Задание к уроку 5.

Карашук А.Ф.

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(23-2x^2)(3x^2+17)^2}{4x^6+x-1} \approx \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2\cdot x^2\cdot(3x^2)^2}{4x^6} = -\dfrac{9}{2}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(97-2x)^3}{2x(3x^2+15)+8x} \approx \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-8x^3}{6x^3} = -\dfrac{4}{3}$

3.) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+13x(x+18)}{(27-x)(2x+19)^2} \approx \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3}{-4x^3} = -\dfrac{1}{2}$

4) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{x^2-36}{x^2-x-30} = \lim\limits_{x\to 6} \dfrac{(x-6)(x+6)}{(x-6)(x+5)} = \dfrac{12}{11}$

5.) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{x^2-49}{x^2-13x+42} = \lim\limits_{x\to 7} \dfrac{(x-7)(x+7)}{(x-7)(x-6)} = 14$

6.) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2} = \dfrac{(\sqrt{x+2})^6-(\sqrt[3]{x+20})^6}{x+9-16}\cdot$

$a^6-b^6=(a-b)(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5)$

$a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+a^3)$

где $a=\lim\limits_{x\to 7}\sqrt[4]{x+9}=2$

$b=\lim\limits_{x\to 7} 2$

$a=\lim\limits_{x\to 7}\sqrt{x+2}=3$

$b=\lim\limits_{x\to 7}\sqrt[3]{x+20}=3$

$= \dfrac{(x+2)^3-(x+20)^2}{(x-7)}\cdot\dfrac{(8+4\cdot 2+2\cdot 4+8)}{3^5\cdot 6}=$

$$= \lim_{x\to 7} \frac{32}{2\cdot 3^6} \cdot \frac{(x^3+6x^2+12x+8) - (x^2+40x+400)}{(x-7)} =$$

$$= \lim_{x\to 7} \frac{32}{2\cdot 3^6} \left(\frac{x^3+5x^2-28x-392}{x-7} \right) =$$

$$\begin{array}{r|l} x^3+5x^2-28x-392 & x-7 \\ \hline -x^3-7x^2 & x^2+12x+56 \\ \hline 12x^2-28x & \\ -12x^2-84x & \\ \hline 56x-392 & \\ -56x-392 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$= \frac{32}{2\cdot 27\cdot 27} \cdot \lim_{x\to 7} \frac{(x-7)(x^2+12x+56)}{(x-7)} =$$

$$= \frac{16}{27\cdot 27} \left(49 + 12\cdot 7 + 56 \right) =$$

$$= \frac{16\cdot 189}{27\cdot 27} = \frac{16\cdot 7}{27} = \frac{112}{27}$$

7.) $$\lim_{x\to 0} \frac{3x \operatorname{tg} 4x}{1-\cos 4x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{2\cdot \sin^2(2x)} \cdot \frac{\operatorname{tg}(4x)}{4x} \cdot 4x =$$

$\frac{\operatorname{tg}(4x)}{4x} = 1$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3}{2} \cdot \frac{x\cdot 4\cdot x}{\sin(2x)\cdot \sin(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{2} \cdot \frac{2x}{\sin(2x)} \cdot \frac{2x}{\sin(2x)} =$$

$\frac{2x}{\sin(2x)} \to 1$, $\frac{2x}{\sin(2x)} \to 1$

$$= \frac{3}{2}$$

8) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2}\,x^2 \sin 4x}{(1-\cos 2x)^{3/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2}\cdot x^2 \sin 4x}{(2\cdot \sin^2 x)^{3/2}} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot 2} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin(4x)}{\sin(x)} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(4x)}{\sin(x)} \cdot \frac{4\cdot x}{4\cdot x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{4x} \cdot \frac{x}{\sin(x)} \cdot 2 =$

$= 2$

Это при $x \to 0^+$, но так как при $x \to 0^-$ то $\sin 4x < 0$ а $x^2 > 0$, $\lim_{x\to 0^-} = -2$

9) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x}{4x+3}\right)^{\frac{5x^2}{7x-1}} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{-3}{4x+3}\right)^{\frac{(4x+3)}{(-3)}\cdot\frac{(-3)}{(4x+3)}\cdot\frac{5x^2}{7x-1}} =$

$= e$

$= e^{\lim_{x\to\infty} \frac{-3\cdot 5x^2}{(4x+3)\cdot(7x-1)}} = e^{\frac{-15}{28}} = \frac{1}{e^{15/28}}$

10) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)} \approx \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2)}{\ln(x^{10})} =$

$\lim_{x\to\infty} \frac{2\ln x}{10 \ln x} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

11) $\lim_{x\to 0} \frac{5^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\ln 5^x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\cdot \ln 5} - 1}{x\cdot \ln 5} \cdot \ln 5$

$\to 1$

$= \ln(5)$