легко устанавливается из правил дифференцирования, но мы не будем специально следить за этим, чтобы не удлинять изложение.

П р и м е р 1. Равномерное движение:

$$z(t) = z_0 + vt.$$

Тогда $z^{'}(t) = v$ — постоянная величина.

П р и м е р 2. Равноускоренное движение:

$$z = z_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

здесь v_0 — начальная скорость, a —ускорение. В этом случае $z^{'}(t) = v_0 + at$ по известным правилам дифференцирования. Напомним, что если даны две функции $f(t), g(t)$ и постоянная a, то $(f+g)^{'} = f^{'} + g^{'}, (af)^{'} = af^{'}, (fg)^{'} = f^{'}g + fg', (\frac{f}{g})^{'} = \frac{f^{'}g - fg^{'}}{g^2}$ (последняя формула верна в случае, когда $g(t) \neq 0$ в рассматриваемой точке t). Из предпоследней формулы следует, что $(t^2)^{'} = 2t$.

При любом целом n легко доказать (например, индукцией по n), что $(t^n)^{'} = nt^{(n-1)}$. Можно доказать, что при $t > 0$ эта формула верна и для нецелых n (об этом ещё будет идти речь ниже).

Укажем геометрический смысл производной: если нарисовать график функции $z = z(t)$, то $z^{'} = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклона касательной, проведённой к графику в точке $(t, z(t))$, к оси t(рис. 1).

П р а в и л о д и ф ф е р е н ц и р о в а н и я с л о ж н о й ф у н к ц и и: если даны две функции $F(z)$ и $z(t)$, то для функции $g(t) = F(z(t))$ производную можно найти по формуле

$$g^{'}(t) = (F(z(t)))^{'} = F^{'}(z(t))z^{'}(t)$$

вытекающей из того, что

$$g^{'}(t) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle g}{\triangle t} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle F(z(t))}{\triangle t} = \lim_{\triangle t \to 0} (\frac{\triangle F}{\triangle z}\frac{\triangle z}{\triangle t}) = F^{'}(z(t))z^{'}(t),$$

(здесь использовалось, что если $\triangle t \to 0$,то и $\triangle z \to 0$).

П р а в и л о д и ф ф е р е н ц и р о в а н и я о б р а т н о й ф у н к ц и и. Пусть функция $z = f(t)$ строго монотонна на отрезке$[t_1, t_2]$ и имеет производную в каждой точке этого отрезка. Строгая монотонность означает, что функция f либо возрастающая (если $t^{'} < t^{''}$, то $f(t^{'}) < f(t^{''})$), либо убывающая (если $t^{'} < t^{''}$, то $f(t^{'}) > f(t^{''})$). Будем для определённости считать функцию f возрастающей. Тогда множество значений функции f на отрезке$[t_1, t_2]$ представляет собой отрезок $[z_1, z_2]$, где $z_1 = f(t_1), z_2 = f(t_2)$ (рис. 2). При этом каждому значению $z \in [z_1, z_2]$ отвеча-

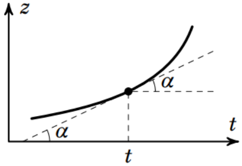

Рис. 1