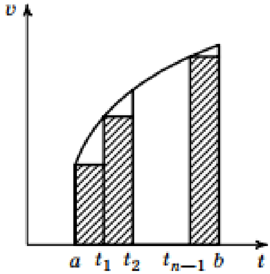

Рис. 9

Примем для удобства $t_0 = a$, $t_n = b$. Тогда площадь S, о которой идёт речь, с любой точностью можно заменить на сумму площадей прямоугольников с нижними основаниями $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \ldots, [t_{n-1}, t_n]$ и с высотами $v(t_0), v(t_1), \ldots, v(t_{n-1})$ (рис. 9), т. е. получаем

$$\approx v(t_1)(t_1 - t_0) + v(t_1)(t_2 - t_1) + \ldots + v(t_{n-1}) \times (t_n - t_{n-1})$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} v(t_k)(t_{k+1} - t_k) = \sum_{k=0}^{n-1} v(t_k)(\triangle t_k),$$

(это сокращённое обозначение левой части).
Более точная запись:

$$S = \lim_{\substack{\Delta t_k \to 0 \\ n \Longrightarrow \infty}} \sum_{k=1}^{n} v(t_{k-1})\Delta t_k = \lim_{\Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} v(t_{k-1})\Delta t_k,$$

где $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$. Можно, например, брать разбиение отрезка $[a, b]$ на n равных частей, так что $\Delta t_k = \frac{b-a}{n}$ и тогда условие перехода к пределу заключается просто в том, что $n \to \infty$. Но, с другой стороны, точно так же можно наращивать путь, продвигаясь в промежутке от a до b, так как на маленьких участках $[t_k, t_{k+1}]$ скорость можно считать постоянной. Итак,

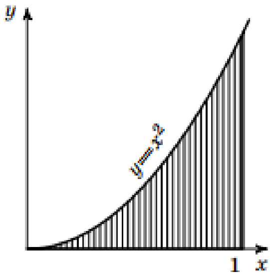

Рис. 10

$$S = \int_a^b v(t)dt = \lim_{\Delta t_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} v(t_k)\Delta t_k.$$

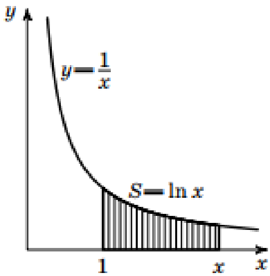

Рис. 11

Отметим соглашение о знаке площади: если кусок площади лежит под осью абсцисс, то его знак считается отрицательным, так как в этом случае $\Delta t_k > 0$, а $v(t_k) < 0$.

Пример 1. Найдём площадь S под параболой $y = x^2$ от точки $x = 0$ до точки $x = 1$ (рис. 10). Имеем:

$$S = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Пример 2. Площадь под гиперболой $y = 1/x$ от $x = 1$ до произвольного x равна $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln t\Big|_1^x = \ln x$ (рис. 11). Таков геометрический смысл натурального логарифма.