1 Постановка задачи

В данной работе решается задача диффузии-конвекции для одномерной конечной двухслойной области, которая схематически показана на Рис. 1. Для удобства граница раздела слоев помещена в начало координат.

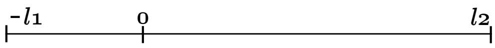

Рис. 1: Двухслойный стержень

Математическая постановка задачи состоит в следующем: требуется решить уравнение в частных производных

$$u_t = wu_x + a^2 u_{xx} \tag{1}$$

с однородным начальным условием

$$u(x, 0) = 0 \tag{2}$$

а также внешними и общими граничными условиями

$$\begin{cases} u(-l_1, t) = 1 - \cos \omega t, \\ u_x(l_2, t) = 0, \\ u(-0, t) = u(+0, t), \\ a_1^2 u_x(-0, t) = a_2^2 u_x(+0, t), \end{cases} \tag{3}$$

где $a(x)$, $w(x)$ — кусочно-постоянные коэффициенты диффузии и скорости осаждения соответственно:

$$a = a(x) = \begin{cases} a_1 \text{ при } x \in [-l_1; 0), \\ a_2 \text{ при } x \in [0; l_2], \end{cases} \tag{4}$$

$$w = w(x) = \begin{cases} w_1 \text{ при } x \in [-l_1; 0), \\ w_2 \text{ при } x \in [0; l_2]. \end{cases} \tag{5}$$

2 Решение

2.1 Переход к однородным граничным условиям

Для перехода к однородным граничным условиям производим замену

$$u(x, t) = N(x, t) + (1 - \cos \omega t). \tag{6}$$

В результате приходим к новому уравнению, начальному и граничным условиям

$$N_t(x, t) = wN_x(x, t) + a^2 N_{xx}(x, t) - \omega \sin \omega t, \tag{7}$$

$$N(x, 0) = 0, \tag{8}$$

$$\begin{cases} N(-l_1, t) = 0, \\ N_x(l_2, t) = 0, \\ N(-0, t) = N(+0, t), \\ a_1^2 N_x(-0, t) = a_2^2 N_x(+0, t). \end{cases} \tag{9}$$

2.2 Разделение переменных

Пусть $N(x, t) = \theta(t)\varphi(x)$, тогда

$$\frac{\theta'}{\theta} = \frac{a^2\varphi'' + w\varphi'}{\varphi} = k. \tag{10}$$

Константа k не может быть положительной, в противном случае $\lim_{t\to\infty} \theta(t) \neq 0$, что противоречит физическому смыслу задачи. Ввиду этого, можно принять

$$k = -\beta^2. \tag{11}$$

2.3 Задача Штурма–Лиувилля

2.3.1 Исключение конвективного слагаемого

Из (10) и (11) следует задача Штурма–Лиувилля для $\varphi(x)$:

$$a^2\varphi''(x) + w\varphi'(x) + \beta^2\varphi(x) = 0 \tag{12}$$

с внешними граничными условиями и условиями сопряжения:

$$\begin{cases} \varphi_1(-l_1) = 0, \\ \varphi_2'(l_2) = 0, \\ \varphi_1(0) = \varphi_2(0), \\ a_1^2\varphi_1'(0) = a_2^2\varphi_2'(0). \end{cases} \tag{13}$$

Здесь

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) \text{ при } x \in [-l_1; 0), \\ \varphi_2(x) \text{ при } x \in [0; l_2]. \end{cases} \tag{14}$$

Для того чтобы исключить из уравнения слагаемое $w\varphi'(x)$, производим замену

$$\varphi(x) = \psi(x)e^{-\mu x}, \text{ где } \mu = \mu(x) = \begin{cases} \mu_1 = \dfrac{w_1}{2a_1^2} \text{ при } x \in [-l_1; 0), \\ \mu_2 = \dfrac{w_2}{2a_2^2} \text{ при } x \in [0; l_2]. \end{cases} \tag{15}$$

В итоге получаем новое уравнение

$$a^2\psi''(x) + (\beta^2 - \mu^2 a^2)\psi(x) = 0 \tag{16}$$

и новые граничные условия

$$\begin{cases} \psi_1(-l_1) = 0, \\ \psi_2'(l_2) - \mu\psi_2(l_2) = 0, \\ \psi_1(0) = \psi_2(0), \\ a_1^2(\psi_1'(0) - \mu\psi_1(0)) = a_2^2(\psi_2'(0) - \mu\psi_2(0)). \end{cases} \tag{17}$$

Пусть для определенности $\mu_1 \le \mu_2$. Тогда для нахождения собственных чисел β необходимо рассмотреть три отрезка. Собственным числам из разных отрезков будет соответствовать разный вид собственных функций

1. $0 \le \beta \le \mu_1 a_1$,
2. $\mu_1 a_1 < \beta \le \mu_2 a_2$,
3. $\mu_2 a_2 < \beta < \infty$.

2.3.2 Нахождение собственных чисел и собственных функций

$\boxed{\text{i}}$ $0 \le \beta \le \mu_1 a_1$. Собственные функции ψ будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= A_1 \operatorname{ch} q_1 x + B_1 \operatorname{sh} q_1 x, \\ \psi_2(x) &= A_2 \operatorname{ch} q_2 x + B_2 \operatorname{sh} q_2 x. \end{aligned} \tag{18}$$

Где

$$
\begin{aligned}
q_1 &= q_1(\beta) = \sqrt{-\frac{\beta^2}{a_1^2} + \mu_1},\\
q_2 &= q_2(\beta) = \sqrt{-\frac{\beta^2}{a_2^2} + \mu_2}.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Константы A_1, A_2, B_1, B_2 определяем из граничных условий. Используя граничные условия, получим:

$$
\begin{cases}
A_1 \operatorname{ch} q_1 l_1 - B_1 \operatorname{sh} q_1 l_1 = 0,\\
A_2(q_2 \operatorname{sh} q_2 l_2 - \mu_2 \operatorname{ch} q_2 l_2) + B_2(q_2 \operatorname{ch} q_2 l_2 - \mu_2 \operatorname{sh} q_2 l_2) = 0,\\
A_1 = A_2,\\
A_1(-\mu_1 a_1^2) + B_1(q_1 a_1^2) = A_2(-\mu_2 a_2^2) + B_2(q_2 a_2^2).
\end{cases}
\tag{20}
$$

Чтобы найти ненулевые коэффициенты A_i, B_i, необходимо, чтобы определитель системы уравнений (20) относительно A_i, B_i был равен нулю. В результате получим уравнение для β:

$$
\det \begin{pmatrix}
\operatorname{ch}(q_1(\beta)l_1) & 0 & -\operatorname{sh}(q_1(\beta)l_1) & 0\\
0 & q_2(\beta)\operatorname{sh}(q_2(\beta)l_2) - \operatorname{ch}(q_2(\beta)l_2)\mu_2 & 0 & q_2(\beta)\operatorname{ch}(q_2(\beta)l_2) - \operatorname{sh}(q_2(\beta)l_2)\mu_2\\
1 & -1 & 0 & 0\\
-a_1^2\mu_1 & a_2^2\mu_2 & a_1^2 q_1(\beta) & -a_2^2 q_2(\beta)
\end{pmatrix} = 0,
\tag{21}
$$

или в развернутом виде

$$
\begin{aligned}
&-\operatorname{sh}(q_1(\beta)l_1)((a_2^2\mu_2 - a_1^2\mu_1)(q_2(\beta)\operatorname{ch}(q_2(\beta)l_2) - \operatorname{sh}(q_2(\beta)l_2)\mu_2) + a_2^2 q_2(\beta) -\\
&-(q_2(\beta)\operatorname{sh}(q_2(\beta)l_2) - \operatorname{ch}(q_2(\beta)l_2)\mu_2)) - a_1^2 q_1(\beta)\operatorname{ch}(q_1(\beta)l_1)\times\\
&\times(q_2(\beta)\operatorname{ch}(q_2(\beta)l_2) - \operatorname{sh}(q_2(\beta)l_2)\mu_2) = 0.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

После определения собственных чисел, из системы (20) находим коэффициенты A_i, B_i

$$
\begin{aligned}
&A_1 = A_2 = \operatorname{sh} q_1 l_1,\\
&B_1 = \operatorname{ch} q_1 l_1,\\
&B_2 = \frac{\operatorname{sh}(q_1 l_1)(-\mu_1 a_1^2 + \mu_2 a_2^2) + \operatorname{ch}(q_1 l_1) q_1 a_1^2}{q_2 a_2^2}.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Таким образом, найден набор собственных функций (18), соответствующий отрезку $0 \leq \beta \leq \mu_1 a_1$.

$\boxed{\text{ii}}$ $\mu_1 a_1 < \beta \leq \mu_2 a_2$. Аналогичным образом определяем собственные числа и функции для случая $\mu_1 a_1 < \beta \leq \mu_2 a_2$:

$$
\begin{aligned}
&\psi_1(x) = A_1 \cos q_1 x + B_1 \sin q_1 x,\\
&\psi_2(x) = A_2 \operatorname{ch} q_2 x + B_2 \operatorname{sh} q_2 x,\\
&q_1 = q_1(\beta) = \sqrt{\frac{\beta^2}{a_1^2} - \mu_1},\\
&q_2 = q_2(\beta) = \sqrt{-\frac{\beta^2}{a_2^2} + \mu_2}.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

$$
\det \begin{pmatrix}
\cos(q_1(\beta)l_1) & 0 & -\sin(q_1(\beta)l_1) & 0\\
0 & q_2(\beta)\operatorname{sh}(q_2(\beta)l_2) - \operatorname{ch}(q_2(\beta)l_2)\mu_2 & 0 & q_2(\beta)\operatorname{ch}(q_2(\beta)l_2) - \operatorname{sh}(q_2(\beta)l_2)\mu_2\\
1 & -1 & 0 & 0\\
-a_1^2\mu_1 & a_2^2\mu_2 & a_1^2 q_1(\beta) & -a_2^2 q_2(\beta)
\end{pmatrix} = 0.
\tag{25}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\sin(q_1(\beta)l_1)((a_2^2\mu_2-a_1^2\mu_1)(q_2(\beta)\operatorname{ch}(q_2(\beta)l_2)-\operatorname{sh}(q_2(\beta)l_2)\mu_2)+a_2^2q_2(\beta)-\\
&-(q_2(\beta)\operatorname{sh}(q_2(\beta)l_2)-\operatorname{ch}(q_2(\beta)l_2)\mu_2))-a_1^2q_1(\beta)\cos(q_1(\beta)l_1)\times\\
&\times(q_2(\beta)\operatorname{ch}(q_2(\beta)l_2)-\operatorname{sh}(q_2(\beta)l_2)\mu_2)=0.
\end{aligned} \tag{26}
$$

$$
\begin{aligned}
&A_1=A_2=\sin q_1l_1,\\
&B_1=\cos q_1l_1,\\
&B_2=\frac{\sin(q_1l_1)(-\mu_1a_1^2+\mu_2a_2^2)+\cos(q_1l_1)q_1a_1^2}{q_2a_2^2}.
\end{aligned} \tag{27}
$$

$\boxed{\text{iii}}$ $\mu_1a_1<\beta<\infty$. Собственные функции, уравнения для собственных значений, постоянные A_i, B_i имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&\psi_1(x)=A_1\cos q_1x+B_1\sin q_1x,\\
&\psi_2(x)=A_2\cos q_2x+B_2\sin q_2x,\\
&q_1=q_1(\beta)=\sqrt{\frac{\beta^2}{a_1^2}-\mu_1},\\
&q_2=q_2(\beta)=\sqrt{\frac{\beta^2}{a_2^2}-\mu_2}.
\end{aligned} \tag{28}
$$

$$
\det\begin{pmatrix}
\cos(q_1(\beta)l_1) & 0 & -\sin(q_1(\beta)l_1) & 0\\
0 & -q_2(\beta)\sin(q_2(\beta)l_2)-\cos(q_2(\beta)l_2)\mu_2 & 0 & q_2(\beta)\cos(q_2(\beta)l_2)-\sin(q_2(\beta)l_2)\mu_2\\
1 & -1 & 0 & 0\\
-a_1^2\mu_1 & a_2^2\mu_2 & a_1^2q_1(\beta) & -a_2^2q_2(\beta)
\end{pmatrix}=0. \tag{29}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\sin(q_1(\beta)l_1)((a_2^2\mu_2-a_1^2\mu_1)(q_2(\beta)\cos(q_2(\beta)l_2)-\sin(q_2(\beta)l_2)\mu_2)+\\
&+a_2^2q_2(\beta)(-\cos(q_2(\beta)l_2)\mu_2-q_2(\beta)\sin(q_2(\beta)l_2)))-\\
&-a_1^2q_1(\beta)\cos(q_1(\beta)l_1)(q_2(\beta)\cos(q_2(\beta)l_2)-\sin(q_2(\beta)l_2)\mu_2)=0.
\end{aligned} \tag{30}
$$

$$
\begin{aligned}
&A_1=A_2=\sin q_1l_1,\\
&B_1=\cos q_1l_1,\\
&B_2=\frac{\sin(q_1l_1)(-\mu_1a_1^2+\mu_2a_2^2)+\cos(q_1l_1)q_1a_1^2}{q_2a_2^2}.
\end{aligned} \tag{31}
$$

2.4 Ортогональность собственных функций

Собственные функции (18), (24), (28), как решения задачи Штурма–Лиувилля ортогональны с весом $\rho_\psi=\rho_\psi(x)$. Покажем, что $\rho_\psi=1$, проделав следующие преобразования: Пусть $n\neq m$

$$
\begin{cases}
a^2\psi_n''+(\beta_n^2-\mu^2a^2)\psi_n=0,\\
a^2\psi_m''+(\beta_m^2-\mu^2a^2)\psi_m=0.
\end{cases} \tag{32}
$$

Первое уравнение (32) умножим на ψ_m и проинтегрируем на отрезке $[-l_1;l_2]$. Аналогично, второе уравнение умножим на ψ_n и проинтегрируем на том же отрезке

$$
\begin{cases}
\displaystyle\int_{-l_1}^{l_2}a^2\psi_n''\psi_mdx=-\beta_n^2\int_{-l_1}^{l_2}\psi_n\psi_mdx+\int_{-l_1}^{l_2}a^2\mu^2\psi_n\psi_mdx,\\
\displaystyle\int_{-l_1}^{l_2}a^2\psi_m''\psi_ndx=-\beta_m^2\int_{-l_1}^{l_2}\psi_n\psi_mdx+\int_{-l_1}^{l_2}a^2\mu^2\psi_n\psi_mdx.
\end{cases} \tag{33}
$$

Вычитая из первого уравнения (33) второе, получим

$$(\beta_m^2-\beta_n^2)\int\limits_{-l_1}^{l_2}\psi_n\psi_m dx=\int\limits_{-l_1}^{l_2}a^2\psi_n''\psi_m dx-\int\limits_{-l_1}^{l_2}a^2\psi_m''\psi_n dx=I_1-I_2. \tag{34}$$

Дважды интегрируя I_1 по частям, имеем

$$I_1=\int\limits_{-l_1}^{l_2}a^2\psi_m d\psi_n'=\overbrace{a^2\psi_m\psi_n'\Big|_{-l_1}^{l_2}}^{P}-\overbrace{a^2\psi_n\psi_m'\Big|_{-l_1}^{l_2}}^{Q}+I_2=P-Q+I_2. \tag{35}$$

$$I_1-I_2=P-Q. \tag{36}$$

Учитывая граничные условия для ψ_n, ψ_m, найдем P:

$$\begin{aligned}P&=a_2^2\overbrace{\psi_{2n}'(l_2)}^{\mu\psi_{2n}(l_2)}\psi_{2m}(l_2)-a_2^2\psi_{2n}'(0)\psi_{2m}(0)+a_1^2\psi_{1n}'(0)\psi_{1m}(0)-a_1^2\psi_{1n}'(-l_1)\overbrace{\psi_{1m}(-l_1)}^{0}=\\&=\overbrace{a_2^2\mu\psi_{2n}(l_2)\psi_{2m}(l_2)}^{A}+\psi_{1m}(0)(a_1^2\psi_{1n}'(0)-a_2^2\psi_{2n}'(0))=\\&=A+\psi_{1m}(0)(\mu a_2^2\psi_{2n}(0)-\mu a_1^2\psi_{1n}(0))=A+\mu\psi_{1m}(0)\psi_{1n}(0)(a_2^2-a_1^2).\end{aligned} \tag{37}$$

Из соображений симметрии $Q=P$, следовательно из (36) $I_1=I_2$. Из (34) и предположения, что $n\neq m$ можно заключить, что

$$\int\limits_{-l_1}^{l_2}\rho_\psi\psi_n(x)\psi_m(x)dx=0 \tag{38}$$

Делая обратную замену для $\varphi=\psi e^{-\mu x}$, находим весовую функцию ρ_φ

$$\int\limits_{-l_1}^{l_2}\varphi_n(x)\varphi_m(x)e^{2\mu x}dx=\int\limits_{-l_1}^{l_2}\psi_n(x)\psi_m(x)dx=0\Rightarrow\rho_\varphi(x)=\rho(x)=e^{2\mu x}. \tag{39}$$

2.5 Интегральное преобразование

Решение вспомогательной задачи (7)-(9) имеет вид

$$N(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\theta_n(t)}{||\varphi_n||}. \tag{40}$$

Где

$$\theta_n(t)=\int\limits_{-l_1}^{l_2}\rho N(x,t)\varphi_n(x)dx. \tag{41}$$

Для нахождения $\theta_n(t)$ необходимо провести интегральное преобразование обеих частей уравнения (7) с использованием формулы (41):

$$\begin{aligned}&\int\limits_{-l_1}^{l_2}\rho N_t\varphi_n dx=\overbrace{\int\limits_{-l_1}^{l_2}\rho wN_x\varphi_n dx}^{I_1}+\overbrace{\int\limits_{-l_1}^{l_2}\rho a^2N_{xx}\varphi_n dx}^{I_2}+\overbrace{\left(-\omega\sin\omega t\int\limits_{-l_1}^{l_2}\rho\varphi_n dx\right)}^{F(t)}\Rightarrow\\&\Rightarrow\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-l_1}^{l_2}\rho N\varphi_n dx=I_1+I_2+F(t)\Rightarrow\theta'(t)=I_1+I_2+F(t).\end{aligned} \tag{42}$$

При вычислении $I_1 + I_2 + F(t)$, принимаем во внимание, что $\rho'(x) = 2\mu\rho(x)$.

$$I_2 = \int\limits_{-l_1}^{l_2} \rho a^2 \varphi_n dN_x = \overbrace{\rho a^2 \varphi_n N_x \Big|_{-l_1}^{l_2}}^{P} - \int\limits_{-l_1}^{l_2} (2\mu\rho\varphi_n + \rho\varphi_n') a^2 N_x dx = P - \overbrace{\int\limits_{-l_1}^{l_2} 2\mu\rho a^2 \varphi_n N_x dx}^{I_1} -$$
$$- \int\limits_{-l_1}^{l_2} \rho a^2 \varphi_n' dN = P - I_1 - \overbrace{\rho a^2 \varphi_n' N \Big|_{-l_1}^{l_2}}^{Q} + \int\limits_{-l_1}^{l_2} a^2 (2\mu\rho\varphi_n' + \rho\varphi_n'') N dx = P - Q - I_1 + \qquad (43)$$
$$+ \int\limits_{-l_1}^{l_2} \overbrace{(w\varphi_n' + a^2\varphi_n'')}^{-\beta_n^2\varphi_n} \rho N dx = P - Q - I_1 - \beta_n^2 \theta(t) \Rightarrow I_1 + I_2 + F(t) = P - Q - \beta_n^2 \theta(t) +$$
$$+ F(t) \Rightarrow \theta'(t) + \beta_n^2 \theta(t) = P - Q + F(t).$$

Используя граничные условия для φ_n (13) и для $N(x,t)$ (9) определяем $P = Q = 0$:

$$\begin{aligned} P = \rho(l_2) a_2^2 \varphi_{2n}(l_2) \overbrace{N_x(l_2)}^{0} - \rho(-l_1) a_1^2 \overbrace{\varphi_{1n}(-l_1)}^{0} N_x(-l_1) + \\ + \varphi_{1n}(0) \overbrace{(a_1^2 N_x(-0) - a_2^2 N_x(+0))}^{0} = 0. \end{aligned} \qquad (44)$$

$$\begin{aligned} Q = \rho(l_2) a_2^2 \overbrace{\varphi_{2n}'(l_2)}^{0} N(l_2) - \rho(-l_1) a_1^2 \varphi_{1n}'(-l_1) \overbrace{N(-l_1)}^{0} + \\ + N(0) \overbrace{(a_1^2 \varphi_{1n}'(0) - a_2^2 \varphi_{2n}'(0))}^{0} = 0. \end{aligned} \qquad (45)$$

Подставляем найденные значения в (43)

$$\theta'(t) + \beta_n^2 \theta(t) = F(t). \qquad (46)$$

2.6 Нахождение временной составляющей решения

Формула (46) является дифференциальным уравнением относительно функции $\theta_n(t)$. Начальное условие следует из соответствующего однородного начального условия для $N(x,t)$:

$$\begin{cases} \theta_n'(t) + \beta_n^2 \theta_n(t) = F(t), \\ \theta_n(0) = 0. \end{cases} \qquad (47)$$

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка, решение которого хорошо известно:

$$\theta_n(t) = A \cdot \frac{\beta_n^2 \sin\omega t - \omega\cos\omega t + \omega e^{-\beta_n^2 t}}{\omega^2 + \beta_n^4}, \text{ где } A = -\omega \int\limits_{-l_1}^{l_2} \rho(x) \varphi_n(x) dx. \qquad (48)$$

2.7 Результат для исходной задачи

Чтобы получить решение первоначальной задачи (1), производим обратную замену: $u(x,t) = N(x,t) + (1 - \cos\omega t)$. Тогда окончательное решение задачи имеет вид

$$u(x,t) = 1 - \cos\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\theta_n(t)}{||\varphi_n||}. \qquad (49)$$

3 Комментарии

- Для того, чтобы провести численный расчет, необходимо решать уравнения для собственных чисел, находить интегралы $\int_{-l_1}^{l_2} \rho\varphi_n dx$ и $||\varphi_n||$. В то время, как интегралы можно найти аналитически, уравнения для β_n приходится решать численными методами.

- Я составил программу на GNU Octave, которая визуализирует решение задачи для заданных параметров (их дал мне А.А. Слепышев). Но на этапе реализации я столкнулся с проблемой больших и малых чисел ($\beta_1 \ll 1$), из-за которых мое решение становится неадекватным.

- Я пробовал приводить параметры к безразмерному виду, но существенно это не повлияло на решение. Как только я выясню β_1, получатся (я надеюсь) хорошие результаты.

- В процессе написания программы я численно проверял ортогональность и полноту (раскладывал единицу в ряд Фурье) собственных функций $\varphi_n(x)$, с этим все было хорошо.

- В численных расчетах мне не понравилось что собственные функции φ и вес ρ могут в противоположных концах отрезка принимать очень большие и очень малые значения (из-за множителя $e^{\pm\mu x}$).