Решение задачи диффузии-конвекции в жидкости с пульсирующим источником

Ефим Пышнограев

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

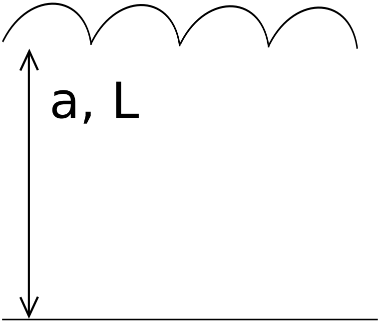
20 мая 2013

Введение

- Диффузия вещества в жидкости
- Какую модель выбрать?

- Простейшая модель

$$u_t = a^2 u_{xx}$$



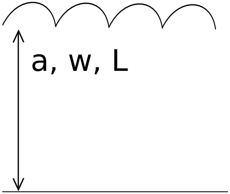
Что можно добавить в модель чтобы сделать ее достовернее?

Введение

Что можно добавить в модель чтобы сделать ее достовернее?

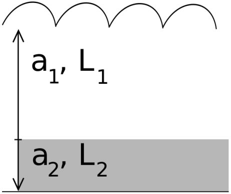
- Добавим конвективное слагаемое

$$u_t = a^2 u_{xx} + w u_x$$

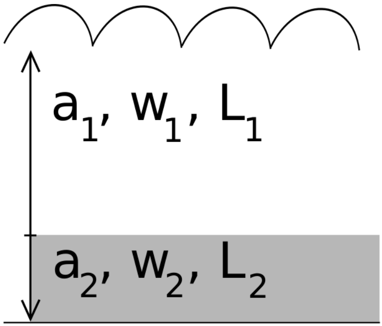


- Сделаем область многослойной

$$u_t = a(x) u_{xx}$$



Остановимся на этих двух уточнениях.



$$u_t = wu_x + a^2 u_{xx},$$

$$u(x,0) = 0,$$

$$\begin{cases} u(-l_1, t) = 1 - \cos\omega t, \\ u_x(l_2, t) = 0, \\ u(-0, t) = u(+0, t), \\ a_1^2 u_x(-0, t) = a_2^2 u_x(+0, t). \end{cases}$$

Возможные подходы

Численный метод

- Применим в большинстве случаев, обычно не требует сложных предварительных выкладок
- Неизвестен общий вид искомой функции
- Часто необходимо много вычислительных ресурсов

Аналитический метод

- Может быть использован не всегда, при решении часто бывают трудности
- Если все получилось, то получаем явную формулу для результата
- Точное решение может использоваться для проверки адекватности численного метода

Этапы решения

Решение задачи будем находить методом конечных интегральных преобразований:

- Переход к однородным граничным условиям
- Разделение переменных
- Составление задачи Штурма–Лиувилля
- Вывод уравнения для собственных чисел
- Нахождение общего вида собственных функций
- Вычисление веса, с которым ортогональны собственные функции
- Проведение интегрального преобразования
- Нахождение временной составляющей решения
- Получение окончательного ответа

Переход к однородным граничным условиям

Производим замену

$$u(x,t) = U(x,t) + (1 - \cos\omega t).$$

В результате приходим к новому уравнению, начальному и граничным условиям

$$U_t(x,t) = wU_x(x,t) + a^2 U_{xx}(x,t) - \omega\sin\omega t,$$

$$U(x,0) = 0,$$

$$\begin{cases} U(-l_1,t) = 0, \\ U_x(l_2,t) = 0, \\ U(-0,t) = U(+0,t), \\ a_1^2 U_x(-0,t) = a_2^2 U_x(+0,t). \end{cases}$$

Разделение переменных

Пусть $U(x,t) = \theta(t)\varphi(x)$, тогда

$$\frac{\theta'}{\theta} = \frac{a^2\varphi'' + w\varphi'}{\varphi} = s.$$

Константа s не может быть положительной, в противном случае функция $\theta(t)$ будет не ограничена. Ввиду этого, можно принять

$$s = -\lambda^2.$$

Составление задачи Штурма–Лиувилля

Получаем задачу Штурма–Лиувилля для $\varphi(x)$:

$$a^2\varphi''(x) + w\varphi'(x) + \lambda^2\varphi(x) = 0$$

с внешними граничными условиями и условиями сопряжения:

$$\begin{cases} \varphi_1(-l_1) = 0, \\ \varphi_2'(l_2) = 0, \\ \varphi_1(0) = \varphi_2(0), \\ a_1^2\varphi_1'(0) = a_2^2\varphi_2'(0). \end{cases}$$

Составление задачи Штурма–Лиувилля

Для того чтобы исключить из уравнения слагаемое $w\varphi'(x)$, производим замену

$$\varphi(x) = \psi(x)e^{-\mu x}, \text{ где } \mu = \mu(x) = \frac{w(x)}{2a(x)^2}.$$

В итоге получаем новое уравнение

$$a^2\psi''(x) + (\lambda^2 - \mu^2 a^2)\psi(x) = 0$$

и новые граничные условия

$$\begin{cases} \psi_1(-l_1) = 0, \\ \psi_2'(l_2) - \mu\psi_2(l_2) = 0, \\ \psi_1(0) = \psi_2(0), \\ a_1^2(\psi_1'(0) - \mu\psi_1(0)) = a_2^2(\psi_2'(0) - \mu\psi_2(0)). \end{cases}$$

Уравнение для собственных чисел

Пусть, для определенности, $\mu_1 a_1 < \mu_2 a_2$.
Уравнение имеет разный вид на трех промежутках:

1. $0 \le \lambda \le \mu_1 a_1$
2. $\mu_1 a_1 < \lambda \le \mu_2 a_2$
3. $\mu_1 a_1 < \lambda < \infty$

Уравнение для собственных чисел

Рассмотрим отрезок $0 \le \lambda \le \mu_1 a_1$. Уравнение имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&-\operatorname{sh}(\gamma_1(\lambda)l_1)((a_2^2\mu_2 - a_1^2\mu_1)(\gamma_2(\lambda)\operatorname{ch}(\gamma_2(\lambda)l_2) - \operatorname{sh}(\gamma_2(\lambda)l_2)\mu_2) + a_2^2\gamma_2(\lambda) - \\
&-(\gamma_2(\lambda)\operatorname{sh}(\gamma_2(\lambda)l_2) - \operatorname{ch}(\gamma_2(\lambda)l_2)\mu_2)) - a_1^2\gamma_1(\lambda)\operatorname{ch}(\gamma_1(\lambda)l_1)\times \\
&\times(\gamma_2(\lambda)\operatorname{ch}(\gamma_2(\lambda)l_2) - \operatorname{sh}(\gamma_2(\lambda)l_2)\mu_2) = 0.
\end{aligned}
$$

Где

$$\gamma_1 = \gamma_1(\lambda) = \sqrt{-\frac{\lambda^2}{a_1^2} + \mu_1},$$

$$\gamma_2 = \gamma_2(\lambda) = \sqrt{-\frac{\lambda^2}{a_2^2} + \mu_2}.$$

Два оставшихся промежутка рассматриваются аналогично.

Общий вид собственных функций

Аналогично собственным числам, в каждом их трех промежутков для λ, собственные функции будут иметь разный вид.

1. $0 \leq \lambda \leq \mu_1 a_1$
2. $\mu_1 a_1 < \lambda \leq \mu_2 a_2$
3. $\mu_1 a_1 < \lambda < \infty$

Общий вид собственных функций

В первом промежутке $0 \le \lambda \le \mu_1 a_1$ собственные функции равны

$$\psi_1(x) = A_1 \operatorname{ch} \gamma_1 x + B_1 \operatorname{sh} \gamma_1 x,$$
$$\psi_2(x) = A_2 \operatorname{ch} \gamma_2 x + B_2 \operatorname{sh} \gamma_2 x.$$

Где

$$\gamma_1 = \gamma_1(\lambda) = \sqrt{-\frac{\lambda^2}{a_1^2} + \mu_1},$$
$$\gamma_2 = \gamma_2(\lambda) = \sqrt{-\frac{\lambda^2}{a_2^2} + \mu_2},$$
$$A_i, B_i = const.$$

Общий вид собственных функций

Во втором и третем промежутке соответственно собственные функции имеют следующий вид:

$$\psi_1(x) = A_1' \cos \gamma_1 x + B_1' \sin \gamma_1 x, \qquad \psi_1(x) = A_1'' \cos \gamma_1 x + B_1'' \sin \gamma_1 x,$$

$$\psi_2(x) = A_2' \operatorname{ch} \gamma_2 x + B_2' \operatorname{sh} \gamma_2 x, \qquad \psi_2(x) = A_2'' \cos \gamma_2 x + B_2'' \sin \gamma_2 x,$$

$$\gamma_1 = \gamma_1(\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda^2}{a_1^2} - \mu_1}, \qquad \gamma_1 = \gamma_1(\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda^2}{a_1^2} - \mu_1},$$

$$\gamma_2 = \gamma_2(\lambda) = \sqrt{-\frac{\lambda^2}{a_2^2} + \mu_2}. \qquad \gamma_2 = \gamma_2(\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda^2}{a_2^2} - \mu_2}.$$

Нахождение веса

Собственные функции ψ_n и ψ_m $(n \neq m)$ ортогональны с весом $\rho_\psi(x)$. Искомый вес находится из уравнения:

$$\int_{-l_1}^{l_2} \rho_\psi(x)\psi_n(x)\psi_m(x)dx = 0.$$

Можно показать что равенство выполняется при $\rho(x) \equiv 1$. Делая обратную замену для $\varphi = \psi e^{-\mu x}$, находим весовую функцию ρ_φ

$$\rho_\varphi(x) = \rho(x) = e^{2\mu x}.$$

Проведение интегрального преобразования

Решение вспомогательной задачи представим в виде

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\theta_n(t)}{||\varphi_n||}.$$

Где

$$\theta_n(t) = \int_{-l_1}^{l_2} \rho U(x,t)\varphi_n(x)dx.$$

Проведение интегрального преобразования

Для нахождения $\theta_n(t)$ необходимо провести интегральное преобразование обеих частей уравнения для $U(x,t)$:

$$\int\limits_{-l_1}^{l_2} \rho U_t \varphi_n dx = \overbrace{\int\limits_{-l_1}^{l_2} \rho w U_x \varphi_n dx}^{I_1} + \overbrace{\int\limits_{-l_1}^{l_2} \rho a^2 U_{xx} \varphi_n dx}^{I_2} + \overbrace{\left(-\omega \sin \omega t \int\limits_{-l_1}^{l_2} \rho \varphi_n dx \right)}^{F(t)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \theta_n'(t) = I_1 + I_2 + F(t).$$

После подстановок и преобразований, получим:

$$\theta_n'(t) + \lambda_n^2 \theta_n(t) = F(t).$$

Нахождение временной составляющей решения

Получено уравнение для $\theta_n(t)$:

$$\begin{cases} \theta_n'(t) + \lambda_n^2 \theta_n(t) = F(t), \\ \theta_n(0) = 0. \end{cases}$$

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка, решение которого хорошо известно:

$$\theta_n(t) = A \cdot \frac{\lambda_n^2 \sin \omega t - \omega \cos \omega t + \omega e^{-\lambda_n^2 t}}{\omega^2 + \lambda_n^4}, \text{ где } A = -\omega \int\limits_{-l_1}^{l_2} \rho(x) \varphi_n(x) dx.$$

Выражение для результата

Производим обратную замену: $u(x,t) = U(x,t) + (1 - \cos\omega t)$. Тогда окончательное решение задачи имеет вид:

$$u(x,t) = 1 - \cos\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\theta_n(t)}{||\varphi_n||}.$$

Сложность вычислений

Выберем следующие значения параметров:

$$l_1 = 1,\ l_2 = 19,\ a_1^2 = 10^{-3},\ a_2^2 = 10^{-4},\ w_1 = 7.8 \cdot 10^{-4},\ w_2 = w_1 \cdot 0.8,$$

корнем первого уравнения для собственных чисел будет являться $\lambda = 8 \cdot 10^{-29}$. Для его отыскания использовалась система компьютерной алгебры Pari/GP, которая позволяет работать с числами произвольной точности.

Сложность вычислений

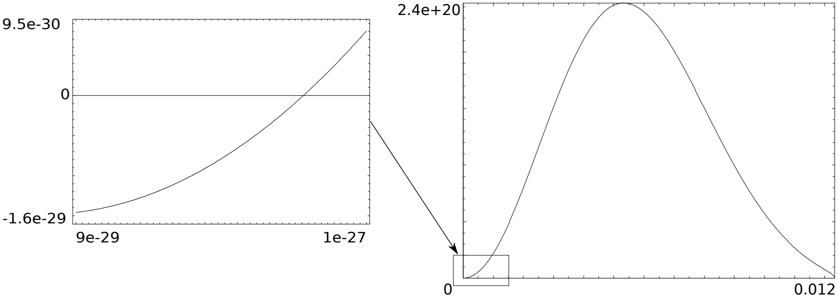
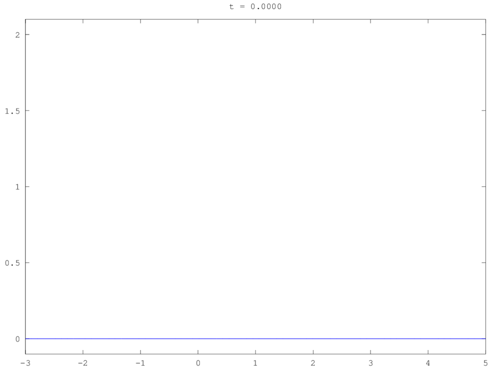


Рис.: Левая часть трансцендентного уравнения относительно λ

Анимация процесса

Выберем значения параметров следующим образом:

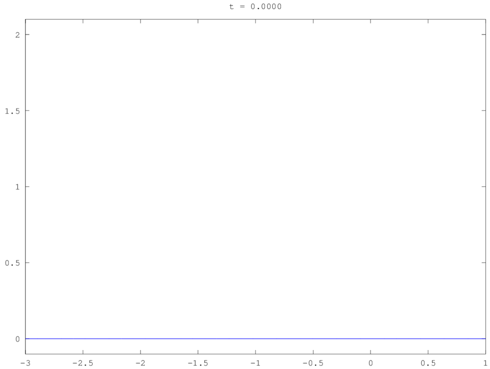
$$l_1 = 3,\ l_2 = 5,\ a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ w_1 = 0.1,\ w_2 = w_1 \cdot 0.8.$$



Анимация процесса

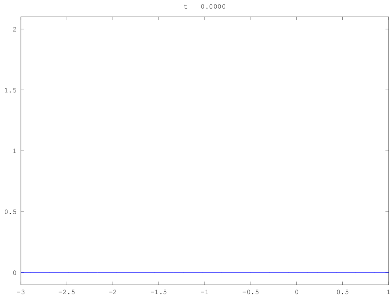
Выберем значения параметров следующим образом:

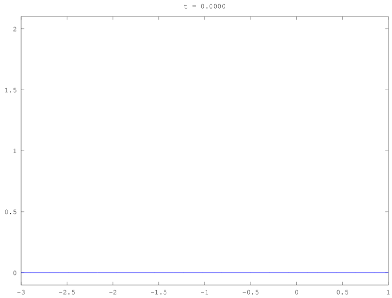
$$l_1 = 3,\ l_2 = 1,\ a_1 = 4,\ a_2 = 1,\ w_1 = 0.05,\ w_2 = w_1 \cdot 0.8.$$



Анимация процесса

Сравним процесс с конвекцией (слева) и без конвекции (справа):





Заключение

- Получено аналитическое решение задачи конвективной диффузии. Решение разбито на этапы и структурировано.
- Рассмотрены трудности, которые могут возникнуть в процессе нахождения собственных значений.
- Показан вид искомой функции на конкретных примерах.
- Указанная схема может применяться в более сложных телах больших размерностей.

Fin

Спасибо за внимание.
Вопросы?