Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики

КУРСОВАЯ РАБОТА СТУДЕНТА 427 ГРУППЫ

Решение задачи диффузии-конвекции в жидкости с пульсирующим источником

Выполнил:
студент 4 курса 427 группы
Е. Ю. Пышнограев

Научный руководитель:
д.ф-м.н., профессор
М. М. Хапаев

Москва, 2013

Аннотация

В данной работе рассматривается процесс конвективной диффузии вещества в неоднородной среде, состоящей из двух слоев с различными физическими и геометрическими параметрами. Показано, как может быть применен метод конечных интегральных преобразований к решению этой задачи. Получен окончательный ответ и выделены основные этапы его вычисления. Приведены возникающие при решении трудности и показаны на конкретном примере. Приведенная схема может быть применена к нахождению решений более сложных процессов в различных телах больших размерностей.

Содержание

1 Введение

При работе с многими процессами диффузионного типа возникает необходимость решения уравнений в частных производных с кусочно-постоянными коэффициентами. На практике часто используется метод разностных схем, который находит численное решение уравнения при заданных начальных и граничных условиях.

Но помимо получения численного решения часто необходимо понимать как ведет себя искомая функция, а численные методы не позволяют получить ее в общем виде. В связи с этим предлагается использовать метод конечных интегральных преобразований. Указанный метод позволяет получить аналитическое решение задачи путем построения полной ортогональной системы собственных функций.

В данной работе рассматриваются особенности нахождения такой системы, ее применение для решения исходной задачи и возникающие при этом трудности.

2 Постановка задачи

В данной работе решается задача диффузии-конвекции для одномерной конечной двухслойной области, которая схематически показана на Рис. 1. Для удобства граница раздела слоев помещена в начало координат.

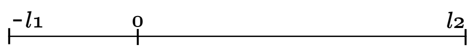

Рис. 1: Рассматриваемый отрезок

Математическая постановка задачи состоит в следующем: требуется решить уравнение в частных производных

$$u_t = wu_x + a^2 u_{xx} \tag{1}$$

с однородным начальным условием

$$u(x, 0) = 0 \tag{2}$$

а также внешними и общими граничными условиями

$$\begin{cases} u(-l_1, t) = 1 - \cos \omega t, \\ u_x(l_2, t) = 0, \\ u(-0, t) = u(+0, t), \\ a_1^2 u_x(-0, t) = a_2^2 u_x(+0, t), \end{cases} \tag{3}$$

где $a(x)$, $w(x)$ — кусочно-постоянные коэффициенты диффузии и скорости осаждения соответственно:

$$a = a(x) = \begin{cases} a_1 \text{ при } x \in [-l_1; 0), \\ a_2 \text{ при } x \in [0; l_2], \end{cases} \tag{4}$$

$$w = w(x) = \begin{cases} w_1 \text{ при } x \in [-l_1; 0), \\ w_2 \text{ при } x \in [0; l_2]. \end{cases} \tag{5}$$

3 Основная часть

3.1 Переход к однородным граничным условиям

Для перехода к однородным граничным условиям производим замену

$$u(x,t) = U(x,t) + (1 - \cos\omega t). \tag{6}$$

В результате приходим к новому уравнению, начальному и граничным условиям

$$U_t(x,t) = wU_x(x,t) + a^2 U_{xx}(x,t) - \omega \sin\omega t, \tag{7}$$

$$U(x,0) = 0, \tag{8}$$

$$\begin{cases} U(-l_1,t) = 0, \\ U_x(l_2,t) = 0, \\ U(-0,t) = U(+0,t), \\ a_1^2 U_x(-0,t) = a_2^2 U_x(+0,t). \end{cases} \tag{9}$$

3.2 Разделение переменных

Пусть $U(x,t) = \theta(t)\varphi(x)$, тогда

$$\frac{\theta'}{\theta} = \frac{a^2\varphi'' + w\varphi'}{\varphi} = s. \tag{10}$$

Константа s не может быть положительной, в противном случае $\lim\limits_{t\to\infty} \theta(t) \neq 0$, что противоречит физическому смыслу задачи. Ввиду этого, можно принять

$$s = -\lambda^2. \tag{11}$$

3.3 Задача Штурма–Лиувилля

3.3.1 Исключение конвективного слагаемого

Из (10) и (11) следует задача Штурма–Лиувилля для $\varphi(x)$:

$$a^2\varphi''(x) + w\varphi'(x) + \lambda^2\varphi(x) = 0 \tag{12}$$

с внешними граничными условиями и условиями сопряжения:

$$\begin{cases} \varphi_1(-l_1) = 0, \\ \varphi_2'(l_2) = 0, \\ \varphi_1(0) = \varphi_2(0), \\ a_1^2\varphi_1'(0) = a_2^2\varphi_2'(0). \end{cases} \tag{13}$$

Здесь

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) \text{ при } x \in [-l_1; 0), \\ \varphi_2(x) \text{ при } x \in [0; l_2]. \end{cases} \tag{14}$$

Для того чтобы исключить из уравнения слагаемое $w\varphi'(x)$, производим замену

$$\varphi(x) = \psi(x)e^{-\mu x}, \text{ где } \mu = \mu(x) = \begin{cases} \mu_1 = \dfrac{w_1}{2a_1^2} \text{ при } x \in [-l_1; 0), \\ \mu_2 = \dfrac{w_2}{2a_2^2} \text{ при } x \in [0; l_2]. \end{cases} \tag{15}$$

В итоге получаем новое уравнение

$$a^2\psi''(x) + (\lambda^2 - \mu^2 a^2)\psi(x) = 0 \tag{16}$$

и новые граничные условия

$$\begin{cases} \psi_1(-l_1) = 0, \\ \psi_2'(l_2) - \mu\psi_2(l_2) = 0, \\ \psi_1(0) = \psi_2(0), \\ a_1^2(\psi_1'(0) - \mu\psi_1(0)) = a_2^2(\psi_2'(0) - \mu\psi_2(0)). \end{cases} \tag{17}$$

Пусть для определенности $\mu_1 \leq \mu_2$. Тогда для нахождения собственных чисел λ необходимо рассмотреть три отрезка. Собственным числам из разных отрезков будет соответствовать разный вид собственных функций

1. $0 \leq \lambda \leq \mu_1 a_1$,
2. $\mu_1 a_1 < \lambda \leq \mu_2 a_2$,
3. $\mu_2 a_2 < \lambda < \infty$.

3.3.2 Нахождение собственных чисел и собственных функций

1. $0 \leq \lambda \leq \mu_1 a_1$. Собственные функции ψ будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= A_1 \operatorname{ch}\gamma_1 x + B_1 \operatorname{sh}\gamma_1 x, \\ \psi_2(x) &= A_2 \operatorname{ch}\gamma_2 x + B_2 \operatorname{sh}\gamma_2 x. \end{aligned} \tag{18}$$

Где

$$\begin{aligned} \gamma_1 = \gamma_1(\lambda) &= \sqrt{-\frac{\lambda^2}{a_1^2} + \mu_1}, \\ \gamma_2 = \gamma_2(\lambda) &= \sqrt{-\frac{\lambda^2}{a_2^2} + \mu_2}. \end{aligned} \tag{19}$$

Константы A_1, A_2, B_1, B_2 определяем из граничных условий. Используя граничные условия, получим:

$$\begin{cases} A_1 \operatorname{ch}\gamma_1 l_1 - B_1 \operatorname{sh}\gamma_1 l_1 = 0, \\ A_2(\gamma_2 \operatorname{sh}\gamma_2 l_2 - \mu_2 \operatorname{ch}\gamma_2 l_2) + B_2(\gamma_2 \operatorname{ch}\gamma_2 l_2 - \mu_2 \operatorname{sh}\gamma_2 l_2) = 0, \\ A_1 = A_2, \\ A_1(-\mu_1 a_1^2) + B_1(\gamma_1 a_1^2) = A_2(-\mu_2 a_2^2) + B_2(\gamma_2 a_2^2). \end{cases} \tag{20}$$

Чтобы найти ненулевые коэффициенты A_i, B_i, необходимо, чтобы определитель системы уравнений (20) относительно A_i, B_i был равен нулю. В результате получим уравнение для λ:

$$\det\begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\gamma_1(\lambda)l_1) & 0 & -\operatorname{sh}(\gamma_1(\lambda)l_1) & 0 \\ 0 & \gamma_2(\lambda)\operatorname{sh}(\gamma_2(\lambda)l_2)-\operatorname{ch}(\gamma_2(\lambda)l_2)\mu_2 & 0 & \gamma_2(\lambda)\operatorname{ch}(\gamma_2(\lambda)l_2)-\operatorname{sh}(\gamma_2(\lambda)l_2)\mu_2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -a_1^2\mu_1 & a_2^2\mu_2 & a_1^2\gamma_1(\lambda) & -a_2^2\gamma_2(\lambda) \end{pmatrix} = 0, \quad (21)$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} &-\operatorname{sh}(\gamma_1(\lambda)l_1)((a_2^2\mu_2 - a_1^2\mu_1)(\gamma_2(\lambda)\operatorname{ch}(\gamma_2(\lambda)l_2) - \operatorname{sh}(\gamma_2(\lambda)l_2)\mu_2) + a_2^2\gamma_2(\lambda)- \\ &-(\gamma_2(\lambda)\operatorname{sh}(\gamma_2(\lambda)l_2) - \operatorname{ch}(\gamma_2(\lambda)l_2)\mu_2)) - a_1^2\gamma_1(\lambda)\operatorname{ch}(\gamma_1(\lambda)l_1)\times \\ &\times(\gamma_2(\lambda)\operatorname{ch}(\gamma_2(\lambda)l_2) - \operatorname{sh}(\gamma_2(\lambda)l_2)\mu_2) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

После определения собственных чисел, из системы (20) находим коэффициенты A_i, B_i

$$\begin{aligned} &A_1 = A_2 = \operatorname{sh}\gamma_1 l_1, \\ &B_1 = \operatorname{ch}\gamma_1 l_1, \\ &B_2 = \frac{\operatorname{sh}(\gamma_1 l_1)(-\mu_1 a_1^2 + \mu_2 a_2^2) + \operatorname{ch}(\gamma_1 l_1)\gamma_1 a_1^2}{\gamma_2 a_2^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Таким образом, найден набор собственных функций (18), соответствующий отрезку $0 \le \lambda \le \mu_1 a_1$.

2. $\mu_1 a_1 < \lambda \le \mu_2 a_2$. Аналогичным образом определяем собственные числа и функции для случая $\mu_1 a_1 < \lambda \le \mu_2 a_2$:

$$\begin{aligned} &\psi_1(x) = A_1\cos\gamma_1 x + B_1\sin\gamma_1 x, \\ &\psi_2(x) = A_2\operatorname{ch}\gamma_2 x + B_2\operatorname{sh}\gamma_2 x, \\ &\gamma_1 = \gamma_1(\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda^2}{a_1^2} - \mu_1}, \\ &\gamma_2 = \gamma_2(\lambda) = \sqrt{-\frac{\lambda^2}{a_2^2} + \mu_2}. \end{aligned} \quad (24)$$

$$\det\begin{pmatrix} \cos(\gamma_1(\lambda)l_1) & 0 & -\sin(\gamma_1(\lambda)l_1) & 0 \\ 0 & \gamma_2(\lambda)\operatorname{sh}(\gamma_2(\lambda)l_2)-\operatorname{ch}(\gamma_2(\lambda)l_2)\mu_2 & 0 & \gamma_2(\lambda)\operatorname{ch}(\gamma_2(\lambda)l_2)-\operatorname{sh}(\gamma_2(\lambda)l_2)\mu_2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -a_1^2\mu_1 & a_2^2\mu_2 & a_1^2\gamma_1(\lambda) & -a_2^2\gamma_2(\lambda) \end{pmatrix} = 0. \quad (25)$$

$$\begin{aligned} &-\sin(\gamma_1(\lambda)l_1)((a_2^2\mu_2 - a_1^2\mu_1)(\gamma_2(\lambda)\operatorname{ch}(\gamma_2(\lambda)l_2) - \operatorname{sh}(\gamma_2(\lambda)l_2)\mu_2) + a_2^2\gamma_2(\lambda)- \\ &-(\gamma_2(\lambda)\operatorname{sh}(\gamma_2(\lambda)l_2) - \operatorname{ch}(\gamma_2(\lambda)l_2)\mu_2)) - a_1^2\gamma_1(\lambda)\cos(\gamma_1(\lambda)l_1)\times \\ &\times(\gamma_2(\lambda)\operatorname{ch}(\gamma_2(\lambda)l_2) - \operatorname{sh}(\gamma_2(\lambda)l_2)\mu_2) = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} &A_1 = A_2 = \sin\gamma_1 l_1, \\ &B_1 = \cos\gamma_1 l_1, \\ &B_2 = \frac{\sin(\gamma_1 l_1)(-\mu_1 a_1^2 + \mu_2 a_2^2) + \cos(\gamma_1 l_1)\gamma_1 a_1^2}{\gamma_2 a_2^2}. \end{aligned} \quad (27)$$

3. $\mu_1 a_1 < \lambda < \infty$. Собственные функции, уравнения для собственных значений, постоянные A_i, B_i имеют вид:

$$\begin{aligned} &\psi_1(x) = A_1 \cos\gamma_1 x + B_1 \sin\gamma_1 x, \\ &\psi_2(x) = A_2 \cos\gamma_2 x + B_2 \sin\gamma_2 x, \\ &\gamma_1 = \gamma_1(\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda^2}{a_1^2} - \mu_1}, \\ &\gamma_2 = \gamma_2(\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda^2}{a_2^2} - \mu_2}. \end{aligned} \tag{28}$$

$$\det \begin{pmatrix} \cos(\gamma_1(\lambda) l_1) & 0 & -\sin(\gamma_1(\lambda) l_1) & 0 \\ 0 & -\gamma_2(\lambda)\sin(\gamma_2(\lambda) l_2) - \cos(\gamma_2(\lambda) l_2)\mu_2 & 0 & \gamma_2(\lambda)\cos(\gamma_2(\lambda) l_2) - \sin(\gamma_2(\lambda) l_2)\mu_2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -a_1^2\mu_1 & a_2^2\mu_2 & a_1^2\gamma_1(\lambda) & -a_2^2\gamma_2(\lambda) \end{pmatrix} = 0. \tag{29}$$

$$\begin{aligned} &-\sin(\gamma_1(\lambda) l_1)((a_2^2\mu_2 - a_1^2\mu_1)(\gamma_2(\lambda)\cos(\gamma_2(\lambda) l_2) - \sin(\gamma_2(\lambda) l_2)\mu_2) + \\ &+ a_2^2\gamma_2(\lambda)(-\cos(\gamma_2(\lambda) l_2)\mu_2 - \gamma_2(\lambda)\sin(\gamma_2(\lambda) l_2))) - \\ &- a_1^2\gamma_1(\lambda)\cos(\gamma_1(\lambda) l_1)(\gamma_2(\lambda)\cos(\gamma_2(\lambda) l_2) - \sin(\gamma_2(\lambda) l_2)\mu_2) = 0. \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} &A_1 = A_2 = \sin\gamma_1 l_1, \\ &B_1 = \cos\gamma_1 l_1, \\ &B_2 = \frac{\sin(\gamma_1 l_1)(-\mu_1 a_1^2 + \mu_2 a_2^2) + \cos(\gamma_1 l_1)\gamma_1 a_1^2}{\gamma_2 a_2^2}. \end{aligned} \tag{31}$$

3.4 Ортогональность собственных функций

Собственные функции (18), (24), (28), как решения задачи Штурма–Лиувилля ортогональны с весом $\rho_\psi = \rho_\psi(x)$. Покажем, что $\rho_\psi = 1$, проделав следующие преобразования: Пусть $n \neq m$

$$\begin{cases} a^2\psi_n'' + (\lambda_n^2 - \mu^2 a^2)\psi_n = 0, \\ a^2\psi_m'' + (\lambda_m^2 - \mu^2 a^2)\psi_m = 0. \end{cases} \tag{32}$$

Первое уравнение (32) умножим на ψ_m и проинтегрируем на отрезке $[-l_1; l_2]$. Аналогично, второе уравнение умножим на ψ_n и проинтегрируем на том же отрезке

$$\begin{cases} \int\limits_{-l_1}^{l_2} a^2\psi_n''\psi_m dx = -\lambda_n^2 \int\limits_{-l_1}^{l_2} \psi_n\psi_m dx + \int\limits_{-l_1}^{l_2} a^2\mu^2\psi_n\psi_m dx, \\ \int\limits_{-l_1}^{l_2} a^2\psi_m''\psi_n dx = -\lambda_m^2 \int\limits_{-l_1}^{l_2} \psi_n\psi_m dx + \int\limits_{-l_1}^{l_2} a^2\mu^2\psi_n\psi_m dx. \end{cases} \tag{33}$$

Вычитая из первого уравнения (33) второе, получим

$$(\lambda_m^2 - \lambda_n^2) \int\limits_{-l_1}^{l_2} \psi_n\psi_m dx = \int\limits_{-l_1}^{l_2} a^2\psi_n''\psi_m dx - \int\limits_{-l_1}^{l_2} a^2\psi_m''\psi_n dx = I_1 - I_2. \tag{34}$$

Дважды интегрируя I_1 по частям, имеем

$$I_1 = \int\limits_{-l_1}^{l_2} a^2\psi_m d\psi_n' = \overbrace{a^2\psi_m\psi_n'\Big|_{-l_1}^{l_2}}^{P} - \overbrace{a^2\psi_n\psi_m'\Big|_{-l_1}^{l_2}}^{Q} + I_2 = P - Q + I_2. \tag{35}$$

$$I_1 - I_2 = P - Q. \tag{36}$$

Учитывая граничные условия для ψ_n, ψ_m, найдем P:

$$\begin{aligned} P &= a_2^2 \overbrace{\psi_{2n}'(l_2)}^{\mu\psi_{2n}(l_2)} \psi_{2m}(l_2) - a_2^2\psi_{2n}'(0)\psi_{2m}(0) + a_1^2\psi_{1n}'(0)\psi_{1m}(0) - a_1^2\psi_{1n}'(-l_1)\overbrace{\psi_{1m}(-l_1)}^{0} = \\ &= \overbrace{a_2^2\mu\psi_{2n}(l_2)\psi_{2m}(l_2)}^{A} + \psi_{1m}(0)(a_1^2\psi_{1n}'(0) - a_2^2\psi_{2n}'(0)) = \\ &= A + \psi_{1m}(0)(\mu a_2^2\psi_{2n}(0) - \mu a_1^2\psi_{1n}(0)) = A + \mu\psi_{1m}(0)\psi_{1n}(0)(a_2^2 - a_1^2). \end{aligned} \tag{37}$$

Из соображений симметрии $Q = P$, следовательно из (36) $I_1 = I_2$. Из (34) и предположения, что $n \neq m$ можно заключить, что

$$\int\limits_{-l_1}^{l_2} \rho_\psi \psi_n(x)\psi_m(x)dx = 0 \tag{38}$$

Делая обратную замену для $\varphi = \psi e^{-\mu x}$, находим весовую функцию ρ_φ

$$\int\limits_{-l_1}^{l_2} \varphi_n(x)\varphi_m(x)e^{2\mu x}dx = \int\limits_{-l_1}^{l_2} \psi_n(x)\psi_m(x)dx = 0 \Rightarrow \rho_\varphi(x) = \rho(x) = e^{2\mu x}. \tag{39}$$

3.5 Интегральное преобразование

Решение вспомогательной задачи (7)-(9) имеет вид

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\theta_n(t)}{||\varphi_n||}. \tag{40}$$

Где

$$\theta_n(t) = \int\limits_{-l_1}^{l_2} \rho U(x,t)\varphi_n(x)dx. \tag{41}$$

Для нахождения $\theta_n(t)$ необходимо провести интегральное преобразование обеих частей уравнения (7) с использованием формулы (41):

$$\begin{aligned} &\int\limits_{-l_1}^{l_2} \rho U_t\varphi_n dx = \overbrace{\int\limits_{-l_1}^{l_2} \rho w U_x\varphi_n dx}^{I_1} + \overbrace{\int\limits_{-l_1}^{l_2} \rho a^2 U_{xx}\varphi_n dx}^{I_2} + \overbrace{\left(-\omega\sin\omega t\int\limits_{-l_1}^{l_2} \rho\varphi_n dx\right)}^{F(t)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-l_1}^{l_2} \rho U\varphi_n dx = I_1 + I_2 + F(t) \Rightarrow \theta_n'(t) = I_1 + I_2 + F(t). \end{aligned} \tag{42}$$

При вычислении $I_1 + I_2 + F(t)$, принимаем во внимание, что $\rho'(x) = 2\mu\rho(x)$.

$$I_2 = \int\limits_{-l_1}^{l_2} \rho a^2 \varphi_n dU_x = \overbrace{\rho a^2 \varphi_n U_x \Big|_{-l_1}^{l_2}}^{P} - \int\limits_{-l_1}^{l_2} (2\mu\rho\varphi_n + \rho\varphi_n')a^2 U_x dx = P - \overbrace{\int\limits_{-l_1}^{l_2} 2\mu\rho a^2 \varphi_n U_x dx}^{I_1} -$$

$$- \int\limits_{-l_1}^{l_2} \rho a^2 \varphi_n' dU = P - I_1 - \overbrace{\rho a^2 \varphi_n' U \Big|_{-l_1}^{l_2}}^{Q} + \int\limits_{-l_1}^{l_2} a^2(2\mu\rho\varphi_n' + \rho\varphi_n'')U dx = P - Q - I_1 +$$

$$+ \int\limits_{-l_1}^{l_2} \overbrace{(w\varphi_n' + a^2\varphi_n'')}^{-\lambda_n^2\varphi_n} \rho U dx = P - Q - I_1 - \lambda_n^2\theta(t) \Rightarrow I_1 + I_2 + F(t) = P - Q - \lambda_n^2\theta(t) +$$

$$+ F(t) \Rightarrow \theta'(t) + \lambda_n^2\theta(t) = P - Q + F(t). \tag{43}$$

Используя граничные условия для φ_n (13) и для $U(x,t)$ (9) определяем $P = Q = 0$:

$$\begin{aligned} P = \rho(l_2)a_2^2\varphi_{2n}(l_2)\overbrace{U_x(l_2)}^{0} - \rho(-l_1)a_1^2\overbrace{\varphi_{1n}(-l_1)}^{0}U_x(-l_1) + \\ + \varphi_{1n}(0)\overbrace{(a_1^2U_x(-0) - a_2^2U_x(+0))}^{0} = 0. \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned} Q = \rho(l_2)a_2^2\overbrace{\varphi_{2n}'(l_2)}^{0}U(l_2) - \rho(-l_1)a_1^2\varphi_{1n}'(-l_1)\overbrace{U(-l_1)}^{0} + \\ + U(0)\overbrace{(a_1^2\varphi_{1n}'(0) - a_2^2\varphi_{2n}'(0))}^{0} = 0. \end{aligned} \tag{45}$$

Подставляем найденные значения в (43)

$$\theta'(t) + \lambda_n^2\theta_n(t) = F(t). \tag{46}$$

3.6 Нахождение временной составляющей решения

Формула (46) является дифференциальным уравнением относительно функции $\theta_n(t)$. Начальное условие следует из соответствующего однородного начального условия для $U(x,t)$:

$$\begin{cases} \theta_n'(t) + \lambda_n^2\theta_n(t) = F(t), \\ \theta_n(0) = 0. \end{cases} \tag{47}$$

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка, решение которого хорошо известно:

$$\theta_n(t) = A \cdot \frac{\lambda_n^2 \sin\omega t - \omega\cos\omega t + \omega e^{-\lambda_n^2 t}}{\omega^2 + \lambda_n^4}, \text{ где } A = -\omega \int\limits_{-l_1}^{l_2} \rho(x)\varphi_n(x)dx. \tag{48}$$

3.7 Результат для исходной задачи

Чтобы получить решение первоначальной задачи (1), производим обратную замену: $u(x,t) = U(x,t) + (1 - \cos\omega t)$. Тогда окончательное решение задачи имеет вид

$$u(x,t) = 1 - \cos\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\theta_n(t)}{||\varphi_n||}. \tag{49}$$

4 Трудность численного решения задачи

Необходимо отметить, что при численном решении трансцендентного уравнения (22) существует опасность потери корней. В этом случае система собственных функций перестанет обладать полнотой, что может привести к недостоверным численным результатам. При этом, вычислительная сложность нахождения корней возрастает при увеличении разброса физических и геометрических параметров.

В качестве примера выберем следующие значения параметров, которые моделируют процесс конвективной диффузии жидкости в океане:

$$l_1 = 1,\ l_2 = 19,\ a_1^2 = 10^{-3},\ a_2^2 = 10^{-4},\ w_1 = 7.8 \cdot 10^{-4},\ w_2 = w_1 \cdot 0.8,$$

корнем уравнения (22) будет являться $\lambda = 8 \cdot 10^{-29}$.

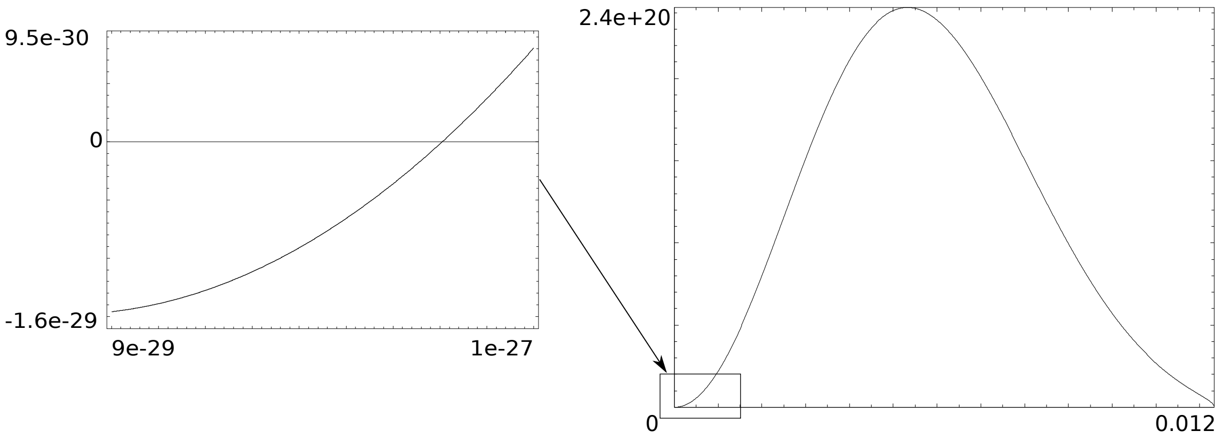

Рис. 2: Левая часть трансцендентного уравнения (22) относительно λ

Отметим, что стандартной машинной точности (64–битные числа с плавающей точкой) оказалось недостаточно для нахождения этого корня. Ввиду этого, для отыскания первого собственного значения использовалась система компьютерной алгебры Pari/GP, которая позволяет работать с числами произвольной точности.

5 Заключение

Приведенная схема позволяет получать решение задачи методом конечных интегральных преобразований. При этом основная трудность заключается в поиске корней уравнения (22), которые являются собственными числами задачи Штурма–Лиувилля.

Построенная полная, ортогональная система собственных функций может быть использована в качестве ядер интегральных преобразований для более сложных: двумерных и трехмерных задач тепло-массопереноса в различных телах.

Список литературы

1. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы теории теплопроводности.–М.: Высшая школа, 1982.–327с.

2. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности.–М.: Высшая школа, 1985.–480с.

3. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. –М.: Мир, 1985.–384с.