9.2. Интегрирование путем подведения под знак дифференциала и методом подстановки

Если нахождение интеграла $\int f(x)dx$ затруднительно, то пользуются *методом подстановки* или *методом замены переменной.* При применении этого метода используют подстановки двух видов:

1) $x=\varphi(t)$, где $x=\varphi(t)$ – монотонная непрерывно дифференцируемая функция новой переменной *t*. В этом случае $\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt$;

2) $u=\Psi(x)$, где u – новая переменная. Формула замены переменной при такой подстановке

$$\int f(\Psi(x))\Psi'(x)dx=\int f(\Psi(x))d(\Psi(x))=\int f(u)du.$$

Эта процедура называется *подведением функции* $u=\Psi(x)$ *под знак дифференциала* и, фактически, эквивалентна замене переменной x на новую переменную $u=\Psi(x)$.

В простых случаях введения новой переменной u необходимо иметь в виду следующие преобразования дифференциала dx:

1. $dx=d(x+a)$, где a – постоянная величина.
2. $dx=\dfrac{1}{a}d(ax)$, где постоянная $a\neq 0$.
3. $dx=\dfrac{1}{a}d(ax+b)$, где постоянная $a\neq 0$.
4. $xdx=\dfrac{1}{2}d(x^2)$.
5. $xdx=\dfrac{1}{2}d(x^2+b)$.
6. $\sin x\,dx=-d(\cos x)$.
7. $\cos x\,dx=d(\sin x)$.
8. $\dfrac{dx}{x}=d(\ln x)$.

В общем случае $\Psi'(x)dx=d\,\Psi(x)$.

Пример 9.16. Найти интеграл $\int(3x+5)^{20}dx$.

Р е ш е н и е. Этот интеграл можно найти и не производя замены переменной. Здесь достаточно развернуть выражение $(3x+5)^{20}$ по формуле бинома Ньютона и применить почленное интегрирование. Однако этот способ связан с большим количеством вычислений. При помощи замены переменной можно сразу свести данный интеграл к табличному. Полагая $3x+5=t$, имеем $3dx=dt$, т.е. $dx=\frac{1}{3}dt$. Отсюда получаем

$$\int(3x+5)^{20}dx=\frac{1}{3}\int t^{20}dt=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{21}t^{21}+c=\frac{1}{63}(3x+5)^{21}+c.$$

Пример 9.17. Найти интеграл $\int x^2\sqrt[7]{2x^3+3}\,dx$.

Р е ш е н и е. Так как $d(2x^3+3)=6x^2dx$, то, применяя метод подведения под знак дифференциала, будем иметь:

$$\int x^2\sqrt[7]{2x^3+3}\,dx=\frac{1}{6}\int(2x^3+3)^{\frac{1}{7}}6x^2dx=\frac{1}{6}\int(2x^2+3)^{\frac{1}{7}}d(2x^3+3)=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{7}{8}(2x^3+3)^{\frac{8}{7}}+c=\frac{7}{48}(2x^3+3)^{\frac{8}{7}}+c.$$

Пример 9.18. Найти интеграл $\int\frac{x^4dx}{x^{10}+1}$.

Р е ш е н и е. Применим подстановку $x^5=t$. Тогда $5x^4dx=dt$, $x^4dx=\frac{1}{5}dt$ и $\int\frac{x^4dx}{x^{10}+1}=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{5}arctgt+c=\frac{1}{5}arctgx^5+c.$

Пример 9.19. Найти интеграл $\int\frac{xdx}{\sqrt{49-x^4}}$.

Р е ш е н и е. Находим

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{49-x^4}}=\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{\sqrt{7^2-(x^2)^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2\right)}{\sqrt{7^2-(x^2)^2}}=\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{7}+c.$$

Пример 9.20. Найти интеграл $\int\frac{dx}{x^2-4x+20}$.

Р е ш е н и е. Выделив полный квадрат в знаменателе $x^2-4x+20=(x-2)^2+16$, получим:

$$\int\frac{dx}{x^2-4x+20}=\int\frac{dx}{(x-2)^2+16}=\int\frac{d(x-2)}{(x-2)^2+4^2}=\frac{1}{4}arctg\frac{x-2}{4}+c.$$

Пример 9.21. Найти интеграл $\int\frac{xdx}{2x^4-6\sqrt{2}x^2-16}$.

Р е ш е н и е. Поступим так же, как в примере 9.20:

$$\int\frac{xdx}{2x^4-6\sqrt{2}x^2-16}=\int\frac{xdx}{(\sqrt{2}x^2-3)^2-25}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{2\sqrt{2}\,xdx}{(\sqrt{2}x^2-3)^2-25}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{d(\sqrt{2}x^2-3)}{(\sqrt{2}x^2-3)^2-5^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{10}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\,x^2-8}{\sqrt{2}\,x^2+2}\right|+c=\frac{1}{20\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-4\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}}\right|+c.$$

Пример 9.22. Найти интеграл $\int \frac{x+1}{x-3}dx$.

Р е ш е н и е. Записав числитель в виде $(x-3)+4$, почленно разделив его на знаменатель и применив формулы 2 и 5 таблицы интегралов, имеем:

$$\int \frac{x+1}{x-3}dx = \int \frac{(x-3)+4}{x-3}dx = \int \left(1+\frac{4}{x-3}\right)dx = \int dx + 4\int \frac{dx}{x-3} = \int dx + 4\int \frac{d(x-3)}{x-3} =$$

$$= x + 4\ln|x-3| + c.$$

Пример 9.23. Найти интеграл $\int \frac{x(2+3x^2)}{6+x^4}dx$.

Р е ш е н и е. Разделив почленно числитель на знаменатель, приведем к сумме двух интегралов:

$$\int \frac{x(2+3x^2)}{6+x^4}dx = \int \frac{2x\,dx}{6+x^4} + 3\int \frac{x^3}{6+x^4}dx = \int \frac{d(x^2)}{(x^2)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{4x^3dx}{6+x^4} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} arctg \frac{x^2}{\sqrt{6}} + \frac{3}{4}\int \frac{d(x^4+6)}{x^4+6} = \frac{1}{\sqrt{6}} arctg \frac{x^2}{\sqrt{6}} + \frac{3}{4}\ln(x^4+6) + c.$$

Пример 9.24. Найти интеграл $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$.

Р е ш е н и е. Умножим числитель и знаменатель подкоренного выражения на $1-x$: $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \int \sqrt{\frac{(1-x)^2}{(1+x)(1-x)}}dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} =$

$$= \arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c.$$

Пример 9.25. Найти интеграл $\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}}dx$.

Р е ш е н и е. Положим $\sqrt{2x-1} = t$, тогда $x = \frac{t^2+1}{2}$, $dx = tdt$ и

$$\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}}dx = \int \frac{e^t \cdot t}{t}dt = \int e^t dt = e^{\sqrt{2x-1}} + c.$$

Пример 9.26. Найти интеграл $\int \frac{e^{-2x}}{e^{-4x}+3}dx$.

Р е ш е н и е. Сделаем замену $e^{-2x} = t$, тогда $-2e^{-2x}dx = dt$ и

$$\int \frac{e^{-2x}}{e^{-4x}+3}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2e^{-2x}}{(e^{-2x})^2+3}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+3} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} arctg\frac{t}{\sqrt{3}} + c =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{3}} arctg \frac{e^{-2x}}{\sqrt{3}} + c = -\frac{1}{2\sqrt{3}} arctg \frac{1}{\sqrt{3}e^{2x}} + c.$$

Пример 9.27. Найти интеграл $\int \sin(1-5x)dx$.

Р е ш е н и е. Заметив, что $d(1-5x) = -5dx$, имеем

$$\int \sin(1-5x)dx = -\frac{1}{5}\int \sin(1-5x)(-5)dx = -\frac{1}{5}\int \sin(1-5x)d(1-5x) = \frac{1}{5}\cos(1-5x) + c.$$

Пример 9.28. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{1+ctgx}}$.

Р е ш е н и е. Так как $d(1+ctgx) = -\frac{1}{\sin^2 x}dx$, то интеграл приводится к виду $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{1+ctgx}} = -\int \frac{d(1+ctgx)}{\sqrt{1+ctgx}} = -\int (1+ctgx)^{-\frac{1}{2}} d(1+ctgx) =$

$$= -\frac{(1+ctgx)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = -2\sqrt{1+ctgx} + c.$$

Пример 9.29. Найти интеграл $\int \sin^4 x \cos x\, dx$.

Р е ш е н и е. Так как $d(\sin x) = \cos x\, dx$, то

$$\int \sin^4 x \cos x\, dx = \int \sin^4 x\; d(\sin x) = \frac{1}{5}\sin^5 x + c.$$

Пример 9.30. Найти интеграл $\int \frac{\sin 4x}{\cos^4 2x + 4}dx$.

Р е ш е н и е. Воспользовавшись тем, что $d(\cos^2 2x) = -4\cos 2x \cdot \sin 2x\, dx$, $\sin 4x = 2\sin 2x \cdot \cos 2x$, получим

$$\int \frac{\sin 4x}{\cos^4 2x + 4}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(-4)\sin 2x \cos 2x}{(\cos^2 2x)^2 + 2^2}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{d(\cos^2 2x)}{(\cos^2 2x)^2 + 2^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} arctg\frac{\cos^2 2x}{2} + c = -\frac{1}{4} arctg\frac{\cos^2 2x}{2} + c.$$

Пример 9.31. Найти интеграл $\int \sin^2 8x\, dx$.

Р е ш е н и е. Применяя формулу $\sin^2 8x = \frac{1}{2}(1-\cos 4x)$, имеем

$$\int \sin^2 8x\, dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 4x)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 4x\, dx = = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int \cos 4x d(4x) =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + c.$$

Пример 9.32. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+3\ln x}}$.

Р е ш е н и е. Так как $d(2+3\ln x)=\frac{3}{x}dx$, то

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2+3\ln x}}=\frac{1}{3}\int \frac{3dx}{x\sqrt{2+3\ln x}}=\frac{1}{3}\int \frac{d(2+3\ln x)}{\sqrt{2+3\ln x}}=\frac{1}{3}\int (2+3\ln x)^{-\frac{1}{2}}d(2+3\ln x)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{(2+3\ln x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c=\frac{2}{3}\sqrt{2+3\ln x}+c.$$

Пример 9.33. Найти интеграл $\int \frac{x+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}dx$.

Р е ш е н и е.

$$\int \frac{x+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}dx=\int \frac{x}{\sqrt{1-9x^2}}dx+\int \frac{(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}dx=-\frac{1}{18}\int \frac{(-18)x}{\sqrt{1-9x^2}}dx-$$

$$-\frac{1}{3}\int \frac{(\arccos 3x)^2(-3)}{\sqrt{1-(3x)^2}}dx=-\frac{1}{18}\int (1-9x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-9x^2)-\frac{1}{3}\int (\arccos 3x)^2 d(\arccos 3x)=$$

$$=-\frac{1}{18}\cdot\frac{(1-9x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{(\arccos 3x)^3}{3}+c=-\frac{1}{9}\sqrt{1-9x^2}-\frac{1}{9}(\arccos 3x)^3+c.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти интегралы.

9.77. $\int (5-2x)^6 dx$.

9.78. $\int x^3(1-2x^4)^3 dx$.

9.79. $\int \frac{dx}{3-5x}$.

9.80. $\int \frac{x}{5-3x^2}dx$.

9.81. $\int \frac{x}{(x^2-1)^3}dx$.

9.82. $\int \frac{3x-1}{x^2+9}dx$.

9.83. $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$.

9.84. $\int \frac{dx}{x^2+5x+6}$.

9.85. $\int \frac{dx}{x^2-6x+25}$.

9.86. $\int \frac{dx}{x(x-1)}$.