

Tentamen 2021-06-22

1. 0.10 kg is med temperaturen 0.0°C sänkes ned i 2.0 kg vatten, som har temperaturen $+80^\circ\text{C}$. Vilken blir blandningens sluttemperaturen?
Isens smältentalpi är 334 kJ/kg . Är processen reversibel?

Energi avgiven är lika med energi upptagen. Det varma vattnet avger energi som skall smälta isen samt ge det smältvattnet en sluttemperatur som är blandningens temperatur T_f . Givet:

$$m_1 = 2.0 \text{ kg}$$

$$m_2 = 0.1 \text{ kg}$$

$$T_1 = 80^\circ\text{C}$$

$$T_2 = 0.0^\circ\text{C}$$

$$c_{\text{melt}} = 334 \text{ kJ/kg}$$

$$c_{H_2O} = 4.19 \text{ kJ/(kgK)}$$

Energi avgiven är lika med energi upptagen

$$|Q_{\text{avgiven}}| = |Q_{\text{upptagen}}|$$

$$m_1 c_{H_2O} (T_2 - T_f) = m_2 c_{\text{melt}} + m_2 c_{H_2O} (T_f - T_2)$$

Omfördelar termer

$$m_1 c_{H_2O} T_2 - m_2 c_{\text{melt}} = m_1 c_{H_2O} T_f + m_2 c_{H_2O} T_f$$

$$T_f (m_1 c_{H_2O} + m_2 c_{H_2O}) = m_1 c_{H_2O} T_2 - m_2 c_{\text{melt}}$$

Löser ut T_f

$$\begin{aligned} T_f &= \frac{m_1 c_{H_2O} T_2 - m_2 c_{\text{melt}}}{m_1 c_{H_2O} + m_2 c_{H_2O}} \\ &= \frac{2.0 \cdot 4.19 \cdot 80 - 0.1 \cdot 334}{2.0 \cdot 4.19 + 0.1 \cdot 4.19} \\ &= 72.394590294^\circ\text{C} \end{aligned}$$

vilket avrundas till en värdesiffra i decimalen.

Blandningens temperatur blir 72.4°C .

2. I en trycktank finns $2m^3$ luft, temperatur $+20^\circ\text{C}$ och tryck 100 kPa.

Med hjälp av en kompressor, som arbetar isothermiskt, ska trycket i tanken höjas 10 gånger.

Kompressorn suger in 20 liter luft (temperatur $+20^\circ\text{C}$ och tryck 100 kPa) per sekund.

Hur länge måste kompressorn arbeta innan trycket i tanken har ökat 10 gånger?

Givet

$$V = 2m^3$$

$$T = +20^\circ\text{C} = 293^\circ\text{K}$$

$$p_1 = 100\text{kPa}$$

$$p_2 = 10 \cdot p_1$$

$$\dot{V} = 20\text{dm}^3/\text{s} = 0.02\text{m}^3/\text{s}$$

Kompressorn tillför massa m_{tillf} till tanken. Innan kompressorn startar så finns luftmassa m_1 i tanken

$$m_1 = \frac{p_1 \cdot V}{R \cdot T}$$

När trycket har uppnåtts så kommer massan i tanken vara m_2 sådant att

$$\begin{aligned} m_2 &= \frac{p_2 V}{RT} \\ &= \frac{10p_1 V}{RT} \end{aligned}$$

Den massa som måste tillföras är $m_{\text{tillf}} = m_2 - m_1$.

$$\begin{aligned} m_{\text{tillf}} &= m_2 - m_1 \\ &= \frac{10p_1 V}{RT} - \frac{p_1 V}{RT} \\ &= \frac{9p_1 V}{RT} \end{aligned}$$

Massflödet \dot{m} som kompressorn åstadkommer är

$$\dot{m} = \rho \dot{V}$$

där ρ är

$$\rho = \frac{m_1}{V} = \frac{p_1}{RT}$$

Så för att åstadkomma masstillskottet m_{tillf} krävs tiden Δt

$$\begin{aligned} \dot{m} \Delta t &= m_{\text{tillf}} \\ &= \frac{9p_1 V}{RT} \end{aligned}$$

Substituerar $\rho \dot{V}$ för \dot{m} för att sedan ersätta ρ med dess uttryck från den allmänna gaslagen

$$\begin{aligned} \rho \dot{V} \Delta t &= \frac{9p_1 V}{RT} \\ \frac{p_1}{RT} \dot{V} \Delta t &= \frac{9p_1 V}{RT} \end{aligned}$$

p_1 och RT försvinner från båda sidor

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{9p_1 V}{RT} \frac{RT}{p_1 \dot{V}} \\ &= \frac{9V}{\dot{V}} \\ &= \frac{9 \cdot 2}{0.02} = 900\text{s} \end{aligned}$$

Tiden som behövs för att kompressorn ska öka trycket 10 ggr är således relaterad till att öka luftmassan i den slutna cylindern från m_1 till m_2 och är 900 sekunder med flödet 20 liter per sekund.

3. En behållare har volymen 15.0l och innehåller 1.00kg syrgas ($\kappa = 1.40$), som har temperaturen $+27^\circ\text{C}$. Gasen får expandera isotermiskt till slutvolymen 45.0l varvid trycket blir p_{iost} . Om gasen istället expanderat adiabatiskt till slutvolymen så hade trycket blivit p_{adi} .
- a.) Beräkna kvoten p_{isot}/p_{adi} .
- b.) Vilken sluttemperatur har gasen i det adiabatiska fallet

Givet

$$\begin{aligned} p_1 &=? \\ m &= 1\text{kg} \\ T_1 &= 27^\circ\text{C} = 300^\circ\text{K} \\ V_1 &= 15.0\text{l} = 0.015\text{m}^3 \\ V_2 &= 45.0\text{l} = 0.045\text{m}^3 \end{aligned}$$

a.)

När en gas genomgår en isotermisk process gäller följande mellan start och sluttillståndet

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{p_1 V_1}{mR} = T_2 = \frac{p_2 V_2}{mR} \\ p_1 V_1 &= p_2 V_2 \end{aligned}$$

Således är det trycket p_2 efter den isotermiska expansionen

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 \frac{V_1}{V_2} \\ &= p_1 \frac{15}{45} = \frac{p_1}{3} \end{aligned}$$

För att hitta relationen för hur en adiabatisk process beter sig utgår vi från definitionen av entropi

$$\begin{aligned} s_2 - s_1 &= \int_1^2 \left(\frac{dq}{T} \right)_{rev} \\ &= \int_1^2 \frac{1}{T} (du + p \cdot dv) \\ &= \int_1^2 \frac{1}{T} (c_v dT + \frac{R \cdot T}{V} \cdot dv) \\ &= \int_1^2 c_v \frac{dT}{T} + R \cdot \frac{dv}{v} \end{aligned}$$

Vi skriver \bar{c}_v såsom ett konstant medelvärde mellan integrations gränserna och antar att R är konstant mellan integrations gränserna också

$$\begin{aligned} s_2 - s_1 &= c_v \int_1^2 \frac{dT}{T} + R \int_1^2 \frac{dv}{v} \\ &= c_v \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} + R \cdot \ln \frac{v_2}{v_1} \end{aligned} \quad (1)$$

Då $s_2 - s_1 = 0$ under en isentrop process så gäller att

$$c_v \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} + R \cdot \ln \frac{v_2}{v_1} = 0$$

och då gäller

$$\begin{aligned} c_v \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} &= -R \cdot \ln \frac{v_2}{v_1} \\ \ln \frac{T_2}{T_1} &= -\frac{R}{c_v} \cdot \ln \frac{v_2}{v_1} \\ &= \frac{R}{c_v} \cdot \ln \frac{v_1}{v_2} \\ &= \frac{c_p - c_v}{c_v} \cdot \ln \frac{v_1}{v_2} \\ &= (\kappa - 1) \cdot \ln \frac{v_1}{v_2} \\ &= \ln \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{\kappa - 1} \end{aligned}$$

vilket vi kan skriva utan per massenhet notationen såsom

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa - 1}$$

Eftersom kvoterna är konstant så måste även produkterna $T_1 V_1^{\kappa - 1}$ och $T_2 V_2^{\kappa - 1}$ vara konstanter och lika.

Vi kan således skriva relationen

$$T \cdot V^{\kappa - 1} = \text{konstant}$$

Eftersom allmänna gaslagen ger att

$$\begin{aligned} p_2 \cdot v_2 &= m \cdot R \cdot T_2 \\ p_1 \cdot v_1 &= m \cdot R \cdot T_1 \text{ så} \\ \frac{T_2}{T_1} &= \frac{p_2 \cdot v_2}{p_1 \cdot v_1} \end{aligned}$$

så ekvation (1) kan också skrivas

$$\begin{aligned}
 s_2 - s_1 &= c_v \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} + R \cdot \ln \frac{v_2}{V_1} \\
 &= c_v \cdot \ln \frac{p_2 \cdot v_2}{p_1 \cdot v_1} + R \cdot \ln \frac{v_2}{v_1} \\
 &= c_v \cdot \ln \frac{p_2}{p_1} + c_v \cdot \ln \frac{v_2}{v_1} + (c_p - c_v) \cdot \ln \frac{v_2}{v_1} \\
 &= c_v \cdot \ln \frac{p_2}{p_1} + c_p \cdot \ln \frac{v_2}{v_1}
 \end{aligned}$$

Om vi då sätter $s_2 - s_1 = 0$ så får vi

$$0 = c_v \cdot \ln \frac{p_2}{p_1} + c_p \cdot \ln \frac{v_2}{v_1}$$

och då får vi

$$\begin{aligned}
 c_v \cdot \ln \frac{p_2}{p_1} &= -c_p \cdot \ln \frac{v_2}{v_1} \\
 \ln \frac{p_2}{p_1} &= -\frac{c_p}{c_v} \cdot \ln \frac{v_2}{v_1} \\
 &= \frac{c_p}{c_v} \cdot \ln \frac{v_1}{v_2} \\
 &= \kappa \cdot \ln \frac{v_1}{v_2} \\
 &= \ln \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^\kappa
 \end{aligned}$$

eller

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^\kappa$$

vilket också kan skrivas utan per massenhet notation såsom

$$p_1 \cdot V_1^\kappa = p_2 \cdot V_2^\kappa$$

vilket är en den andra formeln i formelsamlingen som beskriver hur en adiabatisk process förhåller sig från starttillstånd till sluttillstånd.

Så trycket p_{adi} efter den adiabatiska ex-

pansionen är

$$\begin{aligned}
 p_1 \cdot V_1^\kappa &= p_2 \cdot V_2^\kappa \\
 p_{adi} &= p_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\kappa \\
 &= p_1 \left(\frac{15}{45} \right)^{1.4} \\
 &= p_1 \left(\frac{1}{3} \right)^{1.4}
 \end{aligned}$$

Kvoten p_{isot}/p_{adi} blir då

$$\begin{aligned}
 \frac{p_{isot}}{p_{adi}} &= \frac{\frac{p_1}{3}}{p_1 \left(\frac{1}{3} \right)^{1.4}} \\
 &= \frac{3^{1.4}}{3} = 3^{0.4} = 1.55
 \end{aligned}$$

b.)

Sluttemperaturen i det adiabatiska fallet förhåller sig såsom

$$T_1 \cdot V_1^{\kappa-1} = T_2 \cdot V_2^{\kappa-1}$$

vilket ger att

$$\begin{aligned}
 T_2 &= T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} \\
 &= 300 \left(\frac{15}{45} \right)^{0.4} \\
 &= 300 \left(\frac{1}{3} \right)^{0.4} = 193.32^\circ K = -79.7^\circ C
 \end{aligned}$$

4. 10 liter torr luft med temperaturen $+20^\circ\text{C}$ har trycket $1.0 \text{ bar} = 100 \text{ kPa}$. Luften komprimeras vid konstant tryck så att dess volym halveras. Behöver värme tillföras eller bortföras? Hur många Joule? Hur mycket ändras luftens inre energi? Data för luft tas ifrån sid 16 i formelsamlingen.

Givet

$$\begin{aligned} V &= 10l = 0.01m^3 \\ p_1 &= 1\text{bar} = 10^5Pa \\ T_1 &= +20^\circ C = 293^\circ K \\ V_2 &= 5l = 0.005m^3 \end{aligned}$$

Eftersom trycket inte ändras då kompressionen sker så måste värme hela tiden bortföras. För en isobar kompression så måste värmemängden Q_{12} bortföras enligt

$$Q_{12} = m\bar{c}_p(T_2 - T_1)$$

där T_2 och T_1 förhåller sig under en isobar process såsom

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

vilket betyder att T_2 fås såsom

$$\begin{aligned} T_2 &= T_1 \frac{V_2}{V_1} \\ &= 293 \frac{0.005}{0.01} \\ &= 146.5^\circ K = -126.5^\circ C \end{aligned}$$

Den värmemängd som måste bortföras kan nu beräknas. Formelsamlingens lägsta temperatur för vilket c_p är angivet är för -100°C där $c_p = 1.012 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ och massan m beräknas med allmänna gaslagen till och $R = 287 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$

$$\begin{aligned} m &= \frac{p_1 \cdot V_1}{R \cdot T_1} \\ &= \frac{10^5 \cdot 0.01}{287 \cdot 293} \\ &= 0.011891879kg \end{aligned}$$

Insättning ger

$$\begin{aligned} Q_{12} &= m\bar{c}_p(T_1/2 - T_1) \\ &= 0.011891879 \cdot 1012(-146.5) \\ &= -1763.066196782J \approx -1763J \end{aligned}$$

Ändringen i inre energi kan beräknas på två sätt. Antingen använder vi $c_p - c_v = R$ vilket ger $c_v = c_p - R$ och räknar

$$\begin{aligned} U_{12} &= m\bar{c}_v(T_1/2 - T_1) \\ &= 0.011891879 \cdot (1012 - 287)(-146.5) \\ &= -1263.066198287J \approx -1263J \end{aligned}$$

or we use

$$\begin{aligned} Q_1 &= U_{12} + W_{12} \\ U_{12} &= Q_1 - W_{12} \\ &= -1763.066196782J - p_1(V_2 - V_1) \\ &= -1763.066196782J - 10^5(0.005 - 0.01) \\ &= -1763.066196782J + 500 \approx -1263J \end{aligned}$$

5. Temperaturen i ett kylskåp ska vara 0.0°C , och rummet i vilket kylskåpet är placerat har temperaturen $+20^\circ\text{C}$. Hur stor effekt måste vi tillföra kylmaskinen, om denna är en ideal carnotmaskin och det per dygn läcker in 10^7 J värme i kylskåpet?

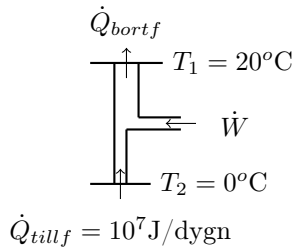
Givet

$$T_1 = 20^\circ\text{C} = 293^\circ\text{K}$$

$$T_2 = 0.0^\circ\text{C} = 273^\circ\text{K}$$

$$\dot{Q}_{tillf} = 10^7 \text{ J/dygn} = 10^7 / (24 \cdot 3600) \text{ W}$$

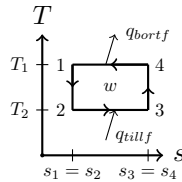
Sökt är \dot{W}_t det tekniska arbetet per tidsenhet som måste tillföras kylprocessen.



Enligt formelsamlingen gäller att för köldfaktorn ϵ för en kylmaskin är

$$\epsilon = \left| \frac{Q_{tillf}}{W_t} \right|$$

för en Carnot kylmaskin så gäller att kretsprocessen ser ut som följer



Vi kan nu teckna köldfaktorn för carnot maskinen därför att Q_{tillf} är arean under kurvan från $2 \rightarrow 3$ och W_t är den innesluttade arean.

$$\epsilon = \left| \frac{Q_{tillf}}{W_t} \right|$$

$$\epsilon_c = \frac{T_2(s_3 - s_2)}{T_1(s_3 - s_2) - T_2(s_3 - s_2)}$$

Observera att det känns lite ointuivt att sätta in den låga temperaturen i täljaren då Q_{tillf} är p.g.a. rumstemperaturen, men det är helt korrekt.

$$\epsilon_c = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

$$= \frac{273}{293 - 273} = 13.63$$

Denna köldfaktorkvot kan användas för att få fram \dot{W}_t därför att kvoten mellan \dot{Q}_{tillf} och \dot{W}_t måste hela tiden vara konstant och lika med köldfaktorn som är uträknad för en cykel.

$$\epsilon_c = 13.63 = \frac{\dot{Q}_{tillf}}{\dot{W}_t} \iff$$

$$\dot{W}_t = \frac{\dot{Q}_{tillf}}{13.63}$$

$$= \frac{10^7}{24 \cdot 3600 \cdot 13.63}$$

$$= 8.491617076 \text{ W} \approx 8.5 \text{ W}$$

6. En ideal gas befinner sig i ett tillstånd (p_1, V_1, T_1) . Gasen först via en isoterm process till (p_2, V_2, T_2) där $V_2 = 2V_1$, följt av en adiabatisk expansion till (p_3, V_3, T_3) där $V_3 = 3V_1$.

Därefter följer en isobar och en isokor process, vilka för systemet tillbaka till begynnelsestillståndet. Alla processer är reversibla. Rita ett p/V -diagram och ett T/s -diagram över kretsprocessen. Beräkna entropiändringarna för varje delprocess och avsluta sedan med att beräkna summan av alla entropiändringar för ett varv.

När man ska rita en kretsprocess i ett T/s -diagram så får man komma ihåg att alla processer utom den polytropiska med $n < \kappa$ går i syd-väst till/från nord-öst där alltså endast den nämnda polytropa processen går mellan nord-väst och syd-öst.

För den isoterma processen har vi

$$\begin{aligned} p_1 V_1 &= p_2 V_2 = p_2 2V_1 \iff \\ p_2 &= p_1/2 \\ T_1 &= T_2 \end{aligned}$$

Sammanfattningsvis så har vi efter isoterma

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1/2 \\ V_2 &= 2V_1 \\ T_1 &= T_2 \end{aligned}$$

därefter följer den adiabatiska expansionen

$$\begin{aligned} p_2 V_2^\kappa &= p_3 V_3^\kappa = p_3 (3V_1)^\kappa \\ p_2 (2V_1)^\kappa &= p_3 V_3^\kappa = p_3 (3V_1)^\kappa \iff \\ p_3 &= p_2 \left(\frac{2}{3}\right)^\kappa \\ &= \frac{p_1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^\kappa \end{aligned}$$

där T_3 och T_2 förhåller sig enligt

$$\frac{T_3}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\kappa-1}$$

vilket ger

$$\begin{aligned} T_3 &= T_2 \left(\frac{2V_1}{3V_1}\right)^{\kappa-1} \\ &= T_1 \left(\frac{2}{3}\right)^{\kappa-1} \end{aligned}$$

Sammanfattningsvis så har vi efter adiabat

$$\begin{aligned} p_3 &= \frac{p_1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^\kappa \\ V_3 &= 3V_1 \\ T_3 &= T_1 \left(\frac{2}{3}\right)^{\kappa-1} \end{aligned}$$

Vidare följer en isobar process där vi har att trycket är konstant

$$p_4 = p_3 = \frac{p_1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^\kappa$$

Volymen och temperaturen förhåller sig enligt

$$\frac{V_4}{T_4} = \frac{V_3}{T_3}$$

men här verkar jag inte kunna lösa ut V_4 och T_4 . Däremot så vet vi att processen går som en isokor till (p_1, V_1, T_1) . Men om V_4 till V_1 är en isokor process så är ju $V_4 = V_1$ så

$$\begin{aligned} \frac{V_4}{T_4} &= \frac{V_3}{T_3} \\ \frac{V_1}{T_4} &= \frac{3V_1}{T_3} \iff \\ T_4 &= T_3/3 \end{aligned}$$

Sammanfattningsvis så har vi efter den isobara processen

$$\begin{aligned} p_4 &= \frac{p_1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^\kappa \\ V_4 &= V_1 \\ T_4 &= \frac{1}{3} T_1 \left(\frac{2}{3}\right)^{\kappa-1} \end{aligned}$$

Samtliga sammanfattningar Från
(p_1, V_1, T_1) och isoterm till

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1/2 \\ V_2 &= 2V_1 \\ T_1 &= T_2 \end{aligned}$$

och därefter adiabat till

$$\begin{aligned} p_3 &= \frac{p_1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^\kappa \\ V_3 &= 3V_1 \\ T_3 &= T_1 \left(\frac{2}{3}\right)^{\kappa-1} \end{aligned}$$

och därefter isobar till

$$\begin{aligned} p_4 &= \frac{p_1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^\kappa \\ V_4 &= V_1 \\ T_4 &= \frac{1}{3} T_1 \left(\frac{2}{3}\right)^{\kappa-1} \end{aligned}$$

och därefter isokor till (p_1, V_1, T_1). Entropiändringen för isotermer är

$$\begin{aligned} s_2 - s_1 &= R \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = R \cdot \ln \frac{p_1}{p_2} \\ &= R \cdot \ln \frac{2V_1}{V_1} = R \cdot \ln \frac{p_1}{p_1/2} \\ &= R \cdot \ln 2 \end{aligned}$$

Entropiändringen för adiabat är 0.
Entropiändringen för isobaren är

$$\begin{aligned} s_4 - s_3 &= \bar{c}_p \ln \frac{T_4}{T_3} = \bar{c}_p \ln \frac{V_4}{V_3} \\ &= \bar{c}_p \ln \frac{T_3/3}{T_3} = \bar{c}_p \ln \frac{V_1}{3V_1} \\ &= \bar{c}_p \ln \frac{1}{3} \end{aligned}$$

och slutligen entropiändringen för isoko-

ren

$$\begin{aligned} s_1 - s_4 &= \bar{c}_v \ln \frac{T_1}{T_4} = \bar{c}_v \ln \frac{p_1}{p_4} \\ &= \bar{c}_v \ln \frac{T_1}{\frac{1}{3} T_1 \left(\frac{2}{3}\right)^{\kappa-1}} = \bar{c}_v \ln \frac{p_1}{\frac{p_1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^\kappa} \\ &= \bar{c}_v \ln \frac{2}{\left(\frac{2}{3}\right)^\kappa} \end{aligned}$$

Summera dessa:

$$\begin{aligned} s_2 - s_1 &= R \cdot \ln 2 \\ s_4 - s_3 &= \bar{c}_p \ln \frac{1}{3} = -\bar{c}_p \ln 3 \\ s_1 - s_4 &= \bar{c}_v \ln \frac{2}{\left(\frac{2}{3}\right)^\kappa} \end{aligned}$$

Först måste vi slå isär termen $s_1 - s_4$

$$\begin{aligned} s_1 - s_4 &= \bar{c}_v \ln \frac{2}{\left(\frac{2}{3}\right)^\kappa} \\ &= \bar{c}_v \ln 2 - \bar{c}_v \ln \left(\frac{2}{3}\right)^\kappa \\ &= \bar{c}_v \ln 2 - \bar{c}_v \kappa \ln 2 + \bar{c}_v \kappa \ln 3 \\ &= \bar{c}_v \ln 2 - \bar{c}_p \ln 2 + \bar{c}_p \ln 3 \end{aligned}$$

Nu har vi ett bättre uttryck för $s_1 - s_4$ och kan summera samtliga termer på ett mer transparent vis

$$\begin{aligned} &R \cdot \ln 2 - \bar{c}_p \ln 3 \\ &+ \bar{c}_v \ln 2 - \bar{c}_p \ln 2 + \bar{c}_p \ln 3 \\ &= R \cdot \ln 2 - (\bar{c}_p - \bar{c}_v) \ln 2 \\ &+ \bar{c}_p \ln 3 - \bar{c}_p \ln 3 = 0 \end{aligned}$$

där det faktum att $R = c_p - c_v$ har utnyttjats.

7. Vattenånga med trycket 20 bar och $x = 95\%$ strömmar genom en strypventil. Efter ventilen är trycket 5.0 bar. Vid passagen ändras inte ångans entalpi. Däremot ökar ångans entropi. Beräkna hur stor entropiökningen är.

Här ska man ha en T/s graf som visar att för specifika ånghalten $x = 1$ så går temperaturen som funktion av entropin som en symmetrisk trubbig avrundad bergstopp där streckade linjer för specifika ånghalten går som rinnande vatten ådrår från toppen som är den kritiska punkten. Vid den kritiska punkten finns ingen klar övergång från vätska till ånga, skilje ytan mellan ångfaserna blir osynlig. Ytan som innesluts av "berget" är tillståndet för den fuktiga ångan. Till vänster om berget finns den mättade vätskan och till höger finns torr mättad ånga. Trycket p löper som horisontella linjer som skär berget och först vid den högra gränsen så sticket kurvorna för respektive p -värde uppåt exponentiellt. Ovanför den kritiska punkten finns både vätska och överhettad ånga men där skiljelinjen $p > p_k$.

Den specifika volymen för fuktig ånga beräknas med formeln

$$v_f = (1 - x) \cdot v' + x \cdot v''$$

där v' är den specifika volymen för kokande vätska vid rådande tryck och v'' är den specifika volymen för mättad ånga vid rådande tryck. På samma sätt har vi

$$i_f = (1 - x) \cdot i' + x \cdot i''$$

där i' är entalpin för kokande vätska vid rådande tryck och i'' är entalpin för mättad ånga vid rådande tryck. och för entropin

$$s_f = (1 - x) \cdot s' + x \cdot s''$$

Vidare har vi att luftens ångkvot dvs. den specifika ånghalten x kan beräknas som funktion av relativa ångtrycket (relativa fuktigheten) φ enligt

$$x = 0.621 \frac{\varphi \cdot p_{H_2O}''}{p - p_{H_2O}''}$$

och den fuktiga luftens entalpi i kan också fås enligt

$$i = c_{pL} \cdot t + x(r_o + c_{p_{H_2O}} \cdot t) \quad (1)$$

där

t = lufttemperatur

c_{pL} = luftens specifika värme vid konstant tryck

r_o = vattnets ångbildningsvärme vid 0°C

x = luftens ångkvot. Med insatta värden erhålles, vid atmosfärstryck = 101.3kPa.

$$i \approx t + x \cdot (2500 + 1.86 \cdot t) \text{ kJ/kg torrluft}$$

Är fuktig ånga samma sak som fuktig luft? Jo, så måste det vara därför att storheterna i ångtabeller ges i enheten per kg torr luft.

För att lösa ovan problem

Givet

$$p_1 = 20 \text{ bar}$$

$$x_1 = 0.95$$

$$p_2 = 5 \text{ bar}$$

Vi beräknar först entalpin men vi kan inte använd (1) därför att vi inte känner samtliga ingående delar så vi måste använda ångtabeller

$$\begin{aligned} i_f &= (1 - x) \cdot i' + x \cdot i'' \\ i_f(p_1, x_1) &= (1 - 0.95) \cdot 908.60 \\ &\quad + 0.95 \cdot 2798.96 \\ &= 2704.442 \text{ kJ/kg torrluft} \end{aligned}$$

Entropin hos den fuktiga ångan är

$$\begin{aligned} s_f &= (1 - x) \cdot s' + x \cdot s'' \\ s_{f1}(p_1, x_1) &= (1 - 0.95) \cdot 2.4469 \\ &\quad + 0.95 \cdot 6.3403 \\ &= 6.14563 \text{ kJ/K*kg torrluft} \end{aligned}$$

För att ta reda på vad den nya specifika ånghalten är den s.k. ångkvoten så måste vi identifiera denna utifrån det faktum att

entalpin inte har ändrats.

$$\begin{aligned}
 i_f &= (1 - x_2) \cdot i' + x_2 \cdot i'' \\
 \frac{i_f - i'}{i'' - i'} &= x_2 \\
 \frac{2704.442 - 640.16}{2748.79 - 640.16} &= x_2 \iff \\
 x_2 &= 0.978968335
 \end{aligned}$$

Om vi nu använder denna nya specifika ånghalt x_2 så fås avseende den nya entropin

$$\begin{aligned}
 s_f &= (1 - x) \cdot s' + x \cdot s'' \\
 s_{f2}(p_2, x_2) &= (1 - 0.978968335) \cdot 1.8604 \\
 &\quad + 0.978968335 \cdot 6.8219 \\
 &= 6.717551394 \text{ kJ/K*kg torrluft}
 \end{aligned}$$

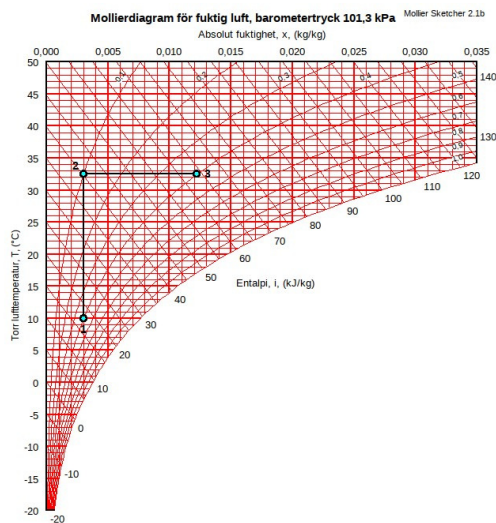
Entropiökningen är

$$\begin{aligned}
 s_{f2} - s_{f1} &= 6.717551394 - 6.14563 \\
 &= 0.571921394 \approx 0.57 \text{ kJ/K*kg torrluft}
 \end{aligned}$$

8. Luft med temperaturen $+10^\circ\text{C}$ och relativa fuktigheten $\varphi = 0,40$ värms till $+32,5^\circ\text{C}$. Hur stor blir nu φ ?

Hur mycket ånga måste du tillsätta, vid denna temperatur, för att komma tillbaka till $\varphi = 0,40$?

Ta data ifrån bifogat Mollier-diagram. Rita en förenklad skiss över Mollier-diagrammet där du markerar alla intressanta tillstånd och de värden du avläser i det bifogade Mollier-diagrammet. Lämna in din skiss tillsammans med dina lösningar.



Figur 1: Mollier diagram

Vi måste öka vatten halten dvs. kg torr mättad ånga från 3.03 g per kg torrluft till 12.25 g per kg torr luft. dvs. öka vattenmängden med $12.25 - 3.03 = 9.22$ g per kg torr luft

Tentamen 2021-08-18

- Du ska blanda till 5 liter vatten som ska ha temperaturen 40°C genom blandning av två vattenmängder: en med 10°C och en med 90°C . Hur stora är dessa mängder?

Givet

$$V_{tot} = 5 \text{ liter}$$

$$T_1 = 10^\circ\text{C}$$

$$T_2 = 90^\circ\text{C}$$

$$T_f = 40^\circ\text{C}$$

Mass balansen

$$m_1 + m_2 = m_{tot}$$

$$\rho \cdot V_1 + \rho \cdot V_2 = \rho \cdot V_{tot}$$

Energi balans är

$$|Q_{avgiven}| = |Q_{upptagen}|$$

$$m_2 \cdot c \cdot (90 - 40) = m_1 \cdot c \cdot (40 - 10)$$

Ersätt en av variablerna m_2 eller m_1 med sambandet från mass-balansen.

$$(m_{tot} - m_1) \cdot c \cdot 50 = m_1 \cdot c \cdot 30$$

Lös ut m_1

$$m_{tot} \cdot c \cdot 50 = m_1 \cdot c \cdot 30 + m_1 \cdot c \cdot 50$$

$$= m_1 \cdot (30 + 50) \cdot c \iff$$

$$m_1 = \frac{50}{80} \cdot m_{tot}$$

Således skall blandningen vara 5/8 delar kallt vatten och 3/8 delar varmt vatten Eller explicit uträknat

$$V_1 = \frac{5}{8} \cdot 5 = \frac{25}{8} = 3.125 \text{ liter } 10 \text{ gradigt}$$

$$V_2 = 5 - 3.125 = 1.875 \text{ liter } 90 \text{ gradigt}$$

2. En behållare har volymen 15.0 l och innehåller 0.010 kg syrgas ($\kappa = 1.40$ $R = 260$ J/ kg $^{\circ}\text{K}$, som har temperaturen $+27^{\circ}$ C. Gasen får expandera adiabatiskt till slutvolymen 45.0 l . Vilket tryck får gasen. Rita processen i ett p/V-diagram och i ett T/S-diagram.

Givet

$$V_1 = 15 \text{ liter} = 0.015 \text{ m}^3$$

$$T_1 = +27^{\circ}\text{C} = 300^{\circ}\text{K}$$

$$m = 0.010 \text{ kg}$$

$$V_2 = 45 \text{ liter} = 0.045 \text{ m}^3$$

$$\kappa = 1.4$$

$$R = 260 \text{ J/kg}^{\circ}\text{K}$$

Allmänna gaslagen ger trycket p_1

$$\begin{aligned} p_1 \cdot V_1 &= m \cdot R \cdot T_1 \\ p_1 &= \frac{m \cdot R \cdot T_1}{V_1} \\ &= \frac{0.01 \cdot 260 \cdot 300}{0.015} \\ &= 52000 \text{ Pa} \end{aligned}$$

Den adiabatiska expansionen förhåller sig enligt

$$\begin{aligned} p_1 \cdot V_1^{\kappa} &= p_2 \cdot V_2^{\kappa} \\ p_2 &= p_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa} \\ &= 52000 \cdot \left(\frac{0.015}{0.045} \right)^{1.4} \\ &= 11169.4962 \text{ Pa} \approx 11169.5 \text{ Pa} \end{aligned}$$

Den jäklen vill att man ska svara med två värde siffror alltså 11kPa.

3. En cylinder med volymen 0.005m^3 innehåller helium ($\kappa = 1.67$) med trycket 200 kPa och temperaturen 25°C . Rita processen i ett p/V-diagram. Beräkna den värmemängd som måste överföras för att åstadkomma en isoterm expansion till dubbla volymen. Ska värmemängden bortföras eller tillföras?

Givet:

$$p_1 = 200 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

$$V_1 = 0.005 \text{ m}^3$$

$$T = 25^\circ\text{C} = 298^\circ\text{K}$$

Formeln för Q i en isoterm process innehåller $m \cdot R \cdot T$ vilken vi kan ta fram genom allmänna gaslagen

$$\begin{aligned} m \cdot R \cdot T &= p_1 \cdot V_1 \\ &= 200 \cdot 10^3 \cdot 0.005 \end{aligned}$$

Formeln kan tas fram

$$dQ = dU + p \cdot dV$$

dU är noll för en isoterm process

$$\begin{aligned} dQ &= p \cdot dV \\ \int_1^2 dQ &= \int_1^2 p \cdot dV \\ Q_{12} &= \int_1^2 \frac{m \cdot R \cdot T}{V} dV = m \cdot R \cdot T \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \end{aligned}$$

Nu kan Q_{12} beräknas

$$\begin{aligned} Q_{12} &= m \cdot R \cdot T \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \\ &= m \cdot R \cdot T \cdot \ln\left(\frac{2V_1}{V_1}\right) \\ &= 200 \cdot 10^3 \cdot 0.005 \ln(2) \\ &= 693.14718056 \text{ J} \end{aligned}$$

Svar med två värdesiffror blir 0.69 kJ.

4. I en kompressor som suger in 12.0m^3 luft per minut går luften ifrån 1.05 bar och 300 K till 12.0 bar och 400 K . Vid kompressionen bortförs 2.00 kW värme. Beräkna vilken tillförd effekt kompressorn kräver. Är processen isoterm, adiabatisk eller en polytrop?
($\kappa = 1.40$ $c_p = 1.006\text{ kJ/kg}$ $\rho = 1.20\text{ kg/m}^3$)

Givet:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= 12/60\text{m}^3/\text{s} = 0.2\text{m}^3/\text{s} \\ p_1 &= 1.05 \cdot 10^5\text{Pa} \\ T_1 &= 300^\circ\text{K} \\ p_2 &= 12 \cdot 10^5\text{Pa} \\ T_2 &= 400^\circ\text{K} \\ \dot{Q}_{12} &= -2000\text{W}\end{aligned}$$

Adiabatisk är den inte eftersom värme bortförs. Vi avgör om processen är isoterm eller polytrop genom att identifiera om koefficienten $n \neq 1$ För en polytrop process gäller

$$\begin{aligned}\frac{T_2}{T_1} &= \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} \\ \ln\frac{T_2}{T_1} &= \frac{n-1}{n} \cdot \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \iff \\ \frac{n-1}{n} &= \ln\frac{T_2}{T_1} / \ln\frac{p_2}{p_1} \\ n-1 &= n \cdot \ln\frac{T_2}{T_1} / \ln\frac{p_2}{p_1}\end{aligned}$$

Samlar ihop lika termer

$$\begin{aligned}n(1 - \ln\frac{T_2}{T_1} / \ln\frac{p_2}{p_1}) &= 1 \\ n &= \frac{1}{(1 - \ln\frac{T_2}{T_1} / \ln\frac{p_2}{p_1})} \\ &= \frac{1}{(1 - \ln\frac{400}{300} / \ln\frac{12}{1.05})} \\ &= 1.133903121\end{aligned}$$

Således polytrop.

Formeln för ett öppet system är

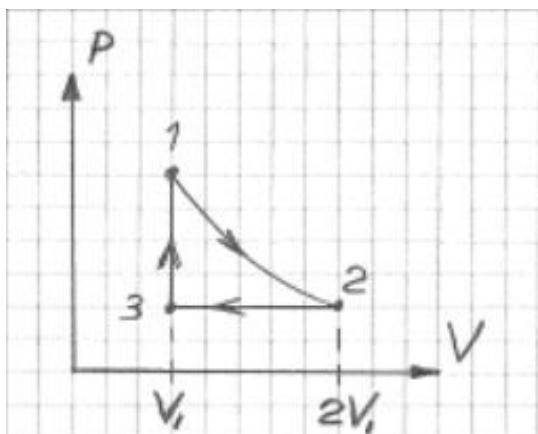
$$\dot{Q}_{12} = \dot{I}_2 - \dot{I}_1 + \dot{W}_{t2}$$

Löser ut \dot{W}_{t2}

$$\begin{aligned}\dot{W}_{t2} &= \dot{Q}_{12} - (\dot{I}_2 - \dot{I}_1) \\ &= \dot{Q}_{12} - \dot{m} \cdot \bar{c}_p \cdot (T_2 - T_1) \\ &= \dot{Q}_{12} - \rho \dot{V} \cdot \bar{c}_p \cdot (T_2 - T_1) \\ &= -2000 - 1.20 \cdot 0.2 \cdot 1006 \cdot (400 - 300) \\ &= -26144\text{W}\end{aligned}$$

Kompressorn kräver effekten 26.1kW

5. Visa, genom att beräkna entropiändringarna för delprocesserna i figuren nedan, att totala entropiändringen för gasen är noll. Processen 1 till 2, är en isoterm.



Figur 2: Hypotetisk process

Processen som går från 1 till 2 är en isoterm till dubbla volymen

$$\begin{aligned} s_2 - s_1 &= R \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} \\ &= R \cdot \ln 2 \end{aligned}$$

och eftersom $p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$ så är $p_2 = p_1/2$
Processen 2 till 3 är en isobar som går från volymen $2V_1$ till V_1 .

$$\begin{aligned} s_3 - s_2 &= \bar{c}_p \cdot \ln \frac{V_3}{V_2} \\ &= \bar{c}_p \cdot \ln \frac{V_1}{2V_1} \\ &= -\bar{c}_p \cdot \ln 2 \end{aligned}$$

Processen 3 till 4 är en isokor där trycket går från $p_1/2$ till p_1

$$\begin{aligned} s_4 - s_3 &= \bar{c}_v \cdot \ln \frac{p_4}{p_3} \\ &= \bar{c}_v \cdot \ln \frac{p_1}{p_1/2} \\ &= \bar{c}_v \cdot \ln 2 \end{aligned}$$

Summerar entropiändringarna

$$\begin{aligned} &R \cdot \ln 2 - \bar{c}_p \cdot \ln 2 + \bar{c}_v \cdot \ln 2 \\ &= R \cdot \ln 2 - (\bar{c}_p - \bar{c}_v) \cdot \ln 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

6. En carnotmaskin arbetar kontinuerligt mellan 350°C och 50°C . Maskinen roterar med 800 varv per minut. Vilket spillvärmeflöde måste maskinen kunna göra sig av med om den ska leverera en mekanisk effekt på 150 kW.

Givet:

$$T_1 = 50^{\circ}\text{C} = 323^{\circ}\text{K}$$

$$T_2 = 350^{\circ}\text{C} = 623^{\circ}\text{K} \quad \dot{W}_t = 150 \text{ kW}$$

Sökt är \dot{Q}_{bortf}

Carnotmaskinens verkningsgrad är

$$\begin{aligned} \eta_c &= 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad (1) \\ &= 1 - \frac{323}{623} \\ &= 0.481540931 \end{aligned}$$

Den generella formeln för verkningsgrad som gäller oavsett maskintyp är

$$\eta = \frac{W_t}{Q_{tillf}} \quad (2)$$

Denna kvot är härledd för ett varv i process cykeln men måste också gälla för 800 varv samt 800 varv dividerat med gemensamfaktor (per tidsenhet) så vi tar resultatet av η_c från ekvation 1 och sätter in det i vänsterledet av 2.

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\dot{W}_t}{\dot{Q}_{tillf}} \quad (2) \\ 0.481540931 &= \frac{150000}{\dot{Q}_{tillf}} \iff \\ \dot{Q}_{tillf} &= \frac{150000}{0.481540931} \\ &= 311499.999986502 \end{aligned}$$

Men

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{tillf} - \dot{Q}_{bortf} &= \dot{W}_t \iff \\ \dot{Q}_{bortf} &= \dot{Q}_{tillf} - \dot{W}_t \\ &= 311499.99 - 150000 \\ &= 161499.999986502 \approx 161500 \end{aligned}$$

Svar med tre värdesiffror 161kW måste bortföras.

7. Torr mättad vattenånga med trycket 20 bar expanderar adiabatiskt ner till 5.0 bar då den passerar en turbin. Beräkna ångans entalpiändring.

Detta är en öppen process.

Om ångan är torr mättad så är $x = 1$ och entalpin $i'' = 2798.96$ kJ per kg torrluft. Om den expanderar till ett lägre tryck så förblir ångan torr mättad eller så blir den överhettad tror jag. Chansar på att den fortfarande är torr mättad $i''(5\text{bar}) = 2748.79$

$$\begin{aligned}\Delta i &= i''(20) - i''(5) \\ &= 2798.96 - 2748.79 \\ &= 50.17 \text{ kJ per kg torrluft}\end{aligned}$$

NEEEEEEEEEEEEEEEJ! Detta är fel!
Adiabatisk expansion menas att $s_2 = s_1!!!$

$$s_1(20) = s''(20) = 6.3403 \text{ kJ per Kevin och kg torrluft}$$

Adiabatisk expansion betyder att $s_{\text{efter}} = s_{\text{före}}$ eller som i detta fallet $s_2(5) = s_1(20)$. Nu kan x_2 den specifika ånghalten beräknas.

$$\begin{aligned}s_1(20) &= s_2(5) = (1 - x_2) \cdot s'_2 + x_2 \cdot s''_2 \\ s_2 - s'_2 &= (s''_2 - s'_2) \cdot x_2 \iff \\ x_2 &= \frac{s_2 - s'_2}{s''_2 - s'_2} \\ &= \frac{6.3403 - 1.8604}{6.8219 - 1.8604} \\ &= 0.902932581\end{aligned}$$

Entalpin efter expansionen till 5 bar blir därför

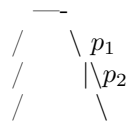
$$\begin{aligned}i_2 &= (1 - x_2) \cdot i'_2 + x_2 \cdot i''_2 \\ &= (1 - x_2) \cdot 640.16 + x_2 \cdot 2748.79 \\ &= 2544.110728274\end{aligned}$$

Skillnaden i entalpin blir

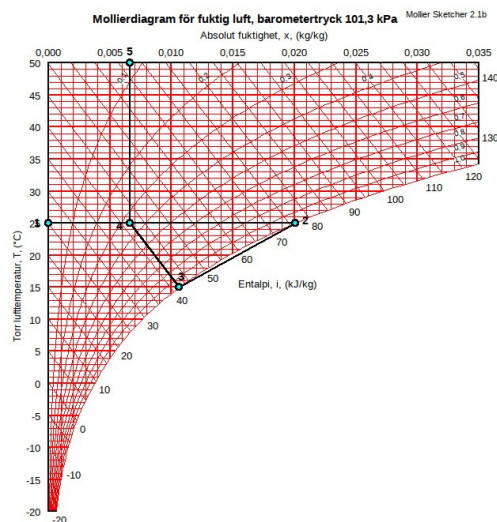
$$\begin{aligned}\Delta i_{12} &= i_2 - i_1 \\ &= 2544.110728274 - 2798.96 \\ &= -254.849271726 \text{ kJ per kg torrluft}\end{aligned}$$

Svar med två värdesiffror är att ändringen i entalpi är -0.25 MJ per kg torrluft.

Här ska man också skissera ångans entalpiändring i ett $T-s$ -diagram för fuktig ånga där utgångsläget 1 måste ligga på linjen som är den högra delen av "berget".

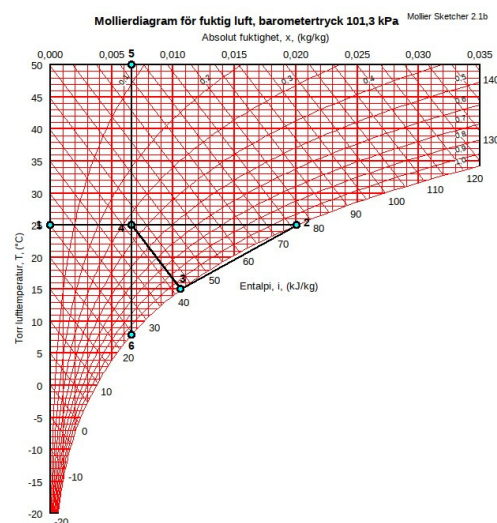


8. För en luftmängd har man mätt den torra temperaturen till $+25^{\circ}\text{C}$. och den våta temperaturen till $+15^{\circ}\text{C}$. Bestäm luftens RH, x och i (specifik entalpi). Till vilken temperatur kan man kyla innan dimma börjar att bildas? Ta data ifrån bifogat Mollier-diagram. Rita en förenklad skiss över Mollier-diagrammet där du markerar alla intressanta tillstånd och de värden du avläser i det bifogade Mollier-diagrammet. Lämna in din skiss tillsammans med dina lösningar.



Figur 3: Mollier diagram

Specifika luftfuktigheten/Luftens relativa ångtryck $\varphi = 0.33$, Entalpin är 42 kJ per kg torrluft. Ångkvoten x är ca 6.7 gram vatten per kg torrluft och man kan kyla till $+15^{\circ}\text{C}$ innan dimbildning. **Fel!** Kylning av luft innebär att $x = \text{konstant}$.



Figur 4: Mollier diagram 2

Följer man konstant x -linjen ner till luftfuktighet 100% så fås temperature $+8^{\circ}\text{C}$ som gränstemperatur för dimbildning.

Tentamen 2021-10-09

- Du har 1.00 kg vatten, som har temperaturen $+25.0^{\circ}\text{C}$, i en termos. Hur mycket is, med temperaturen 0.00°C , måste du hålla i termosen för att blandningens sluttemperatur ska bli $+10.0^{\circ}\text{C}$. Isens smältentalpi är 334 kJ/kg.

Givet

$$\begin{aligned} m_{H_2O} &= 1.00 \text{ kg} \\ T_{1,H_2O} &= +25.0^{\circ}\text{C} \\ T_{is} &= 0^{\circ}\text{C} \\ T_{2,H_2O} &= +10.0^{\circ}\text{C} \\ c_H &= 334 \text{ kJ/kg} \\ c &= 4.18 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K} \\ \rho_{is} &\approx \rho_{H_2O} \approx 1000 \text{ kg/m}^3 \end{aligned}$$

Sökt $m_{is} = m_2$

Massjämvikt

$$m_{H_2O} + m_2 = m_f$$

Energi avgiven lika med energi upptagen

$$m_{H_2O} \cdot c \cdot (T_{2,H_2O} - T_{1,H_2O}) + m_2 \cdot c_H + m_2 \cdot c \cdot (T_{2,H_2O} - 0) = 0$$

Obekanta är m_f och m_2 . Sätter in $m_2 = m_f - m_{H_2O}$.

$$m_{H_2O} \cdot c \cdot (T_{2,H_2O} - T_{1,H_2O}) + (m_f - m_{H_2O}) \cdot c_H + (m_f - m_{H_2O}) \cdot c \cdot (T_{2,H_2O} - 0) = 0$$

Samlar ihop termer av m_{H_2O} till vänster och termer av m_f till höger för att lösa ut m_f .

$$m_{H_2O} \cdot [c \cdot (T_{2,H_2O} - T_{1,H_2O} - T_{2,H_2O}) - c_H] = -m_f \cdot c_H - m_f \cdot c \cdot T_{2,H_2O}$$

Förkortar

$$-m_{H_2O} \cdot [c \cdot T_{1,H_2O} + c_H] = -m_f \cdot (c_H + c \cdot T_{2,H_2O})$$

Förkortar

$$m_{H_2O} \cdot [c \cdot T_{1,H_2O} + c_H] = m_f \cdot (c_H + c \cdot T_{2,H_2O})$$

Löser ut m_f

$$m_{H_2O} \cdot \frac{[c \cdot T_{1,H_2O} + c_H]}{(c_H + c \cdot T_{2,H_2O})} = m_f$$

Sätter in siffror

$$m_f = 1.00 \cdot \frac{[4180 \cdot 25.0 + 334000]}{(334000 + 4180 \cdot 10.0)} = 1.166844066$$

Vilket betyder att den totala massa is som måste tillföras är $1.166844066 - 1.00 = 0.16684$ kg, vilket med tre värdesiffror blir 167 gram.

Jag hade inte behövt gå omvägen att även teckna massjämvikt. Gjorde detta tanklöst. Det hade räckt att ställa upp energi jämvikt och lösa ut m_{is}

$$m_v \cdot c \cdot (25 - 10) = m_i \cdot c_H + c \cdot m_i(10 - 0) \iff$$

$$m_i = \frac{m_v \cdot c \cdot (25 - 10)}{c_H + c \cdot 10} = \frac{1.00 \cdot 4180 \cdot (25 - 10)}{334000 + 4180 \cdot 10} = 0.166844066$$

2. I en trycktank finns 2 m^3 luft ($\kappa = 1.40$), temperatur $+20^\circ\text{C}$ och tryck 100 kPa . Med hjälp av en kompressor, som arbetar adiabatiskt, ska trycket i tanken höjas 10 gånger. Kompressorn suger in 20 liter luft, temperatur $+20^\circ\text{C}$ och tryck 100 kPa , per sekund. Hur länge måste kompressorn arbeta innan trycket i tanken har ökat 10 gånger?

Givet

$$\begin{aligned} V &= 2\text{ m}^3 \\ T &= 20^\circ\text{C} \\ p_1 &= 100\text{ kPa} \\ p_2 &= 10 \cdot p_1 \\ \dot{V} &= 0.02\text{ m}^3/\text{s} \\ \kappa &= 1.4 \end{aligned}$$

Sökt är Δt .

Massan m_1 i tanken innan kompressorn startar är

$$m_1 = \frac{p_1 \cdot V_1}{R \cdot T}$$

Massa m_2 som måste finnas i tanken för att trycket ska bli $10 \cdot p_1$ är

$$m_2 = \frac{10 \cdot p_1 \cdot V_1}{R \cdot T}$$

Den massa som kompressorn måste tillföra m_{tillf} under tiden Δt är således

$$\begin{aligned} m_{tillf} &= m_2 - m_1 \\ &= \frac{10 \cdot p_1 \cdot V_1}{R \cdot T} - \frac{p_1 \cdot V_1}{R \cdot T} \\ &= \frac{9 \cdot p_1 \cdot V_1}{R \cdot T} \end{aligned}$$

Massflödet per tidsenhet är

$$\dot{m}_{tillf} = \rho \cdot \dot{V} = \frac{p_1}{R \cdot T} \cdot \dot{V}$$

och tiden för att nå upp till m_{tillf} är

$$\begin{aligned} \Delta t \cdot \dot{m}_{tillf} &= m_{tillf} \iff \\ \Delta t &= \frac{m_{tillf}}{\dot{m}_{tillf}} \\ &= \frac{\frac{9 \cdot p_1 \cdot V_1}{R \cdot T}}{\frac{p_1}{R \cdot T} \cdot \dot{V}} \\ &= \frac{9 \cdot V_1}{\dot{V}} \\ &= \frac{9 \cdot 2}{0.02} = 900\text{ s} \end{aligned}$$

Svar tiden det tar, med en värdesiffra är 900 sekunder. **Detta är fel svar! m_2 ska räknas ut med nytt T_2 !**

$$\begin{aligned} \frac{T_2}{T_1} &= \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \\ T_2 &= T_1 \cdot \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \\ &= 293 \cdot \left(\frac{10 \cdot p_1}{p_1}\right)^{\frac{1.4-1}{1.4}} \\ &= 565.694434563^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Skillnaden i massa som kompressorn måste tillföra

$$\begin{aligned} m_{tillf} &= m_2 - m_1 \\ &= \frac{10 \cdot p_1 \cdot V_1}{R \cdot T_2} - \frac{p_1 \cdot V_1}{R \cdot T_1} \end{aligned}$$

Ny beräkning

$$\begin{aligned} \Delta t \cdot \dot{m}_{tillf} &= m_{tillf} \iff \\ \Delta t &= \frac{m_{tillf}}{\dot{m}_{tillf}} \\ &= \frac{\frac{10 \cdot p_1 \cdot V_1}{R \cdot T_2} - \frac{p_1 \cdot V_1}{R \cdot T_1}}{\frac{p_1}{R \cdot T_1} \cdot \dot{V}} \\ &= \frac{\frac{10 \cdot V_1}{T_2} - \frac{V_1}{T_1}}{\frac{1}{T_1} \cdot \dot{V}} \\ &= \frac{10 \frac{T_1}{T_2} V_1 - V_1}{\dot{V}} \\ &= \frac{10 \frac{293}{565.69} 2 - 2}{0.02} \\ &= 417.95\text{ s} \approx 418\text{ s} \end{aligned}$$

3. En behållare har volymen 15.0 l och innehåller 1.00 kg syrgas ($\kappa = 1.40$, $R = 260$ J/(kg·K)), som har temperaturen $+27.0^\circ\text{C}$. Gasen expanderar polytropiskt till slutvolymen 45.0 l varvid trycket blir 1.39 MPa. Beräkna polytropexponenten.

Givet

$$\begin{aligned} V_1 &= 0.015 \text{ m}^3 \\ m &= 1.00 \text{ kg} \\ T_1 &= +27^\circ \text{ C} = 300^\circ \text{ K} \\ V_2 &= 0.045 \text{ m}^3 \\ p_2 &= 1.36 \cdot 10^6 \text{ Pa} \end{aligned}$$

Sökt är polytropexponenten n . p_1 kan räknas ut

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{m \cdot R \cdot T_1}{V_1} \\ &= \frac{1.00 \cdot 260 \cdot 300}{0.015} \\ &= 5.200000 \cdot 10^6 \text{ Pa} \end{aligned}$$

Polytrop processer förhåller sig såsom

$$p_1 \cdot V_1^n = p_2 \cdot V_2^n$$

Löser ut n

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{p_2} &= \frac{V_2^n}{V_1^n} \\ \ln \frac{p_1}{p_2} &= n \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} \iff \\ n &= \frac{\ln \frac{p_1}{p_2}}{\ln \frac{V_2}{V_1}} \\ &= \frac{\ln \frac{5.2 \cdot 10^6}{1.36 \cdot 10^6}}{\ln \frac{0.045}{0.015}} \\ &= \ln(5.2/1.36)/\ln(3) = 1.220789117 \end{aligned}$$

Polytrop exponenten är (med tre värdesiffror) 1.22

4. 10 liter torr luft med temperaturen $+20^\circ\text{C}$ har trycket 1.0 bar = 100 kPa. Luften genomgår en isokor tryckökning. Trycket dubblas. Behöver värme tillföras eller bortföras? Hur många Joule? Hur mycket ändras luftens inre energi? Data för luft tas ur tabell sid 16 i formelsamlingen.

Eftersom volymen är konstant och det skall ske en fördubbling av trycket så måste värme tillföras.

Givet

$$\begin{aligned} V_1 &= 0.01 \text{ m}^3 \\ T_1 &= 20^\circ\text{C} = 293^\circ\text{K} \\ p_1 &= 1 \text{ bar} = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa} \\ V_2 &= V_1 \\ p_2 &= 2 \cdot p_1 \end{aligned}$$

För isokora processer gäller

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

Löser ut T_2

$$\begin{aligned} T_2 &= T_1 \frac{p_2}{p_1} \\ &= 293 \frac{2 \cdot 1}{1} \\ &= 586^\circ\text{K} \end{aligned}$$

Värmeenergin Q_{12} som måste tillföras är

$$Q_{12} = m \cdot \bar{c}_v \cdot (T_2 - T_1)$$

Vi behöver information om m och \hat{c}_v . Avseende m

$$\begin{aligned} m &= \frac{p_1 \cdot V_1}{R \cdot T_1} \\ &= \frac{1 \cdot 10^5 \cdot 0.01}{287 \cdot 293} \\ &= 0.011891879 \end{aligned}$$

Vi har data för c_p på sidan 16 och väljer att ta medelvärde

$$\begin{aligned} \bar{c}_p &= \frac{c_p(20^\circ\text{C}) + c_p(60^\circ\text{C})}{2} \\ &= \frac{1009 + 1005}{2} \\ &= 1007 \end{aligned}$$

Relationen $R = c_p - c_v$ ger

$$\begin{aligned} \bar{c}_v &= c_p - R \\ &= 1007 - 287 \\ &= 720 \text{ J/kg} \cdot \text{K} \end{aligned}$$

Isättning nu i formeln för energin Q_{12}

$$\begin{aligned} Q_{12} &= m \cdot \bar{c}_v \cdot (T_2 - T_1) \\ &= 0.011891879 \cdot 720 \cdot (586 - 293) \\ &= 2508.71079384 \text{ J} \end{aligned}$$

Svar med två värdesiffror är att energin 2.5 kJ måste tillföras.

5. Temperaturen i ett kylskåp ska vara 0.0°C , och rummet i vilket kylskåpet är placerat har temperaturen $+20^{\circ}\text{C}$. Hur stort värmeläckage in i kylskåpet kan vi tillåta om det drivs av en ideal carnotmaskin vars tillförda effekt ligger på 10 watt.

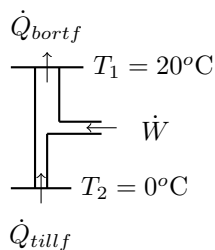
Givet

$$T_1 = +20^{\circ}\text{C} = 293^{\circ}\text{K}$$

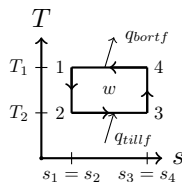
$$T_2 = 0^{\circ}\text{C} = 273^{\circ}\text{K}$$

$$\dot{W}_t = 10 \text{ W}$$

Sökt \dot{Q}_{tillf}



Vi vet också att för Carnot kylmaskinen gäller följande $T - s$ -diagram



Vi härleder köldfaktorn ϵ för en Carnot kylmaskin

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{q_{tillf}}{w_t} \\ \epsilon_c &= \frac{T_2 \cdot (s_3 - s_2)}{T_1 \cdot (s_3 - s_2) - T_2 \cdot (s_3 - s_2)} \\ &= \frac{T_2}{T_1 - T_2} \\ &= \frac{273}{293 - 273} \\ &= 13.65\end{aligned}$$

Kvoten q_{tillf}/w_t är härledd under analys av en cykel men kvoten gäller också över

multipla cykler samt om man dividerar täljare och nämnare med tidsintervall Δt . Således gäller framräknade ϵ även för kvoten

$$\epsilon = \frac{\dot{Q}_{tillf}}{\dot{W}_t}$$

Vi kan härifrån lösa ut det efterfrågade \dot{Q}_{tillf}

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{tillf} &= \epsilon \cdot \dot{W}_t \\ &= 13.65 \cdot 10 = 136.5 \text{ W}\end{aligned}$$

Svar värmeläckaget (med en värdesiffra) får maximalt vara 136 W.

6. En ideal gas genomlöper följande kretsprocess medurs.
 -Uppvärmning vid konstant volym ifrån T_1 till T_2 .
 -Adiabatisk expansion till T_3 .
 -Isoterm kompression tillbaks till startpunkten.
 Rita ett pV-diagram och ett Ts-diagram över kretsprocessen. Beräkna processens termiska verkningsgrad om T_1 är 200 K och T_2 är 500 K.

Vi har

- (1) isokor (2)
 (2) adiabat (3)
 (3) isoterm (1)

q_{tillf} injiceras under isokoren och är

$$q_{tillf} = c_v \cdot (T_2 - T_1)$$

q_{bortf} bortförs under isotermen och är

$$\begin{aligned} q_{bortf} &= R \cdot T_3 \cdot \ln \frac{v_4}{v_3} \\ &= R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{v_1}{v_3} \end{aligned} \quad (1)$$

eller

$$\begin{aligned} q_{bortf} &= R \cdot T_3 \cdot \ln \frac{p_3}{p_4} \\ &= R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{p_3}{p_1} \end{aligned} \quad (2)$$

Om vi antar att vi börjar vid tillståndet $(p_1, T_1, V_1) = (p_1, 200^\circ\text{K}, V_1)$ så går isokoren till tillståndet $(p_2, T_2, V_1) = (p_2, 500^\circ\text{K}, V_1)$ där

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{T_1} &= \frac{p_2}{T_2} \iff \\ p_2 &= p_1 \cdot \frac{T_2}{T_1} \\ &= \frac{5}{2} \cdot p_1 \end{aligned}$$

Då har vi

$$(p_1, 200^\circ\text{K}, V_1) \xrightarrow[\text{isokor}]{p_1 \cdot 5/2, 500^\circ\text{K}, V_1}$$

Därefter har vi adiabatisk expansion där

$$p_2 \cdot V_2^\kappa = p_3 \cdot V_3^\kappa$$

eller

$$\frac{T_3}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^{\kappa-1}$$

Men T_3 till T_1 är en isoterm så $T_3 = 200^\circ\text{K}$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{T_3}{T_2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} &= \frac{V_2}{V_3} \iff \\ V_3 &= \frac{V_2}{\left(\frac{T_3}{T_2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}}} \\ &= \frac{V_1}{\left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}}} \end{aligned}$$

Nu kan vi beräkna q_{bortf}

$$q_{bortf} = R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{v_1}{v_3} \quad (1)$$

$$= R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{v_1}{\frac{v_1}{\left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}}}} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} &= R \cdot T_1 \cdot \ln \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \\ &= R \frac{1}{\kappa-1} \cdot T_1 \cdot \ln \left(\frac{T_1}{T_2} \right) \end{aligned}$$

Nu kan vi beräkna verkningsgraden

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \left| \frac{q_{bortf}}{q_{tillf}} \right| \\ &= 1 - \left| \frac{R \frac{1}{\kappa-1} \cdot T_1 \cdot \ln \left(\frac{T_1}{T_2} \right)}{c_v \cdot (T_2 - T_1)} \right| \\ &= 1 - \left| \frac{T_1 \cdot \ln \left(\frac{T_1}{T_2} \right)}{(T_2 - T_1)} \right| \\ &= 1 - \left| \frac{200 \cdot \ln \left(\frac{200}{500} \right)}{(500 - 200)} \right| \\ &= 0.389139512 \end{aligned}$$

Verkningsgraden är 39%

Kunde ha beräknat detta mycket skon-
sammare om jag såsom läraren hade kon-
staterat att $s_2 - s_1$ är samma skillnad som
 $s_3 - s_1$ och tagit q_{bortf} såsom $T_1 \cdot (s_2 - s_1)$
Vi beräknar $s_2 - s_1$ för isokoren

$$s_2 - s_1 = \bar{c}_v \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$$

så

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \left| \frac{q_{bortf}}{q_{tillf}} \right| \\ &= 1 - \left| \frac{T_1 \cdot \bar{c}_v \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}}{c_v \cdot (T_2 - T_1)} \right| \\ &= 1 - \left| \frac{200 \cdot \bar{c}_v \cdot \ln \frac{500}{T_1}}{c_v \cdot (500 - 200)} \right| \end{aligned}$$

vilket ger samma resultat.

7. Torr mättad vattenånga med trycket 20 bar expanderar adiabatiskt ner till 5,0 bar då den passerar en turbin. Beräkna hur mycket dess specifika volym ändras.

Adiabatisk expansion betyder att $s_1 = s_2$

$x_1 = 1$ läs av $s_1 = s''$ för 20 bar. Gå till bars raden och identifiera x_2 med $s_2 = s_1$
Räkna ut specifika volymen

$$v_2(5) = (1 - x_2) \cdot v' + x_2 \cdot v''$$

Specifika volymen har enheten kubikmeter per kg fuktig ånga. Entalpin har enheten kJ per kg fuktig ånga. Entropin har enheten kJ per kg fuktig ånga och Kelvin.

Formeln

$$i_f = t + x \cdot (2500 + 1.86 \cdot t)$$

har enheten kJ per kg torrluft. Dessa har jag blandat ihop.

8. 1.0 kg luft med temperaturen +40 oC och $\varphi=0.40$ ska kylas ner till +15 oC. Hur mycket kondensat (vatten) måste bortföras för att inte dimma ska bildas? Ta data ifrån bifogat Mollier-diagram. Rita en förenklad skiss över Mollier-diagrammet där du markerar alla intressanta tillstånd och de värden du avläser i det bifogade Mollier-diagrammet. Lämna in din skiss tillsammans med dina lösningar.

Ta fram vatteninnehållet (per kg torrluft), ta sedan fram max vatteninnehåll för 15 grader och $\varphi = 1$ subtrahera mängderna.