Решение задачи диффузии-конвекции в жидкости с пульсирующим источником

Ефим Пышнограев

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

24 мая 2013

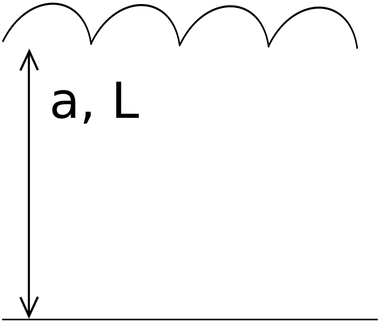
Введение

- Диффузия вещества в жидкости
- Какую модель выбрать?

Введение

- Простейшая модель

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

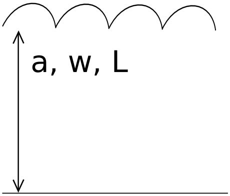


Что можно добавить в модель чтобы сделать ее достовернее?

Что можно добавить в модель чтобы сделать ее достовернее?

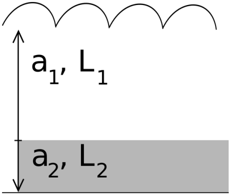
- Добавим конвективное слагаемое

$$u_t = a^2 u_{xx} + w u_x$$



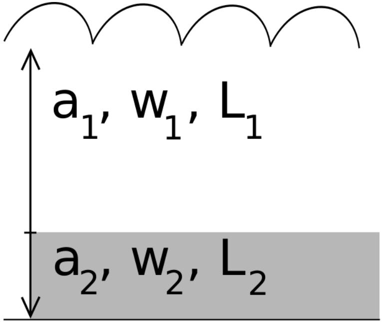
- Сделаем область многослойной

$$u_t = a(x) u_{xx}$$



Постановка задачи

Остановимся на этих двух уточнениях.



$$u_t = wu_x + a^2 u_{xx},$$

$$u(x,0) = 0,$$

$$\begin{cases} u(-l_1, t) = 1 - \cos\omega t, \\ u_x(l_2, t) = 0, \\ u(-0, t) = u(+0, t), \\ a_1^2 u_x(-0, t) = a_2^2 u_x(+0, t). \end{cases}$$

Возможные подходы

Численный метод

- Применим в большинстве случаев, обычно не требует сложных предварительных выкладок
- Неизвестен общий вид искомой функции
- Часто необходимо много вычислительных ресурсов

Аналитический метод

- Может быть использован не всегда, при решении часто бывают трудности
- Если все получилось, то получаем явную формулу для результата
- Точное решение может использоваться для проверки адекватности численного метода

Этапы решения

Решение задачи будем находить методом конечных интегральных преобразований:

- Переход к однородным граничным условиям
- Разделение переменных
- Составление задачи Штурма–Лиувилля
- **Вывод уравнения для собственных чисел**
- **Нахождение общего вида собственных функций**
- Вычисление веса, с которым ортогональны собственные функции
- Проведение интегрального преобразования
- **Нахождение временной составляющей решения**
- **Получение окончательного ответа**

Уравнение для собственных чисел

Уравнение имеет разный вид на трех промежутках:

1. $0 \leq \lambda \leq \mu_1 a_1$
2. $\mu_1 a_1 < \lambda \leq \mu_2 a_2$
3. $\mu_1 a_1 < \lambda < \infty$

Уравнение для собственных чисел

Рассмотрим отрезок $0 \le \lambda \le \mu_1 a_1$. Уравнение имеет вид:

$$-\operatorname{sh}(\gamma_1(\lambda) l_1)((a_2^2\mu_2 - a_1^2\mu_1)(\gamma_2(\lambda)\operatorname{ch}(\gamma_2(\lambda) l_2) - \operatorname{sh}(\gamma_2(\lambda) l_2)\mu_2) + a_2^2\gamma_2(\lambda) -$$
$$-(\gamma_2(\lambda)\operatorname{sh}(\gamma_2(\lambda) l_2) - \operatorname{ch}(\gamma_2(\lambda) l_2)\mu_2)) - a_1^2\gamma_1(\lambda)\operatorname{ch}(\gamma_1(\lambda) l_1)\times$$
$$\times(\gamma_2(\lambda)\operatorname{ch}(\gamma_2(\lambda) l_2) - \operatorname{sh}(\gamma_2(\lambda) l_2)\mu_2) = 0.$$

Где

$$\gamma_1 = \gamma_1(\lambda) = \sqrt{-\frac{\lambda^2}{a_1^2} + \mu_1},$$
$$\gamma_2 = \gamma_2(\lambda) = \sqrt{-\frac{\lambda^2}{a_2^2} + \mu_2}.$$

Два оставшихся промежутка рассматриваются аналогично.

Общий вид собственных функций

Так же, как и собственные числа, в каждом их трех промежутков для λ, собственные функции будут иметь разный вид:

1. $0 \leq \lambda \leq \mu_1 a_1$
2. $\mu_1 a_1 < \lambda \leq \mu_2 a_2$
3. $\mu_1 a_1 < \lambda < \infty$

Общий вид собственных функций

В первом промежутке $0 \leq \lambda \leq \mu_1 a_1$ собственные функции равны

$$\varphi_1(x) = e^{\mu x} \left(A_1 \operatorname{ch} \gamma_1 x + B_1 \operatorname{sh} \gamma_1 x \right),$$
$$\varphi_2(x) = e^{\mu x} \left(A_2 \operatorname{ch} \gamma_2 x + B_2 \operatorname{sh} \gamma_2 x \right).$$

Где

$$\gamma_1 = \gamma_1(\lambda) = \sqrt{-\frac{\lambda^2}{a_1^2} + \mu_1},$$
$$\gamma_2 = \gamma_2(\lambda) = \sqrt{-\frac{\lambda^2}{a_2^2} + \mu_2},$$
$$A_i, B_i = const.$$

Общий вид собственных функций

Во втором и третьем промежутке соответственно собственные функции имеют следующий вид:

$$\varphi_1(x) = e^{\mu x}\left(A_1' \cos\gamma_1 x + B_1' \sin\gamma_1 x\right), \qquad \varphi_1(x) = e^{\mu x}\left(A_1'' \cos\gamma_1 x + B_1'' \sin\gamma_1 x\right),$$

$$\varphi_2(x) = e^{\mu x}\left(A_2' \operatorname{ch}\gamma_2 x + B_2' \operatorname{sh}\gamma_2 x\right), \qquad \varphi_2(x) = e^{\mu x}\left(A_2'' \cos\gamma_2 x + B_2'' \sin\gamma_2 x\right),$$

$$\gamma_1 = \gamma_1(\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda^2}{a_1^2} - \mu_1}, \qquad \gamma_1 = \gamma_1(\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda^2}{a_1^2} - \mu_1},$$

$$\gamma_2 = \gamma_2(\lambda) = \sqrt{-\frac{\lambda^2}{a_2^2} + \mu_2}. \qquad \gamma_2 = \gamma_2(\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda^2}{a_2^2} - \mu_2}.$$

Нахождение временной составляющей решения

Уравнение для $\theta_n(t)$:

$$\begin{cases} \theta_n'(t) + \lambda_n^2 \theta_n(t) = F(t), \\ \theta_n(0) = 0. \end{cases}$$

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка, решение которого хорошо известно:

$$\theta_n(t) = A \cdot \frac{\lambda_n^2 \sin \omega t - \omega \cos \omega t + \omega e^{-\lambda_n^2 t}}{\omega^2 + \lambda_n^4}, \text{ где } A = -\omega \int\limits_{-l_1}^{l_2} \rho(x) \varphi_n(x) dx.$$

Выражение для результата

Окончательное решение задачи имеет вид:

$$u(x,t) = 1 - \cos\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\theta_n(t)}{||\varphi_n||}.$$

Сложность вычислений

Выберем следующие значения параметров:

$$l_1 = 1,\ l_2 = 19,\ a_1^2 = 10^{-3},\ a_2^2 = 10^{-4},\ w_1 = 7.8 \cdot 10^{-4},\ w_2 = w_1 \cdot 0.8,$$

корнем первого уравнения для собственных чисел будет являться $\lambda = 8 \cdot 10^{-29}$. Для его отыскания использовалась система компьютерной алгебры Pari/GP, которая позволяет работать с числами произвольной точности.

Сложность вычислений

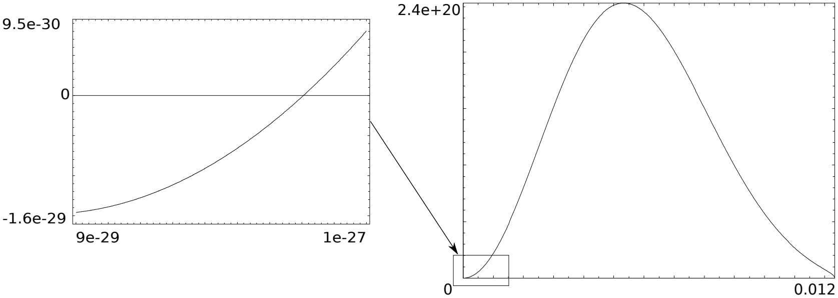
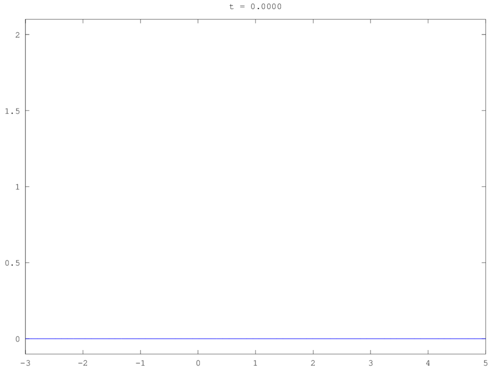


Рис. : Левая часть трансцендентного уравнения относительно λ

Анимация процесса

Выберем значения параметров следующим образом:

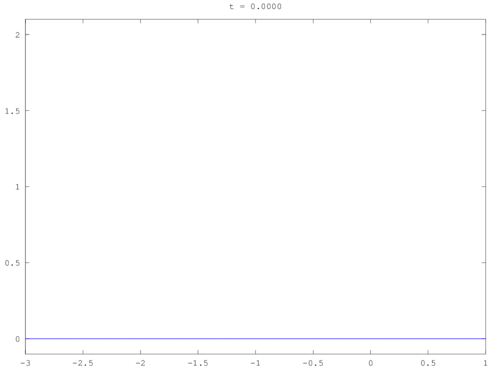
$$l_1 = 3,\ \ l_2 = 5,\ \ a_1 = 2,\ \ a_2 = 4,\ \ w_1 = 0.1,\ \ w_2 = w_1 \cdot 0.8.$$



Анимация процесса

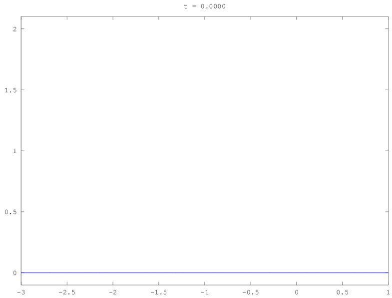
Выберем значения параметров следующим образом:

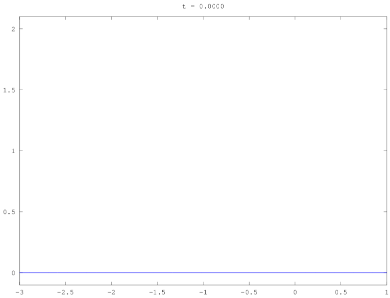
$$l_1 = 3, \ l_2 = 1, \ a_1 = 4, \ a_2 = 1, \ w_1 = 0.05, \ w_2 = w_1 \cdot 0.8.$$



Анимация процесса

Сравним процесс с конвекцией (слева) и без конвекции (справа):





Заключение

- Получено аналитическое решение задачи конвективной диффузии. Решение разбито на этапы и структурировано
- Рассмотрены трудности, которые могут возникнуть в процессе нахождения собственных значений
- Показан вид искомой функции на конкретных примерах
- Указанная схема может применяться в более сложных телах больших размерностей

Fin

Спасибо за внимание.
Готов ответить на ваши вопросы.