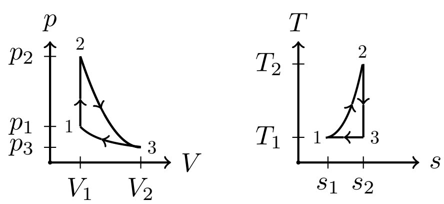
5.1-89

En ideal gas genomlöper följande kretsprocess medurs:

$1 \to 2$	Uppvärmning under konstant volym från t_1 till t_2
$2 \to 3$	Isentropisk expansion till t_3
$3 \to 1$	Isoterm kompression till utgångspunkten

Rita processen i p-v- och T-s-diagrammen. Beräkna processens termiska verkningsgrad då $t_1 = 20^o$C och $t_2 = 200^o$C.



(a) p-V diagram (b) T-s diagram

Den teoretiska termiska verkningsgraden η_t definieras enligt

$$\eta_t = \frac{q_{tillf} - |q_{bortf}|}{q_{tillf}} = 1 - \frac{|q_{bortf}|}{q_{tillf}} \tag{1}$$

Avseende q_{tillf} som ju är q_{12} så rör vi oss till höger i T-s diagrammet. Arean under kurvan blir således positiv därför att $ds > 0$ om integrationsriktningen är positiv.

$$q_{12} = \int_1^2 T \cdot ds > 0$$

I en isokor process så är värmemängdsändringen endast ändringen av den inre energin eftersom volymändringen är noll, $dv = 0$ således är volymändringsarbetet dvs. integralen av $p \cdot dv$ är noll.

$$dq = du + p \cdot dv$$
$$dq = \bar{c}_v \cdot dT + p \cdot 0$$

Integration från 1 till 2 i p-v-diagrammet ger

$$\int_1^2 dq_{12} = \int_1^2 \bar{c}_v \cdot dT$$
$$q_{12} = \bar{c}_v \cdot (T_2 - T_1) \tag{2}$$

Observera att vi använder T-s-diagrammet för att lättare avgöra vilka processer som tillför värme till systemet och vilka som bortför därför att det är t.ex. mycket lättare att identfiera en isentrop-process i ett T-s-diagram. Vi använder p-v-diagrammet för att räknat ut respektive värmemängd q på ett indirekt vis eftersom arean under kurvan projicerat ner mot v-axeln är volymändringsarbetet och projicerat på p-axeln är det tekniska arbetet. Om vi använder oss av det tekniska arbetet w_t så gäller att

$$dq = di + dw_t$$
$$dq = di - v \cdot dp$$
$$dq = \bar{c}_p \cdot dT - v \cdot dp$$
$$q_{12} = \bar{c}_p \cdot (T_2 - T_1) - \int_1^2 v \cdot dp$$
$$q_{12} = i_2 - i_1 - \int_1^2 v \cdot dp$$

Observera att w_t kommer att vara positiv då processpilen löper **mot** p-axelns riktning p.g.a. minustecknet i $dw_t = -v \cdot dp$. Det är definierat på det viset därför att man vill att expansionen av gasen skall vara ett positivt tekniskt arbete utfört av gasen medan kompression utfört på gasen blir ett negativt. En annan sak man ska kommai håg avseende tecken är att tillförd värmemängd$q$ är positiv och bortförd värme är negativt q. Boken poängterar vidare att

$$di = \bar{c}_p \cdot dT$$
$$du = \bar{c}_v \cdot dT$$

endast gäller för ideala gaser, så om man tänker använda relationerna för t.ex. luft eller vattenånga så måste man tydligt ange att man vet om att man pysslar med en approximation.

Problemställningen talar om en ideal gas men ger inget värde på R. För en enatomig ideal gas gäller

$$c_v = \frac{3}{2}R \quad (3)$$
$$c_p = \frac{5}{2}R \quad (4)$$

För en tvååtomig ideal gas gäller

$$c_v = \frac{5}{2}R \quad (5)$$
$$c_p = \frac{7}{2}R \quad (6)$$

Vi antar helt godtyckligt att det rör sig om en enatomig ideal gas. Förmodligen kommer gasspecifika faktorn att kunna förkortas bort då kvoten $|q_{bortf}|/q_{tillf}$ beräknas. Således skriver vi

$$\begin{aligned} q_{tillf} &= \frac{3}{2}R \cdot (T_2 - T_1) \\ &= \frac{3}{2}R \cdot (200 - 20) \quad (7) \end{aligned}$$

Värme bortförs under isotermen eftersom integrationsriktningen är omvänd, $q_{13} < 0$, vilket också stämmer rent intuitivt. Om vi komprimerar gasen så stiger temperaturen men för att hålla temperaturen konstant så måste vi hela tiden bortföra värmeenergi under komprimeringsprocessen. Eftersom temperaturen på gasen inte ändras så ändras inte inre energin $u_3 - u_1 = 0$. Ändringen av värmeenergin q_{31} för isotermen från tillstånd 3 till 1 blir alltså lika med volymändringsarbetet w_{31}, dvs. $q_{31} = w_{31}$.

$$\begin{aligned} q_{31} &= u_3 - u_1 + w_{31} \\ q_{31} &= 0 + w_{31} \end{aligned}$$

Volymändringsarbetet för isotermen från 3 till 1 är per definition

$$\begin{aligned} w_{31} &= \int_3^1 p \cdot dv \\ &= \int_3^1 \frac{R \cdot T}{v} dv \\ &= R \cdot T \cdot ln(\frac{v_1}{v_3}) \quad (8) \end{aligned}$$
$$q_{bort} = R \cdot T \cdot ln(\frac{v_1}{v_3}) \quad (9)$$

Vi har dock ingen information om värden p och v sådant att vi kan räkna ut (9). Vi ser dock att arean under kurvan i T-s diagrammet är en rektangel som vi enkelt kan beräkna arean av såsom $(s_1 - s_3) \cdot T_1$.

Definitionen för entropi är

$$\begin{aligned} ds &= \left(\frac{dq}{T}\right)_{rev} \\ &= \frac{du}{T} + \frac{p \cdot dv}{T} \quad (10) \end{aligned}$$

för reversibla processer. Entropiändringen från 3 till 1

$$\begin{aligned} \int_3^1 ds &= \int_3^1 \frac{dQ}{T} \\ s_1 - s_3 &= \int_3^1 \frac{1}{T}(du + p \cdot dv) \quad (11) \end{aligned}$$

För isotermen blir detta

$$\begin{aligned} s_1 - s_3 &= \int_3^1 \frac{1}{T}(0 + p \cdot dv) \\ &= \int_3^1 \frac{1}{T}\frac{R \cdot T}{v} dv \\ &= R \cdot ln(\frac{v_1}{v_3}) \\ &= R \cdot ln(\frac{v_1}{v_3}) \quad (12) \end{aligned}$$

Vi saknar information om v_1 och v_3 för att kunna använda denna. Men $s_2 = s_3$ så vi kan faktiskt räkna ut den sökta differensen från isokor-processen därför att $s_2 - s_1 {=} s_3 - s_1$

$$\begin{aligned}
\int_1^2 ds &= \int_1^2 \frac{dQ}{T} \\
s_2 - s_1 &= \int_1^2 \frac{1}{T} du + p \cdot dv \\
&= \int_1^2 \frac{1}{T} du + p \cdot 0 \\
&= \int_3^1 \frac{1}{T} \bar{c}_v \cdot dT \\
&= \bar{c}_v \cdot ln(\frac{T_2}{T_1}) \\
&= \bar{c}_v \cdot ln\left(\frac{273+200}{273+20}\right) \\
&= \bar{c}_v \cdot 0.4789 \qquad (13)
\end{aligned}$$

Nu kan vi beräkna $(s_1 - s_3) \cdot T_1$ eftersom
$(s_1 - s_3) = -(s_2 - s_1) = -\bar{c}_v \cdot 0.478922779$
Detta ger att

$$\begin{aligned}
|q_{bort}| &= |(s_1 - s_3) \cdot T_1 \\
||q_{bort}| &= T_1 \cdot \bar{c}_v \cdot 0.478922779 \qquad (14)
\end{aligned}$$

Vilket ger oss med insättning av (14) och (7)

$$\begin{aligned}
\eta_t &= 1 - \frac{|q_{bortf}|}{q_{tillf}} \\
&= 1 - \frac{T_1 \cdot \bar{c}_v \cdot 0.478922779}{\bar{c}_v \cdot (200-20)} \\
&= 1 - \frac{(273+20) \cdot 0.478922779}{(200-20)} \\
&= 1 - 0.779579875 = 0.220420125
\end{aligned}$$

Korrekt svar måste anges med korrekt antal värdesiffror. Talet 200 har tre värdesiffror och 20 har två värdesiffror. Talet 20 blir då bestämmande och svaret måste anges med två värdesiffror. Således $\eta_t = 0.22$