

Signale und Systeme Boxen

Florian Lubitz & Steffen Hecht

2. Mai 2018

1 Motivation, Wiederholung und Überblick

a

6

$$u_1(t) = 15 \text{ V} \sin(\pi t + \pi/3) + 60 \text{ V} \sin(10\pi t + \pi/3) = 0,5x(t) + 2y(t)$$

und damit $a = 0,5, b = 2$ und

$$u_2(t) := \mathcal{H}\{u_1(t)\} = \mathcal{H}\{0,5x(t) + 2y(t)\} \stackrel{??}{=}$$

2 Diskrete Signale

11

$$\begin{aligned}
 (b) \quad x[-k] &= \begin{cases} -\frac{1}{k}, & k \neq 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases} \\
 (c) \quad x[k + k_0] &= x[k + 3] = \begin{cases} \frac{1}{k+3}, & k \neq -3 \\ 0, & k = -3 \end{cases} \\
 (d) \quad x[k - k_0] &= x[k - 3] = \begin{cases} \frac{1}{k-3}, & k \neq 3 \\ 0, & k = 3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

12

$$\begin{aligned}
 x[k_0 - k] &= x[-(k - k_0)] \\
 &= x[(-k) + k_0]
 \end{aligned}$$

13

$$\text{mit } x[k_0 - k] = x[3 - k] = \begin{cases} \frac{1}{3-k}, & k \neq 3 \\ 0, & k = 3 \end{cases}$$

14

- $x[k]$ heißt gerades Signal, falls $x[k] = x[-k] \forall k \in \mathbb{Z}$ gilt.
- $x[k]$ heißt ungerades Signal, falls $x[k] = -x[-k] \forall k \in \mathbb{Z}$ gilt.

15

$$x[-k] = \begin{cases} \frac{1}{-k}, k \neq 0 \\ 0, k = 0 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{k}, k \neq 0 \\ 0, k = 0 \end{cases} = -x[k]$$

16

$$y[-k] = \begin{cases} \frac{1}{(-k)^2}, k \neq 0 \\ 0, k = 0 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{k^2}, k \neq 0 \\ 0, k = 0 \end{cases} = y[k]$$

17

- $x[k]$ heißt kausales Signal, falls gilt: $x[k] = 0 \forall k < 0$
- $x[k]$ heißt nicht-kausales Signal, falls gilt $\exists k < 0 : x[k] \neq 0$
- $x[k]$ heißt anti-kausales Signal, falls $x[-k-1]$ kausal ist, d.h. falls gilt: $x[k] = 0 \forall k \leq 0$

18

- $x[k]$ ist nicht-kausal
- $u[k]$ ist kausal
- $v[k]$ ist anti-kausal

19

$$\delta[k] := \begin{cases} 1, k = 0 \\ 0, k \neq 0 \end{cases}$$

20

$$\epsilon[k] := \begin{cases} 1, k \geq 0 \\ 0, k < 0 \end{cases}$$

21

$$\delta[k - k_0] = \begin{cases} 1, k = k_0 \\ 0, k \neq k_0 \end{cases}$$

bzw.

$$\delta[k + k_0] = \begin{cases} 1, k \neq -k_0 \\ 0, k = -k_0 \end{cases}$$

22

$$\begin{aligned} x[k] \cdot \delta[k - i] &= \begin{cases} x[i], k = i \\ 0, k \neq i \end{cases} \\ &= x[i] \cdot \delta[k - i] \end{aligned} \tag{2.1}$$

Siebeigenschaft

23

$$x[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \cdot \delta[k - i] \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}$$

24

$$x[k] = \sum_{i=-K}^K x[i] \cdot \delta[k - i]$$

25

$$\begin{aligned} u[k] &= \delta[k + 2] + \delta[k + 1] + \delta[k] + \delta[k - 1] \\ v[k] &= 2 \cdot \delta[k + 3] + \delta[k + 1] - \delta[k - 1] - 2 \cdot \delta[k - 3] \end{aligned}$$

26

$$\text{sgn}[k] := \epsilon[k] - \epsilon[-k] = \begin{cases} 1, k > 0 \\ 0, k = 0 \\ -1, k < 0 \end{cases}$$

27

$$\text{III}[k] := \epsilon[k] + \epsilon[-k - 1] = 1 \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}$$

28

$$\text{rect}_{k_1, k_2}[k] := \epsilon[k - k_1] - \epsilon[k - k_2 - 1] = \begin{cases} 1, k_1 \leq k \leq k_2 \end{cases}$$

29

$$x[k] = q^k \cdot \epsilon[k]$$

30

$$x[k] : 0, \dots, 0, x[0] = 1, x[1] = -0.7, x[2] = 0.49, x[3] = 0.343, \dots$$

31

$$x[k] : 0, \dots, 0, x[0] = 1, x[1] = -0.8, x[2] = 0.64, x[3] = -0.512, \dots$$

32

$$\begin{aligned} x[k] + y[k] &: x[-\infty] + y[-\infty], \dots, x[0] + y[0], x[1] + y[1], \dots, x[\infty] + y[\infty] \\ x[k] \cdot y[k] &: x[-\infty] \cdot y[-\infty], \dots, x[0] \cdot y[0], x[1] \cdot y[1], \dots, x[\infty] \cdot y[\infty] \\ c \cdot x[k] &: c \cdot x[-\infty], \dots, c \cdot x[0], c \cdot x[1], \dots, c \cdot x[\infty] \end{aligned}$$

33

$$S_{k_1, k_2} := \{\vec{x} \in S | x[k] = 0 \forall k < k_1 \text{ oder } k > k_2\}$$

34

$$\begin{aligned}\vec{x} &= (0 \quad 3 \quad 2 \quad 5 \quad 0 \quad 0) \\ \vec{y} &= (0 \quad 0 \quad 2 \quad -3 \quad 0 \quad 2) \\ \vec{x} + \vec{y} &= (0 \quad 3 \quad 4 \quad 2 \quad 0 \quad 2) \\ \vec{x} - \vec{y} &= (0 \quad 3 \quad 0 \quad 8 \quad 0 \quad -2) \\ \vec{x} \cdot \vec{y} &= (0 \quad 0 \quad 4 \quad -15 \quad 0 \quad 0) \\ c + \vec{x} &= (0 \quad 15 \quad 10 \quad 25 \quad 0 \quad 0)\end{aligned}$$

35

$$(x * y)[k] := \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \cdot y[k-i]$$

36

$$\begin{array}{ccc} i=0 & i=0 & i=0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x[i] = (3 \quad 2 \quad 1), & y[i] = (1 \quad -1 \quad 2) \text{ bzw. } & z[0-i] = (2 \quad -1 \quad 1) \end{array}$$

37

	$x[i] =$	3	2	1	$\sum x[i]y[k-i] =$	$(x * y)[k]$
$k=0$	$y[k-i] =$	2	-1	1	$3 \cdot 1$	$= 3$
$k=1$			2	-1	$3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1$	$= -1$
$k=2$				2	$3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1$	$= 5$
$k=3$					$2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1)$	$= 3$
$k=4$					$1 \cdot 2$	$= 2$

38

$$x[k] * y[k] = 3\delta[k] - \delta[k-1] + 5\delta[k-2] + 3\delta[k-3] + 2\delta[k-4]$$

39

$$\begin{aligned}
 & i = -43 \\
 & \downarrow \\
 & x[i] = (-1 \quad 3 \quad -2) \text{ und} \\
 & i = 19 \\
 & \downarrow \\
 & y[i] = (1 \quad -2 \quad 4 \quad -1) \text{ bzw. } y[-i] = (-1 \quad 4 \quad -2 \quad 1)
 \end{aligned}$$

40

$i = -43$ (pfeil)

k	$x[i]$	-1	3	-2		$(x * y)[k]$
-24	$y[k - i] =$	-1	4	-2	1	-1
-23		-1	4	-2	1	$2 + 3 = 5$
-22		-1	4	-2	1	$-4 - 6 - 2 = -12$
-21		-1	4	-2	1	$1 + 12 + 4 = 17$
-20			-1	4	-2	$-3 - 8 = -11$
-19				-1	4	2

41

$$\begin{aligned}
 (x * y)[k] = & -\delta[k + 24] + 5\delta[k + 23] - 12\delta[k + 22] + 17\delta[k + 21] \\
 & - 11\delta[k + 20] + 2\delta[k + 19]
 \end{aligned}$$

42

$$x[k] * y[k] \in \mathcal{S}_{a+c, b+d} \quad \text{und hat Länge } n + m - 1.$$

43

- I) Kommutativität: $x * y = y * x$
 II) Assoziativität: $w * (x * y) = (w * x) * y$ und $c \cdot (x * y) = (c \cdot) * y$
 III) Distributivität: $w * (x + y) = w * x + w * y$
 IV) Neutrales Element: $x * \delta = x$
 V) Verschiebung: $x[k] * \delta[k_0 - k] = x[k - k_0]$
 VI) Zeitinvarianz: $x[k] * y[k - k_0] = (x[k] * y[k])[k - k_0]$
 VII) Linearität: $(c \cdot x + d \cdot y) * w = c \cdot (x * w) + d \cdot (y * w)$

44

$$p(z) := a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots + a_n z^n$$

45

$$x[k] = a_0 \delta[k] + a_1 \delta[k - 1] + a_2 \delta[k - 2] + \dots + a_n \delta[k - n]$$

46

$$p(z) \cdot q(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_{2n} z^{2n} \quad \text{Mit Koeffizienten } c_k = (c * y)[k]$$

47

$$p(z) = 3 + 2z + z^2 \text{ und } q(z) = 1 - z + 2z^2$$

48

$$\begin{aligned} p(z) \cdot q(z) &= (3 + 2z + z^2) \cdot (2z^2 - z + 1) \\ &= 3 \cdot 1 + z(3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1) + z^2(3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1) \\ &\quad + z^3(2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1)) + z^4(1 \cdot 2) \\ &= 3 - z + 5z^2 + 3z^3 + 2z^4 \end{aligned}$$

49

$$E_x := \sum_{i=-\infty}^{\infty} |x[i]|^2$$

50

$$P_x := \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{i=-K}^K |x[i]|^2$$

51

$$\langle x[k], y[k] \rangle_E := \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*[k] \cdot y[k]$$

52

$$\langle x[k], y[k] \rangle_P := \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{k=-K}^K x^*[k] \cdot y[k]$$

53

$$\begin{aligned} ||x[k]||_E &:= \sqrt{\langle x[k], x[k] \rangle_E} = \sqrt{E_x} \text{ bzw.} \\ ||x[k]||_P &:= \sqrt{\langle x[k], x[k] \rangle_P} = \sqrt{P_x} \end{aligned}$$

54

$$\cos \Phi = \frac{\langle x[k], y[k] \rangle}{||x[k]|| \cdot ||y[k]||}$$

55

$$\varphi_{xy}[\kappa] := \langle x[k], y[k + \kappa] \rangle$$

56

$$\varphi_{xx}[\kappa] := \langle x[k], x[k + \kappa] \rangle$$

57

$$\varphi_{xy}^E[\kappa] = x^*[-\kappa] * y[\kappa] \text{ bzw. } \varphi_{xy}^P[\kappa] = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2K+1} x_K^*[-\kappa] * y_K[\kappa]$$

3 Diskrete Systeme

Inhalt...

58

$$y[k] = \mathcal{H}\{x[k]\}$$

59

entwickelt sich nun das Guthaben des Sparbuchs wie folgt:

zu Beginn: $y[0] = x_0$

nach 1 Jahr: $y[1] = x_0 + p \cdot x_0 = (1 + p) \cdot x_0$ nach 2 Jahren: $y[2] = (1 + p)x_0 + p \cdot (1 + p) \cdot x_0 = (1 + p) \cdot (1 + p) \cdot x_0 = (1 + p)^2 \cdot x_0$

nach 3 Jahren: $y[3] = \dots = (1 + p)^3 \cdot x_0$

nach i Jahren: $y[i] = (1 + p)^i \cdot x_0$

D.h. das Ausgangssignal ist die kausale Exponentialfolge $y[k] = x_0 \cdot (1 + p)^k \cdot \epsilon[k]$

60

$$y[k + 1] = y[k] \cdot (1 + p) + x[k + 1] \quad (3.1)$$

Das heißt $y[k + 1]$ ergibt sich aus dem verzinnten Guthaben $y[k]$ des vorigen Jahres und zusätzlich den neuen Einzahlungen $x[k + 1]$.

61

$$\mathcal{H}\{c \cdot x_1[k] + d \cdot x_2[k]\} = c \cdot \mathcal{H}\{x_1[k]\} + d \cdot \mathcal{H}\{x_2[k]\}$$

62

$$y[0] = x[0] = c \cdot x_1[0] + d \cdot x_2[0]$$

63

$$\begin{aligned} y[k+1] &\stackrel{(3.1)}{=} y[k] \cdot (1+p) + x[k+1] \\ &\stackrel{(I.V.)}{=} (cy_1[k] + d \cdot y_2[k]) \cdot (1+p) + c \cdot x_1[k+1] + d \cdot x_2[k+1] \\ &= c \cdot (y_1[k] \cdot (1+p) + x_1[k+1]) + d \cdot (y_2[k] \cdot (1+p) + x_2[k+1]) \\ &\stackrel{(3.1)}{=} c \cdot y[k+1] + d \cdot y_2[k+1] \end{aligned}$$

64

$$\mathcal{H}\{x[k - k_0]\} = y[k - k_0]$$

65

$$\begin{aligned} z[k_0] &= x[k_0 - k_0] = x[k_0] = y[0] = y[k_0 - k_0] \\ \text{und } z[k] &= 0 = y[k - k_0] \text{ f\"ur } k < k_0 \end{aligned}$$

66

$$\begin{aligned} z[k+1] &\stackrel{(3.1)}{=} z[k] \cdot (1+p) + x[k+1 - k_0] \\ &\stackrel{(I.V.)}{=} y[k - k_0] \cdot (1+p) + x[k - k_0 + 1] \\ &\stackrel{(3.1)}{=} y[k - k_0 + 1] \end{aligned}$$

67

... wenn der Ausgabewert $y[k_0]$ zur Zeit k_0 nur von fr\"uhern Eingabewerten $x[k], k \leq k_0$ abh\"angig ist.

68

$$|x[k]| < C \forall k \Rightarrow |y[k]| < D \forall k$$

69

$$y[k] = x_0 \cdot (1 + p)^k \cdot \epsilon[k] \rightarrow \infty \text{ für } k \rightarrow \infty$$

70

..., wenn der Ausgang $y[k]$ zur Zeit k nur vom Eingang $x[k]$ zur Zeit k abhängt.

71

..., falls $y[k]$ nur von $x[\kappa]$ für $|\kappa - k| \leq L$ abhängt.

72

$$h[k] := \mathcal{H}\{\delta[k]\}$$

73

$$\begin{aligned} y[k] = \mathcal{H}\{x[k]\} &\stackrel{(2.6)}{=} \mathcal{H}\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \cdot \delta[k-i]\right\} \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \mathcal{H}\{\delta[k-i]\} \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \cdot h[k-i] \\ &= x[k] * h[k] \end{aligned}$$

74

$$y[k] = x[k] * h[k] \text{ für alle } x[k] \in \mathcal{S}$$

75

$$h[k] := \mathcal{H}\{\delta[k]\} = (1 + p)^k \epsilon[k]$$

76

$$\begin{aligned}
y[k] &= h[k] * x[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (1+p)^i \epsilon[i] \cdot x[k-i] \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (1+p)^i \cdot x[k-i]
\end{aligned}$$

77

$$y[k] = \sum_{i=0}^k (1+p)^i \cdot x[k-i]$$

78

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |h[i]| < \infty$$

79

$$\begin{aligned}
|y[k]| &= |h[k] * x[k]| = \left| \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i] x[k-i] \right| \stackrel{DUG}{\leq} \sum_{i=-\infty}^{\infty} |h[i] \cdot x[k-i]| \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} |h[i]| \cdot |x[k-i]| < M \sum_{i=-\infty}^{\infty} |h[i]| < M \cdot C < \infty
\end{aligned}$$

98

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{\alpha x[k] + \beta y[k]\} &\stackrel{Def.}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha x[k] + \beta y[k]) \cdot z^{-k} \\
&= \alpha \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k} \right) + \beta \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k] z^{-k} \right) \\
&= \alpha X(z) + \beta Y(z)
\end{aligned}$$

99

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{x[k+k_0]\} &\stackrel{Def.}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k+k_0]z^{-k} \stackrel{k'=k+k_0}{(k=k'-k_0)} \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \underbrace{x[k']z^{-k'+k_0}}_{=z^{-k'} \cdot z^{k_0}} \\
&= z^{k_0} \cdot \underbrace{\sum_{k'=-\infty}^{\infty} x[k']z^{-k'}}_{=X(z)} = z^{k_0} \cdot X(z)
\end{aligned}$$

100

$$\mathcal{Z}\{a^k \cdot x[k]\} \stackrel{Def.}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{a^k}_{=(\frac{1}{\alpha})^{-k}} \cdot x[k] \cdot z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \left(\frac{z}{\alpha}\right)^{-k} = X\left(\frac{z}{\alpha}\right)$$

101

$$\mathcal{Z}\{x[-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-k]z^{-k} \stackrel{k'=-k}{(k=-k')} \sum_{k'=-\infty}^{\infty} x[k']z^{k'} = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} x[k'] \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^{-k'} = X\left(\frac{1}{z}\right)$$

102

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

103

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x[k] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot X(z)$$

104

$$\mathcal{Z}\{\alpha^{k-1} \cdot \epsilon[k-1]\} = z^{-1} \cdot \mathcal{Z}\{\alpha^k \cdot \epsilon[k]\} = z^{-1} \cdot \frac{z}{z-\alpha} = \frac{1}{z-\alpha}$$

105

$$\mathcal{Z}\{A \cdot \alpha^{k-k_0} \cdot \epsilon[k-k_0]\} = A \cdot z^{-k} \cdot \mathcal{Z}\{\alpha^k \epsilon[k]\} = A \cdot z^{-k_0} \cdot \frac{z}{z-\alpha} = \frac{A \cdot z^{-(k_0-1)}}{z-\alpha}$$

106

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{k \cdot \alpha^k \cdot \epsilon[k]\} &= -z \cdot \frac{d}{dz} \mathcal{Z}\{\alpha^k \epsilon[k]\} = -z \cdot \left(\frac{z}{z-\alpha}\right)' \\ &= -z \cdot \left(\frac{1 \cdot (z-\alpha) - z \cdot 1}{(z-\alpha)^2}\right) = \frac{\alpha \cdot z}{(z-\alpha)^2} \end{aligned}$$

107

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

108

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

109

$$\begin{aligned} h[k] &= (1+p)^k \cdot \epsilon[k] \\ H(z) &= \frac{z}{z-(1+p)} \end{aligned}$$

110

$$\begin{aligned} y[k+1] &= y[k] \cdot (1+p) + x[k+1] \\ zY(z) &= Y(z) \cdot (1+p) + zX(z) \Leftrightarrow Y(z)(z-(1+p)) = zX(z) \end{aligned}$$

111

$$H(z) := \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z}{z-(1+p)}$$