9.1. Непосредственное интегрирование

Непосредственным интегрированием называют приведение данного интеграла к алгебраической сумме более простых интегралов, используя основные правила интегрирования (свойства 4 и 5 неопределенного интеграла), тождественные преобразования подынтегральной функции и таблицу основных интегралов.

Пример 9.1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x}}$.

Р е ш е н и е. Данный интеграл не является табличным. Представим подынтегральную функцию в виде $\frac{1}{x^3\sqrt{x}} = x^{-\frac{7}{2}}$, а затем применим формулу 3 таблицы основных интегралов и получим:

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{7}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{7}{2}+1}}{-\frac{7}{2}+1} + c = -\frac{2}{5}x^{-\frac{5}{2}} + c = -\frac{2}{5x^2\sqrt{x}} + c.$$

Пример 9.2. Найти интеграл $\int \left(1-\frac{1}{x}\right)^3 dx$.

Р е ш е н и е. Преобразуем подынтегральную функцию, а затем применим формулы и правила интегрирования:

$$\int \left(1-\frac{1}{x}\right)^3 dx = \int \left(1 - 3\cdot\frac{1}{x} + 3\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)dx = \int dx - 3\int\frac{dx}{x} + 3\int\frac{dx}{x^2} - \int\frac{dx}{x^3} =$$

$$= \int dx - 3\int\frac{dx}{x} + 3\int x^{-2}dx - \int x^{-3}dx = x - 3\ln|x| + 3\frac{x^{-1}}{-1} - \frac{x^{-2}}{-2} + c =$$

$$= x - 3\ln|x| - \frac{3}{x} + \frac{1}{2x^2} + c.$$

Пример 9.3. Найти интеграл $\int \left(\frac{6}{2x^2+9} + \frac{12}{2x^2-9}\right)dx$.

Р е ш е н и е. Используя правила 4 и 5 интегрирования и формулы 15, 16 таблицы интегралов, находим:

$$\int \left(\frac{6}{2x^2+9} + \frac{12}{2x^2-9}\right)dx = \frac{6}{2}\int \frac{dx}{x^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{12}{2}\int \frac{dx}{x^2 - \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} =$$

$$= 3\cdot\frac{1}{\frac{3}{\sqrt{2}}}arctg\frac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}} + 6\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}}\ln\left|\frac{x-\frac{3}{\sqrt{2}}}{x+\frac{3}{\sqrt{2}}}\right| + c = \sqrt{2}arctg\frac{x\sqrt{2}}{3} + \sqrt{2}\ln\left|\frac{x\sqrt{2}-3}{x\sqrt{2}+3}\right| + c.$$

Пример 9.4. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$.

Р е ш е н и е. Данный интеграл приведем к табличному следующим образом:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{\frac{9}{4}-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - x^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3} + c.$$

Пример 9.5. Найти интеграл $\int \sqrt[3]{x\sqrt{x}}\left(2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$.

Р е ш е н и е. Находим

$$\int \sqrt[3]{x\sqrt{x}}\left(2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int x^{\frac{1}{2}}\left(2 + x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = 2\int x^{\frac{1}{2}}dx + \int dx = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + x + c =$$

$$= \frac{4}{3}x\sqrt{x} + x + c.$$

Пример 9.6. Найти интеграл $\int \frac{5\cdot 3^x - 3\cdot 5^x}{3^x}dx$.

Р е ш е н и е. Используя правило 5 интегрирования и формулу 7 таблицы интегралов, получим:

$$\int \frac{5\cdot 3^x - 3\cdot 5^x}{3^x}dx = \int\left(5 - 3\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^x\right)dx = 5\int dx - 3\int\left(\frac{5}{3}\right)^x dx =$$

$$= 5x - 3\cdot\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^x}{\ln\frac{5}{3}} + c = 5x - \frac{3}{\ln\frac{5}{3}}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^x + c.$$

Пример 9.7. Найти интеграл $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx$.

Р е ш е н и е. Находим

$$\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx = \int \frac{(e^x)^2 - 1^2}{e^x+1}dx = \int \frac{(e^x-1)(e^x+1)}{e^x+1}dx = \int (e^x - 1)dx = \int e^x dx - \int dx =$$

$$= e^x - x + c.$$

Пример 9.8. Найти интеграл $\int e^x\left(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$.

Р е ш е н и е. Сведем данный интеграл к сумме табличных путем преобразования подынтегральной функции и использования правила 5:

$$\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx = \int\left(e^x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = \int e^x dx + \int\frac{dx}{\cos^2 x} = e^x + tgx + c.$$

Пример 9.9. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt[3]{x} + x^5 e^x - x^4}{x^5} dx$.

Р е ш е н и е. Применяя правило 5 интегрирования и формулы 3, 6, 5 таблицы интегралов, получим:

$$\int \frac{\sqrt[3]{x} + x^5 e^x - x^4}{x^5} dx = \int \left(x^{-\frac{14}{3}} + e^x - \frac{1}{x} \right) dx = \int x^{-\frac{14}{3}} dx + \int e^x dx - \int \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^{-\frac{11}{3}}}{-\frac{11}{3}} + e^x - \ln|x| + c = -\frac{3}{11x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} + e^x - \ln|x| + c.$$

Пример 9.10. Найти интеграл $\int a^x b^x 2^x dx$.

Р е ш е н и е. Согласно формуле 7 таблицы интегралов, имеем

$$\int a^x b^x 2^x dx = \int (2ab)^x dx = \frac{(2ab)^x}{\ln(2ab)} + c = \frac{(2ab)^x}{\ln 2 + \ln a + \ln b} + c.$$

Пример 9.11. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{4x^2 - 4} + 3x^2}{x^2 - 1} dx$.

Р е ш е н и е. Записав числитель в виде $2\sqrt{x^2 - 1} + 3(x^2 - 1) + 3$ и почленно разделив его на знаменатель, получим сумму табличных интегралов 17, 2 и 16:

$$\int \frac{\sqrt{4x^2 - 4} + 3x^2}{x^2 - 1} dx = \int \frac{2\sqrt{x^2 - 1} + 3(x^2 - 1) + 3}{x^2 - 1} dx = 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} + 3\int dx + 3\int \frac{dx}{x^2 - 1} =$$

$$= 2\ln\left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right| + 3x + \frac{3}{2}\ln\left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + c.$$

Пример 9.12. Найти интеграл $\int \frac{2 - \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx$.

Р е ш е н и е. Используя формулу $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$, имеем

$$\int \frac{2 - \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx = \int \frac{2 - \cos^2 x}{2\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \frac{1}{2}\int dx = tgx - \frac{1}{2}x + c.$$

Пример 9.13. Найти интеграл $\int 5\sin^2 \frac{x}{2} dx$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$.

$$\int 5\sin^2 \frac{x}{2} dx = \frac{5}{2}\int (1 - \cos x) dx = \frac{5}{2}\int dx - \frac{5}{2}\int \cos x\, dx = \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}\sin x + c.$$

Пример 9.14. Найти интеграл $\int (tgx + ctgx)^2 dx$.

Р е ш е н и е. Возведя подынтегральную функцию в квадрат и воспользовавшись формулами $tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, $ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$, $tgx \cdot ctgx = 1$, получим

$$\int (tgx + ctgx)^2 dx = \int (tg^2 x + 2 + ctg^2 x) dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = tgx - ctgx + c.$$

Пример 9.15. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

Р е ш е н и е. Умножим числитель на «тригонометрическую» единицу $(\sin^2 x + \cos^2 x = 1)$ и разделим затем почленно на знаменатель:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = tgx - ctgx + c.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти интегралы.

9.1. $\int (x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 8x + 7) dx.$

9.2. $\int \frac{3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 8}{x^2} dx.$

9.3. $\int \left(x^2 - 2x + \frac{1}{x^2} \right) dx.$

9.4. $\int (a + bx)^2 dx.$

9.5. $\int (a - bx)^3 dx.$

9.6. $\int \frac{x - 2}{x^3} dx.$

9.7. $\int \frac{(x+1)(x^2+6)}{3x^2} dx.$

9.8. $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right) dx.$

9.9. $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^4} + \frac{5}{x^6} - \frac{7}{x^8} \right) dx.$

9.10. $\int \left(\frac{x^4}{5} - \frac{5}{x^4} \right) dx.$

9.11. $\int \left(1 + \frac{1}{x} \right)^3 dx.$

9.12. $\int \frac{9x^5 + 12x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 4x + 2}{x^3} dx.$

9.13. $\int \frac{(x-1)(x^3-1)}{x^2} dx.$

9.14. $\int \frac{(x^2 + x + 1)^2}{x^3} dx.$

9.15. $\int \frac{x^2 - 9}{x + 3} dx.$

9.16. $\int \frac{dx}{4x^2 - 9}.$