

1 Постановка задачи

В данной работе решается задача диффузии-конвекции для одномерной конечной двухслойной области, которая схематически показана на Рис. 1. Для удобства граница раздела слоев помещена в начало координат.

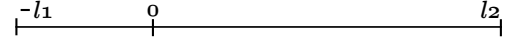


Рис. 1: Двухслойный стержень

Математическая постановка задачи состоит в следующем: требуется решить уравнение в частных производных

$$u_t = wu_x + a^2u_{xx} \quad (1)$$

с однородным начальным условием

$$u(x, 0) = 0 \quad (2)$$

а также внешними и общими граничными условиями

$$\begin{cases} u(-l_1, t) = 1 - \cos \omega t, \\ u_x(l_2, t) = 0, \\ u(-0, t) = u(+0, t), \\ a_1^2 u_x(-0, t) = a_2^2 u_x(+0, t), \end{cases} \quad (3)$$

где $a(x)$, $w(x)$ — кусочно-постоянные коэффициенты диффузии и скорости осаждения соответственно:

$$a = a(x) = \begin{cases} a_1 & \text{при } x \in [-l_1; 0), \\ a_2 & \text{при } x \in [0; l_2], \end{cases} \quad (4)$$

$$w = w(x) = \begin{cases} w_1 & \text{при } x \in [-l_1; 0), \\ w_2 & \text{при } x \in [0; l_2]. \end{cases} \quad (5)$$

2 Решение

2.1 Переход к однородным граничным условиям

Для перехода к однородным граничным условиям производим замену

$$u(x, t) = U(x, t) + (1 - \cos \omega t). \quad (6)$$

В результате приходим к новому уравнению, начальному и граничным условиям

$$U_t(x, t) = wU_x(x, t) + a^2U_{xx}(x, t) - \omega \sin \omega t, \quad (7)$$

$$U(x, 0) = 0, \quad (8)$$

$$\begin{cases} U(-l_1, t) = 0, \\ U_x(l_2, t) = 0, \\ U(-0, t) = U(+0, t), \\ a_1^2 U_x(-0, t) = a_2^2 U_x(+0, t). \end{cases} \quad (9)$$

2.2 Разделение переменных

Пусть $U(x, t) = \theta(t)\varphi(x)$, тогда

$$\frac{\theta'}{\theta} = \frac{a^2\varphi'' + w\varphi'}{\varphi} = k. \quad (10)$$

Константа k не может быть положительной, в противном случае $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) \neq 0$, что противоречит физическому смыслу задачи. Ввиду этого, можно принять

$$k = -\lambda^2. \quad (11)$$

2.3 Задача Штурма–Лиувилля

2.3.1 Исключение конвективного слагаемого

Из (10) и (11) следует задача Штурма–Лиувилля для $\varphi(x)$:

$$a^2\varphi''(x) + w\varphi'(x) + \lambda^2\varphi(x) = 0 \quad (12)$$

с внешними граничными условиями и условиями сопряжения:

$$\begin{cases} \varphi_1(-l_1) = 0, \\ \varphi_2'(l_2) = 0, \\ \varphi_1(0) = \varphi_2(0), \\ a_1^2\varphi_1'(0) = a_2^2\varphi_2'(0). \end{cases} \quad (13)$$

Здесь

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{при } x \in [-l_1; 0), \\ \varphi_2(x) & \text{при } x \in [0; l_2]. \end{cases} \quad (14)$$

Для того чтобы исключить из уравнения слагаемое $w\varphi'(x)$, производим замену

$$\varphi(x) = \psi(x)e^{-\mu x}, \text{ где } \mu = \mu(x) = \begin{cases} \mu_1 = \frac{w_1}{2a_1^2} & \text{при } x \in [-l_1; 0), \\ \mu_2 = \frac{w_2}{2a_2^2} & \text{при } x \in [0; l_2]. \end{cases} \quad (15)$$

В итоге получаем новое уравнение

$$a^2\psi''(x) + (\lambda^2 - \mu^2 a^2)\psi(x) = 0 \quad (16)$$

и новые граничные условия

$$\begin{cases} \psi_1(-l_1) = 0, \\ \psi_2'(l_2) - \mu\psi_2(l_2) = 0, \\ \psi_1(0) = \psi_2(0), \\ a_1^2(\psi_1'(0) - \mu\psi_1(0)) = a_2^2(\psi_2'(0) - \mu\psi_2(0)). \end{cases} \quad (17)$$

Пусть для определенности $\mu_1 \leq \mu_2$. Тогда для нахождения собственных чисел λ необходимо рассмотреть три отрезка. Собственным числам из разных отрезков будет соответствовать разный вид собственных функций

1. $0 \leq \lambda \leq \mu_1 a_1$,
2. $\mu_1 a_1 < \lambda \leq \mu_2 a_2$,
3. $\mu_2 a_2 < \lambda < \infty$.

2.3.2 Нахождение собственных чисел и собственных функций

1. $0 \leq \lambda \leq \mu_1 a_1$. Собственные функции ψ будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= A_1 \operatorname{ch} \gamma_1 x + B_1 \operatorname{sh} \gamma_1 x, \\ \psi_2(x) &= A_2 \operatorname{ch} \gamma_2 x + B_2 \operatorname{sh} \gamma_2 x. \end{aligned} \quad (18)$$

Где

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \gamma_1(\lambda) = \sqrt{-\frac{\lambda^2}{a_1^2} + \mu_1}, \\ \gamma_2 &= \gamma_2(\lambda) = \sqrt{-\frac{\lambda^2}{a_2^2} + \mu_2}.\end{aligned}\tag{19}$$

Константы A_1, A_2, B_1, B_2 определяем из граничных условий. Используя граничные условия, получим:

$$\begin{cases} A_1 \operatorname{ch} \gamma_1 l_1 - B_1 \operatorname{sh} \gamma_1 l_1 = 0, \\ A_2(\gamma_2 \operatorname{sh} \gamma_2 l_2 - \mu_2 \operatorname{ch} \gamma_2 l_2) + B_2(\gamma_2 \operatorname{ch} \gamma_2 l_2 - \mu_2 \operatorname{sh} \gamma_2 l_2) = 0, \\ A_1 = A_2, \\ A_1(-\mu_1 a_1^2) + B_1(\gamma_1 a_1^2) = A_2(-\mu_2 a_2^2) + B_2(\gamma_2 a_2^2). \end{cases}\tag{20}$$

Чтобы найти ненулевые коэффициенты A_i, B_i , необходимо, чтобы определитель системы уравнений (20) относительно A_i, B_i был равен нулю. В результате получим уравнение для λ :

$$\det \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\gamma_1(\lambda)l_1) & 0 & -\operatorname{sh}(\gamma_1(\lambda)l_1) & 0 \\ 0 & \gamma_2(\lambda) \operatorname{sh}(\gamma_2(\lambda)l_2) - \operatorname{ch}(\gamma_2(\lambda)l_2)\mu_2 & 0 & \gamma_2(\lambda) \operatorname{ch}(\gamma_2(\lambda)l_2) - \operatorname{sh}(\gamma_2(\lambda)l_2)\mu_2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -a_1^2\mu_1 & a_2^2\mu_2 & a_1^2\gamma_1(\lambda) & -a_2^2\gamma_2(\lambda) \end{pmatrix} = 0,\tag{21}$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} & -\operatorname{sh}(\gamma_1(\lambda)l_1)((a_2^2\mu_2 - a_1^2\mu_1)(\gamma_2(\lambda) \operatorname{ch}(\gamma_2(\lambda)l_2) - \operatorname{sh}(\gamma_2(\lambda)l_2)\mu_2) + a_2^2\gamma_2(\lambda) - \\ & - (\gamma_2(\lambda) \operatorname{sh}(\gamma_2(\lambda)l_2) - \operatorname{ch}(\gamma_2(\lambda)l_2)\mu_2)) - a_1^2\gamma_1(\lambda) \operatorname{ch}(\gamma_1(\lambda)l_1) \times \\ & \times (\gamma_2(\lambda) \operatorname{ch}(\gamma_2(\lambda)l_2) - \operatorname{sh}(\gamma_2(\lambda)l_2)\mu_2) = 0. \end{aligned}\tag{22}$$

После определения собственных чисел, из системы (20) находим коэффициенты A_i, B_i

$$\begin{aligned} A_1 &= A_2 = \operatorname{sh} \gamma_1 l_1, \\ B_1 &= \operatorname{ch} \gamma_1 l_1, \\ B_2 &= \frac{\operatorname{sh}(\gamma_1 l_1)(-\mu_1 a_1^2 + \mu_2 a_2^2) + \operatorname{ch}(\gamma_1 l_1)\gamma_1 a_1^2}{\gamma_2 a_2^2}. \end{aligned}\tag{23}$$

Таким образом, найден набор собственных функций (18), соответствующий отрезку $0 \leq \lambda \leq \mu_1 a_1$.

2. $\mu_1 a_1 < \lambda \leq \mu_2 a_2$. Аналогичным образом определяем собственные числа и функции для случая $\mu_1 a_1 < \lambda \leq \mu_2 a_2$:

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= A_1 \cos \gamma_1 x + B_1 \sin \gamma_1 x, \\ \psi_2(x) &= A_2 \operatorname{ch} \gamma_2 x + B_2 \operatorname{sh} \gamma_2 x, \\ \gamma_1 &= \gamma_1(\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda^2}{a_1^2} - \mu_1}, \\ \gamma_2 &= \gamma_2(\lambda) = \sqrt{-\frac{\lambda^2}{a_2^2} + \mu_2}.\end{aligned}\tag{24}$$

$$\det \begin{pmatrix} \cos(\gamma_1(\lambda)l_1) & 0 & -\sin(\gamma_1(\lambda)l_1) & 0 \\ 0 & \gamma_2(\lambda) \operatorname{sh}(\gamma_2(\lambda)l_2) - \operatorname{ch}(\gamma_2(\lambda)l_2)\mu_2 & 0 & \gamma_2(\lambda) \operatorname{ch}(\gamma_2(\lambda)l_2) - \operatorname{sh}(\gamma_2(\lambda)l_2)\mu_2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -a_1^2\mu_1 & a_2^2\mu_2 & a_1^2\gamma_1(\lambda) & -a_2^2\gamma_2(\lambda) \end{pmatrix} = 0.\tag{25}$$

$$\begin{aligned} & -\sin(\gamma_1(\lambda)l_1)((a_2^2\mu_2 - a_1^2\mu_1)(\gamma_2(\lambda) \operatorname{ch}(\gamma_2(\lambda)l_2) - \operatorname{sh}(\gamma_2(\lambda)l_2)\mu_2) + a_2^2\gamma_2(\lambda) - \\ & - (\gamma_2(\lambda) \operatorname{sh}(\gamma_2(\lambda)l_2) - \operatorname{ch}(\gamma_2(\lambda)l_2)\mu_2)) - a_1^2\gamma_1(\lambda) \cos(\gamma_1(\lambda)l_1) \times \\ & \times (\gamma_2(\lambda) \operatorname{ch}(\gamma_2(\lambda)l_2) - \operatorname{sh}(\gamma_2(\lambda)l_2)\mu_2) = 0. \end{aligned}\tag{26}$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= A_2 = \sin \gamma_1 l_1, \\
B_1 &= \cos \gamma_1 l_1, \\
B_2 &= \frac{\sin(\gamma_1 l_1)(-\mu_1 a_1^2 + \mu_2 a_2^2) + \cos(\gamma_1 l_1) \gamma_1 a_1^2}{\gamma_2 a_2^2}.
\end{aligned} \tag{27}$$

3. $\mu_1 a_1 < \lambda < \infty$. Собственные функции, уравнения для собственных значений, постоянные A_i , B_i имеют вид:

$$\begin{aligned}
\psi_1(x) &= A_1 \cos \gamma_1 x + B_1 \sin \gamma_1 x, \\
\psi_2(x) &= A_2 \cos \gamma_2 x + B_2 \sin \gamma_2 x, \\
\gamma_1 &= \gamma_1(\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda^2}{a_1^2} - \mu_1}, \\
\gamma_2 &= \gamma_2(\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda^2}{a_2^2} - \mu_2}.
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\det \begin{pmatrix} \cos(\gamma_1(\lambda) l_1) & 0 & -\sin(\gamma_1(\lambda) l_1) & 0 \\ 0 & -\gamma_2(\lambda) \sin(\gamma_2(\lambda) l_2) - \cos(\gamma_2(\lambda) l_2) \mu_2 & 0 & \gamma_2(\lambda) \cos(\gamma_2(\lambda) l_2) - \sin(\gamma_2(\lambda) l_2) \mu_2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -a_1^2 \mu_1 & a_2^2 \mu_2 & a_1^2 \gamma_1(\lambda) & -a_2^2 \gamma_2(\lambda) \end{pmatrix} = 0. \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
& -\sin(\gamma_1(\lambda) l_1)((a_2^2 \mu_2 - a_1^2 \mu_1)(\gamma_2(\lambda) \cos(\gamma_2(\lambda) l_2) - \sin(\gamma_2(\lambda) l_2) \mu_2) + \\
& + a_2^2 \gamma_2(\lambda)(-\cos(\gamma_2(\lambda) l_2) \mu_2 - \gamma_2(\lambda) \sin(\gamma_2(\lambda) l_2))) - \\
& - a_1^2 \gamma_1(\lambda) \cos(\gamma_1(\lambda) l_1)(\gamma_2(\lambda) \cos(\gamma_2(\lambda) l_2) - \sin(\gamma_2(\lambda) l_2) \mu_2) = 0.
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= A_2 = \sin \gamma_1 l_1, \\
B_1 &= \cos \gamma_1 l_1, \\
B_2 &= \frac{\sin(\gamma_1 l_1)(-\mu_1 a_1^2 + \mu_2 a_2^2) + \cos(\gamma_1 l_1) \gamma_1 a_1^2}{\gamma_2 a_2^2}.
\end{aligned} \tag{31}$$

2.4 Ортогональность собственных функций

Собственные функции (18), (24), (28), как решения задачи Штурма–Лиувилля ортогональны с весом $\rho_\psi = \rho_\psi(x)$. Покажем, что $\rho_\psi = 1$, проделав следующие преобразования: Пусть $n \neq m$

$$\begin{cases} a^2 \psi_n'' + (\lambda_n^2 - \mu^2 a^2) \psi_n = 0, \\ a^2 \psi_m'' + (\lambda_m^2 - \mu^2 a^2) \psi_m = 0. \end{cases} \tag{32}$$

Первое уравнение (32) умножим на ψ_m и проинтегрируем на отрезке $[-l_1; l_2]$. Аналогично, второе уравнение умножим на ψ_n и проинтегрируем на том же отрезке

$$\begin{cases} \int_{-l_1}^{l_2} a^2 \psi_n'' \psi_m dx = -\lambda_n^2 \int_{-l_1}^{l_2} \psi_n \psi_m dx + \int_{-l_1}^{l_2} a^2 \mu^2 \psi_n \psi_m dx, \\ \int_{-l_1}^{l_2} a^2 \psi_m'' \psi_n dx = -\lambda_m^2 \int_{-l_1}^{l_2} \psi_n \psi_m dx + \int_{-l_1}^{l_2} a^2 \mu^2 \psi_n \psi_m dx. \end{cases} \tag{33}$$

Вычитая из первого уравнения (33) второе, получим

$$(\lambda_m^2 - \lambda_n^2) \int_{-l_1}^{l_2} \psi_n \psi_m dx = \int_{-l_1}^{l_2} a^2 \psi_n'' \psi_m dx - \int_{-l_1}^{l_2} a^2 \psi_m'' \psi_n dx = I_1 - I_2. \tag{34}$$

Дважды интегрируя I_1 по частям, имеем

$$I_1 = \int_{-l_1}^{l_2} a^2 \psi_m d\psi'_n = \overbrace{a^2 \psi_m \psi'_n}^P \Big|_{-l_1}^{l_2} - \overbrace{a^2 \psi_n \psi'_m}^Q \Big|_{-l_1}^{l_2} + I_2 = P - Q + I_2. \quad (35)$$

$$I_1 - I_2 = P - Q. \quad (36)$$

Учитывая граничные условия для ψ_n , ψ_m , найдем P :

$$\begin{aligned} P &= a_2^2 \overbrace{\psi'_{2n}(l_2)}^{\mu\psi_{2n}(l_2)} \psi_{2m}(l_2) - a_2^2 \psi'_{2n}(0) \psi_{2m}(0) + a_1^2 \psi'_{1n}(0) \psi_{1m}(0) - a_1^2 \psi'_{1n}(-l_1) \overbrace{\psi_{1m}(-l_1)}^0 = \\ &= \overbrace{a_2^2 \mu \psi_{2n}(l_2) \psi_{2m}(l_2)}^A + \psi_{1m}(0) (a_1^2 \psi'_{1n}(0) - a_2^2 \psi'_{2n}(0)) = \\ &= A + \psi_{1m}(0) (\mu a_2^2 \psi_{2n}(0) - \mu a_1^2 \psi_{1n}(0)) = A + \mu \psi_{1m}(0) \psi_{1n}(0) (a_2^2 - a_1^2). \end{aligned} \quad (37)$$

Из соображений симметрии $Q = P$, следовательно из (36) $I_1 = I_2$. Из (34) и предположения, что $n \neq m$ можно заключить, что

$$\int_{-l_1}^{l_2} \rho_\psi \psi_n(x) \psi_m(x) dx = 0 \quad (38)$$

Делая обратную замену для $\varphi = \psi e^{-\mu x}$, находим весовую функцию ρ_φ

$$\int_{-l_1}^{l_2} \varphi_n(x) \varphi_m(x) e^{2\mu x} dx = \int_{-l_1}^{l_2} \psi_n(x) \psi_m(x) dx = 0 \Rightarrow \rho_\varphi(x) = \rho(x) = e^{2\mu x}. \quad (39)$$

2.5 Интегральное преобразование

Решение вспомогательной задачи (7)-(9) имеет вид

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \theta_n(t)}{\|\varphi_n\|}. \quad (40)$$

Где

$$\theta_n(t) = \int_{-l_1}^{l_2} \rho U(x, t) \varphi_n(x) dx. \quad (41)$$

Для нахождения $\theta_n(t)$ необходимо провести интегральное преобразование обеих частей уравнения (7) с использованием формулы (41):

$$\begin{aligned} \int_{-l_1}^{l_2} \rho U_t \varphi_n dx &= \overbrace{\int_{-l_1}^{l_2} \rho w U_x \varphi_n dx}^{I_1} + \overbrace{\int_{-l_1}^{l_2} \rho a^2 U_{xx} \varphi_n dx}^{I_2} + \overbrace{\left(-\omega \sin \omega t \int_{-l_1}^{l_2} \rho \varphi_n dx \right)}^{F(t)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_{-l_1}^{l_2} \rho U \varphi_n dx = I_1 + I_2 + F(t) \Rightarrow \theta'(t) = I_1 + I_2 + F(t). \end{aligned} \quad (42)$$

При вычислении $I_1 + I_2 + F(t)$, принимаем во внимание, что $\rho'(x) = 2\mu\rho(x)$.

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-l_1}^{l_2} \rho a^2 \varphi_n dU_x = \overbrace{\rho a^2 \varphi_n U_x}^P \Big|_{-l_1}^{l_2} - \int_{-l_1}^{l_2} (2\mu\rho\varphi_n + \rho\varphi_n') a^2 U_x dx = P - \overbrace{\int_{-l_1}^{l_2} 2\mu\rho a^2 \varphi_n U_x dx}^{I_1} - \\
&- \int_{-l_1}^{l_2} \rho a^2 \varphi_n' dU = P - I_1 - \overbrace{\rho a^2 \varphi_n' U}^Q \Big|_{-l_1}^{l_2} + \int_{-l_1}^{l_2} a^2 (2\mu\rho\varphi_n' + \rho\varphi_n'') U dx = P - Q - I_1 + \\
&+ \int_{-l_1}^{l_2} \overbrace{(w\varphi_n' + a^2\varphi_n'')}^{-\lambda_n^2\varphi_n} \rho U dx = P - Q - I_1 - \lambda_n^2\theta(t) \Rightarrow I_1 + I_2 + F(t) = P - Q - \lambda_n^2\theta(t) + \\
&+ F(t) \Rightarrow \theta'(t) + \lambda_n^2\theta(t) = P - Q + F(t).
\end{aligned} \tag{43}$$

Используя граничные условия для φ_n (13) и для $U(x, t)$ (9) определяем $P = Q = 0$:

$$\begin{aligned}
P &= \rho(l_2) a_2^2 \varphi_{2n}(l_2) \overbrace{U_x(l_2)}^0 - \rho(-l_1) a_1^2 \overbrace{\varphi_{1n}(-l_1)}^0 U_x(-l_1) + \\
&+ \varphi_{1n}(0) \overbrace{(a_1^2 U_x(-0) - a_2^2 U_x(+0))}^0 = 0.
\end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}
Q &= \rho(l_2) a_2^2 \overbrace{\varphi_{2n}'(l_2)}^0 U(l_2) - \rho(-l_1) a_1^2 \overbrace{\varphi_{1n}'(-l_1)}^0 \overbrace{U(-l_1)}^0 + \\
&+ U(0) \overbrace{(a_1^2 \varphi_{1n}'(0) - a_2^2 \varphi_{2n}'(0))}^0 = 0.
\end{aligned} \tag{45}$$

Подставляем найденные значения в (43)

$$\theta'(t) + \lambda_n^2\theta(t) = F(t). \tag{46}$$

2.6 Нахождение временной составляющей решения

Формула (46) является дифференциальным уравнением относительно функции $\theta_n(t)$. Начальное условие следует из соответствующего однородного начального условия для $U(x, t)$:

$$\begin{cases} \theta_n'(t) + \lambda_n^2\theta_n(t) = F(t), \\ \theta_n(0) = 0. \end{cases} \tag{47}$$

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка, решение которого хорошо известно:

$$\theta_n(t) = A \cdot \frac{\lambda_n^2 \sin \omega t - \omega \cos \omega t + \omega e^{-\lambda_n^2 t}}{\omega^2 + \lambda_n^4}, \text{ где } A = -\omega \int_{-l_1}^{l_2} \rho(x) \varphi_n(x) dx. \tag{48}$$

2.7 Результат для исходной задачи

Чтобы получить решение первоначальной задачи (1), производим обратную замену: $u(x, t) = U(x, t) + (1 - \cos \omega t)$. Тогда окончательное решение задачи имеет вид

$$u(x, t) = 1 - \cos \omega t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \theta_n(t)}{\|\varphi_n\|}. \tag{49}$$

3 Трудность численного решения задачи

Необходимо отметить, что при численном решении трансцендентного уравнения (22) существует опасность потери корней. В этом случае система собственных функций перестанет обладать полнотой, что может привести к недостоверным численным результатам. При этом, вычислительная сложность нахождения корней возрастает при увеличении разброса физических и геометрических параметров.

В качестве примера выберем следующие значения параметров, которые моделируют процесс конвективной диффузии жидкости в океане:

$$l_1 = 1, \quad l_2 = 19, \quad a_1^2 = 10^{-3}, \quad a_2^2 = 10^{-4}, \quad w_1 = 7.8 \cdot 10^{-4}, \quad w_2 = w_1 \cdot 0.8,$$

корнем уравнения (22) будет являться $\lambda = 8 \cdot 10^{-29}$.

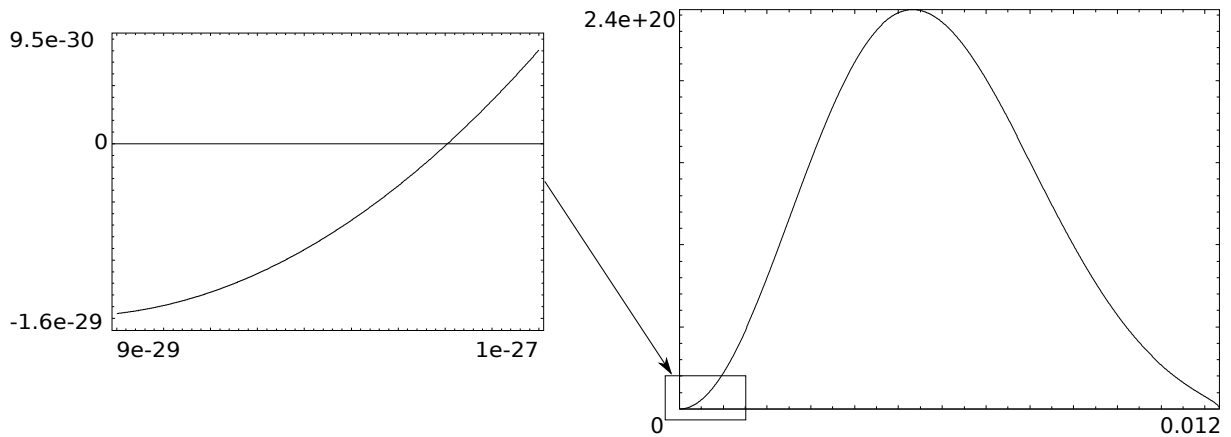


Рис. 2: Левая часть трансцендентного уравнения (22) относительно λ

Отметим, что стандартной машинной точности (64-битные числа с плавающей точкой) оказалось недостаточно для нахождения этого корня. Ввиду этого, для отыскания первого собственного значения использовалась система компьютерной алгебры Pari/GP, которая позволяет работать с числами произвольной точности.