$; der Grenzfall ergibt sich für $T \rightarrow 0$).

- Alternativ kann man $\delta(t)$ auch als Grenzfall jeder beliebigen Funktion mit “Fläche” 1 auffassen, die im Grenzfall ihr ganzes “Gewicht” bei $t = 0$ konzentriert. Dies funktioniert neben der Rechteckfunktion entsprechend auch z.B. mit der Dreieckfunktion (mittlere Skizze) oder Si-Funktion (rechte Skizze):

$$\delta(t) := \frac{d}{dt}\epsilon(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \text{tri}\left(\frac{t}{T}\right) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{2}{T} \text{si}\left(\pi \frac{t}{T}\right)$$

173



Entsprechend Satz 2.6 besitzt auch der kontinuierliche Dirac-Stoß die Ausblend-, Sieb- oder auch Abtasteigenschaft:

Satz 4.4: Ausblendeigenschaft des Dirac-Impulses

Für jedes kontinuierliche Signal $x(\tau)$ und jede Konstante $t \in \mathbb{R}$ gilt:

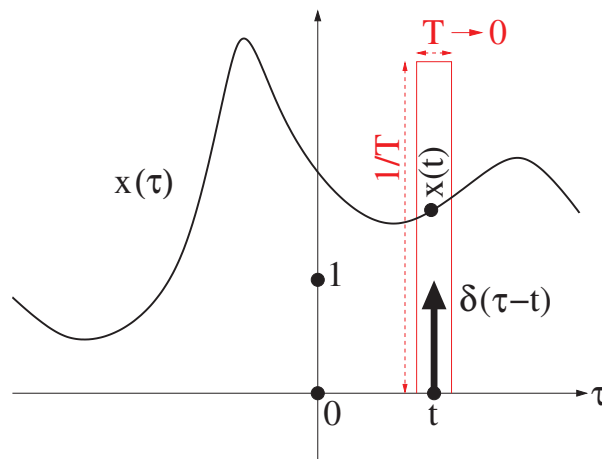
- I) $x(\tau) \cdot \delta(\tau - t) = x(t) \cdot \delta(\tau - t)$
- II) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t) d\tau = 1$
- III) $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$ für alle $t \in \mathbb{R}$

174

Beweis:

- I) Folgt z.B. aus obiger Rechteck-Darstellung des Dirac-Impulses $\delta(\tau - t) = \frac{1}{T} \text{rect}\left(\frac{\tau - t}{T}\right)$ für $T \rightarrow 0$.

Damit entspricht $x(\tau) \cdot \delta(\tau - t)$ dem Produkt von $x(\tau)$ mal das rote Rechteck um $\tau = t$ mit Breite T und Höhe $1/T$. Falls T sehr klein ist gilt die Approximation $x(\tau) \approx x(t)$ für alle $\tau \in [t - T/2, t + T/2]$ im relevanten Bereich des roten Rechtecks, und im Grenzfall $T \rightarrow 0$ sogar Gleichheit, also kann man den Funktionswert $x(\tau)$ auch gleich durch die Konstante $x(t)$ ersetzen.



II) Mit der Substitution $\lambda = \tau - t$ und Gleichung (4.3) gilt

175

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda) d\lambda = \epsilon(\infty) = 1$$

III) Anschaulich wieder mit obiger Skizze: Das rechte Integral ist die Fläche unter dem roten Dreieck (Breite T , Höhe $1/T$) multipliziert mit $x(\tau) \approx x(t)$, im Grenzfall also $T \cdot (1/T) \cdot x(t) = x(t)$. Oder Formal mit der Symmetrie $\delta(t - \tau) = \delta(\tau - t)$

176

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(\tau - t) d\tau \stackrel{(I)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(\tau - t) d\tau \\ &= x(t) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t) d\tau \stackrel{(II)}{=} x(t) \cdot 1 = x(t) \end{aligned}$$

Bemerkungen:

□

- Vollkommen entsprechend zu Satz 2.6 auf Seite 21 kann man also auch jedes kontinuierliche Signal $x(t)$ nach (III) als eine mit “Konstanten” $x(\tau)$ gewichtete “Summe” von verschobenen Dirac-Impulsen $\delta(t - \tau)$ darstellen (nur dass nun die “Summe” nach Gleichung (4.1) auf Seite 83 zum Integral geworden ist).
- Ähnlich wie im diskreten Fall entspricht dabei das Integral in (III) der Faltung $x(t) * \delta(t)$. Im folgenden definieren wir die Faltungsoperation für kontinuierliche Signale.

Weitere Übungsaufgaben: Blatt ???: A???

4.2 Kontinuierliche Faltung

Definition 4.5: Faltung kontinuierlicher Signale

Sei \mathcal{V} die Menge aller kontinuierlichen Signale und $x \in \mathcal{V}$ und $y \in \mathcal{V}$ zwei kontinuierliche Signale. Dann heißt die Operation $*$: $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ mit

$$(x * y)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau$$

177

Faltung von x mit y . Die Integral auf der rechten Seite nennt man auch Faltungsintegral.

Bemerkungen:

- Statt $(x * y)(t)$ schreiben wir manchmal ausführlicher $(x(t) * y(t))(t)$ aber meistens wieder einfach $x(t) * y(t)$.
- Das Faltungsintegral ist nach (4.1) auf Seite 83 mit $\Delta\tau_n := T/n$ der Grenzfall der Faltungssumme von Satz 2.9 auf Seite 25:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot y(t - \tau) d\tau &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T x(\tau) \cdot y(t - \tau) d\tau \\ &\stackrel{(4.1)}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=-n}^{n-1} x(i \cdot \Delta\tau_n) y(t - i \cdot \Delta\tau_n) \cdot \Delta\tau_n . \end{aligned}$$

Die letzte Summe ist im wesentlichen die Faltung zweier zeitdiskreter Signale

$$\begin{aligned} x_{T,n}[i] &:= \sqrt{\Delta\tau_n} \cdot x(i \cdot \Delta\tau_n) \cdot \text{rect}\left(\frac{i \cdot \Delta\tau_n}{2T}\right) \quad \text{und} \\ y_{T,n}[i] &:= \sqrt{\Delta\tau_n} \cdot y(i \cdot \Delta\tau_n) , \end{aligned}$$

sodass für $k := \lfloor t/\Delta\tau_n \rfloor$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot y(t - \tau) d\tau &= \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=-n}^{n-1} x_{T,n}[i] y_{T,n}[k - i] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{T,n} * y_{T,n})[k] . \end{aligned}$$

Da die kontinuierliche Faltung also der Grenzfall einer diskreten Faltung ist, erbt sie von ihr auch alle wesentlichen Eigenschaften:

Satz 4.6: Eigenschaften der Faltung

Seien $x, y, w \in \mathcal{V}$ kontinuierliche Signale, δ der Dirac-Impuls und $c, d \in \mathbb{R}$ (oder $\in \mathbb{C}$) Körperelemente. Dann gilt

- | | |
|-------------------------|--|
| I) Kommutativität : | $x * y = y * x$ |
| II) Assoziativität : | $w * (x * y) = (w * x) * y$ und
$c \cdot (x * y) = (c \cdot x) * y$ |
| III) Distributivität : | $w * (x + y) = w * x + w * y$ |
| IV) Neutrales Element : | $x * \delta = x$ |
| V) Verschiebung : | $x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$ |
| VI) Zeitinvarianz : | $x(t) * y(t - t_0) = (x(t) * y(t))(t - t_0)$ |
| VII) Linearität : | $(c \cdot x + d \cdot y) * w = c \cdot (x * w) + d \cdot (y * w)$ |

Beweis: Analog zum Beweis von Satz 2.11 auf Seite 30 (Summen durch Integrale ersetzen) bzw. klar nach obiger Betrachtung, dass die kontinuierliche Faltung der Grenzfall einer diskreten Faltung ist. \square

Beispiele: Berechnen Sie die folgenden Faltungen analoger Signale mit Hilfe des Faltungsintegrals (Def. 4.5):

178

$$\begin{aligned} \text{a) } \epsilon(t) * \epsilon(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(\tau) \epsilon(t - \tau) d\tau = \int_0^{\infty} \epsilon(t - \tau) d\tau = \int_0^t 1 \cdot d\tau \stackrel{\lambda := t - \tau}{=} \\ &= \int_t^{-\infty} \epsilon(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^0 \epsilon(\lambda) d\lambda \stackrel{(4.2)}{=} t\epsilon(t) = \text{ramp}(t) \end{aligned}$$

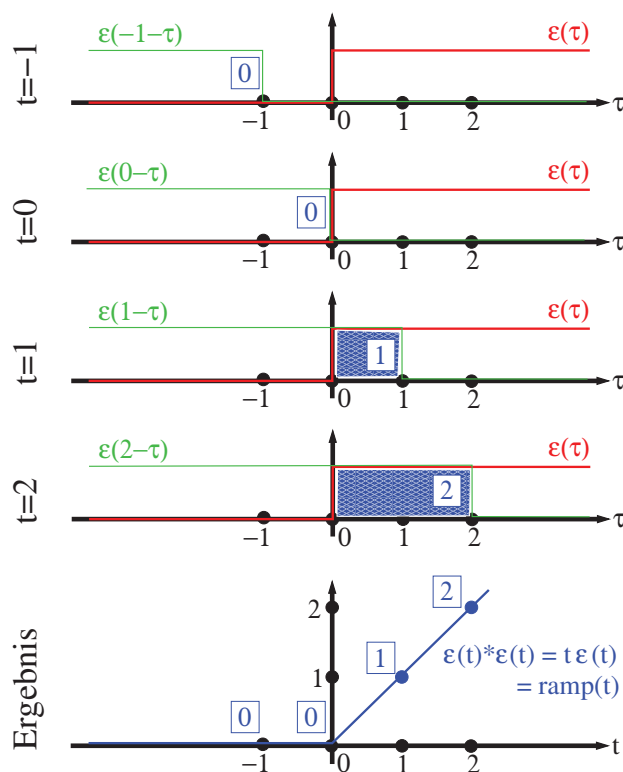
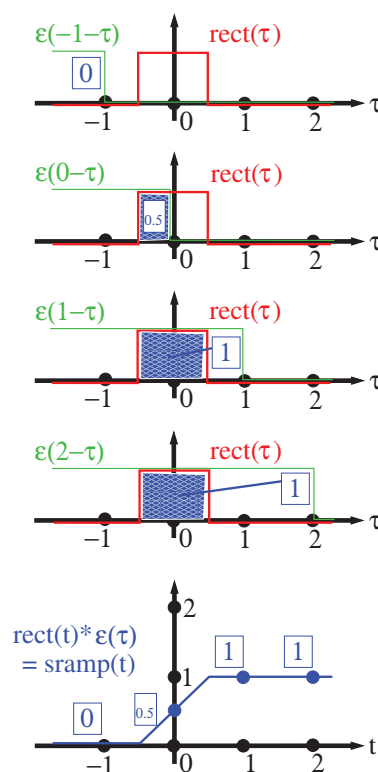
$$\begin{aligned} \text{b) } \text{rect}(t) * \epsilon(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(\tau) \epsilon(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-0,5}^{0,5} \epsilon(t - \tau) d\tau \stackrel{\lambda := t - \tau}{=} \int_{t-0,5}^{t+0,5} \epsilon(\lambda) d\lambda = \int_{t-0,5}^{t+0,5} \epsilon(\lambda) d\lambda \\ &\stackrel{(4.2)}{=} [\lambda \epsilon(\lambda)]_{t-0,5}^{t+0,5} = \text{ramp}(t + 0,5) - \text{ramp}(t - 0,5) \\ &= \begin{cases} 0 & , t \leq -0,5 \\ t + 0,5 & , -0,5 \leq t \leq 0,5 \\ 1 & , t \geq 0,5 \end{cases} =: \text{sramp} \end{aligned}$$

Alternative: Berechnen Sie das Rampensignal von Beispiel (b) nochmal aus (a) mit Hilfe der Faltungseigenschaften (Satz 4.6) und $\text{rect}(t) := \epsilon(t + 0,5) - \epsilon(t - 0,5)$ (Def. 4.3):

179

c)

$$\begin{aligned} \text{rect}(t) * \epsilon(t) &= (\epsilon(t + 0,5) - \epsilon(t - 0,5)) * \epsilon(t) \\ &\stackrel{(III)}{=} \epsilon(t + 0,5) * \epsilon(t) - \epsilon(t - 0,5) * \epsilon(t) \\ &\stackrel{(VII.a)}{=} \text{ramp}(t + 0,5) - \text{ramp}(t - 0,5) = \text{sramp}(t) \end{aligned}$$

(a) Faltung $\varepsilon(t) * \varepsilon(t)$ **(b) Faltung $\text{rect}(t) * \varepsilon(t)$** 

Zeigen und skizzieren Sie durch entsprechendes Vorgehen wie bei den vorigen Beispielen (siehe auch Übungen ???):

$$\text{d) } \text{rect}(t) * \text{rect}(t) = \text{tri}(t) \quad (4.4)$$

$$\text{e) } \text{rect}(t) * (\delta(t + 100) + \delta(t - 100)) = \text{rect}(t + 100) + \text{rect}(t - 100)$$

$$\text{e) } \text{rect}(t) * (\text{rect}(t + 100) + \text{rect}(t - 100)) = \text{tri}(t + 100) + \text{tri}(t - 100)$$

$$\text{f) } \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) * \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = T \cdot \text{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \quad (4.5)$$

$$\text{g) Für Signale } x, y \in \mathcal{V} \text{ und } a \in \mathbb{R} \text{ gilt allgemein: } x(at) * y(at) = \frac{1}{|a|} (x * y)(at) \quad (4.6)$$

Bemerkungen:

- Die Faltung zweier zeitbeschränkter Signale ist offenbar wieder zeitbeschränkt (vgl. Lemma 2.10 auf Seite 27):

$$x \in \mathcal{V}_{[a,b]}, y \in \mathcal{V}_{[c,d]} \Rightarrow x * y \in \mathcal{V}_{[a+c,b+d]} \quad (4.7)$$

- Eine typische Anwendung der Faltung ist die Signalfilterung: Z.B. bewirkt die Faltung mit einem rect-Signal eine Signalgättung (vgl. Figur auf Seite 29).

Weitere Übungsaufgaben: Blatt ???: A???

4.3 Energie, Leistung, Skalarprodukt und Korrelation

Die Definitionen für diskrete Signale aus Kapitel 2.5 ergeben sich nach Ersetzen der Summen durch Integrale (siehe Seite 83) auch für analoge Signale.

Definition 4.7: Energie und Leistung analoger Signale

Sei $x(t) \in \mathcal{V}$ ein analoges Signal. Dann nennt man E_x die Energie und P_x die Leistung des Signals x mit

$$E_x := \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt, \quad P_x := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt.$$

Außerdem heißt $x(t)$ Energiesignal falls $0 < E_x < \infty$,

und $x(t)$ heißt Leistungssignal falls $0 < P_x < \infty$.

Die Menge aller Energie- bzw. Leistungssignale bezeichnen wir mit \mathcal{V}^E bzw. \mathcal{V}^P .

Bemerkungen:

- Die Definitionen entsprechen Def. 2.13 auf Seite 33.
- Die Definition von P_x motiviert sich wieder aus der Tatsache, dass die Momentanleistung $p(t) = u^2(t)/R = Ri^2(t)$ etwa an einem Ohm'schen Widerstand R proportional zum Quadrat der Spannung $u(t)$ bzw. des Stroms $i(t)$ ist (siehe z.B. Skript Elektrotechnik, (2.14) auf Seite 25). Dann ist $1/T \int_{-T/2}^{T/2} |p(t)|^2 dt$ die mittlere Leistung im Zeit-Intervall $[-T/2, T/2]$ (siehe Skript Elektrotechnik, Seite 64). D.h. die mittlere Leistung über alle Zeiten ist $P_u/R = P_i R$. Somit entspricht obige Definition bis auf den Faktor R bzw. $1/R$ genau der physikalischen Definition von Leistung (von Spannungs- oder Stromsignalen).
- Die Definition von E_x motiviert sich ähnlich aus der Tatsache, dass Energie der mittleren Leistung mal Zeit entspricht (siehe Skript Elektrotechnik, Kap. 1.3).
- Für kausale Leistungssignale definiert man manchmal auch

$$P_x := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt,$$

und für periodische Leistungssignale

$$P_x := \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt.$$

- Man kann leicht zeigen, dass auch $(\mathcal{V}^E, +, \cdot)$ und $(\mathcal{V}^P, +, \cdot)$ Vektorräume sind (z.B. ist die Summe zweier Energiesignale oder die Skalierung eines Energiesignals wieder ein Energiesignal, und die Rechengesetze ändern sich auch nicht, d.h. alle Vektorraumaxiome bleiben erfüllt).

Der Grund für eine Unterscheidung zwischen Energie und Leistungssignalen ist wieder die Notwendigkeit geeignete Skalarprodukte definieren zu können um die Resultate über normierte Vektorräume (siehe Skript Mathe-I, Kapitel 8.2, 8.3) auch auf analoge Signale anwenden zu können (etwa über Skalarprodukt, Winkel, Ähnlichkeit, ...):

Definition 4.8: Skalarprodukt zweier analoger Signalvektoren

Seien $x(t)$ und $y(t)$ zwei Signale. Dann nennt man $\vec{x} \cdot \vec{y}$ oder gleichbedeutend $\langle x(t), y(t) \rangle$ Skalarprodukt oder Inneres Produkt der Signale $x(t)$ und $y(t)$. Wir definieren wieder verschiedene Skalarprodukte

$$\begin{aligned}\langle x(t), y(t) \rangle_E &:= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) \cdot y(t) dt \\ \langle x(t), y(t) \rangle_P &:= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t) \cdot y(t) dt\end{aligned}$$

für Energie- und Leistungssignale, wobei x^* das konjugiert komplexe Signal bezeichnet.

Damit können wir wieder die Euklidische Norm eines Energie- oder Leistungssignals $x(t)$ definieren:

$$\begin{aligned}\|x(t)\|_E &:= \sqrt{\langle x(t), x(t) \rangle_E} = \sqrt{E_x} \quad \text{bzw.} \\ \|x(t)\|_P &:= \sqrt{\langle x(t), x(t) \rangle_P} = \sqrt{P_x} .\end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Die Definitionen entsprechen Def. 2.14 auf Seite 2.14. Fasst man die Integrale wieder als Grenzfall einer Summe auf (siehe Seite 83), dann entsprechen diese Definitionen also immer noch genau dem in Mathe-I definierten Skalarprodukt in Vektorräumen (siehe Skript Mathe-I, S. 180, Def. 8.9).
- Für auf ein Intervall $[a, b]$ zeitbeschränkte (Energie-) Signale x, y folgt damit

$$\langle x(t), y(t) \rangle_E = \int_a^b x^*(t) \cdot y(t) dt . \quad (4.8)$$

- Für T -periodische (Leistungs-) Signale $x(t), y(t)$ verwendet man oft (da das Integral dann nicht konvergiert)

$$\langle x(t), y(t) \rangle_T := \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t) \cdot y(t) dt = \langle x(t) \text{rect}(t/T), y(t) \text{rect}(t/T) \rangle_E , \quad (4.9)$$

d.h. man betrachtet nur eine Periode der Signale (wodurch sie zu zeitbeschränkten Energiesignalen werden).

- Wenn es klar (oder unerheblich) ist ob wir Energie- oder Leistungssignale betrachten, dann schreiben wir wieder einfach $\langle x(t), y(t) \rangle$ bzw. $\|x(t)\|$.
- Die Definitionen für Leistungssignale sind notwendig, da man ansonsten z.B. nicht die Norm $\|x(t)\|$ für eine Gleichspannungsquelle $x(t) = U_0 > 0 \forall t$ berechnen könnte (weil $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$ nicht konvergiert).
- Um das Skalarprodukt nicht mit der komponentenweise Multiplikation $x(t) \cdot y(t)$ zu verwechseln, verwenden wir meistens die Notation $\langle x(t), y(t) \rangle$.
- Man kann wieder leicht zeigen, dass $(\mathcal{V}^E, +, \cdot, \|\cdot\|_E)$ und $(\mathcal{V}^P, +, \cdot, \|\cdot\|_P)$ sowie $(\mathcal{V}_{[t_1, t_2]}, +, \cdot, \|\cdot\|_E)$ und $(\mathcal{V}_T, +, \cdot, \|\cdot\|_T)$ alles normierte Vektorräume sind (Gültigkeit der Axiome nachweisen, siehe Skript Mathe-I, S. 168,174, Def. 8.1,8.4). Es übertragen sich also alle Ergebnisse über Skalarprodukt und Winkel von Vektoren auf analoge Signale. Insbesondere kann man den Winkel Φ zwischen zwei Signalen als Ähnlichkeitsmaß für die Korrelationsanalyse verwenden:

Satz 4.9: Winkel zwischen Signalen, Eigenschaften des Skalarprodukts

Als Winkel Φ zwischen zwei Signalen $x(t)$ und $y(t)$ definiert man den Winkel zwischen den entsprechenden Signalvektoren, d.h. es gilt:

$$\cos \Phi = \frac{\langle x(t), y(t) \rangle}{\|x(t)\| \cdot \|y(t)\|}$$

Insbesondere ist das Skalarprodukt $\langle x(t), y(t) \rangle$ also ein Maß für die Ähnlichkeit der Signale $x(t)$ und $y(t)$, denn es gilt:

- $|\langle x(t), y(t) \rangle| \leq \|x(t)\| \cdot \|y(t)\|$.
- Maximale Ähnlichkeit: $\langle x(t), y(t) \rangle = \|x(t)\| \cdot \|y(t)\|$;
genau dann, wenn der Winkel zw. $x(t)$, $y(t)$ genau $\Phi = 0$ und $\cos \Phi = 1$ ist;
genau dann, wenn $x(t) = c \cdot y(t)$ für ein $c > 0$.
- Maximale Unähnlichkeit: $\langle x(t), y(t) \rangle = -\|x(t)\| \cdot \|y(t)\|$;
genau dann, wenn der Winkel $\Phi = \pi = 180^\circ$ und $\cos \Phi = -1$ ist;
genau dann, wenn $x(t) = -c \cdot y(t)$ für ein $c > 0$.
- Orthogonalität : $\langle x(t), y(t) \rangle = 0$
genau dann, wenn der Winkel $\Phi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ und $\cos \Phi = 0$ ist;
genau dann, wenn $x(t) \perp y(t)$.

Beweis: Siehe Satz 2.15 auf Seite 2.15. Folgt direkt aus den Eigenschaften des Skalarprodukts (siehe Skript Mathe-I, S. 8.10, Satz 8.10). \square

Beispiel 1: Berechnen Sie Energie bzw. Euklidische Länge sowie die Winkel Φ zwischen (verschieden) verschobenen Dirac-Signalen $\delta(t - \tau_1)$ und $\delta(t - \tau_2)$.

Lösung: Wegen $\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \text{rect}(t/T)$ (siehe Seite 87) gilt

$$E_{\delta(t-\tau)} = \|\delta(t-\tau)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta^2(t-\tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\tau-\frac{T}{2}}^{\tau+\frac{T}{2}} \frac{a}{T^2} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a}{T} = \infty$$

$$\cos \Phi = \frac{\langle \delta(t-\tau_1), \delta(t-\tau_2) \rangle}{\|\delta(t-\tau_1)\| \cdot \|\delta(t-\tau_2)\|} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau_1) \cdot \delta(t-\tau_2) dt}{\infty \cdot \infty} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} 0 dt}{\infty} = 0$$

181

Bemerkung: Die Dirac-Signalvektoren $\delta(t - \tau)$ sind also nicht normiert und für verschiedene Verzögerungen τ orthogonal. Für Norm und Energie 1 müsste man $\delta(t)$ umskalieren, sodass die Fläche unter dem *quadrierten* Signal 1 ergibt:

$$\delta_e(t) := \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{T}} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad \left(= \delta(t) d\tau \text{ für } d\tau := \sqrt{T} \rightarrow 0 \right). \quad (4.10)$$

Damit ist $E_{\delta_e(t-\tau)} = \|\delta_e(t-\tau)\| = 1$ und die Menge aller verschobener Dirac-Impulse

$$B_0 := \{\delta_e(t - \tau) | \tau \in \mathbb{R}\} \quad (4.11)$$

bildet eine Orthonormalbasis des Signal-Vektorraums \mathcal{V} (siehe Skript Mathe-I, S. 190, Def. 8.16). D.h. man kann jedes Signal $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$ als “Linearkombination” der Basisvektoren $\delta_e(t - \tau) = \delta(t - \tau) d\tau$ darstellen (siehe Satz 4.4.III auf Seite 87). Hierbei ist der Signalpegelwert $x(\tau)$ gerade die Koordinate zum Basisvektor $\delta_e(t - \tau)$. D.h. die $\delta_e(t - \tau)$ entsprechen genau den Einheitsvektoren \vec{e}_i der Standard-Orthonormalbasis vom \mathbb{R}^n , wie z.B. bei $(-3 \ 6 \ 5) = -3\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ (siehe Skript Mathe-I, S. 190, Bsp. nach Def. 8.16).

Beispiel 2: Berechnen Sie Euklidische Längen sowie den Winkel Φ zwischen (verschiedenen) verschobenen Rechteck-Signalen $\text{rect}(t - \tau_1)$ und $\text{rect}(t - \tau_2)$.

Lösung:

$$\begin{aligned} \|\text{rect}(t - \tau)\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}^2(t - \tau) dt \stackrel{\lambda=t-\tau}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(\lambda) d\lambda \stackrel{(Def. rect)}{=} 1 \\ \cos \Phi &= \frac{\langle \text{rect}(t - \tau_1), \text{rect}(t - \tau_2) \rangle}{\|\text{rect}(t - \tau_1)\| \cdot \|\text{rect}(t - \tau_2)\|} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(\lambda) \cdot \text{rect}(\lambda - ((\tau_2 - \tau_1))) d\lambda}{1 \cdot 1} \\ &\stackrel{(symmrect)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(\lambda) \text{rect}((\tau_2 - \tau_1) - \lambda) d\lambda \\ &\stackrel{(Def. Faltung)}{=} (\text{rect} * \text{rect})(\tau_2 - \tau_1) \\ &\stackrel{S91, Bsp. d}{=} \text{tri}(\tau_2 - \tau_1) \\ \implies \Phi &= \arccos \text{tri}(\tau_2 - \tau_1) \end{aligned}$$

182

D.h. alle Rechtecksignale sind normiert (d.h. Norm 1) und die Winkel Φ liegen je nach Überlapp zwischen 0 Grad (voller Überlapp) und 90 Grad (kein Überlapp).

Beispiel 3: Berechnen Sie Euklidische Längen sowie den Winkel Φ zwischen Sinus- und Kosinussignalen $x_n(t) := \sin(n\omega_0 t)$ und $y_n(t) := \cos(n\omega_0 t)$ deren Frequenzen $n\omega_0$ ganzzahlige Vielfache $n \in \mathbb{N}_0$ einer Grundfrequenz ω_0 sind!

Lösung: Alle Signale sind offenbar periodisch mit der Grundperiode $T = 2\pi/\omega_0$ (vgl. Skript Elektrotechnik, S.50, (3.3)), sodass wir das Skalarprodukt (4.9) von Seite 93 verwenden können. Da wir hierfür Sinussignale unterschiedlicher Frequenzen multiplizieren müssen, verwenden wir am einfachsten die komplexe Exponentialfunktion $e^{jn\omega_0 t} = \cos(n\omega_0 t) + j \sin(n\omega_0 t)$ (Euler'sche Relation, siehe Skript Mathe-I, S. 152, Satz 7.5.I) mit

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} e^{jn\omega_0 t} dt &= \begin{cases} \frac{1}{jn\omega_0} [e^{jn\omega_0 t}]_{-T/2}^{T/2} = \frac{2}{n\omega_0} \frac{e^{jn\omega_0 \pi/\omega_0} - e^{-jn\omega_0 \pi/\omega_0}}{2j} = \frac{2}{n\omega_0} \operatorname{Im}(e^{jn\pi}) & , n > 0 \\ \int_{-T/2}^{T/2} dt = T & , n = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{2}{n\omega_0} \sin(n\pi) = 0 & , n > 0 \\ \int_{-T/2}^{T/2} dt = T & , n = 0 \end{cases} = T\delta[n] \end{aligned} \quad (4.12)$$

Denn damit ergeben sich die Skalarprodukte für $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$ mit $\sin(x) = \operatorname{Im}(e^{jx}) = \frac{1}{2j}(e^{jx} - e^{-jx})$ bzw. $\cos(t) = \operatorname{Re}(e^{jx}) = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx})$ (siehe Skript Mathe-I, S. 152, Satz 7.5.I) zu

183

$$\begin{aligned} \langle \sin(n\omega_0 t), \sin(m\omega_0 t) \rangle_T &= \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{2j} (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) \cdot \frac{1}{2j} (e^{jm\omega_0 t} - e^{-jm\omega_0 t}) dt \\ &= -\frac{1}{4} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j(n+m)\omega_0 t} - e^{j(m-n)\omega_0 t} - e^{j(n-m)\omega_0 t} + e^{-j(n+m)\omega_0 t} dt \\ &\stackrel{(4.12)}{=} -\frac{T}{4} (\delta[n+m] - \delta[m-n] - \delta[n-m] - \delta[-(n+m)]) \\ &= \frac{T}{4} \cdot (2\delta[n-m] - 2\delta[n+m]) = \frac{T}{2} \delta[n-m] = \begin{cases} 0 & , n \neq m \\ \frac{T}{2} & , n = m \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.13)$$

und nach ähnlicher Rechnung (Details siehe Übungsaufgaben ????) findet man

$$\langle \cos(n\omega_0 t), \cos(m\omega_0 t) \rangle_T = \frac{T}{2} \delta[n-m] = \begin{cases} 0 & , n \neq m \\ T/2 & , n = m \neq 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

$$\langle \sin(n\omega_0 t), \cos(m\omega_0 t) \rangle_T = 0 \quad (4.15)$$

D.h. alle Sinus- bzw. Kosinussignale haben Energie $T/2$ und sind orthogonal zueinander (mit Winkel $\Phi = \pi/2$). Zusammenfassend gilt also der folgende Satz:

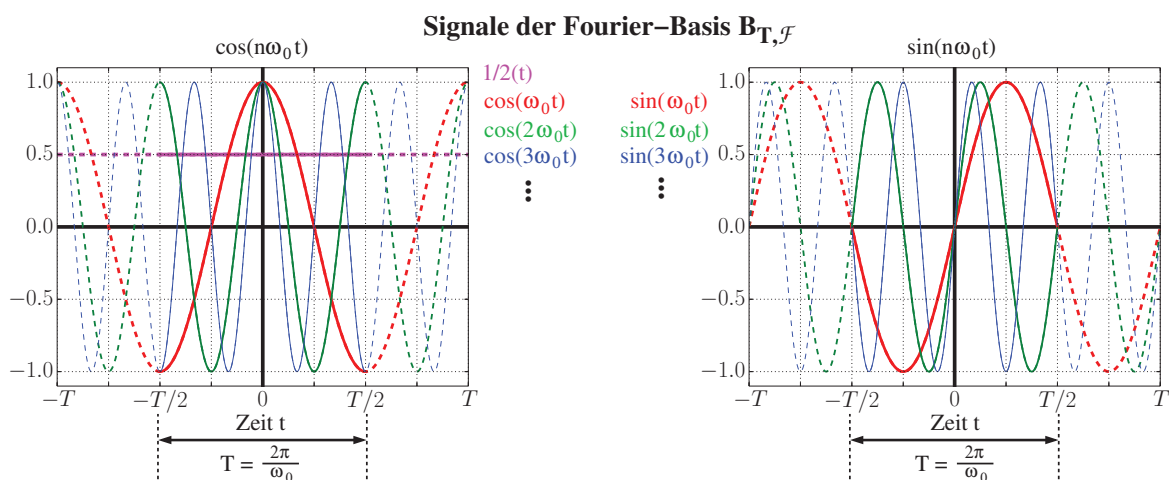
Satz 4.10: Basen periodischer Signlräumen, Fourier-Basis

Für den normierten Vektorraum \mathcal{V}_T aller T -periodischen Signale (mit dem Skalarprodukt (4.9) von Seite 93) mit entsprechender Grundfrequenz $\omega_0 := 2\pi/T$ gilt:

- I) $B_{T,0} := \{\delta_e(t - \tau) | \tau \in [-T/2, T/2]\}$ bildet eine Orthonormalbasis von \mathcal{V}_T mit überabzählbar unendlicher Dimensionalität.
- II) $B_{T,\mathcal{F}} := \{\frac{1}{2}, \cos(n\omega_0 t), \sin(n\omega_0 t) | n = 1, 2, 3, \dots\}$ ist eine Orthogonalbasis des Unterraums $\mathcal{V}_{T,\mathcal{F}}$ von \mathcal{V}_T mit abzählbarer Dimensionalität.

Hierbei haben die Basissignale die Normen

$$\|\frac{1}{2}(t)\| = \sqrt{\frac{T}{4}} \text{ und } \|\cos(n\omega_0 t)\| = \|\sin(n\omega_0 t)\| = \sqrt{\frac{T}{2}}.$$

**Bemerkungen:**

- $B_{T,0}$ entspricht der Standardbasis (4.11) von Seite 95 für T -periodische Signale. Die Zeitverschiebung $|\tau|$ der Dirac-Impulse $\delta_e(t - \tau)$ darf dabei höchstens $\frac{T}{2}$ sein.
- $B_{T,\mathcal{F}}$ nennt man auch “Fourier-Basis” (siehe obige Skizze). Hierbei steht das Basissignal $\frac{1}{2}$ für die konstante Funktion $\frac{1}{2}(t) := 0.5$, welche bis auf den Faktor 0.5 dem Signal $\cos(n\omega_0 t)$ für $n = 0$ entspricht.
- Im folgenden Kapitel 5 werden wir mit Hilfe der Fourier-Reihenentwicklung bzw. Fourier-Transformation versuchen Signale $x(t)$ bezüglich $B_{T,\mathcal{F}}$ darzustellen, z.B. als Reihe $x(t) = a_0 \frac{1}{2} + \sum_n a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_n b_n \sin(n\omega_0 t)$. Die Gewichte bzw. “Koordinaten” a_n, b_n werden wir dort mit Hilfe der Linearen Algebra berechnen (siehe Skript Mathe-I, Kap. 8.7 über Koordinatentransformationen und Projektionen)

- Da $B_{T,\mathcal{F}}$ eine kleinere Kardinalität als $B_{T,0}$ hat können wir allerdings nicht hoffen, alle periodischen Signale aus ganz \mathcal{V}_T darstellen zu können. Z.B. kann man Signale die Sprünge enthalten nicht exakt darstellen, da $B_{\mathcal{F}}$ nur stetige Basis-Signale enthält.
- Trotzdem gelingt die Zerlegung in sinusförmige Signale zumindest für stetige Signale sehr gut. Damit werden wir wie in Kapitel 1.2 angedeutet z.B. Signalübertragung in elektrischen Stromkreisen (oder allgemeiner in kontinuierlichen LTI-Systemen) für beliebige periodische Signale beschreiben.
- Bei der Fourier- und Laplace-Transformation werden wir dann sogar noch den Grenzfall $T \rightarrow \infty$ bzw. $\omega_0 \rightarrow 0$ betrachten. Dadurch wird auch $B_{\mathcal{F}}$ überabzählbar und man kann eine viel größere Zahl – auch nichtperiodischer – Signale darstellen bzw. deren Übertragung durch LTI-Systeme beschreiben.

Wir beenden dieses Kapitel indem wir noch die Definition von Korrelationsfunktionen für kontinuierliche Signale wiederholen:

Definition 4.11: Korrelation

Seien $x(t), y(t) \in \mathcal{V}$ zwei kontinuierliche Signale.

Dann definieren wir wieder die Kreuzkorrelationsfunktion für $x(t)$ und $y(t)$ und die Autokorrelationsfunktion für $x(t)$ wieder als

$$\varphi_{xy}(\tau) := \langle x(t), y(t + \tau) \rangle, \quad \varphi_{xx}(\tau) := \langle x(t), x(t + \tau) \rangle,$$

wobei man für Energie- bzw. Leistungssignale auch explizit $\varphi_{xy}^E[\kappa]$ bzw. $\varphi_{xy}^P[\kappa]$ schreibt (unter Verwendung des entsprechenden Skalarprodukts).

Bemerkungen:

- Die Definition entspricht genau Def. 2.16 auf Seite 35. D.h. $\varphi_{xy}(\tau)$ ist das Skalarprodukt von $x(t)$ und dem um τ nach links verschobenen $y(t)$. Außer dem ist $\varphi_{xx}(\tau)$ ein Spezialfall von $\varphi_{xy}(\tau)$ für $x = y$.
- Offenbar kann man wieder Energie bzw. Leistung mit Hilfe der Autokorrelation berechnen,

$$E_x = \varphi_{xx}^E(0) \quad \text{bzw.} \quad P_x = \varphi_{xx}^P(0),$$

wobei $\varphi_{xx}(\tau)$ für $\tau = 0$ ihr Maximum annimmt (da dann $\Phi = 0^\circ$ und $\cos \Phi = 1$ am größten ist).

- Sind die Signale normiert ($\|x[k]\| = \|y[k]\| = 1$) so spricht man von normierten Korrelationsfunktionen. Für nicht normierte Signale sind die

normierten Korrelationsfunktionen wieder durch

$$\varphi_{xy}^N(\tau) := \frac{\langle x(t), y(t+\tau) \rangle}{\|x(t)\| \cdot \|y(t)\|} \quad \text{bzw.} \quad \varphi_{xx}^N(\tau) := \frac{\langle x(t), x(t+\tau) \rangle}{\|x(t)\|^2}$$

definiert. Es gilt dann $|\varphi_{xy}^N(\tau)| \leq 1$ bzw. $|\varphi_{xx}^N(\tau)| \leq 1$.

Satz 4.12: Korrelation und Faltung

Die Korrelation lässt sich mit Hilfe der Faltungsoperation berechnen. Es gilt:

$$\varphi_{xy}^E(\tau) = x^*(-\tau) * y(\tau) \quad \text{bzw.} \quad \varphi_{xy}^P(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} x_T^*(-\tau) * y_T(\tau)$$

wobei im letzten Fall $x_T(\tau) := x(\tau) \cdot \text{rect}(\tau/T)$ bzw. $y_T(\tau) := y(\tau) \cdot \text{rect}(\tau/T)$ die auf Zeiten $-T/2 \leq \tau < T/2$ zeitbeschränkten Signale sind.

Beweis: Entspricht dem Beweis von Satz 2.17 auf Seite 36:

$$\begin{aligned} \varphi_{xy}^E(\tau) &= \langle x(t), y(t+\tau) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) y(t+\tau) dt \stackrel{(t=-\lambda)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x^*(-\lambda) y(\tau - \lambda) d\lambda \\ &= x^*(-\tau) * y(\tau) \end{aligned}$$

Für Leistungssignale gilt entsprechendes. □

Bemerkungen:

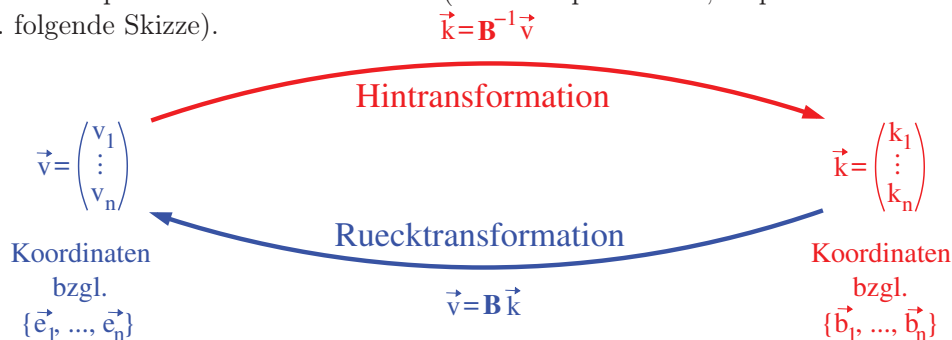
- Für die Auto-Korrelationen gelten natürlich wieder die entsprechenden Beziehungen, z.B. $\varphi_{xx}^E(\tau) = x^*(-\tau) * x(\tau)$.
- Typische Anwendungen der Korrelationsanalyse umfassen wieder z.B. Detektion periodischer Signale und Berechnung von Signal-Verzögerungen (vgl. die Beispiele für den diskreten Fall auf Seite 38).

Weitere Übungsaufgaben: Blatt ???: A???

Kapitel 5

Fourier-Transformation und Laplace-Transformation

Dieses Kapitel behandelt Koordinatentransformationen in Signalräumen, z.B. zwischen der Standardbasis $B_{0,T}$ der verschobenen Dirac-Impulse und der Fourier-Basis $B_{T,\mathcal{F}}$ aller harmonischen Sinus- und Kosinussignale (siehe Satz 4.10 von Seite 97). Um dies gut zu verstehen empfiehlt es sich das Thema Koordinatentransformationen und Projektionen im Skript Mathe-1 zu wiederholen (siehe Skript Mathe-I, Kapitel 8.7 ab Seite 210; vgl. folgende Skizze).



Beispiel aus der Linearen Algebra: Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{b}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b}_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ im } \mathbb{R}^3.$$

a) Bestimmen Sie eine lineare Abbildung, welche für einen beliebigen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ die Koordinaten $\vec{k} = (k_1 \ k_2 \ k_3)^T$ bezüglich der Basis $\mathcal{B} := \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ berechnet (so dass also $\vec{v} = k_1 \vec{b}_1 + k_2 \vec{b}_2 + k_3 \vec{b}_3$ gilt).

b) Nun habe die Basis $\mathcal{B}_1 := \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ nur zwei Vektoren, sodass sie nur einen Unterraum (hier eine Ebene) des \mathbb{R}^3 aufspannt. Geben Sie wiederum eine lineare Abbildung an welche für $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ die Projektion \vec{v}_p in diesen Unterraum in Koordinaten $\vec{k}_p = (k_1 \ k_2)^T$ bzgl. $\mathcal{B}_1 := \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ berechnet.

Lösung: a) Für $\mathbf{B} := (\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \vec{b}_3)$ gilt $\vec{v} = \mathbf{B}\vec{k} = k_1\vec{b}_1 + k_2\vec{b}_2 + k_3\vec{b}_3$ (siehe Skript Mathe-I, S. 210, Satz 8.28). Auflösen nach \vec{k} ergibt also den Koordinatenvektor

184

$$\vec{k} = B^{-1} \cdot \vec{v} \quad (5.1)$$

Falls \mathcal{B} eine Orthogonalbasis wäre, könnten wir die Inverse $\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\vec{b}_1}{\|\vec{b}_1\|^2} & \dots & \frac{\vec{b}_3}{\|\vec{b}_3\|^2} \end{pmatrix}^T$ besonders einfach berechnen (siehe Skript Mathe-I, S. 212, Satz 8.29 über Invertierung orthogonaler Matrizen). Dies ist tatsächlich der Fall, denn

185

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = 2 - 4 + 2 = 0; \quad \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_3 = 2 + 2 - 4 = 0; \quad \vec{b}_2 \cdot \vec{b}_3 = 4 - 2 - 2 = 0;$$

mit gleichen quadrierten (eukl.) Längen

$$\|\vec{b}_1\|^2 = 1 + 4 + 4 = 9; \quad \|\vec{b}_2\|^2 = 4 + 4 + 1 = 9; \quad \|\vec{b}_3\|^2 = 4 + 1 + 4 = 9$$

Deshalb gilt nach Ausklammern von $\|\vec{b}_1\|^2 = \|\vec{b}_2\|^2 = \|\vec{b}_3\|^2 = 9$ also

186

$$B^{-1} = \overline{\begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \\ \|\vec{b}_1\|^2 & \|\vec{b}_2\|^2 & \|\vec{b}_3\|^2 \end{pmatrix}}^T = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

und damit sind die Koordinaten \vec{k} von $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ bezüglich der neuen Basis nach (5.1)

187

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot \vec{v} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{v} \quad (5.3)$$

b) Falls $\mathcal{B}_1 := \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ weniger Basisvektoren als die Dimensionalität des Originalraums \mathbb{R}^2 hat, nimmt man von (5.3) einfach die ersten beiden Koordinaten, welche den Basisvektoren \vec{b}_1, \vec{b}_2 entsprechen:

188

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \vec{v} \quad (5.4)$$

Mit diesen Koordinaten ist $\vec{v}_p = k_1\vec{b}_1 + k_2\vec{b}_2$ gerade die Projektion von \vec{v} auf die durch \vec{b}_1 und \vec{b}_2 aufgespannte (Ursprungs-)Ebene, welche einen Unterraum des \mathbb{R}^3 darstellt. Hierbei ist die Projektion \vec{v}_p derjenige Punkt auf der Ebene, welcher den kleinsten Abstand zum Originalpunkt \vec{v} hat (siehe Skript Mathe-I, S. 216, Satz 8.31 über Orthogonale Projektionen).

Im folgenden betrachten wir Fourier- und Laplace-Transformationen als eben solche projektive Koordinatentransformationen (allerdings in unendlich-dimensionalen Signal-Vektorräumen).

Weitere Übungsaufgaben: Blatt ???: A???

5.1 Fourier-Reihen-Entwicklung

Nach Satz 4.10 von Seite 97 bilden die harmonischen Sinus- und Kosinussignale $\sin(n\omega_0 t)$ und $\cos(n\omega_0 t)$ für Vielfache $n \in \mathbb{N}_0$ der Grundfrequenz $\omega_0 := 2\pi/T$ eine Orthogonalbasis $B_{T,\mathcal{F}}$ des Fourier-Raums $\mathcal{V}_{T,\mathcal{F}}$, welcher ein Unterraum der T -periodischen Signale \mathcal{V}_T ist. Damit können wir ähnlich wie im vorigen Beispiel T -periodische Signale $x(t) \in \mathcal{V}_T$ in diesen Unterraum projizieren und in Koordinaten bezüglich der Fourier-Basis $B_{T,\mathcal{F}} = \{\frac{1}{2}(t), \cos(n\omega_0 t), \sin(n\omega_0 t) | n = 1, 2, 3, \dots\}$ darstellen. D.h. wir können das Originalsignal $x(t)$ näherungsweise als gewichtete Summe

$$x_F(t) = a_0 \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t) \quad (\approx x(t)) \quad (5.5)$$

der Signalvektoren in $B_{T,\mathcal{F}}$ mit den Koordinaten a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) und b_n ($n = 1, 2, \dots$) darstellen. Falls $x(t) \in \mathcal{V}_{T,\mathcal{F}}$ dann gilt sogar exakte Gleichheit $x_F(t) = x(t)$, andernfalls ist $x_F(t)$ immerhin die bestmögliche Approximation von $x(t)$ im Fourier-Raum $\mathcal{V}_{T,\mathcal{F}}$ (siehe voriges Beispiel von Seite 101; vgl. Skript Mathe-I, S. 216, Satz 8.31 über Orthogonale Projektionen).

Im folgenden wollen wir diese Koordinaten a_n und b_n berechnen:

- Wir dürfen dabei ganz genau so wie im vorigen Beispiel von Seite 101 vorgehen, nur dass nun die Basis $\mathcal{B}_{T,\mathcal{F}} = \{\frac{1}{2}(t), \cos(\omega_0 t), \sin(\omega_0 t), \cos(2\omega_0 t), \sin(2\omega_0 t), \dots\}$ *unendlich* viele *Signalvektoren* mit Normen $\|\frac{1}{2}(t)\| = \sqrt{\frac{T}{4}}$ und $\|\cos(n\omega_0 t)\| = \|\sin(n\omega_0 t)\| = \sqrt{\frac{T}{2}}$ enthält (siehe Satz 4.10 auf Seite 97):
- Die Rücktransformations-“Matrix” \mathbf{B} hat wieder in jeder Spalte einen Basissignalvektor, d.h.

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(t) & \cos(\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) & \cos(2\omega_0 t) & \sin(2\omega_0 t) & \cdot \end{pmatrix}$$

189

- Damit erhält man die inverse “Matrix” (welche der Hintransformation entspricht) wieder ähnlich zu (5.2) durch Skalieren der Spalten mit den Kehrwerten der quadrierten Spaltennormen $T/4$ bzw. $T/2$ und Transponieren, d.h.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{T/4} \cdot \frac{1}{2}(t)^T \\ \frac{1}{T/2} \cdot \cos(\omega_0 t)^T \\ \frac{1}{T/2} \cdot \sin(\omega_0 t)^T \\ \frac{1}{T/2} \cdot \cos(2\omega_0 t)^T \\ \frac{1}{T/2} \cdot \sin(2\omega_0 t)^T \\ \vdots \end{pmatrix} = \frac{2}{T} \begin{pmatrix} 1(t)^T \\ \cos(\omega_0 t)^T \\ \sin(\omega_0 t)^T \\ \cos(2\omega_0 t)^T \\ \sin(2\omega_0 t)^T \\ \vdots \end{pmatrix}$$

190

sodass nun in jeder Matrixzeile ein (skalierter) Basissignalvektor steht.

- Man kann leicht nachprüfen, dass \mathbf{B}^{-1} tatsächlich die Inverse von \mathbf{B} ist, denn $\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}$ ergibt offenbar die (unendliche) Einheitsmatrix \mathbf{I} (siehe Skript Mathe-I, S. 201, Def. 8.24 der Inversen Matrix).

Obwohl es sich hier um unendlich große “Matrizen” handelt, kann man die Matrizenmultiplikation wie gewohnt ausrechnen (nämlich als Skalarprodukt von Zeilenvektoren der linken mit Spaltenvektoren der rechten Matrix), sodass sich 1en nur auf der Hauptdiagonalen ergeben (und sonst wegen der Orthogonalität der Basisvektoren lauter Nullen).

- Damit ergeben sich die Koordinaten der Projektion $x_F(t)$ bzgl. der Fourier-Basis $\mathcal{B}_{T,\mathcal{F}}$ ähnlich wie in (5.4) durch “Matrix-Vektor-Multiplikation” von \mathbf{B}^{-1} mit dem Originalsignal $x(t)$,

191

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{-1} \cdot (x(t)) = \frac{2}{T} \begin{pmatrix} 1(t)^T \\ \cos(\omega_0 t)^T \\ \sin(\omega_0 t)^T \\ \cos(2\omega_0 t)^T \\ \sin(2\omega_0 t)^T \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot (x(t)) = \frac{2}{T} \begin{pmatrix} \langle 1(t)^T, x(t) \rangle \\ \langle \cos(\omega_0 t), x(t) \rangle \\ \langle \sin(\omega_0 t), x(t) \rangle \\ \langle \cos(2\omega_0 t), x(t) \rangle \\ \langle \sin(2\omega_0 t), x(t) \rangle \\ \vdots \end{pmatrix}$$

welche Skalarprodukten der Zeilenvektoren von \mathbf{B}^{-1} mit dem Signalvektor $x(t)$ entspricht. Mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot \rangle_T$ für periodische Signale nach (4.9) von Seite 93 ergeben sich schließlich die Koordinaten

192

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt \\ a_1 &= \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot \cos(\omega_0 t) dt & b_1 &= \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot \sin(\omega_0 t) dt \\ a_2 &= \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot \cos(2\omega_0 t) dt & b_2 &= \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot \sin(2\omega_0 t) dt \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

- Damit ergibt sich eine einheitliche Berechnung der Koordinaten, welche man hier auch Fourier-Koeffizienten nennt. Da die Summe (5.5) unendlich viele Summanden enthält spricht man auch von einer Fourier-Reihe bzw. der Fourier-Reihen-Entwicklung eines Signals $x(t)$ (vgl. Skript Mathe-I, Kapitel 3 über Folgen und Reihen).

Wir fassen unsere Ergebnisse im folgenden Satz zusammen:

Satz 5.1: Fourier-Reihe, Fourier-Koeffizienten

Gegeben sei ein T -periodisches Signal $x(t)$ und die zugehörige Fourier-Basis $\mathcal{B}_{T,\mathcal{F}} = \{\frac{1}{2}(t), \cos(\omega_0 t), \sin(\omega_0 t), \cos(2\omega_0 t), \sin(2\omega_0 t), \dots\}$ mit der Grundfrequenz $\omega_0 := 2\pi/T$.

Dann heißen die Koordinaten $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ von $x(t)$ bzgl. $\mathcal{B}_{T,\mathcal{F}}$ Fourier-Koeffizienten der Fourier-Reihenentwicklung $x_F(t)$ von $x(t)$. Dabei gilt

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots$$

so dass

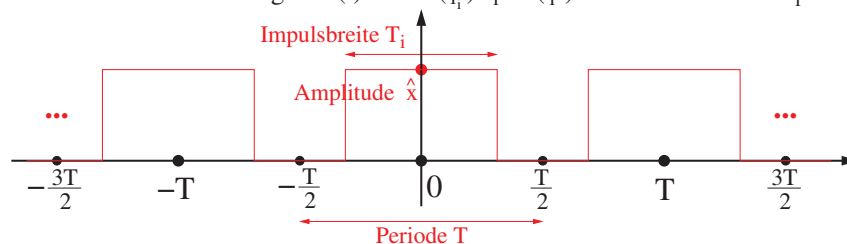
$$x(t) \approx x_F(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] ,$$

womit $x_F(t)$ die bestmögliche Approximation von $x(t)$ im von $\mathcal{B}_{T,\mathcal{F}}$ aufgespannten Signalraum ist (mit der kleinstmöglichen Euklidischen Distanz $\|x - x_F\|$).

Bemerkung: Die Fourier-Reihe $x_F(t)$ ist also die bestmögliche Approximation von $x(t)$ als gewichtete Summe von harmonischen Sinus- und Kosinusfunktionen. Man kann sogar die Konvergenz $x_F(t) = x(t)$ zeigen, falls $x(t)$ hinreichend "gutartig" ist (z.B. für stückweise stetige Funktionen $x(t)$; Beweis nicht hier).

Beispiel: Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten a_n und b_n für das periodische Rechtecksignal $x(t)$ mit Periodendauer T , Amplitude \hat{x} und Tastverhältnis T_i/T (siehe folgende Skizze).

Periodisches Rechtecksignal $x(t) = \hat{x} \cdot \text{rect}(\frac{t}{T_i}) * \frac{1}{T} \text{III}(\frac{t}{T})$ mit Tastverhältnis $\frac{T_i}{T}$



Lösung: Nach Satz 5.1 berechnen wir mit $\omega_0 = 2\pi/T$, der Symmetrie $\sin(-t) = -\sin(t)$ und $\text{si}(t) := \sin(t)/t$ (siehe Def. 4.3 auf Seite 85)

193

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\
&= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T_i}{2}}^{\frac{T_i}{2}} \hat{x} \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2\hat{x}}{T} \left[\frac{\sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \right]_{-\frac{T_i}{2}}^{\frac{T_i}{2}} \\
&= \frac{2\hat{x}}{T} \left(\sin(n\omega_0 \frac{T_i}{2}) - \sin(-n\omega_0 \frac{T_i}{2}) \right) \\
&= \frac{4\hat{x}}{T \cdot \frac{2}{T_i}} \left(\frac{\sin(n\omega_0 \frac{T_i}{2})}{n\omega_0 \frac{T_i}{2}} \right) = 2\hat{x} \frac{T_i}{T} \text{si} \left(n \frac{2}{T} \cdot \frac{T_i}{2} \right) \\
&= 2\hat{x} \frac{T_i}{T} \text{si} \left(n \cdot \pi \cdot \frac{T_i}{T} \right)
\end{aligned}$$

für $n = 0, 1, 2, \dots$, sowie wegen der Symmetrie $\cos(-t) = \cos(t)$

194

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt \\
&= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T_i}{2}}^{\frac{T_i}{2}} \hat{x} \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{2\hat{x}}{T} \left[\frac{-\cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \right]_{-\frac{T_i}{2}}^{\frac{T_i}{2}} \\
&= \frac{2\hat{x}}{T n \omega_0} \left(-\cos(n\omega_0 \frac{T_i}{2}) + \cos(-n\omega_0 \frac{T_i}{2}) \right) = 0
\end{aligned}$$

für $n = 1, 2, \dots$. Mit $\text{si}(0) = 1$ sind die Fourier-Koeffizienten für das periodische Rechtecksignal damit

195

$$a_0 = 2\hat{x} \frac{T_i}{T}, \quad 2\hat{x} \frac{T_i}{T} (n \cdot \pi \cdot \frac{T_i}{T}), \quad b_n = 0 \quad (5.6)$$

und damit ist die Fourierentwicklung des periodischen Rechtecksignals $x(t)$

196

$$\begin{aligned}
(X_F(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) \\
&= \hat{x} \frac{T_i}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} 2\hat{x} \frac{T_i}{T} \text{si}(n\pi \frac{T_i}{T}) \cdot \cos(n\omega_0 t) \\
&= 2\hat{x} \frac{T_i}{T} \left(\frac{1}{2} + \text{si}(\pi \frac{T_i}{T}) \cdot \cos(\omega_0 t) + \text{si}(2\pi \frac{T_i}{T}) \cdot \cos(2\omega_0 t) \right. \\
&\quad \left. + \text{si}(3\pi \frac{T_i}{T}) \cdot \cos(3\omega_0 t) + \dots \right) \quad (5.7)
\end{aligned}$$

Beispiel: Berechnen Sie – etwa mit Hilfe von Matlab – die ersten $N = 5$ Fourier-Koeffizienten und berechnen Sie damit die Summe der ersten N Summanden der Fourierentwicklung (5.7) des periodischen Rechtecksignals mit $T = 4$, $T_i/T = 1/4$ und $\hat{x} = 1$. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit dem ursprünglichen Rechtecksignal $x(t)$.

Lösung: Das folgende Matlab-Programm berechnet die geforderten Fourierkoeffizienten sowie die Summe der ersten Terme der Reihenentwicklung $x_F(t)$, und stellt $x_F(t)$ und $x(t)$ in einem Schaubild dar:

```
% *** (i) Parameter der periodischen Rechteckfunktion
x_hat = 1, T=4, TiT=1/4; % Amplitude, Periode und Tastverhaeltnis
omega0=2*pi/T;          % Grundfrequenz
% *** (ii) Berechne Fourierkoeffizienten a_n
N=5, n=1:N;              % Berechne die ersten N+1 Four.-Koeffizienten
a0 = 2*x_hat*TiT;        % Sonderfall a_0
an = 2*x_hat*TiT.*sinc(n*TiT); % restliche a_n (mit sinc(x):=si(pi*x))
% *** (iii) Berechne Summe der ersten N Glieder der Fourier-Reihe xF(t)
t=-5:0.001:5;            % Zeitachse von -5 bis 5 mit Abstand 0.001
xF = a0/2*ones(size(t)); % Initialisiere mit Glied Term (a0)
for i=1:N,
    summand_n = an(i)*cos(n(i)*omega0*t); % n-ter Summand der Reihe
    xF=xF+summand_n;                     % Addiere n-ten Term zu xF
end;
% *** (iv) Erstelle Plots
figure, subplot(2,1,1)
plot(t,xF,'r-', t,summand_n,'g--'); % Plotte xF und letzten Summand
xlabel('Zeit t'), ylabel(['xF(t) fuer N=' num2str(N)]) % Achsenbeschrift.
grid,axis([-5 5 -0.5 1.5]);          % Gitter und Achsenlimits
```

Nach Ausführung liefert das Programm die folgenden Fourierkoeffizienten a_0 und a_n des periodischen Rechtecksignals für $n = 1, 2, 3, 4, 5$:

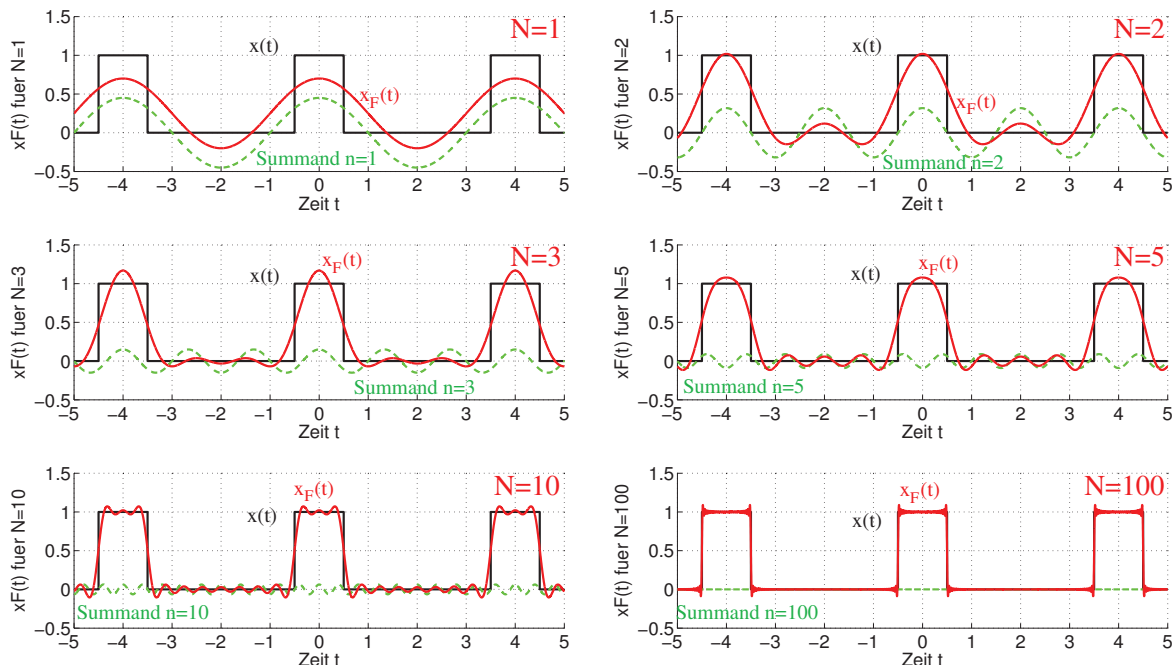
```
a0 = 0.50000
an = 4.5016e-01, 3.1831e-01, 1.5005e-01, 1.9491e-17, -9.0032e-02
```

Damit sind die ersten $N = 5$ Terme der Fourierentwicklung des Rechtecksignals für $\omega_0 \approx 1.571$

$$x_F(t) \approx \frac{0.5}{2} + 0.45 \cos(\omega_0 t) + 0.15 \cos(3\omega_0 t) + 0 \cdot \cos(4\omega_0 t) - 0.09 \cos(5\omega_0 t)$$

197

Die folgende Skizze stellt die Summe der ersten Terme der Fourierentwicklung für verschiedene N dar:



Bemerkungen

- Man sieht, dass für zunehmendes $N = 1, 2, 3, 5, 10, 100$ die Summe der ersten N Summanden von x_F (rote Kurven) die Rechteckfunktion x immer besser annähern. Dabei werden die einzelnen Summanden (grün) immer kleiner.
- Trotzdem bleibt an den Sprungstellen ein “Überschießen”, das aber immer schmäler wird. Dieses Phänomen wird Gibbs-Effekt genannt und tritt generell bei Sprungstellen auf, da diese mit den (stetigen) Sinus- bzw. Kosinusfunktionen nur unzureichend abgebildet werden können.
- Mit Ausnahme dieser Sprungstellen konvergiert $x_F(t)$ aber punktweise gegen $x(t)$ für alle t (vgl. Bemerkung auf Seite 105).

Als nächstes wollen wir eine kompaktere Darstellung der Fourier-Reihe $x_F(t)$ von Satz 5.1 finden, was uns auf die Polarform und den Begriff des Spektrums führt. Man kann nämlich die beiden sin- und cos-Terme in $x_F(t)$ mit gleicher Frequenz $n\omega_0 t$ zu einer einzigen Kosinus-Funktionen $r_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$ zusammenfassen, so dass für $n = 1, 2, \dots$

$$a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) = r_n \cos(n\omega_0 t - \varphi_n) \quad (5.8)$$

gilt für geeignete Amplituden $r_n \geq 0$ und Nullphasenwinkel $-\varphi_n$.

Beweis: Wir müssen zeigen, dass zu jedem a_n, b_n entsprechende r_n, φ_n existieren und umgekehrt.

(I) $(r_n, \varphi_n) \mapsto (a_n, b_n)$: Für gegebene r_n, φ_n folgt mit $\alpha := n\omega_0 t$ und $\beta := \varphi_n$ aus dem Additionstheorem $\cos(\alpha - \beta) = \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha$ (siehe Skript Mathe-I, S. 152, Satz 7.5 über Rechenregeln der trigonometrischen Funktionen, Satz-Teil VI mit V)

$$\begin{aligned}
 r_n \cos(\underbrace{n\omega_0 t}_{\alpha} - \underbrace{\varphi_n}_{\beta}) &= \underbrace{r_n \cdot \cos(\varphi_n)}_{:=a_n} \cdot \cos(n\omega_0 t) + \underbrace{r_n \cdot \sin(\varphi_n)}_{:=b_n} \cdot \sin(n\omega_0 t) \\
 &= a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)
 \end{aligned}$$

198

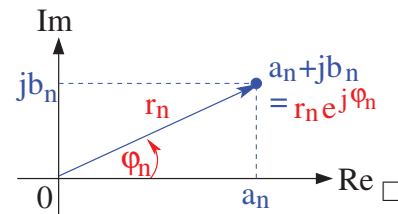
falls $a_n = r_n \cos(\varphi_n)$ und $b_n = r_n \sin(\varphi_n)$.

(II) $(a_n, b_n) \mapsto (r_n, \varphi_n)$: Dem Ergebnis von (I) sieht man an, dass $a_n = r_n \cos(\varphi_n)$ und $b_n = r_n \sin(\varphi_n)$ den kartesischen Koordinaten (a_n, b_n) eines in Polarkoordinaten (r_n, φ_n) gegebenen Punktes $r_n e^{j\varphi_n} = a_n + jb_n$ der komplexen Ebene \mathbb{C} entsprechen (siehe Skizze; vgl. Skript Mathe-I, S. 161, Satz 7.10 über Umrechnung zw. Kartesischen- und Polar-Koordinaten), sodass umgekehrt die “Polarkoordinaten” wie üblich mittels

$$\begin{aligned}
 r_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \text{ und } \varphi_n = \operatorname{sgn}(b_n) \cdot \arccos \frac{a_n}{r_n} \\
 (\text{bzw. } \varphi_n &= \arctan \left(\frac{b_n}{a_n} \right) + \pi \cdot (1 - \epsilon(a_n) \cdot \operatorname{sgn}(b_n)))
 \end{aligned}$$

berechnet werden können.

Wir fassen dieses Ergebnis im folgenden Satz zusammen:



199

Satz 5.2: Fourier-Reihe, Polarform

Gegeben sei die Fourier-Reihenentwicklung $x_F(t)$ eines T -periodischen Signals $x(t)$ nach Satz 5.1 von Seite 105 mit Fourier-Koeffizienten a_n, b_n . Dann gilt

$$\begin{aligned}
 x_F(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} r_n \cos(n\omega_0 t - \varphi_n)
 \end{aligned}$$

für die Umrechnungen ($n = 1, 2, \dots$)

$$r_0 = \frac{a_0}{2}, \quad r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \in \mathbb{R}_0^+ \quad \text{und}$$

$$\varphi_n = \operatorname{sgn}(b_n) \cdot \arccos \frac{a_n}{r_n} = \arctan \left(\frac{b_n}{a_n} \right) + (1 - \epsilon(a_n)) \cdot \operatorname{sgn}(b_n) \cdot \pi$$

bzw. umgekehrt

$$a_0 = 2r_0, \quad a_n = r_n \cos(\varphi_n) \quad \text{und} \quad b_n = r_n \sin(\varphi_n).$$

D.h. man kann jede Fourierreihe eindeutig als gewichtete Summe von zur Grundfrequenz $\omega_0 := 2\pi/T$ harmonischen Kosinussignalen mit n -facher Grundfrequenz $n\omega$, Amplitude r_n und Nullphasenwinkel $-\varphi_n$ angeben.

Die Darstellung mit den (a_n, b_n) nennt man auch kartesische Form, und die Darstellung mit den (r_n, φ_n) nennt man Polarform der Fourier-Reihe.

Bemerkung: Wir können jetzt also für das T -periodische Signal $x(t)$ jeder harmonischen Frequenz $f_n = nf_0$ eindeutig eine Amplitude r_n bzw. einen Nullphasenwinkel φ_n zuordnen, wobei $f_0 := \omega_0/2\pi = 1/T$ die Grundfrequenz ist. Dies führt auf folgende Definition:

Definition 5.3: Spektrum

Gegeben sei ein Signal $x(t)$. Die Funktion $X(f)$, die jeder Frequenz f die Amplitude der entsprechenden Frequenzkomponente von $x(t)$ zuordnet, nennt man Spektrum oder genauer Amplitudenspektrum des Signals $x(t)$.

Bemerkungen:

- D.h. nach Satz 5.2 gilt für das Spektrum $1/f_0$ -periodischer Signale $x(t)$ offenbar $X(nf_0) = r_n$ bzw. $X(nf_0) = r_n\delta(0)$ (siehe später ???...) und $X(f) = 0$ falls f kein Vielfaches von f_0 ist, d.h. zusammen also

$$X(f) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n \delta(f - nf_0) \quad (5.9)$$

wobei die r_n die Amplituden der Polarform aus Satz 5.2 sind.

- Periodische Signale haben also Linienpektren, wobei der Abstand der “Linien” immer genau der Grundfrequenz f_0 entspricht. Die Linien entsprechen den n -ten Harmonischen nf_0 zur Grundfrequenz f_0 (für $n = 0, 1, 2, \dots$).

Beispiel: Bestimmen Sie für das periodische Rechtecksignal $x(t)$ von Seite 105 die Amplituden r_n der Fourier-Reihe in Polarform. Skizzieren Sie dann das Spektrum $X(f)$ von $x(t)$ für $T_i/T = 1/4$. Welche “Linien” fehlen im Spektrum?

Lösung: Aus (5.6) von Seite 106 folgen mit Satz 5.2 die Amplituden r_n der Polarform

200

$$r_0 = \frac{a_0}{2} = \hat{x} \frac{T_i}{T}$$

$$r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |a_n| = 2\hat{x} \frac{T_i}{T} \cdot \left| \operatorname{si} \left(n\pi \frac{T_i}{T} \right) \right|$$

und damit nach (5.9) das Spektrum

201

$$X(f) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n \cdot \delta(f - nf_0)$$

$$= \hat{x} \frac{T_i}{T} \cdot \delta(f) + \sum_{n=1}^{\infty} 2\hat{x} \frac{T_i}{T} \cdot \left| \operatorname{si} \left(n\pi \frac{T_i}{T} \right) \right| \cdot \delta(f - nf_0)$$

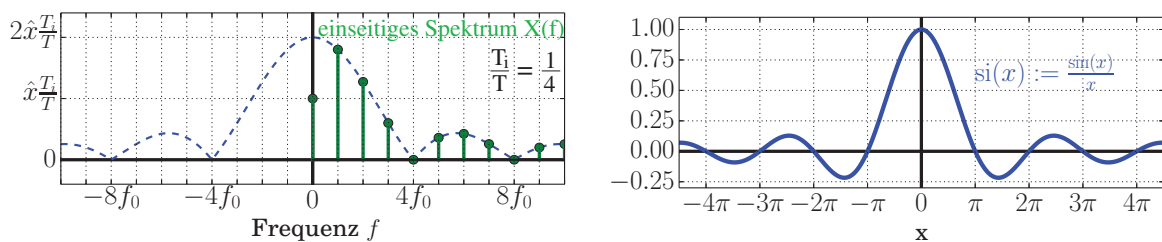
Die folgende Skizze (linker Teil) zeigt das Spektrum $X(f)$ für das Tastverhältnis $T_i/T = 1/4$ (grüne Dirac-Impulse). Hierbei ist die Einhüllende oder Hüllkurve $X_H(f)$ des Spektrums (blau gestrichelte Kurve) offenbar eine si-Funktion (siehe rechte Skizze), wobei mit der Ersetzung $f = nf_0 = n/T$

$$X_H(f) = 2\hat{x} \frac{T_i}{T} \cdot \left| \text{si} \left(n\pi \frac{T_i}{T} \right) \right| = 2\hat{x} \frac{T_i}{T} \cdot \left| \text{si} \left(\pi \frac{T_i}{T} \cdot \frac{f}{f_0} \right) \right| \quad (5.10) \quad 202$$

gilt. Da $\text{si}(f)$ die Nullstellen bei Vielfachen von π hat, fehlen die Linien für ganzzahliges $nT_i/T \in \mathbb{Z}$ bzw. $\frac{f}{f_0} \cdot \frac{T_i}{T} = \frac{f}{4f_0} \in \mathbb{Z}$, also für

$$f \in \{4f_0, 8f_0, 12f_0, \dots\} \quad 203$$

Einseitiges Fourier-Betrags-Spektrum eines periodischen Rechtecksignals



Neben Kartesischer (a_n, b_n) und Polarform (r_n, φ_n) gibt es noch eine dritte Darstellung der Fourier-Reihe, die noch kompakter ist und mit nur einem Amplituden-Parameter (c_k) pro Frequenzkomponente ohne Phasenverschiebung auskommt – dafür wird $c_k \in \mathbb{C}$ allerdings komplex und die Reihenentwicklung zweiseitig ($k \in \mathbb{Z}$):

Satz 5.4: Komplexe Fourier-Reihe

Gegeben sei die Fourier-Reihenentwicklung $x_F(t)$ eines T -periodischen Signals $x(t)$ nach Satz 5.1 von Seite 105 mit Fourier-Koeffizienten a_n, b_n . Dann gilt

$$\begin{aligned} x_F(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \end{aligned} \quad (5.11)$$

für die komplexen Fourierkoeffizienten c_k mit $(n = 1, 2, \dots)$

$$c_0 := \frac{a_0}{2}, c_n := \frac{1}{2}(a_n - jb_n), c_{-n} := \frac{1}{2}(a_n + jb_n) = c_n^* \quad 204$$

bzw. umgekehrt

$$a_0 = 2c_0, a_n = c_n + c_{-n} = 2\text{Re}(c_n), b_n = j(c_n - c_{-n}) = -2\text{Im}(c_n) \quad 205$$

Beweis: (I) $(a_n, b_n) \mapsto (c_k)$: Mit den im Satz gegebenen Definitionen der c_k folgt wegen $e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t} = 2\text{Re}(e^{jn\omega_0 t}) = 2\cos(n\omega_0 t)$ bzw. $e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t} = 2j\text{Im}(e^{jn\omega_0 t}) = 2j\sin(n\omega_0 t)$ (siehe Skript Mathe-I, S. 152, Satz 7.5.I zur Euler'schen Relation) tatsächlich die Gleichheit der beiden Reihenentwicklungen, denn

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-jn\omega_0 t} \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (a_n - jb_n) e^{jn\omega_0 t} + \frac{1}{2} (a_n + jb_n) e^{-jn\omega_0 t} \right] \\
&= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) - jb_n (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t})] \\
&= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot 2 \cos(n\omega_0 t) - jb_n \cdot 2j \sin(n\omega_0 t)] \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] = x_F(t) .
\end{aligned}$$

(II) $'(c_k) \mapsto (a_n, b_n)'$: Umgekehrt folgt aus den Definitionen der c_k tatsächlich

$$\begin{aligned}
2c_0 &= 2 \frac{a_0}{2} = a_0 \\
c_n + c_{-n} &= \frac{1}{2} (a_n - jb_n) + \frac{1}{2} (a_n + jb_n) = a_n \\
j(c_n - c_{-n}) &= \frac{1}{2} (ja_n - j^2 b_n) - \frac{1}{2} (ja_n + j^2 b_n) = b_n
\end{aligned}$$

und wegen $c_{-n} = c_n^*$ gilt offenbar auch $c_n + c_{-n} = 2 \operatorname{Re}(c_n)$ bzw. $c_n - c_{-n} = 2j \operatorname{Im}(c_n)$ (siehe Skript Mathe-I, S. 69, Satz 2.23 zu Rechenregeln für Konjugiert Komplexen Zahlen). \square

Bemerkungen:

- Da nun Frequenzkomponenten mit positiven und negativen Frequenzen $\pm n\omega_0$ vorkommen spricht man (im Gegensatz zum einseitigen Spektrum (5.9) von Seite 110) hier von einem zweiseitigen Spektrum

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(f - kf_0) . \quad (5.12)$$

- Offenbar entsprechen die komplexen Fourierkoeffizienten $2c_{-n} = a_n + jb_n = r_n e^{j\varphi_n}$ (bis auf den Faktor 2) genau der Darstellung der Kartesischen Koordinaten (a_n, b_n) bzw. der Polarkoordinaten (r_n, φ_n) als Punkt in der komplexen Ebene (siehe Skizze auf Seite 109).
- Ähnlich wie bei der Kartesischen bzw. Polarform entsprechen die komplexen Fourierkoeffizienten c_k den Koordinaten des Signals $x(t)$ (bzw. dessen Projektion

$x_F(t)$ bzgl. der Basissignale $e^{jk\omega_0 t}$ für $k \in \mathbb{Z}$. Wegen (4.12) auf Seite 96 und damit

$$\begin{aligned} \langle e^{jk_1\omega_0 t}, e^{jk_2\omega_0 t} \rangle_T &\stackrel{(4.9)}{=} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-jk_1\omega_0 t} e^{jk_2\omega_0 t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{j(k_2-k_1)\omega_0 t} dt \\ &\stackrel{(4.12)}{=} T\delta[k_2 - k_1] \end{aligned} \quad (5.13)$$

sind diese Basissignale alle orthogonal zueinander und haben alle dieselbe Norm $\|e^{jk\omega_0 t}\| = \sqrt{T}$ (siehe Def. 4.8 auf Seite 93 mit dem Skalarprodukt (4.9)).

- Man kann deshalb (ähnlich wie bei der Herleitung der Kartesischen Form von Seite 103-105) die komplexen Fourierkoeffizienten $c_k = \frac{1}{T} \langle e^{jk\omega_0 t}, x(t) \rangle_T$ auch direkt als Skalarprodukte (bzw. Integrale) der Basisvektoren $e^{jk\omega_0 t}$ mit dem Signal $x(t)$ herleiten. Alternativ erhält man dasselbe Ergebnis auch aus obiger Definition der c_k mit Hilfe von Satz 5.1 auf Seite 105, da

$$\begin{aligned} c_n &:= \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt - j \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \underbrace{(\cos(n\omega_0 t) + j \sin(-n\omega_0 t))}_{e^{-jn\omega_0 t}} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt \\ c_{-n} &= c_n^* = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot e^{jn\omega_0 t} dt \end{aligned}$$

206

für $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ und zusammen für $k \in \mathbb{Z}$ also

$$c_k := \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \langle e^{jk\omega_0 t}, x(t) \rangle_T. \quad (5.14)$$

Beispiel: Berechnen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten c_k für das periodische Rechtecksignal von Seite 105. Skizzieren Sie das zugehörige zweiseitige Betragsspektrum $|X(f)|$ nach (5.12) für $T_i/T = 1/4$.

Lösung: Aus der vorigen Beispielaufgabe von Seite 105 kennen wir die Kartesischen Fourierkoeffizienten eines T -periodischen Rechtecksignals mit Höhe \hat{x} und Tastverhältnis T_i/T : Es ist $a_0 = 2\hat{x} \frac{T_i}{T}$, $a_n = 2\hat{x} \frac{T_i}{T} \cdot \text{si}\left(n\pi \frac{T_i}{T}\right)$, $b_n = 0$ (siehe (5.6) auf Seite 106). Mit Satz 5.4 ergibt sich dann

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2} = \hat{x} \frac{T_i}{T} \\ c_n &= \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{a_n}{2} = \hat{x} \frac{T_i}{T} \cdot \text{si}\left(n\pi \frac{T_i}{T}\right) \\ c_{-n} &= (c_n)^* = c_n \end{aligned}$$

207

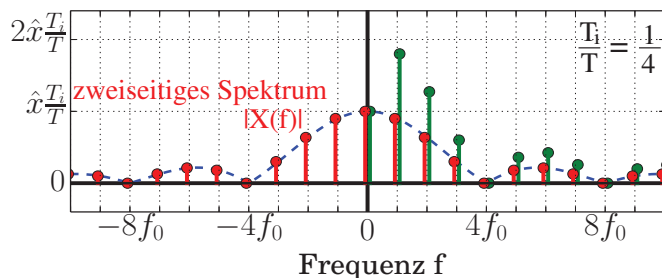
und zusammen sind die “komplexen” Fourierkoeffizienten c_k eines periodischen Rechtecksignals wegen der Symmetrie $\text{si}(-x) = \text{si}(x)$ und $\text{si}(0) = 1$ also für $k \in \mathbb{Z}$

208

$$c_k = \hat{x} \frac{T_i}{T} \cdot \text{si} \left(k\pi \frac{T_i}{T} \right) \quad (5.15)$$

Die folgende Skizze zeigt das zweiseitige Spektrum $X(f)$ (rot) im Vergleich zum einseitigen Spektrum (grün; vgl. Skizze auf Seite 111):

Zweiseitiges Fourier-Spektrum eines periodischen Rechtecksignals



Bemerkungen

- Offenbar gilt nach Satz 5.4 mit Satz 5.2 für die Beträge der komplexen Fourierkoeffizienten bzw. das zweiseitige Spektrum

$$|c_k| = \frac{1}{2} \sqrt{a_{|k|}^2 + b_{|k|}^2} = \frac{1}{2} r_{|k|}$$

- D.h. anschaulich entsteht das einseitige Spektrum aus dem zweiseitigen Spektrum durch “Umklappen” und Summieren (vgl. obige Skizze). Die “Linie” bei $f = 0$ bleibt unverändert und bildet das “Scharnier”.
- Die einseitige Darstellung ist für die Praxis relevant: Sie lässt sich z.B. mit einem selektivem Voltmeter (welches nur eine Frequenz durchläßt) direkt messen.
- Die zweiseitige komplexe Darstellung c_k ist für theoretische Betrachtungen vorteilhaft, da sie kurz und einheitlich ist (vgl. (5.14) auf Seite 113 mit Satz 5.1 von Seite 105). Im folgenden leiten wir aus ihr die allgemeine Fourier-Transformation her...

Weitere Übungsaufgaben: Blatt ???: A???

5.2 Die (allgemeine) Fourier-Transformation

Bisher haben wir nur T -periodische Signale $x(t)$ in ihre Fourier'schen Frequenzkomponenten zerlegt (siehe die drei Darstellungen in den Sätzen 5.1, 5.2, 5.4). Dabei hatten wir uns auf die Analyse der Grundperiode $[T/2, T/2)$ der Signale $x(t) : [T/2, T/2) \mapsto \mathbb{R}$ beschränkt und uns die Signale periodisch fortgesetzt gedacht.

Können wir auch Fourier-Spektren von nicht-periodischen Funktionen berechnen?

JA! Denn nicht-periodische Signale entsprechen periodischen Signalen mit unendlicher Periodendauer T . Deshalb betrachten wir im folgenden einfach den Grenzübergang $T \rightarrow \infty$:

Von der komplexen Fourier-Reihenentwicklung wissen wir bereits (siehe Satz 5.4 auf Seite 111 mit (5.14) von Seite 113)

$$X_F(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega_0 t} \text{ für } c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad 209$$

Mit $\Delta\omega := \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ und $\omega_k := k \cdot \Delta\omega (= k\omega_0)$ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} X_F(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} x(t') e^{-j\omega_k t'} dt' \cdot e^{j\omega_k t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} x(t') e^{-j\omega_k t'} dt' \right] \cdot e^{j\omega_k t} \cdot \Delta\omega \end{aligned} \quad 210$$

Im Grenzfall $T \rightarrow \infty$ wird die Grundfrequenz und damit $\Delta\omega = \omega_0 \rightarrow 0$ immer kleiner, sodass die $\omega_k = k\omega_0$ eine unendlich feine Zerlegung der ω -Achse bilden (siehe Skript Mathe-I, S. 133, Def. 6.4 von Zerlegungen) und aus obiger Summe ein (uneigentliches) Riemann-Integral wird (siehe Skript Mathe-I, S. 134,144, Def. 6.5 von Riemann-Integralen und Def. 6.13 von uneigentlichen Integralen):

$$X_F(t) \stackrel{(T \rightarrow \infty)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t') e^{-j\omega t'} dt' \right]}_{=: X(\omega)} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad 211$$

für $X(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} x(t') e^{-j\omega t'} dt'$. D.h. wir erhalten ähnlich wie in Satz 5.4 wieder eine Darstellung von $x_F(t)$ als gewichtete "Summe" (bzw. Integral) von komplexen Exponentialfunktionen $e^{j\omega t}$. Hierbei kann man das Gewicht $X(\omega)$ wieder als Koordinaten zum Basisvektor $\frac{1}{2\pi} e^{j\omega t}$ interpretieren (für jedes $\omega \in \mathbb{R}$). Die Menge aller solcher Koordinaten, d.h. die Funktion $X(\omega)$, bezeichnet man dann als Fouriertransformation von $x(t)$. Dieses Ergebnis ist in folgendem Satz zusammengefasst:

Satz 5.5: Fouriertransformation, Inverse Fouriertransformation

- Gegeben sei ein Signal $x(t)$. Dann nennt man

$$X(\omega) := \mathcal{F}\{x(t)\} := \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

die Fourier-Transformierte oder auch das Fourier-Spektrum von $x(t)$, falls das Integral überhaupt existiert. Man schreibt dann auch kurz $x(t) \circ \bullet X(\omega)$.

- Umgekehrt rekonstruiert die Inverse Fourier-Transformation aus dem Fourier-Spektrum $X(\omega)$ wieder das Zeitsignal:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Das Fourier-Spektrum $X(\omega)$ entspricht also den “Koordinaten” von $x(t)$ bezüglich der Fourier-Basis $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} := \{\frac{1}{2\pi} e^{j\omega t} | \omega \in \mathbb{R}\}$.

Bemerkungen:

- Manchmal schreibt man statt $X(\omega)$ auch $\underline{X}(\omega)$ um klar zu machen, dass es sich um ein komplexes Spektrum handelt, oder auch $X(j\omega)$, um den Bezug zur Laplace-Transformation herzustellen (siehe später...).
- Anstatt ω kann man das Fourier-Spektrum auch als Funktion $X(f)$ der Frequenz $f = \omega/2\pi$ darstellen. Um Verwechslungen zu vermeiden schreibt man deshalb statt $X(f)$ bzw. $X(\omega)$ oft genauer $X_f(f)$ bzw. $X_\omega(\omega)$. Hierbei gelten mit der Substitution $\omega = 2\pi f$ und $d\omega/df = 2\pi$ die Zusammenhänge

$$X_f(f) := \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = X_\omega(2\pi f) \quad \text{und} \quad (5.16)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_\omega(\omega) e^{j\omega t} d\omega \stackrel{(\omega=2\pi f)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} X_f(f) e^{j2\pi ft} df \quad (5.17)$$

Falls klar ist welche Darstellung gemeint ist, schreiben wir weiterhin kurz entweder $X(\omega)$ oder $X(f)$.

- Die Fourier-Basis $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ enthält überabzählbar viele Basisvektoren. Damit könnte man hoffen wie mit der “Standardbasis” $\mathcal{B}_0 := \{\delta_e(t - \tau) | \tau \in \mathbb{R}\}$ alle möglichen Signale $x(t)$ exakt darstellen zu können (vgl. Satz 4.10 auf Seite 97). Leider stellt sich heraus, dass dies nicht gelingt. Tatsächlich gibt es viele Signale zu denen man kein Fourier-Spektrum angeben kann, da das Fourier-Integral von Satz 5.5 nicht konvergiert (z.B. die kausale Exponentialfunktion $x(t) = \exp(t)\epsilon(t)$). Wir werden

deshalb später die Fourier-Transformation zur Laplace-Transformation verallgemeinern.

- Man kann leicht zeigen, dass die Fourier-Basis $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ eine Orthogonalbasis ist, und dass die Basissignale $e^{j\omega t}$ für alle ω die (Leistungs-)Norm $\|e^{j\omega t}\|_P = 1$ haben (siehe Bemerkung nach dem folgenden Beispiel).

Beispiel 1: Berechnen und skizzieren Sie das Fourier-Spektrum $X(f)$ für den Dirac-Impuls $x(t) = \delta(t)$.

Lösung: Fourier-Transformation nach Satz 5.5 ergibt mit der Ausblendeigenschaft (Satz 4.4.III von Seite 87)

$$x(t) = \delta(t) \longrightarrow X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = e^0 = 1 \quad (5.18) \quad \boxed{212}$$

D.h. im Dirac-Impuls kommen offenbar alle Frequenzkomponenten mit gleichem Gewicht (1) vor (siehe folgende Skizze, links). Mit der Inversen Fouriertransformation von Satz 5.5 bzw. nach (5.17) hat $\delta(t)$ dann die Darstellung

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft} df \quad (5.19) \quad \boxed{213}$$

Bemerkung: Damit kann man (nach Vertauschen der Rollen von t und ω in (5.19)) leicht die Orthogonalität der Fourier-Basis und die Norm der Basissignale zeigen:

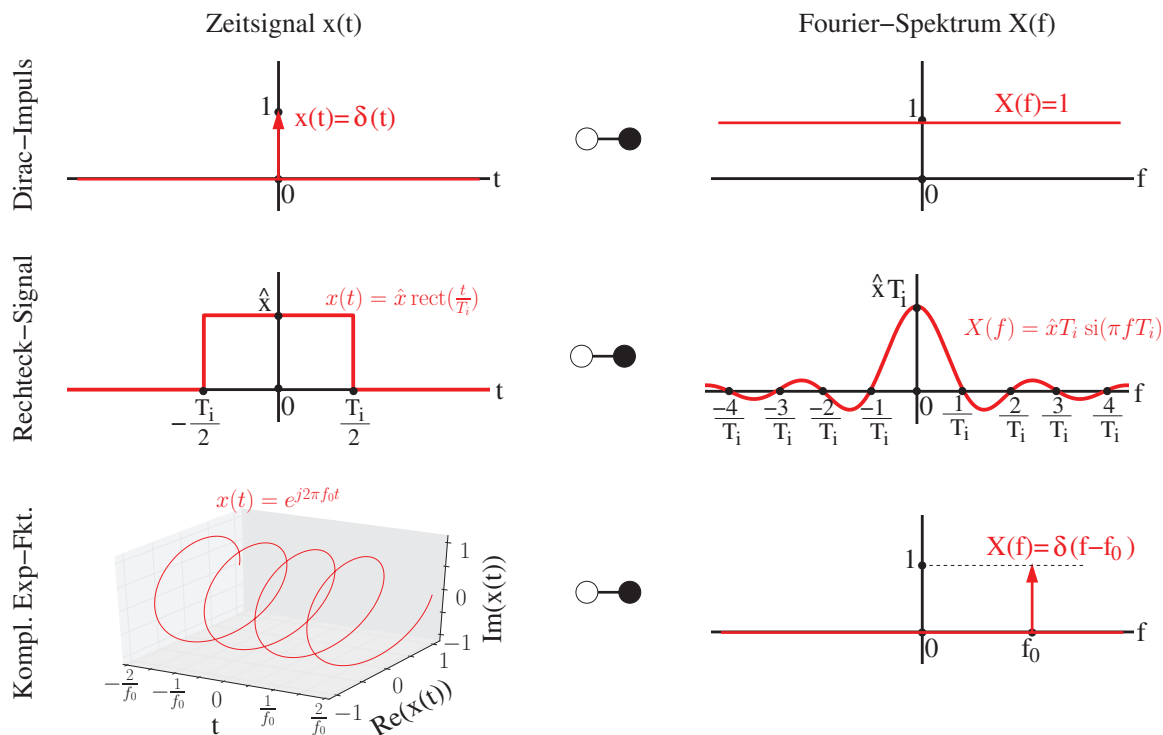
$$\langle e^{j\omega_1 t}, e^{j\omega_2 t} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_2 - \omega_1)t} dt \stackrel{(5.19)}{=} 2\pi \delta(\omega_2 - \omega_1) \quad (5.20)$$

Daraus folgt dass $e^{j\omega_1 t}$ und $e^{j\omega_2 t}$ für $\omega_1 \neq \omega_2$ zueinander orthogonal sind. Außerdem folgt aus Def. 4.8 von Seite 93 die (Leistungssignal-)Norm $\|e^{j\omega t}\|_P = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega t} e^{j\omega t} dt} = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} 1 dt} = 1$. Man vergleiche dies mit den entsprechenden Resultaten für periodische Signale nach (5.13) auf Seite 113.

Beispiel 2: Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte des Rechtecksignals $x(t) = \hat{x} \text{rect}(t/T_i)$ mit Höhe \hat{x} und Impulsbreite T_i .

Lösung: Fourier-Transformation nach Satz 5.5 ergibt (siehe folgende Skizze, rechts)

$$\begin{aligned} x(t) \longrightarrow X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x} \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T_i}\right) e^{-j\omega t} dt = \hat{x} \int_{-T_i/2}^{T_i/2} e^{-j\omega t} dt = \hat{x} \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{-T_i/2}^{T_i/2} \\ &= -\frac{\hat{x}}{j\omega} \left(e^{-j\omega \frac{T_i}{2}} - e^{j\omega \frac{T_i}{2}} \right) = -\frac{\hat{x}}{j\omega} \cdot 2j \cdot \text{Im}(e^{-j\omega \frac{T_i}{2}}) \\ &= -\frac{2\hat{x}}{\omega} \sin\left(-\omega \frac{T_i}{2}\right) = \hat{x} T_i \cdot \text{si}\left(\omega \frac{T_i}{2}\right) \stackrel{(\omega=2\pi f)}{=} \hat{x} \cdot T_i \cdot \text{si}(\pi f T_i) \end{aligned} \quad (5.21) \quad \boxed{214}$$

**Bemerkungen:**

- $X(f)$ entspricht hier offenbar der Hüllkurve des Linienspektrums des periodischen Rechtecksignals (siehe (5.10) und Skizze auf Seite 111)
- Da $\delta(t)$ der Grenzfall eines Rechtecksignals ist (siehe Seite 87), folgt das Spektrum von $\delta(t)$ alternativ zu (5.18) auch aus dem des Rechtecksignals $\frac{1}{T_i} \text{rect}(\frac{t}{T_i})$ (siehe voriges Beispiel) für $T_i \rightarrow 0$, d.h.

$$\delta(t) \circ \bullet \lim_{T_i \rightarrow 0} \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{T_i} \text{rect}\left(\frac{t}{T_i}\right) \right\} = \lim_{T_i \rightarrow 0} \text{si}(\pi f T_i) = \text{si}(0) = 1.$$

Beispiel 3: Bestimmen Sie mit Hilfe der Inversen Fourier-Transformation das zum Spektrum $X(f) = \delta(f - f_0)$ gehörige Zeitsignal $x(t)$.

Lösung: Aus Satz 5.5 bzw. aus (5.17) von Seite 116 folgt mit der Siebeigenschaft (Satz 4.4.III von Seite 87)

215

$$X(f) = \delta(f - f_0) \bullet \circ x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - f_0) \cdot e^{j2\pi f t} df = e^{j2\pi f_0 t} \quad (5.22)$$

D.h. die Fourier-Zerlegung des Basissignals $e^{j2\pi f_0 t}$ ergibt nur eine einzige Frequenzkomponente mit der Frequenz f_0 , was eigentlich zu erwarten war. Mit der Linearität der Fourier-Transformation können wir damit auch die Spektren von cos- und sin-Signalen bestimmen (gleich...).

5.2.1 Eigenschaften der Fourier-Transformation

Das Berechnen von Fourier-Spektren durch Integrieren (wie in den vorigen beiden Beispielen für $\delta(t)$ und $\text{rect}(t)$) kann für weniger einfache Signale sehr aufwändig werden. Es ist deshalb oft einfacher bestimmte Eigenschaften der Fourier-Transformation auszunutzen, um die Spektren komplizierter Signale auf bekannte Spektren einfacher Signale zurückzuführen (ähnlich wie bei der z -Transformation; vgl. Satz 3.15 auf Seite 57). Wir lernen deshalb im folgenden die wichtigsten Eigenschaften der Fourier-Transformation kennen:

Satz 5.6: Linearität der Fouriertransformation

Sei $x_1(t) \circ \bullet X_1(\omega)$ und $x_2(t) \circ \bullet X_2(\omega)$, d.h. wir kennen zu zwei Signalen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ die zugehörigen Fourier-Transformierten bzw. -Spektren $X_1(\omega)$ und $X_2(\omega)$. Dann gilt für beliebige Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \circ \bullet c_1 X_1(\omega) + c_2 X_2(\omega)$$

216

d.h. das Spektrum einer Linearkombinationen von $x_1(t)$ und $x_2(t)$ ist dieselbe Linearkombination (mit denselben Gewichten c_1, c_2) der Spektren $X_1(\omega)$ und $X_2(\omega)$.

Beweis: Folgt aus der Linearität der Integration, denn

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)\} &\stackrel{(\text{Satz. 5.5})}{=} \int_{-\infty}^{\infty} [c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)] e^{-j\omega t} dt \\ &= c_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) e^{-j\omega t} dt + c_2 \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-j\omega t} dt = c_1 X_1(\omega) + c_2 X_2(\omega) . \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung: Da wir schon das Fourier-Spektrum von Rechtecksignalen kennen, können wir damit auch die Spektren beliebiger “Treppen-” bzw. “Pyramidenfunktionen” bestimmen:

Beispiel: Berechnen Sie das Fourier-Spektrum von $x(t) = 2 \text{rect}(\frac{t}{2T}) + 0.5 \text{rect}(\frac{t}{4T})$:

Lösung: Wegen $\text{rect}(t/T) \circ \bullet T \text{si}(\pi f T) = T \text{si}(\frac{T}{2}\omega)$ (siehe (5.21) auf Seite 117) folgt

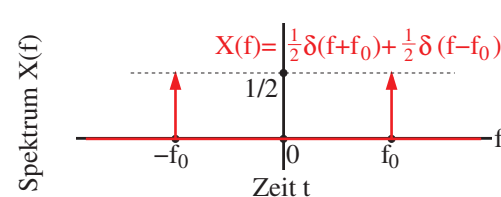
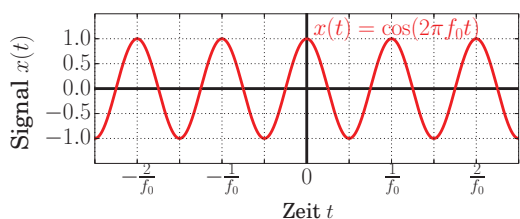
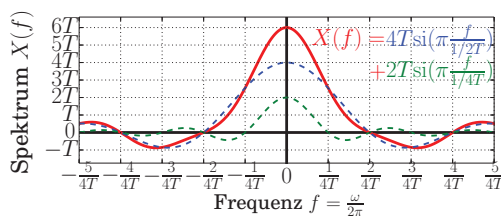
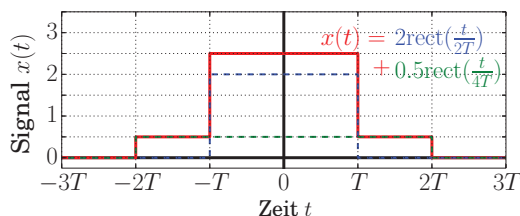
$$\text{rect}(\frac{t}{2T}) \circ \bullet 2T \cdot \text{si}(T\omega) \text{ und } \text{rect}(\frac{t}{4T}) \circ \bullet 4T \cdot \text{si}(2T\omega)$$

217

und damit mit der Linearität der Fourier-Transformation (siehe folgende Skizze)

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 \text{rect}(\frac{t}{2T}) + 0.5 \text{rect}(\frac{t}{4T}) \\ &\quad \downarrow \\ X(\omega) &= 2 \cdot 2T \cdot \text{si}(T\omega) + 0.5 \cdot 4T \cdot \text{si}(2T\omega) \\ &= 4T \text{si}(T\omega) + 2T \text{si}(2T\omega) = 4T \text{si}(\pi 2T f) + 2T \text{si}(\pi 4T f) \end{aligned}$$

218



Beispiel: Bestimmen Sie die Fourier-Spektren der trigonometrischen Funktionen $x_1(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ und $x_2(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ mit Frequenz f_0 .

Lösung: Wegen $e^{j2\pi f_0 t} \circ \bullet \delta(f - f_0)$ (siehe Seite 118) und $\cos(\varphi) = \operatorname{Re}(e^{j\varphi}) = \frac{1}{2}(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi})$ bzw. $\sin(\varphi) = \operatorname{Im}(e^{j\varphi}) = \frac{1}{2j}(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi})$ folgt (siehe obige Skizze)

219

$$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f_0 t} \bullet \circ \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0) \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} \sin(2\pi f_0 t) &= \frac{1}{2j}e^{j2\pi f_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j2\pi f_0 t} \bullet \circ \frac{1}{2j}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2j}\delta(f + f_0) \\ &= \frac{j}{2}\delta(f + f_0) - \frac{j}{2}\delta(f - f_0) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Satz 5.7: Verschiebung im Zeitbereich

Falls $x(t) \circ \bullet X(\omega)$ dann gilt für eine beliebige Zeitverschiebung $t_0 \in \mathbb{R}$

220

$$x(t - t_0) \bullet \circ e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

Beweis: Mit der Substitution $t' := t - t_0$ und damit $dt'/dt = 1$ folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(t - t_0)\} &\stackrel{(\text{Satz. 5.5})}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) e^{-j\omega(t - t_0)} dt \\ &\stackrel{(t' := t - t_0)}{=} e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t') e^{-j\omega t'} dt' = e^{-j\omega t_0} X(\omega) . \quad \square \end{aligned}$$

Beispiel: Berechnen Sie das Fourier-Spektrum von $x(t) = \text{rect}(\frac{t-t_0}{T})$.

Lösung: Aus $\text{rect}(t/T) \circ \bullet T \text{si}(\pi f T)$ (siehe (5.21) auf Seite 117) folgt für das verschobene Rechtecksignal

$$x(t) = \text{rect}(\frac{t-t_0}{T}) \circ \bullet X(\omega) = e^{-j\omega t_0} \cdot T \cdot \text{si}(\pi f T)$$

221

Bemerkung: Da $|e^{-j\omega t_0}| = 1$ ändern Zeitverschiebungen also nicht das Betragsspektrum $|X(\omega)|$, sondern nur die Phasenlage (denn Real-/Imaginärteil von $X(\omega)$ legen den Nullphasenwinkel φ der Frequenzkomponente $\cos(\omega t + \varphi)$ fest; vgl. Sätze 5.2, 5.4).

Satz 5.8: Zeitskalierung, Ähnlichkeitssatz

Falls $x(t) \circ \bullet X(\omega)$ dann gilt für einen beliebigen Skalierungsfaktor $a \neq 0$

$$x(at) \circ \bullet \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$\text{insbesondere also } x(-t) \circ \bullet X(-\omega)$$

222

Beweis: Mit der Substitution $t' := at$ und $dt'/dt = a$ folgt für $\mathcal{F}\{x(at)\}$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt &\stackrel{(t' := at)}{=} \int_{-a \cdot \infty}^{a \cdot \infty} x(t') e^{-j\omega t'/a} \frac{dt'}{a} = \begin{cases} \frac{1}{|a|} \int_{-|a|\cdot\infty}^{|a|\cdot\infty} x(t') e^{-j\frac{\omega}{a} t'} dt' & , a > 0 \\ \frac{1}{|a|} \int_{|a|\cdot\infty}^{-|a|\cdot\infty} x(t') e^{-j\frac{\omega}{a} t'} dt' & , a < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{|a|} \int_{-|a|\cdot\infty}^{|a|\cdot\infty} x(t') e^{-j\frac{\omega}{a} t'} dt' & , a > 0 \\ \frac{1}{|a|} \int_{|a|\cdot\infty}^{-|a|\cdot\infty} x(t') e^{-j\frac{\omega}{a} t'} dt' & , a < 0 \end{cases} = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right). \quad \square \end{aligned}$$

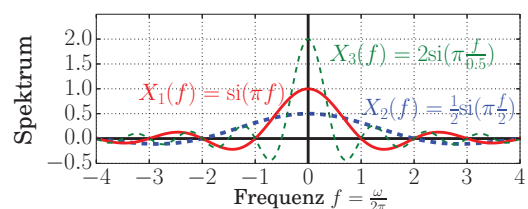
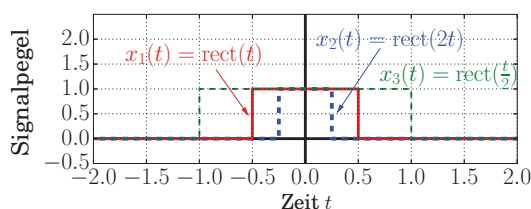
Beispiel: Berechnen, skizzieren und vergleichen Sie die Spektren der Signale $x_1(t) = \text{rect}(t)$, $x_2(t) = \text{rect}(\frac{t}{2})$ und $x_3(t) = \text{rect}(2t) = \text{rect}(\frac{t}{0.5})$.

Lösung: Aus $x_1(t) = \text{rect}(t) \circ \bullet \text{si}(\pi f)$ (siehe (5.21) auf Seite 117) folgt mit Satz 5.8 (vgl. folgende Skizze)

$$x_2(t) = \text{rect}(0, 5t) \circ \bullet X_2(f) := 2\text{si}(\pi \frac{f}{0.5}) \text{ und}$$

$$x_3(t) = \text{rect}(2t) \circ \bullet X_3(f) := \frac{1}{2}\text{si}(\pi \frac{f}{2})$$

223



Bemerkungen:

- Ganz allgemein gilt offenbar: Wenn man ein Signal staucht (Skalierung mit $|a| > 1$), so dehnt sich das Spektrum (Skalierung mit $1/|a| < 1$), und umgekehrt.
- D.h. es ist nicht möglich ein Signal sowohl im Zeitbereich als auch im Frequenzbereich auf einen sehr kleinen Bereich (z.B. Punkt) zu konzentrieren.
- Dieses Phänomen hängt mit der sogenannten Unschärferelation zusammen, nach der man zwei komplementäre Größen (z.B. Zeit, Frequenz; oder Ort, Impuls) nicht mit beliebiger Genauigkeit bestimmen kann.
- Z.B. kann man nicht gleichzeitig die Frequenz und Anfangszeit eines Tones exakt bestimmen (für ersteres bräuchte man einen reinen Sinus, der sich aber über die gesamte Zeitachse erstreckt; für letzteres bräuchte man z.B. einen Dirac-Impuls (oder Sprungfunktion; siehe später), dessen Spektrum sich über die ganze Frequenzachse erstreckt, siehe Seite 118).

Beispiel: Zeigen Sie mit Hilfe des Skalierungssatzes, dass man den zeitskalierten Dirac-Impuls wie folgt als "reinen" Dirac-Impuls darstellen kann:

Beweis: Aus $\delta(t) \circ \bullet 1$ (siehe Seite 118) folgt mit Satz 5.8 und der Linearität (Satz 5.6)

224

$$\delta(at) \circ \bullet \frac{1}{|a|} \bullet \circ \frac{1}{|a|} \delta(t), \text{ d.h. } \delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t) \quad (5.25)$$

Satz 5.9: Dualität, Vertauschungstheorem

Zeitsignale und deren Fourier-Spektren können (bis auf Spiegelung und evtl. Skalierung) ihre Rollen vertauschen:

225

- I) Falls $x(t) \circ \bullet X_\omega(\omega)$ gilt, dann gilt auch $X_\omega(t) \circ \bullet 2\pi x(-\omega)$
 II) Falls $x(t) \circ \bullet X_f(f)$ gilt, dann gilt auch $X_f(t) \circ \bullet x(-f)$

Beweis: Der Satz beruht auf der Ähnlichkeit der Fourier-Transformation \mathcal{F} zur inversen Fourier-Transformation \mathcal{F}^{-1} (siehe Satz 5.5 auf Seite 116):

- I) Für die Fourier-Transformation in ω gilt nach Satz 5.5 für ein Signal $x(t)$ und dessen Spektrum $X_\omega(\omega)$

$$\mathcal{F}\{x(t)\} := \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{und} \quad \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.26)$$

und deswegen mit der Substitution $t' = -t$ und $dt' = -dt$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x(t)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi x(t) e^{-j\omega t} dt \stackrel{(t'=-t)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{-\infty} 2\pi x(-t') e^{j\omega t'} (-dt') \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi x(-t') e^{j\omega t'} dt' = \mathcal{F}^{-1}\{2\pi x(-t)\} .\end{aligned}\quad (5.27)$$

Da (5.27) für beliebige Zeit-Signale $x(t)$ gilt, folgt insbesondere für das Zeitsignal $x(t) = X_{\omega}(t)$ aus (5.27) mit Linearität (Satz 5.6) und Skalierung (Satz 5.8)

$$\mathcal{F}\{X_{\omega}(t)\} \stackrel{(5.27)}{=} \mathcal{F}^{-1}\{2\pi X_{\omega}(-t)\} \stackrel{(\text{Lin.})}{=} 2\pi \mathcal{F}^{-1}\{X_{\omega}(-t)\} \stackrel{(\text{Skal.})}{=} 2\pi x(-\omega)$$

und deshalb also $X_{\omega}(t) \circ \bullet 2\pi x(-\omega)$.

- II) Für die Fourier-Transformation in f gilt nach (5.17) auf Seite 116 mit Skalierung (Satz 5.8)

$$X_f(t) \stackrel{(5.17)}{=} X_{\omega}(2\pi t) \stackrel{(\text{Skal.})}{=} \frac{1}{2\pi} X_{\omega}(t) \stackrel{(I)}{\circ \bullet}_{\omega} x\left(-\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

und deswegen mit (5.17) von Seite 116 $X_f(t) \circ \bullet_f x(-\frac{\omega}{2\pi})|_{\omega=2\pi f} = x(-f)$. \square

Beispiel: Bestimmen Sie das Fourier-Spektrum von a) $x(t) = 1$ und b) $x(t) = \text{si}(\pi \frac{t}{T})$.

Lösung: a) Aus $\delta(t) \circ \bullet 1$ nach (5.18) auf S. 117 folgt aus dem Vertauschungstheorem (Satz 5.9) sowie der Symmetrie $\delta(-f) = \delta(f)$

$$1 \circ \bullet 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(-\omega) \text{ bzw. } 1 \circ \bullet \delta(-f) = \delta(f) \quad (5.28) \quad \boxed{226}$$

b) Aus der bekannten Beziehung $x(t) := \text{rect}(t/T') \circ \bullet X(f) := T' \text{si}(\pi T' f)$ (siehe Seite 118) folgt mit Satz 5.9, der Linearität (Satz 5.6) und $T := 1/T'$

$$\begin{aligned}X(t) &= T' \text{si}(\pi T' t) \circ \bullet \text{rect}\left(\frac{-f}{T'}\right) = \text{rect}\left(\frac{f}{T'}\right) \\ &\stackrel{(T'=\frac{1}{T})}{\iff} \frac{1}{T} \text{si}\left(\pi \frac{t}{T}\right) \circ \bullet \text{rect}(T \cdot f) \\ &\stackrel{(\text{lin.})}{\iff} \text{si}\left(\pi \frac{t}{T}\right) \circ \bullet T \text{rect}(T f)\end{aligned}\quad (5.29) \quad \boxed{227}$$

Satz 5.10: Ableitung der Zeitfunktion

Falls $x(t) \circ \bullet X(\omega)$, dann gilt

$$\frac{d}{dt} x(t) \circ \bullet j\omega X(\omega)$$

$\boxed{228}$

Beweis: Für den Beweis erinnern wir uns, dass wir die Fourier-Transformation für T -periodische Signale $x(t)$ im Grenzfall unendlicher Periodendauern $T \rightarrow \infty$ definiert hatten (siehe die Herleitung von Satz 5.5 auf Seite 115), d.h.

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}x(t)e^{-j\omega t} dt \stackrel{\text{S. 115}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{d}{dt}x(t)e^{-j\omega t} dt .$$

Für $\omega = \omega_k = k2\pi/T$ und ein $k \in \mathbb{Z}$ (d.h. die ω_k bilden wieder eine immer feinere Zerlegung der ω -Achse) folgt dann für das eigentliche Integral ganz rechts mit Hilfe von partieller Integration (siehe Skript Mathe-I, S. 140, Satz 6.11)

$$\int_{-T/2}^{T/2} \frac{d}{dt}x(t)e^{-j\omega_k t} dt = [x(t)e^{-j\omega_k t}]_{-T/2}^{T/2} - \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot (-j\omega_k)e^{-j\omega_k t} dt$$

Da $x(t)$ als T -periodisch vorausgesetzt wird gilt $x(-T/2) = x(T/2)$ und mit $\omega_k = 2\pi k/T$ wird die "eckige Klammer" zu

$$\begin{aligned} [x(t)e^{-j\omega_k t}]_{-T/2}^{T/2} &= \left(x\left(\frac{T}{2}\right)e^{-j\omega_k T/2} - x\left(-\frac{T}{2}\right)e^{j\omega_k T/2}\right) \\ &= x\left(\frac{T}{2}\right)(e^{-j\pi k} - e^{j\pi k}) = 0 \end{aligned}$$

da $e^{-j\pi k} - e^{j\pi k} = 2j \operatorname{Im}(e^{-j\pi k}) = 2j \sin(-k\pi) = 0$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{d}{dt}x(t)e^{-j\omega t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} 0 - \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot (-j\omega)e^{-j\omega t} dt \\ &= j\omega \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = j\omega X(\omega) . \end{aligned} \quad \square$$

Bemerkung: Durch wiederholtes Anwenden von Satz 5.10 kann man auch die Spektren der n -ten Ableitungen von $x(t)$ berechnen:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n x(t) \circ \bullet (j\omega)^n X(\omega) .$$

Damit kann man sehr leicht Differenzialgleichungen (im Spektralbereich) lösen.

Beispiel 1: Lösen Sie die Differenzialgleichung $x''(t) + 3x'(t) + x(t) = \operatorname{rect}(t)$.

Lösung: Durch Fourier-Transformation wird aus der Differenzialgleichung eine "normale" algebraische Gleichung, die man leicht lösen kann:

229

$$\begin{array}{c} x''(t) + 3x'(t) + x(t) = \operatorname{rect}(t) \\ \downarrow \\ (j\omega)^2 X(\omega) + 3j\omega X(\omega) + X(\omega) = \operatorname{si}\left(\frac{\omega}{2}\right) \end{array}$$

Diese lässt sich wie gewohnt nach $X(\omega)$ auflösen, d.h. das Fourier-Spektrum der Lösung der Differentialgleichung ist

$$X(\omega) = \frac{\text{si}(\frac{\omega}{2})}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 1}$$

230

Durch inverse Fourier-Transformation von $X(\omega)$ nach Satz 5.5 könnte man daraus im Prinzip die Lösungsfunktion $x(t)$ ausrechnen.

Bemerkung: Dieses Vorgehen ist ähnlich wie bei der z -Transformation (siehe Kapitel 3.6): Dort haben wir Differenzengleichungen (welche diskrete Systeme beschreiben) durch z -Transformation in algebraische Gleichungen umgewandelt um sie leichter lösen zu können (vgl. Satz 3.18 auf Seite 64). Wir werden im folgenden Kapitel mit Hilfe der Fourier- bzw. Laplace-Transformation kontinuierliche Systeme in ähnlicher Weise analysieren.

Beispiel 2: Berechnen Sie die Fourier-Spektren der Sprungfunktion $\epsilon(t)$ (siehe Seite 85) sowie der Signumfunktion

$$\text{sgn}(t) := \epsilon(t) - \epsilon(-t) = \begin{cases} 1 & , t > 0 \\ 0 & , t = 0 \\ -1 & , t < 0 \end{cases} \quad (5.30)$$

Lösung: Sei $Y(\omega)$ das Spektrum von $\text{sgn}(t)$. Wegen $\epsilon'(t) = \delta(t) \circ \bullet 1$ (siehe Seite 85 und 118) folgt dann aus dem Ableitungssatz

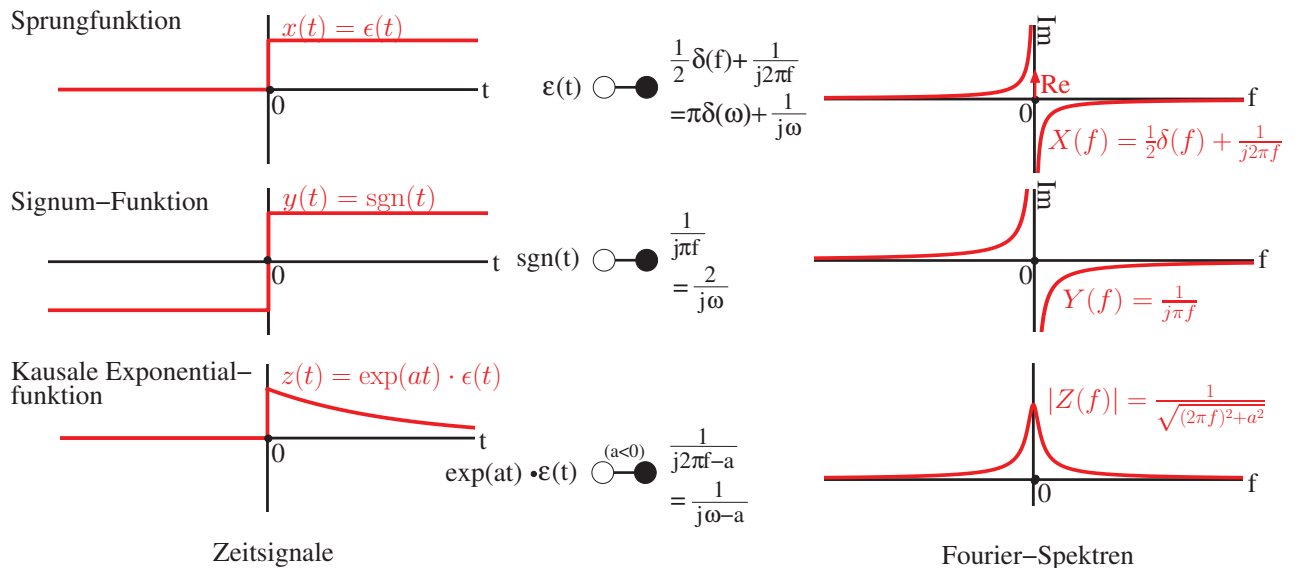
$$\begin{aligned} \text{sgn}'(t) &:= \epsilon'(t) - (\epsilon(-t))' = \delta(t) - \delta(-t) \cdot (-1) = 2\delta(t) \\ &\downarrow \\ j\omega Y(\omega) &= 2 \cdot 1 \iff Y(\omega) = \frac{2}{j\omega} \stackrel{(\omega=2\pi f)}{=} \frac{1}{j\pi f} \end{aligned}$$

231

Damit und mit $1 \circ \bullet \delta(f)$ nach (5.28) von Seite 123 folgt für das Spektrum $X(\omega)$ der Sprungfunktion $\epsilon(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$

$$\begin{aligned} \epsilon(t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t) \\ &\downarrow \\ X(f) &= \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \stackrel{(5.29)}{=} \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \end{aligned}$$

232



Beispiel 3: Auch die kausale Exponentialfunktion $e^{at}\epsilon(t)$ hat ein ähnliches Spektrum wie $\epsilon(t)$ bzw. $\text{sgn}(t)$ (siehe obige Skizze). Berechnen Sie es für $a < 0$!

Lösung: Mit der Definition des Fourier-Integrals (Satz 5.5 auf Seite 116) erhält man

233

$$\begin{aligned}
 e^{at} \cdot \epsilon(t) &\circlearrowleft \int_{-\infty}^{\infty} e^{at} \epsilon(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-j\omega)t} dt \\
 &= \left[\frac{e^{(a-j\omega)t}}{a-j\omega} \right]_0^{\infty} \stackrel{(a<0)}{=} 0 - \frac{1}{a-j\omega} \\
 &= \frac{1}{j\omega - a} = \frac{1}{j2\pi f - a}
 \end{aligned}$$

Bemerkung: Offenbar konvergiert $\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{(a-j\omega)t}| = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{at}$ und damit das obige Fourier-Integral nur für $a < 0$, d.h. falls die kausale Exponentialfunktion abklingend ist. Andernfalls existiert das Fourier-Integral nicht und man kann für anklingende Exponentialfunktionen ($a > 0$) kein sinnvolles Fourier-Spektrum angeben. Dies ist ein Problem, da solche Signalformen in der Praxis häufig vorkommen. Wir werden deshalb im nächsten Kapitel die Fourier- zur Laplace-Transformation verallgemeinern um diesen Mangel zu beheben (siehe Seite 130).