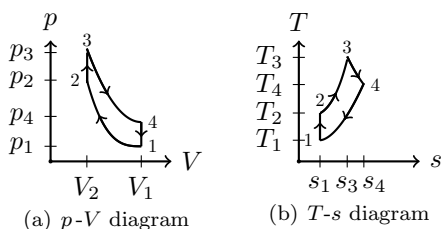


5.1-94

En ideal gas genomlöper följande kretsprocess medutdurs

- 1 → 2 Isentropisk kompression
- 2 → 3 Tryckökning vid konstant volym
- 3 → 4 Polytropisk expansion ($n = 1.2$).
- 4 → 1 Tryckminskning vid konstant volym.

Rita processen i p - V - och T - s -diagrammen. Bestäm termiska verkningsgraden då $T_1 = 300\text{K}$, $T_3 = 700\text{K}$, $T_4 = 500\text{K}$ och $\kappa = 1.4$.



Den teoretiska termiska verkningsgraden η_t definieras enligt

$$\begin{aligned}\eta_t &= \frac{q_{tillf} - |q_{bortf}|}{q_{tillf}} \\ &= 1 - \frac{|q_{bortf}|}{q_{tillf}}\end{aligned}\quad (1)$$

q_{tillf} består av den värmeenergi som tillförs under isokor uppvärmning q_{23} samt värmertilförseln under isotropiska expansionen q_{34} eftersom integralen från 2 till 4 i T - s -diagrammet är positiv då processpilen löper i positiv riktning, $ds > 0$. Definitionen för entropi är

$$\begin{aligned}ds &= \left(\frac{dq}{T}\right)_{rev} \\ \int T \cdot ds &= \int dq\end{aligned}\quad (2)$$

Att q är arean under kurvan i T - s -diagrammet som kan ha olika tecken beroende på om integration sker till höger eller vänster förstås från

följande likheter som följer ur definitionen för entropi.

$$\begin{aligned}\int T \cdot ds &= \int dq \\ \int T \cdot ds &= q\end{aligned}\quad (3)$$

För fullständighetens skull anges också entropidefinitionen för en icke-reversibel process.

$$ds = \frac{dq}{T} + \frac{|dw_f|}{T}\quad (4)$$

där dw_f är friktionsarbetet uttryckt per massenhet. Entropin blir alltså större med friktionsvärme eftersom friktionstermen adderar till högerledet av uttrycket för en reversibel process.

Den bortförda värmeenergin q_{bortf} sker under den isokor-processen från 4 till 1, $q_{bortf} = q_{41}$.

Vi börjar med att teckna q_{tillf} som är $q_{23} + q_{34}$. q_{23} är värmen som tillförs under en isokor.

$$\begin{aligned}dq_{23} &= du + p \cdot dv \\ &= du + p \cdot 0 \\ q_{23} &= \int_2^3 du \\ &= \int_2^3 \bar{c}_v \cdot dT \\ &= \bar{c}_v \cdot (T_3 - T_2)\end{aligned}\quad (5)$$

Har vi värden på \bar{c}_v , T_3 och T_2 ?

Information om T_3 har vi men T_2 och \bar{c}_v är okända

$$q_{23} = (\bar{c}_v) \cdot (T_3 - (T_2))$$

Vi vet endast att det rör sig om en ideal gas. Med de siffrvärden som vi känner till så har vi i alla fall

$$q_{23} = \bar{c}_v \cdot (700 - T_2)\quad (6)$$

För att teckna q_{34} som är den andra termen av summan för q_{tillf} så måste vi härleda ett

uttryck för dq specifikt för en polytrop process. Från termodynamikens första huvudsats har vi $dq = du + p \cdot dv$, vilket kräver att vi måste teckna ett uttryck för volymändringsarbetet $p \cdot dv$ För polytropiska processer gäller

$$\begin{aligned} p_1 \cdot V_1^n &= p_2 \cdot V_2^n \\ p \cdot V^n &= \text{konstant} \end{aligned} \quad (7)$$

Tar vi naturliga logaritmen på båda sidor av (7) så får vi

$$\ln p + n \cdot \ln V = \text{konstant} \quad (8)$$

Detta är lösningen till differentialekvationen

$$\frac{dp}{p} + n \cdot \frac{dV}{V} = 0 \quad (9)$$

Vi multiplicerar vänster- och höger-led med $p \cdot V$ och får

$$V \cdot dp + n \cdot p \cdot dV = 0 \quad (10)$$

Om vi tar \ln -funktionen på allmänna gaslagen så får vi

$$\ln p + n \cdot \ln V = m \cdot R + \ln T \quad (11)$$

Vilket är en av många lösningar till differentialekvationen

$$\frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T} \quad (12)$$

Multiplicerar vi (12) med $p \cdot V$ så får vi

$$V \cdot dp + p \cdot dV = p \cdot V \frac{dT}{T} \quad (13)$$

Men denna kan skrivas med allmänna gaslagen på formen

$$\frac{p \cdot V}{T} = m \cdot R$$

$$V \cdot dp + p \cdot dV = m \cdot R \cdot dT \quad (14)$$

Subtraheras (14) från (10) fås

$$\begin{aligned} V \cdot dp + n \cdot p \cdot dV - V \cdot dp + p \cdot dV \\ = 0 - m \cdot R \cdot dT \\ (n-1) \cdot p \cdot dV = -m \cdot R \cdot dT \end{aligned}$$

Vi kan lösa ut $p \cdot dV$ och får

$$p \cdot dV = -\frac{m \cdot R \cdot dT}{n-1} \quad (15)$$

Uttryckt per massenhet ($v = V/m$) så fås

$$p \cdot dv = -\frac{R \cdot dT}{n-1} \quad (16a)$$

Denna kan vi också skriva om med \bar{c}_v och κ eftersom $R = \bar{c}_v \cdot (\kappa - 1)$

$$p \cdot dv = -\frac{\bar{c}_v \cdot (\kappa - 1)}{n-1} \cdot dT \quad (16ab)$$

Vi kan nu beräkna värmemängdsändringen per massenhet q för en polytrop process

$$\begin{aligned} dq &= du + p \cdot dv \\ &= \bar{c}_v \cdot dT - \frac{R \cdot dT}{n-1} \\ &= \bar{c}_v \cdot dT - \frac{\bar{c}_v \cdot (\kappa - 1)}{n-1} \cdot dT \end{aligned}$$

Integreras denna från 3 till 4 så fås

$$\begin{aligned} q_{34} &= \int_3^4 \bar{c}_v \cdot dT - \frac{R \cdot dT}{n-1} \\ &= \bar{c}_v \cdot (T_4 - T_3) - \frac{R \cdot (T_4 - T_3)}{n-1} \\ &= \bar{c}_v \cdot (T_4 - T_3) - \frac{\bar{c}_v \cdot (\kappa - 1) \cdot (T_4 - T_3)}{n-1} \\ &= \bar{c}_v \cdot (T_4 - T_3) \cdot \left[\frac{(n-1) - (\kappa - 1)}{n-1} \right] \\ &= \bar{c}_v \cdot (T_4 - T_3) \cdot \frac{(n - \kappa)}{n-1} \end{aligned} \quad (17)$$

med insättning av det som vi har information om så fås

$$\begin{aligned} q_{34} &= \bar{c}_v \cdot (500 - 700) \cdot \frac{1.2 - 1.4}{1.2 - 1} \\ &= \bar{c}_v \cdot 200 \end{aligned} \quad (18)$$

Vi har nu sammanfattningsvis q_{tillf} enligt

$$\begin{aligned} q_{tillf} &= q_{23} + q_{34} \\ &= \bar{c}_v \cdot (700 - T_2) \\ &\quad + \bar{c}_v \cdot 200 \end{aligned} \quad (19)$$

q_{bortf} är endast den isokora nedkylningen från (4) till (1) $q_{bortf} = q_{41}$ således

$$\begin{aligned} q_{41} &= \bar{c}_v \cdot (T_1 - T_4) \\ &= \bar{c}_v \cdot (300 - 500) \\ q_{bortf} &= -\bar{c}_v \cdot 200 \end{aligned} \quad (20)$$

Men vi är faktiskt endast intresserade av $|q_{bortf}|$

$$|q_{bortf}| = \bar{c}_v \cdot 200 \quad (21)$$

Vi saknar information om T_2 . Att vi inte har något värde på \bar{c}_v spelar ingen roll därför att vi kan skriva om denna med en faktorn R som kommer att förkortas bort när kvoten $|q_{bortf}|/q_{tillf}$ tecknas.

Tipset i boken är att inse att

$$s_4 - s_1 = (s_4 - s_3) + (s_3 - s_2) \quad (22)$$

Vi behöver uttrycken för entropiändringarna för isokor-processer dvs. för $(s_4 - s_1)$ och $(s_3 - s_2)$ samt för polytrop-processen $(s_4 - s_3)$. Dessa kan vi ta direkt ur formelsamligen men vi väljer här att genomföra dessa beräkningar. Nu har ju vi data för en processen som går från (4) till (1) och bör kanske beräkna $s_1 - s_4$ men detta är ju inget annat än $-(s_4 - s_1)$, så vi räknar som om processen gick från (1) till (4) För isokor process från 1 till 4 (fast den i verkligheten

går från 4 till 1)

$$\begin{aligned} ds &= \left(\frac{dq}{T} \right)_{rev} \\ &= \frac{du}{T} + \frac{p \cdot dv}{T} \\ &= \frac{\bar{c}_v \cdot dT}{T} \end{aligned}$$

Integrering ger

$$\begin{aligned} \int_1^4 ds &= \int_1^4 \frac{\bar{c}_v \cdot dT}{T} \\ s_4 - s_1 &= \bar{c}_v \cdot \ln\left(\frac{T_4}{T_1}\right) \end{aligned} \quad (23)$$

Likaså kan vi beräkna $s_3 - s_2$ för isokoren från 2 till 3

$$s_3 - s_2 = \bar{c}_v \cdot \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) \quad (24)$$

För den polytrofa processen 3 till 4 så har vi

$$\begin{aligned} ds &= \left(\frac{dq}{T} \right)_{rev} \\ &= \frac{du}{T} + \frac{p \cdot dv}{T} \\ &= \bar{c}_v \cdot \frac{dT}{T} - \frac{R}{n-1} \cdot \frac{dT}{T} \\ &= \bar{c}_v \cdot \frac{dT}{T} - \frac{\bar{c}_v \cdot (\kappa - 1)}{n-1} \cdot \frac{dT}{T} \end{aligned}$$

Integreras ds från 3 till 4 så fås

$$\begin{aligned} \int_3^4 ds &= \int_3^4 \bar{c}_v \cdot \frac{dT}{T} - \frac{R}{n-1} \cdot \frac{dT}{T} \\ s_4 - s_3 &= \bar{c}_v \cdot \ln\left(\frac{T_4}{T_3}\right) - \frac{R}{n-1} \cdot \ln\left(\frac{T_4}{T_3}\right) \\ &= \bar{c}_v \frac{n - \kappa}{n - 1} \cdot \ln\left(\frac{T_4}{T_3}\right) \end{aligned} \quad (25)$$

Vi tecknar nu uttrycken för $(s_4 - s_1) = (s_4 - s_3) + (s_3 - s_2)$ och ser om vi kan lösa ut

T_2

$$\begin{aligned} s_4 - s_1 &= (s_4 - s_3) + (s_3 - s_2) \\ \bar{c}_v \cdot \ln\left(\frac{T_4}{T_1}\right) &= \bar{c}_v \frac{n - \kappa}{n - 1} \cdot \ln\left(\frac{T_4}{T_3}\right) \\ &\quad + \bar{c}_v \cdot \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) \end{aligned}$$

Vi kan börja med att förkorta bort \bar{c}_v

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{T_4}{T_1}\right) &= \frac{n - \kappa}{n - 1} \cdot \ln\left(\frac{T_4}{T_3}\right) \\ &\quad + \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) \end{aligned}$$

Vi kan förbereda vänster- och höger-led för att ta ta e-upphöjt av vänster och höger-led

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{T_4}{T_1}\right) &= \ln\left[\left(\frac{T_4}{T_3}\right)^{\frac{n - \kappa}{n - 1}}\right] \\ &\quad + \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) \end{aligned}$$

Nu tar vi e-upphöjt.

$$\frac{T_4}{T_1} = \left(\frac{T_4}{T_3}\right)^{\frac{n - \kappa}{n - 1}} \cdot \frac{T_3}{T_2} \quad (26)$$

Högerledet måste bli en produkt därför att $e^{\alpha + \beta} = e^\alpha \cdot e^\beta$ Låt α och β vara ln-funktioner och resultatet blir produkten av argumenten för ln-funktionerna.

$$\begin{aligned} T_2 &= \left(\frac{T_4}{T_3}\right)^{\frac{n - \kappa}{n - 1}} \cdot \frac{T_3 \cdot T_1}{T_4} \\ &= \left(\frac{500}{700}\right)^{\frac{1.2 - 1.4}{1.2 - 1}} \cdot \frac{700 \cdot 300}{500} \\ &= 588^\circ\text{K} \end{aligned} \quad (27)$$

Nu är det bara sätt in i formeln för verknings-

graden. Substituerar $R = \bar{c}_v \cdot (\kappa - 1)$

$$\begin{aligned} \eta_t &= 1 - \frac{|q_{bortf}|}{q_{tillf}} \\ &= 1 - \frac{\bar{c}_v \cdot 200}{\bar{c}_v \cdot (700 - 588) + \bar{c}_v \cdot 200} \\ &= 1 - \frac{200}{312} \\ &= 1 - 0.641025641 \\ &= 0.358974359 \end{aligned}$$

Svar med korrekt antal värdesiffror måste vara med två värdesiffror eftersom det minsta antalet värdesiffror av en parameter i problemformuleringen var för $\kappa = 1.4$ Således skall svaret vara $\eta_t = 0.36$ eller 36%