

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-
математических наук

**ВЛИЯНИЕ РАССЕЯНИЯ НОСИТЕЛЕЙ НА
ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА
КИНЕТИЧЕСКИЕ И ОПТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ
В РАЗМЕРНО-КВАНТОВАННЫХ СИСТЕМАХ**

Выполнил: Карапетян С.А.

Руководитель: д-р физ.-мат. наук, проф. Синявский Э.П.

Приднестровский Государственный Университет им. Т.Г.Шевченко

Тирасполь, 2017

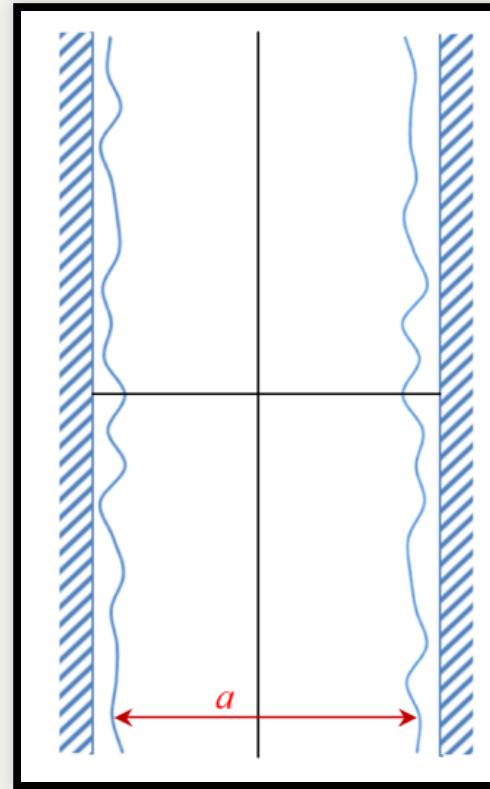
Глава 1

Рассеяние носителей на шероховатой поверхности

Механизм рассеяния на шероховатой поверхности

$$V(x, y) = \frac{\partial E_\alpha}{\partial a} \Delta(x, y) \equiv V_\alpha \Delta(x, y)$$

$\Delta(x, y)$ – случайная функция



Для прямоугольной квантовой ямы с бесконечными стенками:

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2} \equiv E_0 n^2 \Rightarrow V_n = -\frac{2}{a} E_0 n^2$$

Для квантовой ямы с параболическим потенциалом:

$$E_n = 2\hbar \left[\frac{2\Delta E_c}{m_e} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{a} \left(n + \frac{1}{2} \right) = \hbar \omega_e \left(n + \frac{1}{2} \right), V_n = -\frac{1}{a} \hbar \omega_e \left(n + \frac{1}{2} \right),$$

$$\hbar \omega_e = \frac{2\hbar}{a} \sqrt{\frac{2\Delta E_c}{m_e}}$$

ΔE_c – высота параболического потенциала на границе наноструктуры,

$\hbar \omega_e$ – энергия размерного квантования.

Флуктуация поверхности в случае квантовой ямы

Гауссова:

$$\{\Delta(x, y)\Delta(x', y')\}_V = \Delta^2 \exp\left\{-\frac{1}{\Lambda^2} [(x - x')^2 + (y - y')^2]\right\} \equiv F(|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|),$$

здесь: $|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$, Δ, Λ — высота и ширина гауссовой флуктуации соответственно, $\{\dots\}_V$ описывает усреднение по реализации случайного процесса, $\Delta(x, y)$

δ -образная:

$$\{\Delta(x, y)\Delta(x', y')\} = \gamma_0 \delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') = \gamma \delta(x - x')(y - y') = \tilde{F}(|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|)$$

γ_0 определяет квадрат амплитуды флуктуации

Флуктуация поверхности для одномерного электронного газа

Гауссова:

$$\{\Delta(x)\Delta(x')\} = \Delta_0^2 \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{\Lambda_0^2}\right] = F_0(x-x')$$

δ -образная:

$$\{\Delta(x)\Delta(x')\} = \gamma_0 \delta(x-x') = \tilde{F}_0(x-x')$$

Формула Кубо

$$\sigma_{ij} = \frac{\beta_0 e^2}{2Vm^2} \sum_{\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1} \hat{p}_{\alpha\beta}^{(i)} \hat{p}_{\alpha_1\beta_1}^{(j)} \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle a_{\alpha}^{+}(t) a_{\beta}(t) a_{\alpha_1}^{+} a_{\beta_1} \rangle$$

$$K(\Omega) = \frac{2\pi e^2}{Vcn_0\hbar\Omega m_e^2} (1 - e^{-\beta_0 \hbar\Omega}) \sum_{\alpha\alpha_1\beta\beta_1} \langle \alpha | (\hat{\mathbf{P}}\xi) | \alpha_1 \rangle \langle \beta | (\hat{\mathbf{P}}\xi) | \beta_1 \rangle \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\Omega t} \langle a_{\alpha}^{+}(t) a_{\alpha_1}(t) a_{\beta}^{+} a_{\beta_1} \rangle$$

здесь:

$$a_{\alpha}^{+}(t) = \exp\left(\frac{it\hat{H}}{\hbar}\right) a_{\alpha}^{+} \exp\left(-\frac{it\hat{H}}{\hbar}\right), \quad \hat{H} = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} a_{\alpha}^{+} a_{\alpha} + \sum_{\alpha, \beta} \langle \alpha | \hat{V} | \beta \rangle a_{\alpha}^{+} a_{\beta}$$

Приближение времени релаксации

$$\sigma_{ij} = \frac{\beta_0 e^2}{Vm_e^2} \sum_{\alpha} \left| \hat{P}_{\alpha\alpha}^{(i)} \right|^2 n_{\alpha} (1 - n_{\alpha}) \tau_{\alpha\alpha}$$

$$K(\Omega) = \frac{4\pi e^2}{\hbar c V n_0 \Omega} \left| \frac{\mathbf{P}_{\alpha\beta} \boldsymbol{\xi}}{m_e} \right|^2 \sum_{\alpha\beta} \frac{\tau_{\alpha\beta} n_{\alpha}}{1 + \frac{\tau_{\alpha\beta}^2}{\hbar^2} (\hbar\Omega + E_{\alpha} - E_{\beta})^2}$$

$$\frac{1}{\tau_{\alpha\beta}} = \frac{\pi}{\hbar} \sum_{\gamma} [W_{\alpha\gamma} \delta(\varepsilon_{\alpha} - \varepsilon_{\gamma}) + W_{\beta\gamma} \delta(\varepsilon_{\beta} - \varepsilon_{\gamma})]$$

$$W_{\alpha\beta} = \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}_1 \Psi_{\alpha}^{*}(\mathbf{r}) \Psi_{\beta}^{*}(\mathbf{r}_1) V_{\alpha} V_{\beta} F \Psi_{\alpha}(\mathbf{r}) \Psi_{\beta}(\mathbf{r}_1)$$

Время релаксации для различных систем:

Квазидвумерные системы с бесконечным потенциалом и гауссовой флюктуацией поверхности

$$\frac{1}{\tau_a} = \frac{m_e}{\hbar^3} \pi (\Delta \Lambda)^2 V_n^2 \exp \left[-\frac{1}{2} (\Lambda k_{\perp})^2 \right] I_0 \left[\frac{1}{2} (\Lambda k_{\perp})^2 \right]$$

При низких температурах, когда $\Lambda k_{\perp} \ll 1$:

$$\frac{1}{\tau_a} = \frac{m_e}{\hbar^3} \pi (\Delta \Lambda)^2 V_n^2$$

Для случая δ -образной флюктуации поверхности

$$\frac{1}{\tau_a} = \frac{m_e}{\hbar^3} \gamma_0 V_n^2$$

Одномерные квантовые системы с гауссовой флуктуацией поверхности

$$\frac{1}{\tau_\alpha} = \frac{2m_e}{\hbar^3} \cdot \frac{V_n^2}{|k_x|} \cdot \frac{\Delta_0^2 \Lambda_0 \sqrt{\pi}}{2} (1 + \exp[-\Lambda_0^2 k_x^2])$$

Одномерные квантовые системы с δ -образной флуктуацией поверхности

$$\frac{1}{\tau_\alpha} = \frac{2m_e}{\hbar^3} \cdot \frac{V_n^2}{|k_x|} \gamma_0$$

Влияние поперечного электрического поля на процессы рассеяния

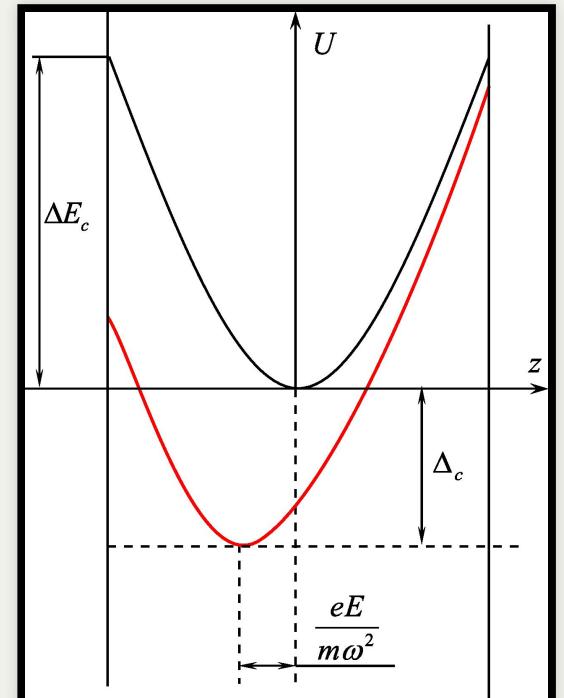
$$U(z) = \frac{m_e \omega^2}{2} z^2 + eEz$$

$$\hbar\omega = \frac{2\hbar}{a} \sqrt{\frac{2\Delta E_c}{m_e}}$$

$$E_{n,k_\perp} = \frac{\hbar^2 k_\perp^2}{2m_e} + \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) - \Delta_c$$

$$k_\perp^2 = k_x^2 + k_y^2, \quad \Delta_c = \frac{e^2 E^2}{2m_e \omega^2}$$

$$\Psi_{k_x,n,m}^{(c)}(x,y,z) = \frac{e^{ik_x x}}{\sqrt{L_x}} \frac{e^{ik_y y}}{\sqrt{L_y}} \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n \left[(z - z_0) \sqrt{\lambda} \right] e^{-\frac{\lambda}{2}(z - z_0)^2}$$



Взаимодействие с шероховатой поверхностью

$$W_n = \frac{\partial E_n}{\partial a} \Delta(x, y) \equiv -\frac{1}{a} [E_n + 2\Delta_c] \Delta(x, y) = V_n \Delta(x, y)$$

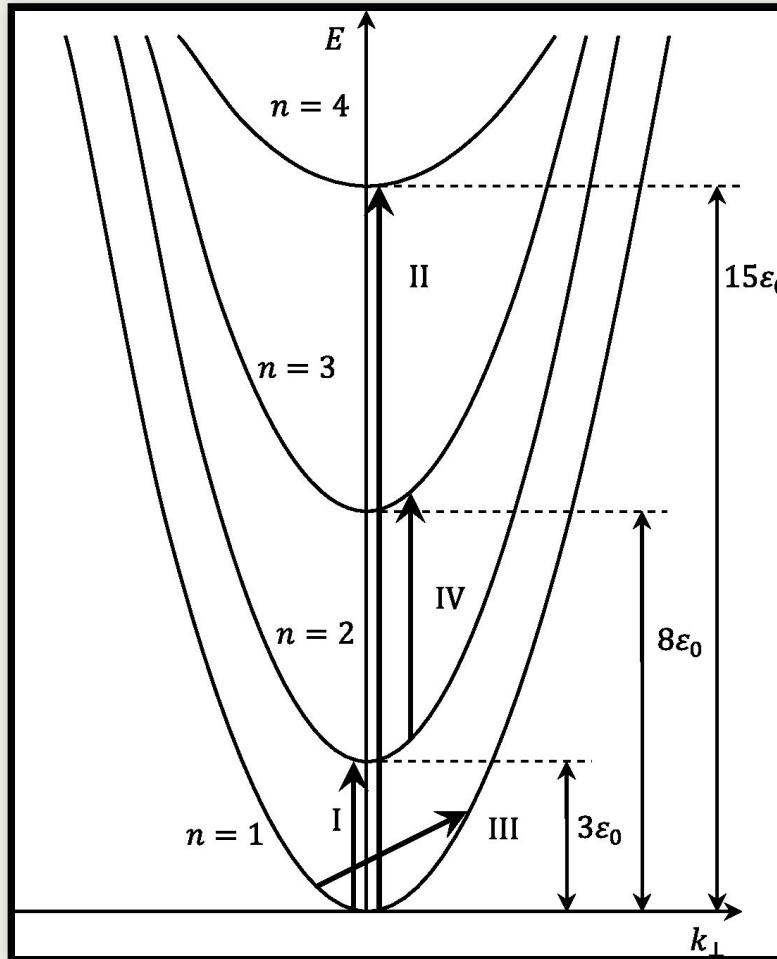
$$\frac{1}{\tau_\alpha} = \frac{\gamma_0 m_e (\hbar\omega)^2}{\hbar^3 a^2} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) + N_c \right]^2, \quad N_c = \frac{2\Delta_c}{\hbar\omega}$$

Глава 2

**Влияние рассеяния носителей на
шероховатой поверхности на
оптические свойства размерно-
ограниченных систем**

Межподзонное поглощение света

Схема оптических переходов



$$K(\Omega) = \frac{2\pi e^2}{V c n_0 \hbar \Omega m_e^2} (1 - e^{-\beta_0 \hbar \Omega}) \int_{-\infty}^{\infty} dt \sum_{\alpha\alpha_1\beta\beta_1} \left\langle \alpha \left| (\hat{\mathbf{P}} \boldsymbol{\xi}) \right| \alpha_1 \right\rangle \left\langle \beta \left| (\hat{\mathbf{P}} \boldsymbol{\xi}) \right| \beta_1 \right\rangle \times \\ \times n_{\beta_1} (1 - n_{\beta}) \left\{ \left\langle \beta_1 \left| \exp\left(\frac{it\widetilde{H}}{\hbar}\right) \right| \alpha \right\rangle \left\langle \alpha_1 \left| \exp\left(-\frac{it\widetilde{H}}{\hbar}\right) \right| \beta \right\rangle \right\}_V$$

$n_{\alpha} = \{\exp[\beta(\varepsilon_{\alpha} - \xi)] + 1\}^{-1}$ – равновесная функция распределения для электронов с энергией ε_{α}

$$\left\langle \alpha \left| \hat{P}^{(z)} \right| \beta \right\rangle = \frac{2}{a} i \hbar \delta_{k_{\perp} k'_{\perp}} \frac{n n_1}{n^2 - n_1^2} [(-1)^{n+n_1} - 1], \quad n \neq n_1, \\ \left\langle \alpha \left| \hat{P}^{(x)} \right| \beta \right\rangle = \hbar k_x \delta_{\alpha\beta}, \quad \left\langle \alpha \left| \hat{P}^{(y)} \right| \beta \right\rangle = \hbar k_y \delta_{\alpha\beta}.$$

$$\frac{1}{\tau_{\alpha\alpha_1}}=\frac{1}{\tau_0}\left(n^4+n_1^4\right)$$

$$\frac{1}{\tau_0} = \frac{m_e}{2\hbar^3} \left(\frac{2\varepsilon_0}{a}\right)^2 \gamma_0$$

$$K(\Omega)=K_M\frac{1}{1+\left(\frac{\tau_0}{17\hbar}\Delta_0\right)^2}$$

$$K_M=\frac{2^{12}e^2a^5n_e}{\hbar cn_0\pi^5\gamma_03^3\cdot17},~\Delta_0=\hbar\Omega-3\varepsilon_0$$

Внутризонное поглощение света

$$K(\Omega) = \frac{2\pi e^2 n_e}{m_e c n_0 a \hbar \beta_0 \Omega^2} \int_0^\infty x dx \int_{-\infty}^\infty y dy \times \\ \times \exp \left\{ -2\Gamma_0 |y| \left[1 - \frac{\delta_0}{\pi x |y|} \sin^2 \left(\frac{x |y|}{\delta_0} \right) + \frac{1}{\pi} \text{Si} \left(\frac{2x |y|}{\delta_0} \right) \right] \right\}$$

$$\delta_0 = 2\hbar\Omega\beta_0$$

$$\Gamma_0 = \pi^2 \left(\frac{\varepsilon_0}{\hbar\Omega} \right) \left(\frac{\gamma_0}{a^4} \right)$$

$$\text{Si}(z) = -\frac{\pi}{2} + \int_0^z d\tau \frac{\sin t}{\tau}$$

При низких температурах

$$K(\Omega) = \frac{4\pi e^2 n_e}{m_e c n_0 a \hbar \beta \Omega^2} \frac{\Gamma_0}{1 + \Gamma_0^2}$$

В нижайшем приближении по взаимодействию электрона с шероховатой поверхностью $\Gamma_0 \ll 1$:

$$K(\Omega) = \frac{2^4 e^2 n_e \gamma_0 m}{\pi c n_0 a \hbar^3 \beta_0} \left(\frac{\varepsilon_0}{\hbar \Omega} \right)^3$$

При сильном взаимодействии $\Gamma_0 \gg 1$:

$$K(\Omega) = \frac{2^4 e^2 n_e a}{\pi^3 c n_0 \hbar} \frac{1}{\delta_0} \left(\frac{a^4}{\gamma_0} \right)$$

Влияние лазерного излучения на оптические свойства квантовых пленок

$$\begin{aligned}\hat{H}_c = & \frac{1}{2m_c} \hat{P}^2 + \frac{e}{m_c c} (\hat{P} \xi) \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}} (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) + \\ & + \frac{e^2}{2m_e c^2} \left(\frac{4\pi c^2}{V} \right) (\hat{b} + \hat{b}^\dagger)^2 + \hbar\omega \hat{b}^\dagger \hat{b} + eEz \equiv \hat{H}_c^0 + eEz\end{aligned}$$

Коэффициент межзонного поглощения электромагнитной волны

$$\begin{aligned}K(\Omega) = & \frac{4\pi e^2}{V n_0 c \hbar \Omega} \left| \frac{p_{cv} \xi_0}{m_0} \right|^2 \times \\ & \times \sum_{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp \left(i\Omega t - \frac{ie^2 E^2 t^3}{6\hbar\mu} + \frac{ieE k_z t^2}{2\mu} \right) \times \\ & \times \left\{ \langle \beta^c | \exp \left(\frac{it}{\hbar} \hat{H}_v^0 \right) \exp \left(-\frac{it}{\hbar} \hat{H}_c^0 \right) | \beta^c \rangle \right\}_f\end{aligned}$$

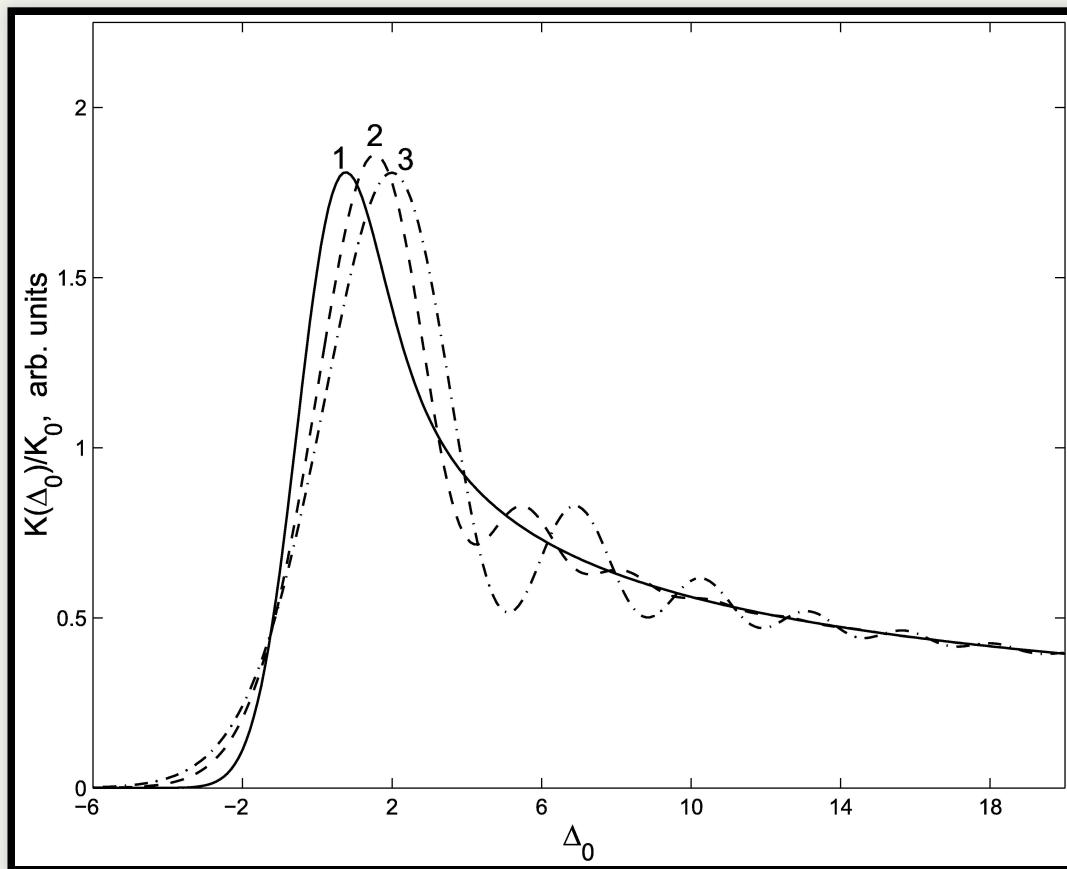
Магнитоинфракрасный резонанс в объемном материале

$$K(\Omega) = \frac{2e^2}{n_0 c \hbar R^2} \left| \frac{p_{cv} \xi_0}{m_0} \right|^2 \sqrt{\frac{2\mu}{\pi \hbar \omega}} \frac{1}{\gamma^{\frac{1}{4}}} \times \\ \times \sum_n \int_0^\infty \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \cos\left(a\tau^3 - \Delta_n \tau + \frac{\pi}{4}\right) \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right) L_n(\tau^2)$$

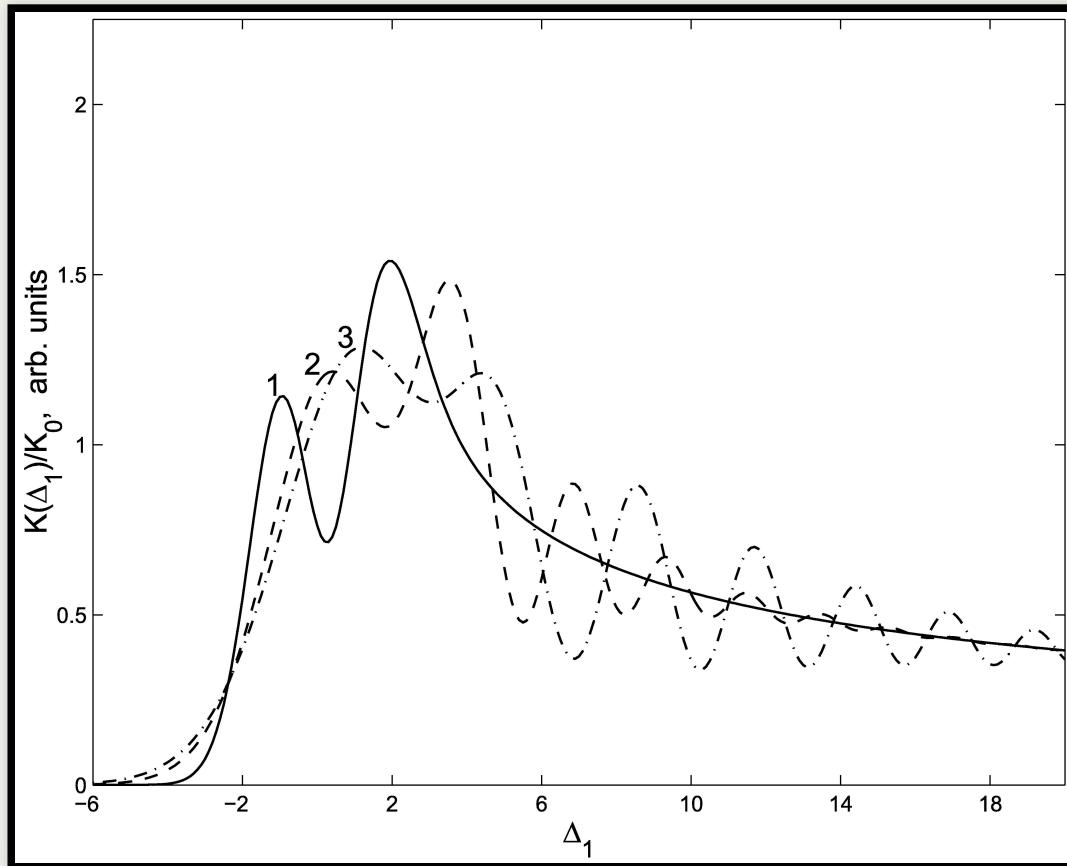
где

$$\Delta_n = \frac{\hbar\Omega - E_g - \hbar\omega^* \left(n + \frac{1}{2}\right)}{\hbar\omega\sqrt{\gamma}}; \quad a = \frac{e^2 E^2}{24\mu\omega^3 \hbar\gamma^{\frac{3}{2}}}; \quad \gamma = \frac{e^2 E_0^2}{8\mu\hbar\omega^3}$$

Частотная зависимость первого пика магнетопоглощения в режиме магнитоинфракрасного резонанса. Кривые 1, 2, 3 получены соответственно для $a = 0$; $a = 0.4$; $a = 0.8$



Частотная зависимость второго пика магнетопоглощения в режиме магнитоинфракрасного резонанса. Кривые 1, 2, 3 получены соответственно для $a = 0$; $a = 0.4$; $a = 0.8$



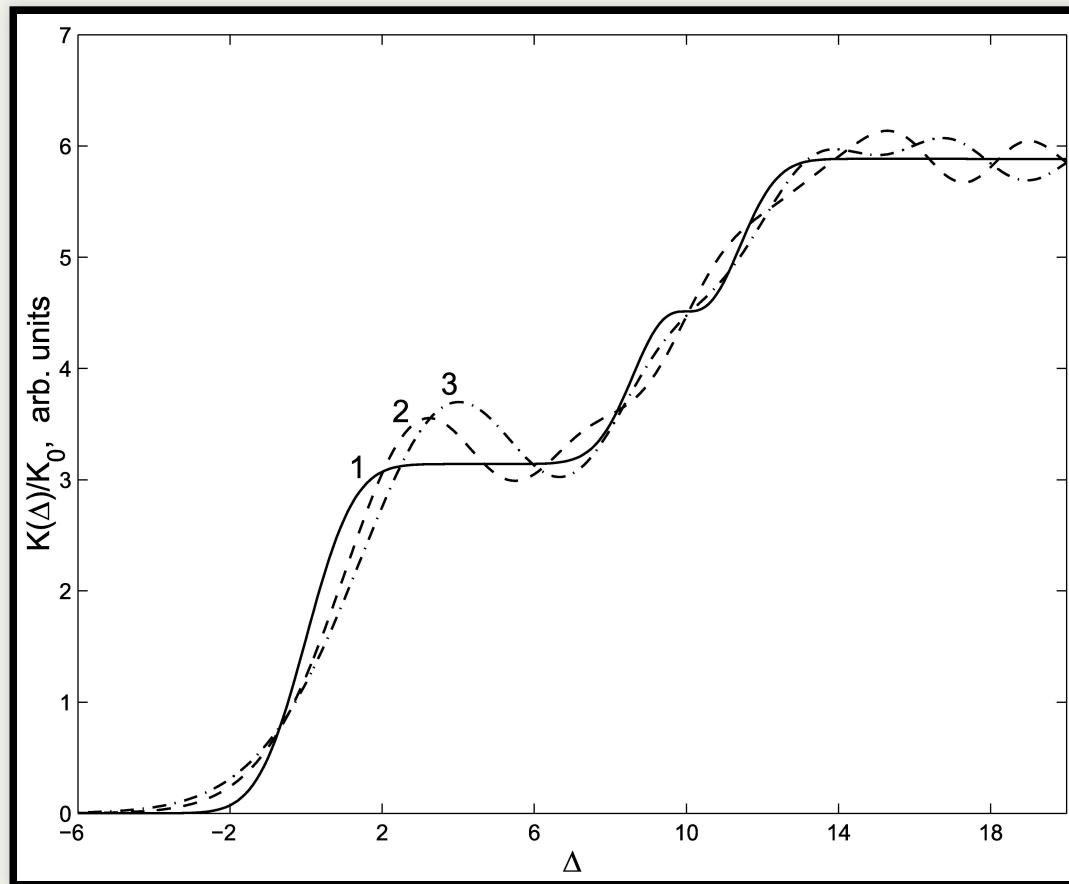
Размерно-инфракрасный резонанс в ПКЯ

$$K(\Omega) = K_0 \sum_n V_n^2 \times \\ \times \left\{ \frac{\pi}{2} + \int_0^\infty dt \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) L_n(x^2) \frac{\sin[x(\Delta_n - \delta x^2)]}{x} \right\}$$

где

$$\Delta_n = \frac{\hbar\Omega - E_g - \hbar\omega^* \left(n + \frac{1}{2}\right)}{\hbar\sqrt{\gamma}}; \quad \omega^* = \omega_c + \omega_v$$

Частотная зависимость межзонного поглощения света в режиме размерно-инфракрасного резонанса. Кривые 1, 2, 3 получены соответственно для $a = 0$; $a = 0.4$; $a = 0.8$

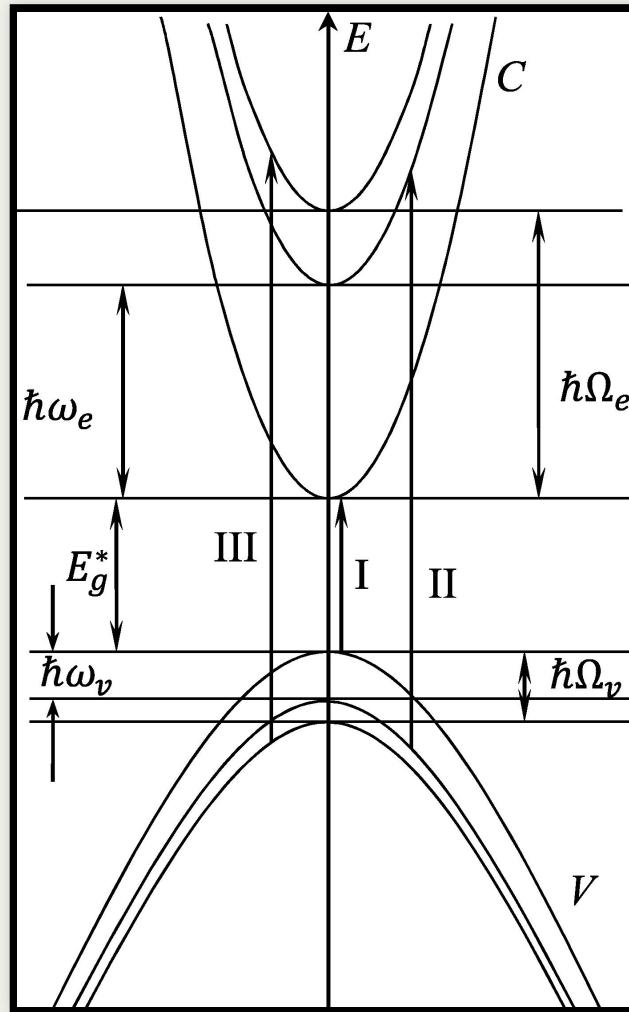


Оптические свойства квантовых проволок в присутствии резонансного лазерного излучения

$$E_\alpha = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m_e^*} + \hbar\Omega_e \left(n + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_e \left(m + \frac{1}{2} \right)$$

$$m_e^* = m_e \left(\frac{\Omega_e}{\omega_e} \right)^2, \quad \Omega_e = [\omega_e^2 + \omega_c^2]^{1/2}, \quad \omega_c = \frac{eB}{m_e c}$$

Схема энергетических зон полупроводниковой квантовой проволоки в поперечном магнитном поле и оптические переходы



Гамильтониан в представлении вторичного квантования для электронов в зоне проводимости в состоянии α в поле лазерного излучения поляризацией ξ

$$\hat{H} = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} a_{\alpha}^{+} a_{\alpha} + \hbar \omega_L b^{+} b + \left[\frac{2\pi \hbar e^2}{V \omega_L} \right]^{\frac{1}{2}} \sum_{\alpha \alpha_1} \left| \frac{\mathbf{P}_{\alpha \alpha_1} \xi}{m_e} \right|^2 a_{\alpha}^{+} a_{\alpha_1} (b^{+} + b)$$

Матричные элементы оператора импульса $\mathbf{P}_{\alpha \alpha_1}$ на волновых функциях параболической квантовой проволоки в поперечном магнитном поле

$$\left| P_{\alpha \beta}^X \right|^2 = \frac{\delta^2}{\sqrt{(1 + \delta^2)}} \left| P_{\alpha \beta}^Y \right|^2, \quad \delta = \frac{\omega_c}{\omega_e},$$

$$\left| P_{\alpha \beta}^Y \right|^2 = \frac{m_e \sqrt{(1 + \delta^2)} \hbar \omega_e}{2} [n \delta_{n, n_1 + 1} + (n + 1) \delta_{n, n_1 - 1}] \delta_{k_x, k'_x} \delta_{m, m_1},$$

$$\left| P_{\alpha \beta}^Z \right|^2 = \frac{m_e \hbar \omega_e}{2} [m \delta_{m, m_1 + 1} + (m + 1) \delta_{m, m_1 - 1}] \delta_{k_x, k'_x} \delta_{n, n_1}$$

Коэффициент поглощения в поле ИК лазерного излучения Y-поляризации (РИР)

$$K(\Omega) = K_0 \sum_{nm} |\langle \alpha_c | \alpha_v \rangle|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp \left(-at^2 - \frac{\Gamma_0}{|k_x|} |t| \right) L_n(2at^2) \times \\ \times \exp \left\{ \frac{it}{\hbar} \left[\hbar\Omega - E_g^* - \frac{\hbar^2 k_x^2}{2\mu^*} - m(\hbar\omega_e + \hbar\omega_v) - n(\hbar\Omega_e + \hbar\Omega_v) \right] \right\}$$
$$K_0 = \frac{\hbar\Omega e^2}{4\mu^* E_g^* n_0 c s}, \quad a = \frac{e^2 E^2}{8m_e \hbar\Omega_e},$$
$$\frac{1}{\mu^*} = \frac{1}{m_e^*} + \frac{1}{m_v^*}, \quad m_v^* = m_v \left(\frac{\Omega_v}{\omega_v} \right)^2$$

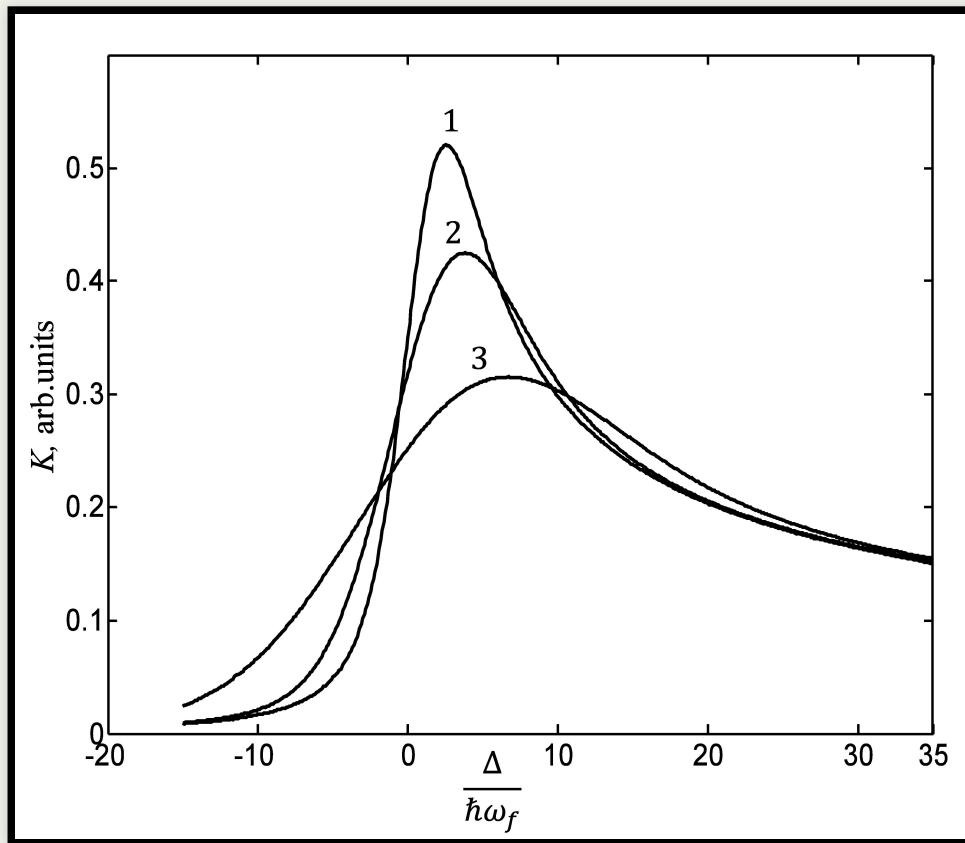
Оптический переход I

$$K(\Omega) = K_0 \sum_{nm} |\langle \alpha_c | \alpha_v \rangle|^2 \left[\frac{8\pi\mu^*\omega_f}{\hbar a} \right]^{\frac{1}{2}} \operatorname{Re} \int_0^\infty dx e^{f^2(x)} [1 - \Phi(f(x))]$$

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\tau^2} d\tau, \quad \omega_f^3 = \frac{\hbar\gamma_0^2}{2\mu^*}$$

$$f(x) = \left(\frac{\omega_f^2}{4a} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} \left[1 - ix \left(\frac{\Delta}{\hbar\omega_f} - x^2 \right) \right], \quad \Delta = \hbar\Omega - E_g^*$$

Зависимость первого пика межзонного поглощения света (в относительных единицах) от $\Delta/\hbar\omega_f$. Кривые 1, 2, 3 вычислены для $\xi = 0.25, 0.05, 0.01$ соответственно



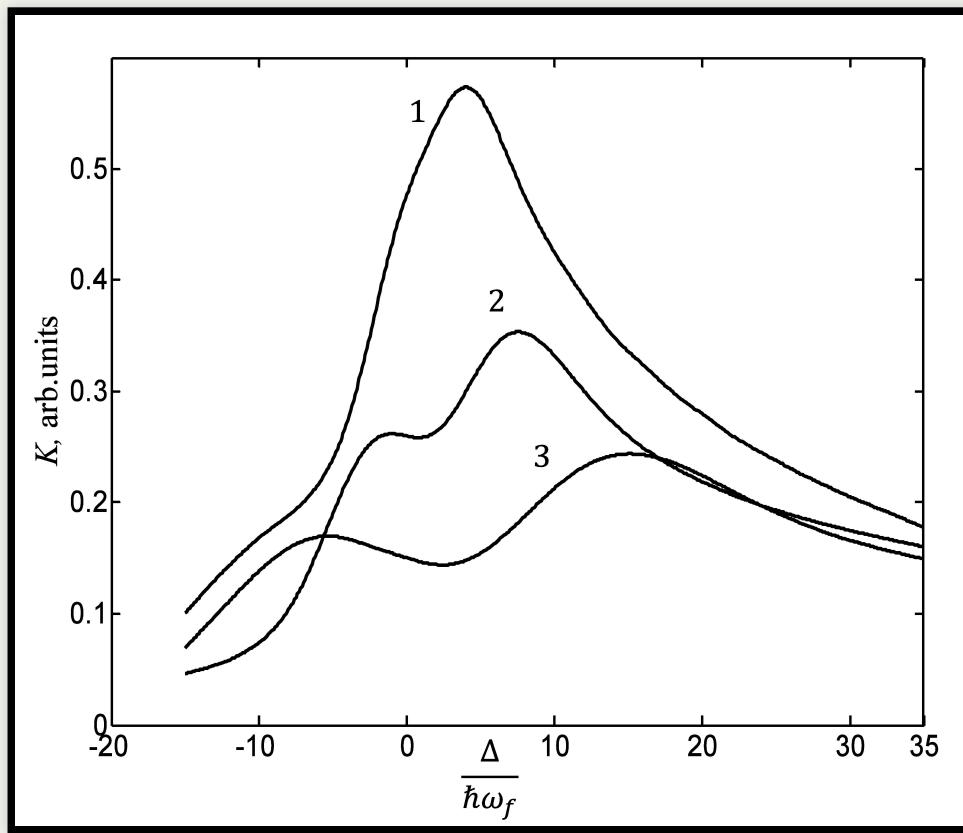
Оптический переход II

$$K(\Omega) = K_0 |\langle \tilde{\alpha}_c | \tilde{\alpha}_v \rangle|^2 4 \left[\frac{2\mu^* \omega_f}{\hbar a} \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \operatorname{Re} \int_0^\infty dx f(x) \left\{ -\sqrt{\pi} f(x) e^{f^2(x)} [1 - \Phi(f(x))] + 1 \right\}$$

При $\xi < 1$ форма линии поглощения определяется интенсивностью резонансного ИК излучения

$$K(\Omega) = K_0 |\langle \tilde{\alpha}_c | \tilde{\alpha}_v \rangle|^2 \pi z \left[\frac{2^* \pi}{\hbar} \left(\frac{8z}{a} \right)^{1/2} \right]^{1/2} e^{-z} \times \\ \times \left\{ - [I_{3/4}(z) + \operatorname{sign}(\Delta) I_{-3/4}(z)] + \left(1 + \frac{1}{4z} \right) [(I_{-1/4}(z) + \operatorname{sign}(\Delta) I_{1/4}(z)] \right\}$$

Зависимость второго пика магнетопоглощения от $\Delta/\hbar\omega_f$ при различных значениях интенсивности резонансного ($\omega_L = \Omega_e$) лазерного излучения. Кривые 1, 2, 3 вычислены для $\xi = 0.25, 0.05, 0.01$ соответственно.



Глава 3

Влияние шероховатой поверхности на кинетические эффекты в низкоразмерных системах

Электропроводность в приближении времени релаксации

$$\sigma_{ij} = \frac{\beta_0 e^2}{Vm_e^2} \sum_{\alpha} \left| \hat{P}_{\alpha\alpha}^{(i)} \right|^2 n_{\alpha} (1 - n_{\alpha}) \tau_{\alpha}$$

$$\frac{1}{\tau_{\alpha\beta}} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\gamma} W_{\alpha\gamma} \delta(\varepsilon_{\alpha} - \varepsilon_{\gamma})$$

Электропроводность прямоугольной КЯ с бесконечным потенциалом с гауссовой флуктуацией поверхности

$$\sigma_{xx} = \frac{e^2 \hbar^3 \delta}{m_e^2 \pi^2 (\Delta \Lambda^2 V_1)^2 L} \int_0^\infty \frac{d\tau \cdot \tau \cdot \exp(\delta\tau - \beta_0 \tilde{\xi})}{\exp(-\tau) I_0(\tau) \cdot [\exp(\delta\tau - \beta_0 \tilde{\xi}) + 1]^2}$$

$$\beta_0 = \frac{1}{k_0 T}, \quad \delta = \frac{\beta_0 \hbar^2}{m_e \Lambda^2}, \quad \beta_0 \tilde{\xi} = \ln \left[\exp \left(\frac{\beta_0 \pi \hbar^2 n_s}{m_e} \right) - 1 \right]$$

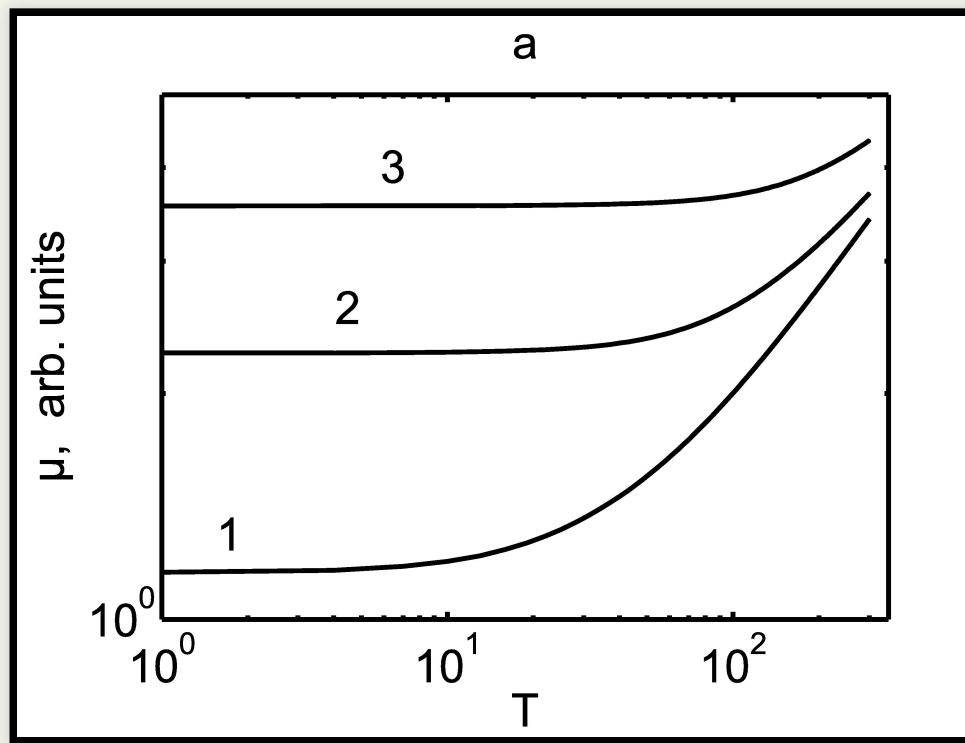
Невырожденный электронный газ

$$\mu^{(nd)} = \mu_0 \delta^2 \int_0^\infty d\tau \frac{\tau \cdot \exp[-(\delta - 1)\tau]}{I_0(\tau)}$$
$$\mu_0 = \frac{e}{\hbar \pi^5} \left(\frac{L^3}{\Delta \Lambda} \right)^2.$$

Вырожденный электронный газ

$$\sigma_{xx}^{(d)} = \frac{e^2 \hbar \tilde{\xi}}{\pi^2 L m_e (\Delta \Lambda V_1)^2} \frac{\exp\left(\frac{m_e \Lambda^2}{\hbar^2} \tilde{\xi}\right)}{I_0\left(\frac{m_e \Lambda^2}{\hbar^2} \tilde{\xi}\right)}$$

Температурная зависимость подвижности (в относительных единицах) при учете рассеяния носителей на шероховатой поверхности в КЯ при $\Lambda = 70\text{\AA}$, $\Delta = 3\text{\AA}$, $L_0 = 100\text{\AA}$, кривые 1, 2, 3 получены соответственно для $n_s = 10^{11}\text{cm}^{-2}$, $n_s = 7 \cdot 10^{11}\text{cm}^{-2}$, $n_s = 1.5 \cdot 10^{12}\text{cm}^{-2}$



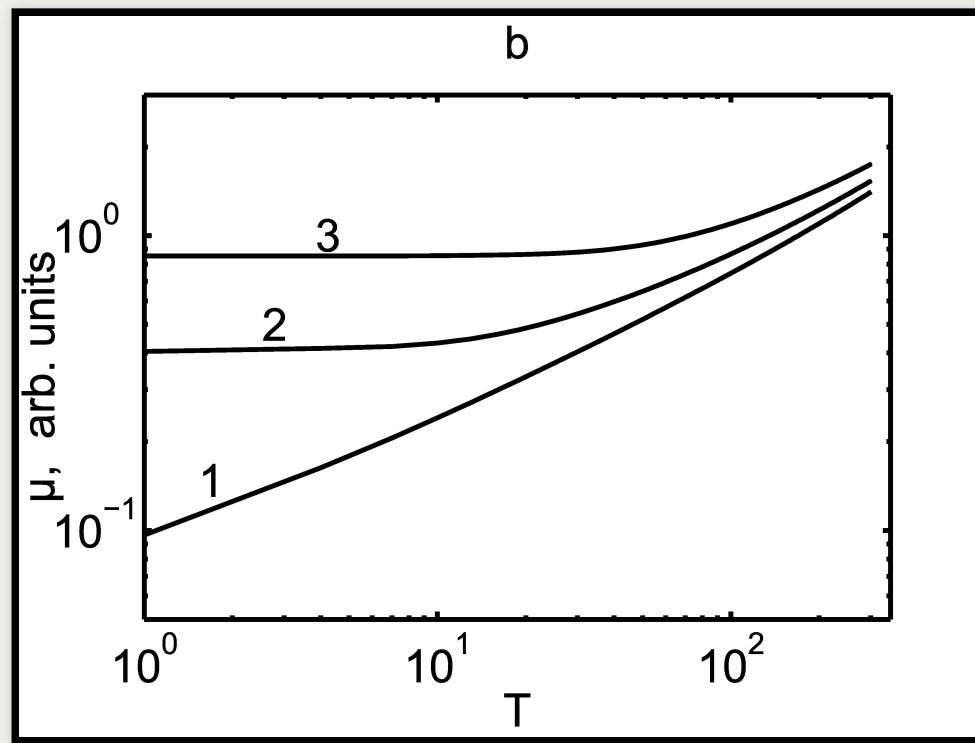
Электропроводность прямоугольной КП с бесконечным потенциалом с гауссовой флуктуацией поверхности

$$\frac{1}{\tau_\alpha} = \frac{(\Delta \tilde{V}_0)^2 m \Lambda \sqrt{\pi}}{\hbar^3 |k_x|} \left\{ 1 + \exp \left[-(k_x \Lambda)^2 \right] \right\}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{2e^2 \hbar^3 \delta}{m^2 \pi^2 \sqrt{\pi} R_0^2 (\Delta \Lambda \tilde{V}_1)^2 \Lambda} \int_0^\infty d\tau \frac{\tau \cdot \exp(\delta\tau - \beta_0 \tilde{\xi})}{[\exp(-\tau) + 1] \cdot [\exp(\delta\tau - \beta_0 \tilde{\xi}) + 1]^2}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\exp(x^2 - \beta_0 \tilde{\xi}) + 1} = \frac{n_l \pi \hbar \sqrt{\beta_0}}{\sqrt{8m}}$$

Температурная зависимость подвижности (в относительных единицах) при учете рассеяния носителей на шероховатой поверхности в КП при $\Lambda = 20\text{\AA}$, $\Delta = 2\text{\AA}$, $R_0 = 100\text{\AA}$, кривые 1, 2, 3 получены соответственно для $n_l = 10^5\text{cm}^{-1}$, $n_l = 5 \cdot 10^5\text{cm}^{-1}$, $n_s = 10^6\text{cm}^{-1}$



Учет двух механизмов рассеяния

$$\sigma_{xx} = \frac{\beta_0 e^2}{Vm^2} \sum_{\alpha} \left| \hat{p}_{\alpha\alpha}^{(x)} \right|^2 \frac{\tau_{\alpha} \tau_{\alpha}^f}{\tau_{\alpha} + \tau_{\alpha}^f} n_{\alpha} (1 - n_{\alpha})$$

$$\frac{1}{\tau_{\alpha}^f} = \frac{3E_1^2 m}{\beta_0 \hbar^3 \rho \nu^2 L}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{e^2 \hbar^3}{\pi^2 m^2 (\Delta \Lambda^2 V_1)^2 L} \delta^2 \gamma \times$$

$$\times \int_0^{\infty} d\tau \frac{\tau \cdot \exp(\delta\tau - \beta \tilde{\xi})}{[\delta\gamma \cdot \exp(-\tau) I_0(\tau) + 1] \cdot [\exp(\delta\tau - \beta \tilde{\xi}) + 1]^2}$$

$$\delta = \frac{\hbar^2 \beta_0}{m \Lambda^2}, \quad \gamma = \frac{\pi m \rho \nu^2 L}{3 \hbar^2 E_1^2} (\Delta \Lambda^2 V_1)^2.$$

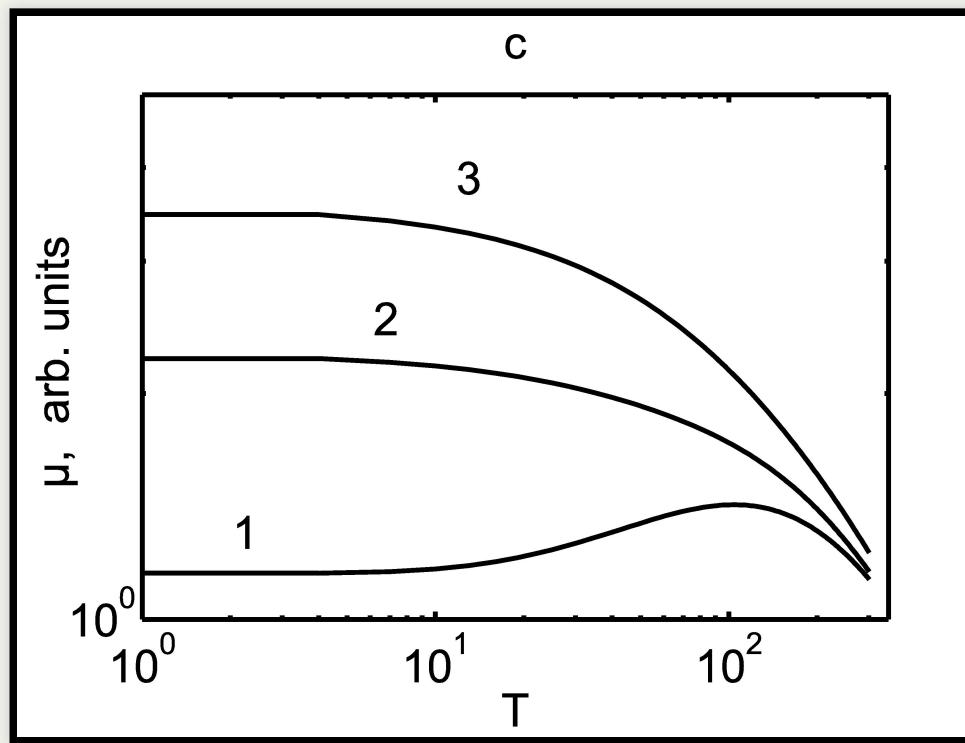
Невырожденный электронный газ

$$\mu^{(nd)} = \mu_0 \cdot \delta^3 \gamma \int_0^\infty d\tau \frac{\tau \cdot \exp(-\tau\delta)}{\delta\gamma \cdot \exp(-\tau) I_0(\tau) + 1}$$

Вырожденный электронный газ

$$\sigma_{xx}^{(d)} = \frac{e^2 \hbar^3}{\pi^2 m^2 (\Delta \Lambda^2 V_0)^2 L} \cdot \frac{\delta\gamma \cdot \delta_0}{\delta\gamma \cdot I_0(\delta_0) \exp(-\delta_0) + 1}$$

Температурная зависимость подвижности (в относительных единицах) при учете рассеяния носителей на шероховатой поверхности и фононах в КЯ при $\Lambda = 70\text{\AA}$, $\Delta = 3\text{\AA}$, $L_0 = 100\text{\AA}$, кривые 1, 2, 3 получены соответственно для $n_s = 10^{11}\text{cm}^{-2}$, $n_s = 7 \cdot 10^{11}\text{cm}^{-2}$, $n_s = 1.5 \cdot 10^{12}\text{cm}^{-2}$



Рассеяние носителей на шероховатой поверхности в магнитном поле в КЯ

Продольное магнитное поле ($\mathbf{H} \parallel OX$, размерное квантование по OZ)

$$\Psi_{k_x, k_y, n}^{(c)}(x, y, z) = \frac{e^{ik_x x}}{\sqrt{L_x}} \frac{e^{ik_y y}}{\sqrt{L_y}} \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n \left[(z - z_0)\sqrt{\lambda}\right] e^{-\frac{\lambda}{2}(z - z_0)^2}$$

$$E_\alpha = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m_e} + \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2 \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m_e} + \hbar\Omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

обозначения

$$\lambda = \frac{m_e \Omega}{\hbar}, \quad \Omega = \sqrt{\omega^2 + \omega_c^2}, \quad z_0^{(c)} = -\frac{\hbar \omega_c k_x}{m_e \Omega^2}$$

Взаимодействие с шероховатой поверхностью

$$V_\alpha = \frac{\partial E_\alpha}{\partial L} = \hbar \left[\frac{\hbar\omega}{m_e\Omega^2} \left(\frac{\omega_c}{\Omega} \right)^2 k_y^2 + \frac{\omega}{\Omega} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right] \frac{\partial \omega}{\partial L}$$

$$\frac{1}{\tau_\alpha} = \frac{\gamma_0 m_e V_n^2}{\hbar^3} \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)$$

$$P_{\alpha\beta}^{(x)} = \hbar k_x \delta_{\alpha\beta}.$$

$$\sigma_{xx} = \frac{e^2 k_0 T \hbar}{\pi \gamma_0 m_e L 4 V_0^2} \sum_n \frac{\ln \left\{ \exp \left[\beta \left(\tilde{\xi} - \hbar \Omega n \right) \right] + 1 \right\}^2}{\left(n + \frac{1}{2} \right)}$$

Электропроводность в квантовом пределе, когда все носители находятся на
нижайшем уровне Ландау

$$\sigma_{xx} = \frac{e^2 \hbar^3 n_e}{m^2 \gamma V_0^2} \left[\frac{\omega}{\Omega} \right]$$

Подвижность

$$\mu_{xx} = \frac{4e\hbar}{m^2 \gamma} \left(\frac{\partial \omega}{\partial L} \right)^{-2} \left[1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Поперечное магнитное поле

$$P_{\alpha\beta}^{(y)} = \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2 \hbar k_y \delta_{\alpha\beta} - \frac{m_e \omega_c}{\sqrt{2\lambda}} (\sqrt{n+1} \delta_{n-1,n'} + \sqrt{n} \delta_{n+1,n'}) \delta_{k_x k'_x} \delta_{k_y k'_y}$$

Подвижность в диагональном приближении

$$\mu_{yy} = \frac{4e\hbar}{m^2\gamma} \left(\frac{\partial\omega}{\partial L}\right)^{-2} \left[1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}$$

$$\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 \gg 1 \Rightarrow \mu_{xx} \sim \frac{1}{H}$$

Рассеяние носителей на шероховатой поверхности в магнитном поле в КП

$$\sigma_{xx} = \frac{4\hbar e^2}{2\beta\pi sm\gamma_0} \sum_{n\nu} \frac{1}{V_{n\nu}^2} \ln[1 + \exp(\beta\xi_{n\nu})]$$

$$V_\alpha = \frac{4}{[4 + \delta^2]^{\frac{1}{2}}} \left[n + \frac{1}{2} + \frac{|\nu|}{2} \right] \frac{\partial(\hbar\omega)}{\partial R_0}$$

$$\sum_{n\nu} \int_0^\infty \frac{dx}{1 + e^{x^2 - \beta\xi_{n\nu}}} = \frac{\pi n_e}{2} \left(\frac{\hbar^2 \beta}{2m} \right)^{\frac{1}{2}}$$

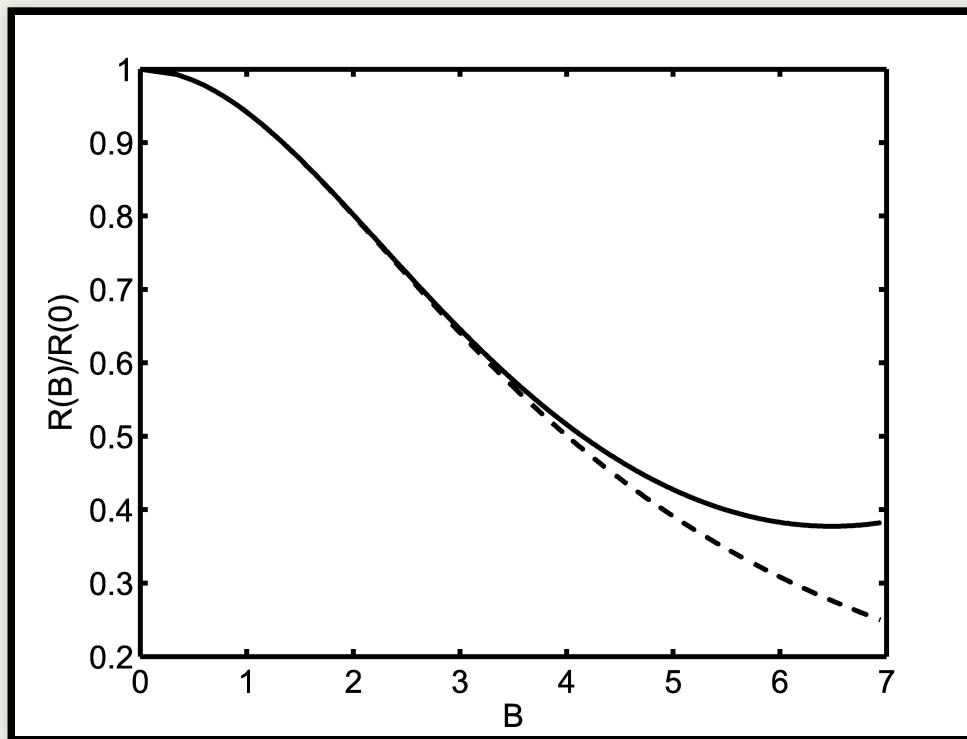
Подвижность невырожденного электронного газа

$$\mu_x^{(nd)} = \frac{eR_0^4 \left[4 + \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 \right]}{4\gamma_0 (\Delta E_c) \sqrt{2m_e \beta \pi}}$$

Подвижность невырожденного электронного газа

$$\mu_x^{(d)} = \frac{e\pi \left[4 + \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 \right] n_e \hbar R_0^4}{8m_e \gamma_0 (\Delta E_c)}$$

Зависимость относительного сопротивления от магнитного поля для нанопроволоки висмута ($d = 80 \text{ nm}$, $T = 4.2 \text{ K}$). Пунктирной линией показана зависимость $R(H)/R(0)$ при учете рассеяния носителей на поверхности, сплошной линией — при учете рассеяния носителей на шероховатой поверхности и акустических фононах.



Глава 4

**Явления переноса в
nanoструктурах в поперечном
электрическом поле с учетом
рассеяния на шероховатой
поверхности**

Подвижность в поперечном электрическом поле

Из формулы Кубо получено выражение для электропроводности:

$$\sigma_{xx} = \frac{e^2}{a\pi\hbar^2\beta_0} \sum_n \tau_n \ln(1 + e^{-\beta\xi_n})$$

$$\frac{1}{\tau_\alpha} = \frac{\gamma_0 m_e (\hbar\omega)^2}{\hbar^3 a^2} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) + N_c \right]^2, \quad N_c = \frac{2\Delta_c}{\hbar\omega}$$

Подвижность невырожденного газа

$$\mu_{xx} = \mu_{xx}(0) \frac{1}{(1 + 2N_c)^2}$$

где

$$\mu_{xx}(0) = \frac{e}{m} \left(\frac{\hbar a^4}{2\gamma_0 \Delta E_c} \right)$$

Учет двух механизмов рассеяния

Правило Маттисена

$$\frac{1}{\tau_n} = \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_f}$$

$$\frac{1}{\tau_0} = \frac{\gamma_0 m_e (\hbar\omega)^2}{2\hbar^3 a^2} (1 + 2N_c)^2, \quad N_c = \frac{2\Delta_c}{\hbar\omega}$$

$$\frac{1}{\tau_f} = \left(\frac{m\omega}{2\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{E_1^2 m k_B T}{\hbar^3 v^2 \rho}$$

$$\mu_{xx}=\mu_{xx}(0)\frac{1}{\left(1+2N_c\right)^2+\Delta}$$

$$\Delta = \left(\frac{m\omega}{2\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{E_1}{\hbar\omega}\right)^2\frac{4k_BTa^2}{\rho v^2\gamma}$$

Влияние поперечного электрического поля на подвижность в нанопроволоках

Энергия носителей заряда в параболической квантовой проволоке в поперечном электрическом поле

$$E_{\alpha}^c = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m_e} + E_{nm}^c,$$

$$E_{\alpha}^v = \Delta_0 - \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m_v} + E_{nm}^v$$

здесь

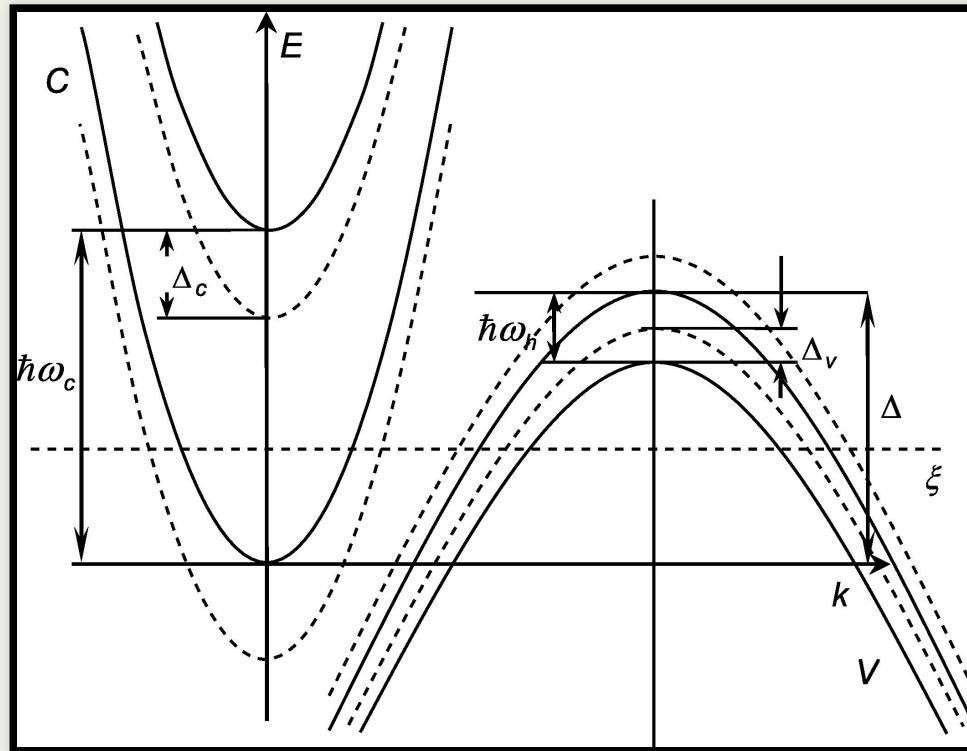
$$E_{nm}^c = \hbar\omega_e(n + k + 1) - \Delta_c,$$

$$E_{nm}^v = \hbar\omega_v(n + k + 1) - \Delta_v,$$

$$\Delta_c = \frac{e^2 E^2}{2m_e \omega_y^2}, \quad \Delta_v = \frac{e^2 E^2}{2m_v \omega_v^2}$$

Схема зонной структуры рассматриваемой низкоразмерной системы.

Сплошными линиями показаны две нижайшие размерно-квантованные зоны (c — зоны проводимости, v — валентные зоны), пунктирными линиями изображены две нижайшие размерно-квантованные зоны в поперечном электрическом поле; ξ — химический потенциал



Подвижность носителей заряда

$$\mu = \frac{\mu_0 \sqrt{\pi}}{2 \sum_{nm} F(\eta_{nm}^c)} \sum_{nm} \left\{ \frac{\ln[\exp(\eta_{nm}^c) + 1]}{(n + m + 1 + N_c)^2} + \left(\frac{\Delta E_c}{\Delta E_v} \right) \frac{1}{p} \frac{\ln[\exp(\eta_{nm}^v) + 1]}{(n + m + 1 + N_v)^2} \right\}$$

Здесь введены обозначения:

$$\mu_0 = \frac{4R^4 e}{\gamma \Delta E_c} \sqrt{\frac{k_0 T}{2\pi m_c}}, \quad R = \frac{a}{2}, \quad N_c = \frac{2\Delta_c}{\hbar\omega_c}, \quad N_v = \frac{2\Delta_v}{\hbar\omega_v},$$

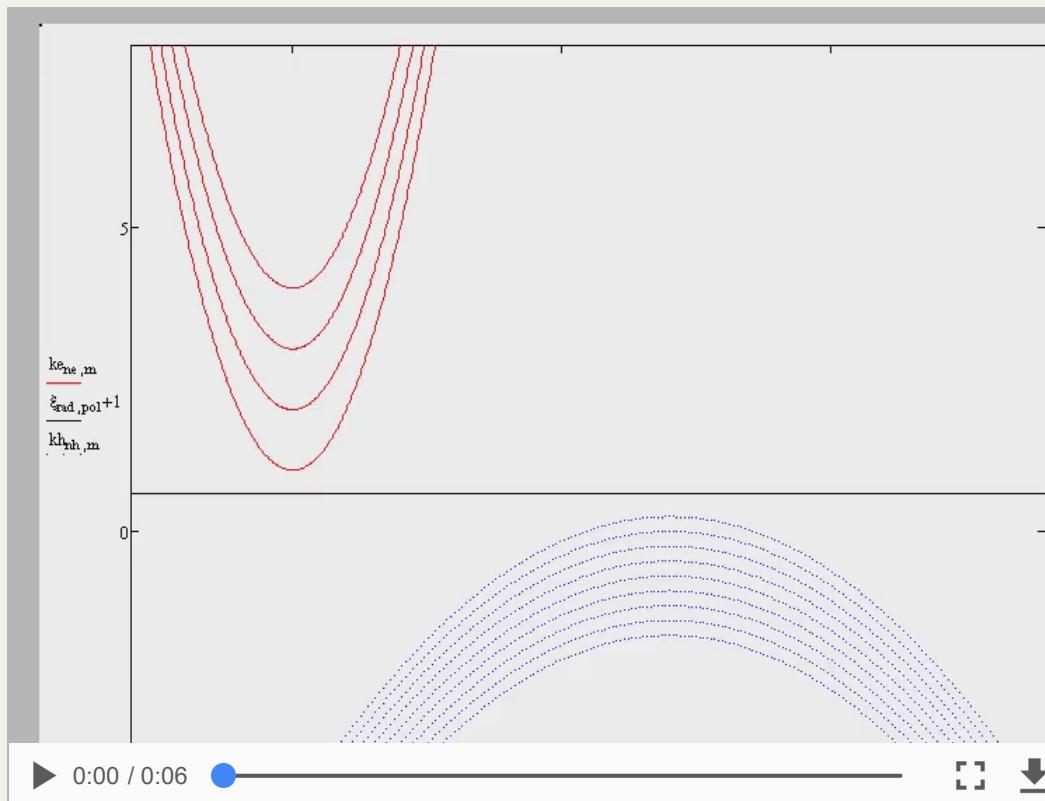
$$\eta_{nm}^c = \frac{1}{k_0 T} [\xi - \hbar\omega_c (n + m + 1) + \Delta_c],$$

$$\eta_{nm}^v = \frac{1}{k_0 T} [-\xi - \hbar\omega_v (n + m + 1) + \Delta_0 + \Delta_v],$$

$$F(\eta_{nm}^c) = \int_0^\infty \frac{dx}{\exp(x^2 - \eta_{nm}^c) + 1},$$

Условие электронейтральности

$$p \sqrt{\frac{m_c}{m_v}} \sum_{n,m} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\exp(x^2 - \eta_{nm}^c) + 1} = \sum_{n,m} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\exp(x^2 - \eta_{nm}^v) + 1}$$



Химический потенциал ξ находится из условия электронейтральности исследуемой наноструктуры (число электронов в зонах проводимости равно числу дырок в валентной зоне)

Частные случаи

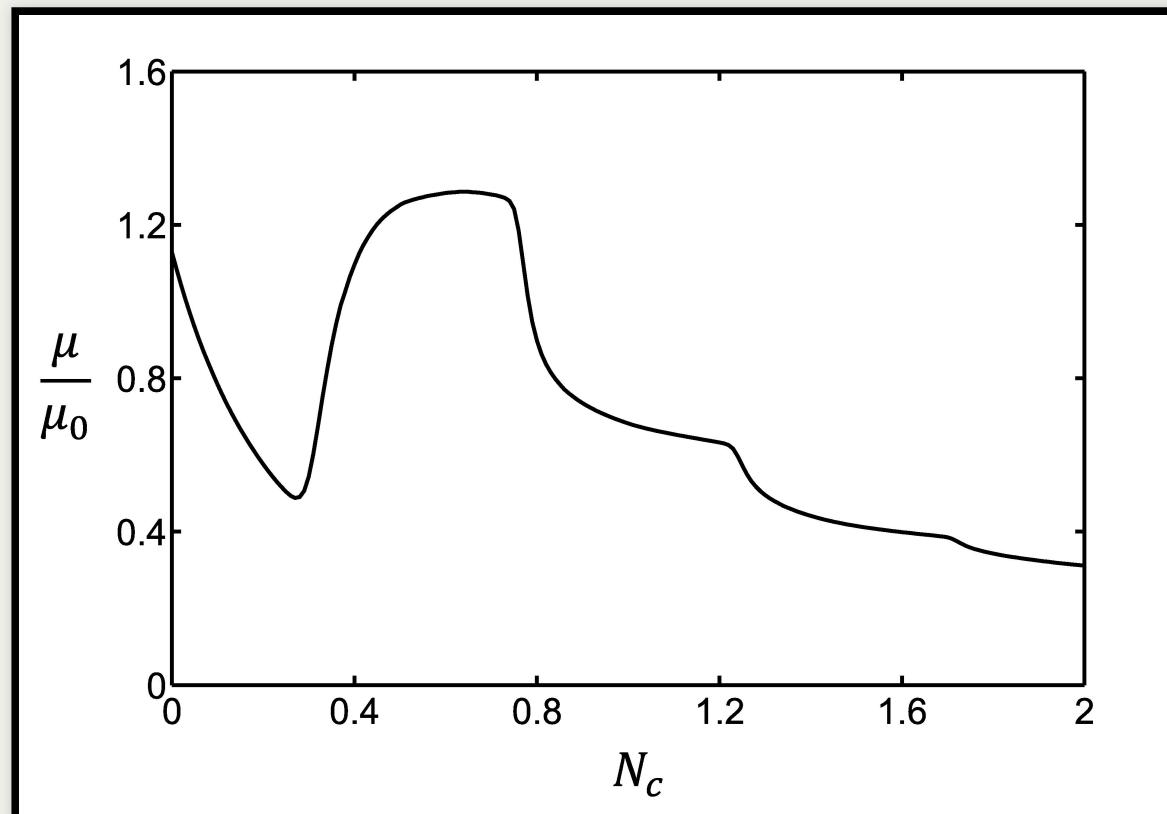
Невырожденный электронный газ

$$\mu = \frac{\mu_0}{(1 + N_c)^2}$$

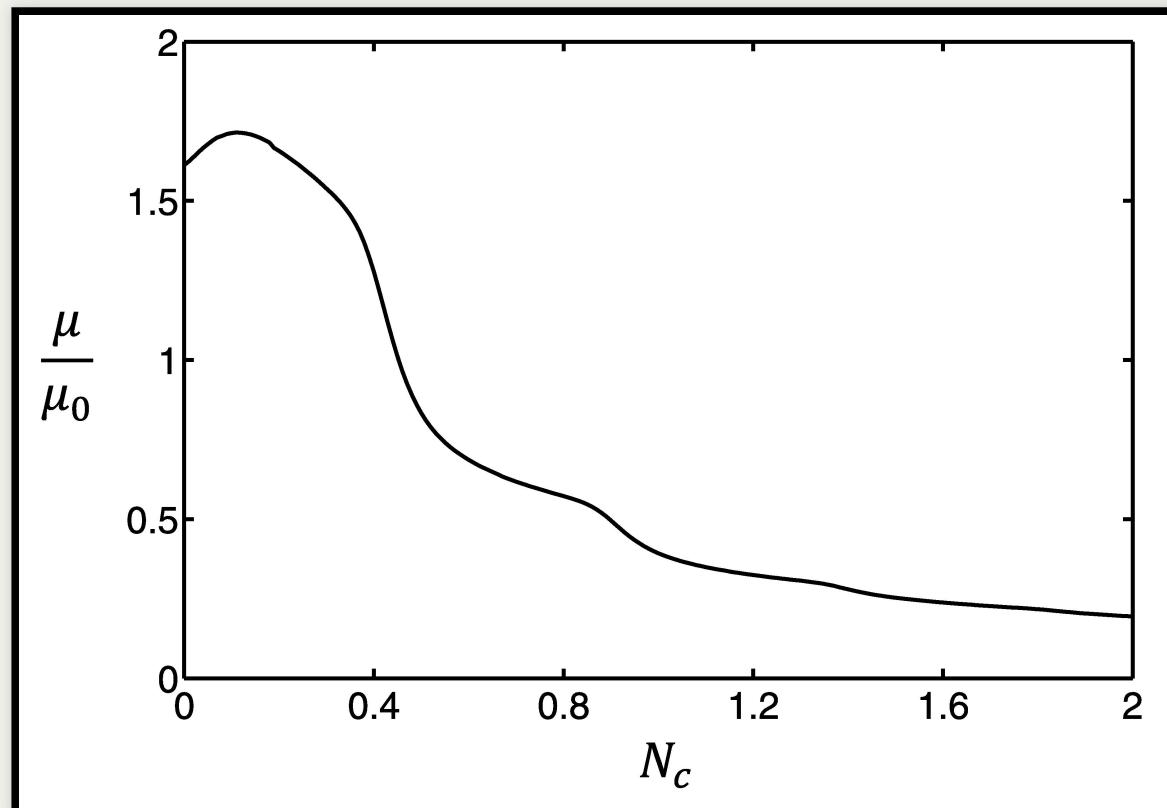
Вырожденный электронный газ

$$\mu = \frac{\sqrt{\mu_0 2\pi}}{4(1 + N_c)^2} \left[\frac{1}{k_0 T} (\Delta_0 + \Delta_c + \Delta_v - \hbar\omega_v - \hbar\omega_c) \right]^{\frac{1}{2}}$$

Зависимость подвижности (в относительных единицах) от напряженности поперечного электрического поля. $R = 330\text{\AA}$



Зависимость подвижности (в относительных единицах) от напряженности поперечного электрического поля. $R = 990\text{\AA}$



Особенности подвижности в нанопроволоках в поперечных электрическом и магнитном полях

$$\hat{P}_{\alpha\beta}^{(x)} = \hbar k_x \left(\frac{\omega_y}{\Omega_y} \right)^2 \delta_{\alpha\beta}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{2e^2\hbar}{\beta_0\pi^2m_x^*\gamma_0} \sum_{nm} \frac{\ln[1 + \exp(\beta_0\xi_{nm})]}{\left[\hbar\omega_y \frac{\omega_y}{\Omega_y} \left(n + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_z \left(m + \frac{1}{2} \right) + 2\Delta_c \right]^2}$$

$$\xi_{nm} = \xi - \hbar\Omega_y \left(n + \frac{1}{2} \right) - \hbar\omega_z \left(m + \frac{1}{2} \right) + \Delta_c, \quad \beta = \frac{1}{k_0 T}$$

$$m_{ex}^* = m_{ex} \left(\frac{\Omega_y}{\omega_y} \right)^2$$

Подвижность носителей (электронов и дырок) в нанопроволоке:

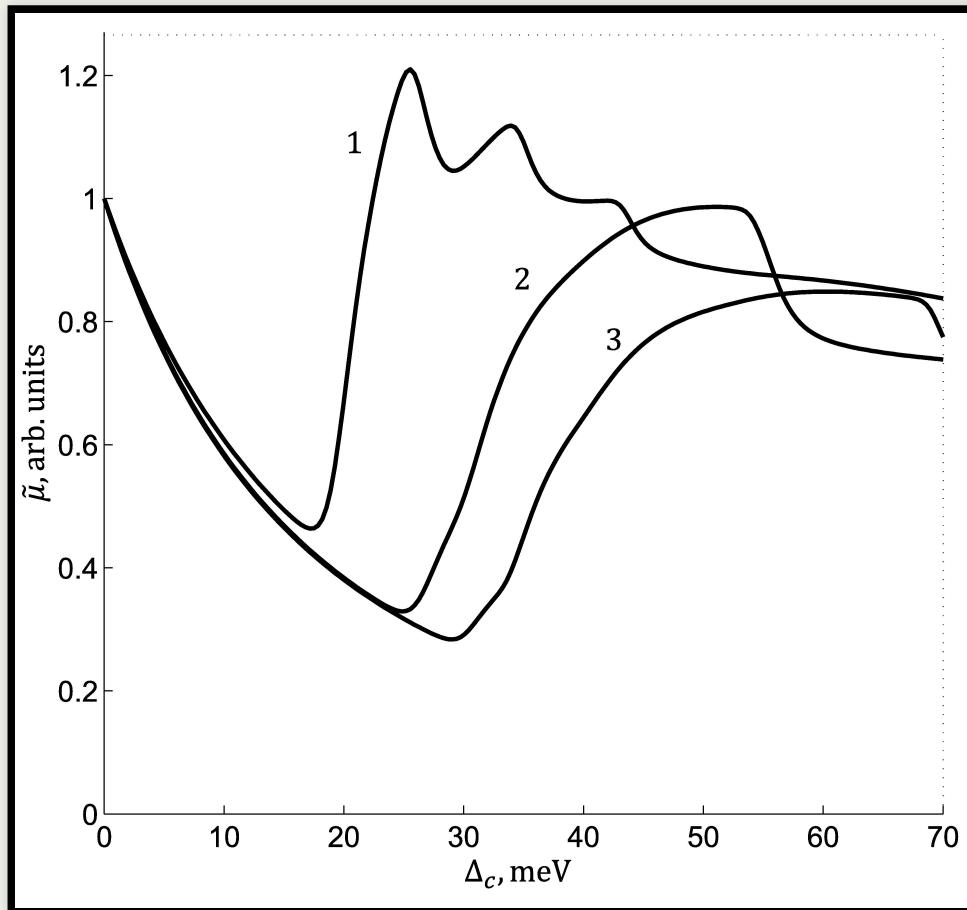
$$\mu_{xx} = \frac{eR^2\hbar^2}{m_x^*\gamma_0} \frac{1}{\sqrt{2m_x^*\beta_0} \sum_{nm} F(\xi_{nm})} \sum_{nm} \frac{\ln[1 + \exp(\beta\xi_{nm})]}{\left[\hbar\omega_y \frac{\omega_y}{\Omega_y} \left(n + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_z \left(m + \frac{1}{2}\right) + 2\Delta_c\right]}$$

$$+ \frac{eR^2\hbar^2}{\mu_x^*\gamma_0} \frac{1}{\sqrt{2\mu_x^*\beta_0} \sum_{nm} F(\tilde{\xi}_{nm})} \sum_{nm} \frac{\ln[1 + \exp(\beta\tilde{\xi}_{nm})]}{p \left[\hbar\tilde{\omega}_y \frac{\tilde{\omega}_y}{\tilde{\Omega}_y} \left(n + \frac{1}{2}\right) + \hbar\tilde{\omega}_z \left(m + \frac{1}{2}\right) + 2\Delta_v\right]^2}$$

$$F(\xi_{nm}) = \int_0^\infty \frac{dx}{\exp(x^2 - \beta\xi_{nm}) + 1},$$

$$\tilde{\xi}_{nm} = -\xi - \hbar\tilde{\Omega}_y \left(n + \frac{1}{2}\right) - \hbar\tilde{\omega}_z \left(m + \frac{1}{2}\right) + \Delta_0 + \Delta_v$$

Зависимость подвижности в относительных единицах $\tilde{\mu} = \mu(E)/\mu(0)$ от электрического поля



ТермоЭДС в нанопроволоках Ві в поперечном постоянном электрическом поле

ТермоЭДС в массивных образцах

$$\alpha_{xx}(H) = \frac{\gamma_{yx}}{T\sigma_{yx}}$$

ТермоЭДС в низкоразмерных структурах

$$\alpha_{xx}(H) = \frac{\gamma_{xx}}{T\sigma_{xx}}$$

$$\gamma_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \hat{j}_x(t) \hat{Q}_x \right\rangle dt = \frac{e\hbar^2}{2k_0 TV m_e^2} \sum_{\alpha} (E_{\alpha} - \xi) k_x^2 \tau_{\alpha} n_{\alpha} (1 - n_{\alpha})$$

$$\sigma_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \hat{j}_x(t) \hat{j}_x \right\rangle dt = \frac{e^2 \hbar^2}{2k_0 TV m_e^2} \sum_{\alpha} k_x^2 \tau_{\alpha} n_{\alpha} (1 - n_{\alpha})$$

Термоэдс с учетом электронов и дырок

$$\begin{aligned}
\alpha_{xx} = & -\frac{k_0}{e} \left\{ \sum_{n,m} \left[\nu \frac{F_2(\eta_{nm}^c) - \eta_{nm}^c F_1(\eta_{nm}^c)}{(n+m+1+N_c)^2} - \frac{F_2(\eta_{nm}^v) - \eta_{nm}^v F_1(\eta_{nm}^v)}{b(n+m+1+aN_c)^2} \right] \right\} \times \\
& \times \left\{ \sum_{n,m} \left[\nu \frac{F_1(\eta_{nm}^c)}{(n+m+1+N_c)^2} + \frac{F_1(\eta_{nm}^v)}{b(n+m+1+aN_c)^2} \right] \right\}^{-1} \\
a = & \left(\frac{m_h}{m_c} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\Delta E_c}{\Delta E_v} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad b = \frac{\Delta E_v}{\Delta E_c}, \\
\eta_{nm}^c = & \beta [\Delta_c + \xi - \hbar\omega_c(n+m+1)], \\
\eta_{nm}^v = & \beta [\Delta + \Delta_v - \xi - \hbar\omega_v(n+m+1)],
\end{aligned}$$

Интегралы Ферми

$$F_k(\eta) = \int_0^{\infty} \frac{e^{x-\eta} x^k dx}{(1 + e^{x-\eta})^2}$$

В частности для $k = 0$

$$F_0(\eta) = \frac{1}{e^{-\eta} + 1}$$

Для $k = 1$

$$F_1(\eta) = \ln(1 + e^{\eta})$$

Для $k = 1/2$

$$F_{\frac{1}{2}}(\eta) = -\frac{\sqrt{(\pi)}}{2} \text{Li}_{\frac{1}{2}}[-\exp(\eta)]$$

Химический потенциал

$$\nu \sqrt{\frac{m_e}{m_v}} \sum_{n,m} F_{\frac{1}{2}} (\eta_{nm}^c) = \sum_{n,m} F_{\frac{1}{2}} (\eta_{nm}^v)$$

Вырожденный электронный газ

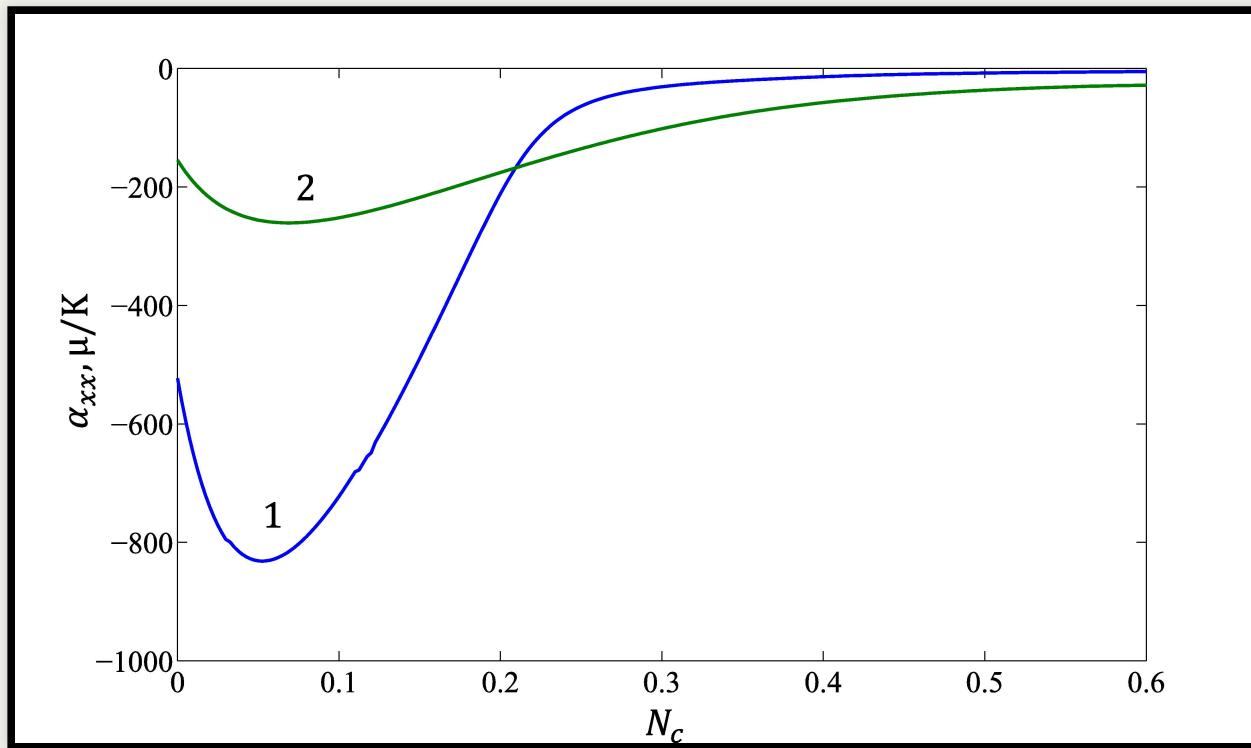
$$\xi - \hbar\omega_c = \Delta_0 + \Delta_v - (\hbar\omega_c + \hbar\omega_v), \left(\frac{\Delta_v}{\Delta_c} = \frac{\Delta E_c}{\Delta E_v} > 1 \right)$$

$$\alpha_{xx}^{(d)} = -\frac{k_0}{e} \cdot \frac{\pi^3}{3} \cdot \frac{1 - \frac{1}{b\nu} \left(\frac{1+N_c}{1+aN_c} \right)^2}{\Delta + \Delta_v - (\hbar\omega_c + \hbar\omega_v)}$$

ТермоЭДС в случае невырожденного электронного газа

$$\alpha_{xx}^{(nd)} = -\frac{k_0}{e} \left\{ 2 + \beta \left[\frac{1}{2} \ln \left(\nu^2 \frac{m_e}{m_h} \right) + (\hbar\omega_c + \hbar\omega_v - \Delta + \Delta_v + \Delta_c) \right] \right\}$$

Зависимость удельной термоэдс квантовой проволоки от напряженности поперечного электрического поля



Спасибо за внимание