Каращук А.Г.

Предел функции

1) Пример функции, не имеющей предела в нуле и бесконечности

$$f(x) = \sin\frac{1}{x} + \sin x$$

при $x \to 0$ $\sin\frac{1}{x} \in [-1:1]$ $\sin x = 0$

при $x \to \infty$ $\sin\frac{1}{x} = 0$ $\sin x \in [-1:1]$

2.) Пример функции, не имеющей предела в точке, но определена в ней

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) \begin{cases} -1, & \text{для } x < 0 \\ 0, & \text{для } x = 0 \\ 1, & \text{для } x > 0 \end{cases}$$

пределы слева и справа не равны между собой

а $\operatorname{sgn}(0) = 0$

~~а.) $dom(f) = \mathbb{R}$, $ran(f) = \mathbb{R}$~~

3.) Исследовать функцию $f(x) = x^3 - x^2$:

а.) $dom(f) = \mathbb{R}$, $ran(f) = \mathbb{R}$

в.) нули функции $x^3 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{1,2} = 0$ — (то есть кратность $= 2$)

$x_3 = 1$ (кратность $= 1$)

с) Отрезки знакопостоянства

$(-\infty : 0)$ — отрицательная

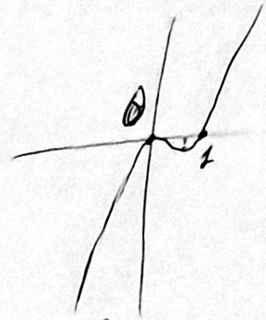
$(0 : 1)$ — отрицательная

$(1 : +\infty)$ — положительная

или $(-\infty : 1]$ — не положительная

$(1 : +\infty)$ — положительная

d.) $(-\infty : 0)$ – возрастающая



$\left(0 : \frac{2}{3}\right)$ – убывающая

$\left(\frac{2}{3} : \infty\right)$ – возрастающая

Вычислил через производную и приравнял к „0"

e.) функция – нечётная, т.к. $f(x) \neq f(-x)$

f) функция – не ограничена так как при $x \to \infty$ $f(x) \to \infty$

g) функция не периодическая, так как нет такого T чтобы

$$f(x+T) = f(x)$$

4) Найти предел:

а) $$\lim_{x\to 0} \frac{3x^3 - 2x^2}{4x^2} = \frac{1}{4} \lim_{x\to 0} (3x - 2) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

в)* $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\left((1+x)^{1/2} - 1\right)\underbrace{\left((1+x)^{2/3} + (1+x)^{1/2} + 1\right)}_{\to 3}}{\left(\sqrt[3]{1+x} - 1\right)\left((1+x)^{2/3} + (1+x)^{1/2} + 1\right)} =$$

$$= 3 \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x} - 1\right)}{1+x-1} = 3 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x} - 1\right)\left(\sqrt{1+x} + 1\right)}{x \cdot \underbrace{\left(\sqrt{1+x} + 1\right)}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 2}} =$$

$$= 3 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1+x-1}{x \cdot 2} = \frac{3}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} =$$

$$= \frac{3}{2}$$

c)*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{4x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{4x}\cdot\left(1+\frac{3}{x}\right) =$$

$\Rightarrow$ сделаем замену $x = 3y$ $\Rightarrow$

$$\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{3}{3y}\right)^{4\cdot 3\cdot y}\cdot\left(1+\frac{3}{3y}\right) =$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}}_{=e}{}^{12}\cdot\left(1+\underbrace{\frac{1}{y}}_{=0}\right) =$$

$$= e^{12}$$

Теоремы о пределах:

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{4x} = \frac{1}{2}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}}_{=1} = \frac{1}{2}$$

б) $$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x)} = 1$$ — это тоже замечательный предел.

в) $$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin(x)} \Rightarrow y = \sin x \Rightarrow$$

при этом при $x\to 0$
$y\to 0$

$$\Rightarrow \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{\arcsin(\sin y)} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1$$

d) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+3}{4x-3}\right)^{6x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-3+3+3}{4x-3}\right)^{6x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{4x-3}{6}\right)}\right)^{6x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{4}{6}x-\frac{3}{6}\right)}\right)^{6x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{4}{6}x-\frac{3}{6}\right)}\right)^{\frac{36}{4}\left(\frac{4}{6}x-\frac{3}{6}\right)+\frac{36}{4}\cdot\frac{3}{6}} =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)}\right)^{\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)\cdot 9}}_{= e} \cdot \left(1-\underbrace{\frac{1}{\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)}}_{x\to\infty\ \emptyset}\right)^{9/2} =$$

$$= e^{9}$$

e.) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x)+\ln(x)}{x} = \underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x)}{x}}_{=\emptyset} + \underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}}_{=0} =$$

$\emptyset$. т.к. $\sin(x)\le 1$ и x в знаменател

т.к. x растет быстрее чем $\ln(x)$

$$= 0$$

f.) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\ln x}{x} = \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}_{=1} + \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x} =$$

будем рассматр. для $x>0$ ~~так~~ так как $\mathrm{dom}(\ln x)=\mathbb{R}_+$

$$= 1-\infty = -\infty$$