9.369. $\int x \, arctg\, x\, dx.$

9.370. $\int x \, arctg\, 9x\, dx.$

9.371. $\int x \, arctg\, \frac{x}{a}\, dx.$

9.372. $\int (x^2+2) \, arctg\, x\, dx.$

9.373. $\int arcctg\, \frac{\sqrt{x}}{2}\, dx.$

9.374. $\int x \, arcctg\, \sqrt{\frac{x}{2}}\, dx.$

9.375. $\int x \, arcctg\, \sqrt{x^2-1}\, dx.$

9.376. $\int (x-4) \, arcctg\, 2x\, dx.$

9.4. Интегрирование рациональных функций

Неопределенный интеграл от целой рациональной функции (многочлена) находится непосредственно:

$$\int (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n)dx = a_0\int x^n dx + a_1\int x^{n-1}dx + \ldots +$$

$$+ a_{n-1}\int xdx + a_n\int dx = \frac{a_0}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_1}{n}x^n + \ldots + \frac{a_{n-1}}{2}x^2 + a_n x + c\ .$$

Функция, заданная в виде отношения двух многочленов

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m} \quad (a_0 \neq 0,\ b_0 \neq 0),$$

называется *дробной рациональной функцией* (или *рациональной дробью*).

В дальнейшем будем считать, что коэффициент $b_0 = 1$, так как в противном случае можно разделить числитель и знаменатель на этот коэффициент.

Если $n < m$, рациональная дробь называется *правильной*, в противном случае – *неправильной*.

Любая правильная рациональная дробь, знаменатель которой имеет только действительные корни $a,\ b,\ \ldots,\ l$ кратности $\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \lambda$, т.е. $Q_m(x)$ представим в виде $Q_m(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\cdot\ldots\cdot(x-l)^{\lambda}$, разлагается на сумму конечного числа простейших рациональных дробей, и это разложение имеет вид

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} +$$

$$+ \ldots + \frac{L_1}{x-l} + \frac{L_2}{(x-l)^2} + \ldots + \frac{L_\lambda}{(x-l)^\lambda},$$

где $A_1,\ A_2, \ldots, L_\lambda$ – действительные числа.

Если знаменатель имеет действительные и комплексные корни, т.е. раскладывается на линейные и квадратичные множители

$Q_m(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\cdot\ldots\cdot(x^2+px+q)^{\gamma}(x^2+hx+r)^{\nu}$, то

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{B_1}{x-b} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \ldots + \frac{C_1 x + D_1}{x^2 + px + q} + \ldots +$$

$$+ \frac{C_\gamma x + D_\gamma}{(x^2 + px + q)^\gamma} + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + hx + r} + \ldots + \frac{M_\nu x + N_\nu}{\left(x^2 + hx + r\right)^\nu},$$

где $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ M_\nu,\ N_\nu$ – действительные числа, которые подлежат определению. Для их нахождения применяют *метод неопределенных коэффициентов*. Суть этого метода разъясним на примерах.

Рассмотрим, как интегрируются простейшие правильные дроби.

I. $\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + c$.

II. $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int (x-a)^{-n}d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + c = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + c$

($n \geq 2$ – натуральное число).

III. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$.

При вычислении интегралов такого вида в числителе подынтегральной дроби выделяют выражение $2x + p = (x^2 + px + q)'$, а в знаменателе – полный квадрат:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p) + \left(\frac{2B}{A} - p\right)}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx +$$

$$+\left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} = \frac{A}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} +$$

$$+\left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} = \left[x + \frac{p}{2} = t\right] = \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| +$$

$$+\left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)}.$$

Если $k^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$, (т.е. дискриминант $p^2 - 4q < 0$), то

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\ln|x^2+px+q|+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+k^2}=$$

$$=\frac{A}{2}\ln|x^2+px+q|+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\cdot\frac{1}{k}arctg\frac{t}{k}+c\ ,\ \ t=x+\frac{p}{2}\ .$$

В случае положительного дискриминанта

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\ln|x^2+px+q|+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2-k^2}=$$

$$=\frac{A}{2}\ln|x^2+px+q|+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\cdot\frac{1}{2k}\ln\left|\frac{t-k}{t+k}\right|+c,\ \ t=x+\frac{p}{2}.$$

IV. $\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx=\frac{A}{2}\int(x^2+px+q)^{-n}d\,(x^2+px+q)+$

$$+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+k^2)^n}=\frac{A}{2(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+k^2)^n}\ ,$$

где $t=x+\frac{p}{2}$, $k^2=q-\frac{p^2}{4}$, $n\geq 2$ – натуральное число, и квадратный трехчлен x^2+px+q имеет комплексные корни.

Полученный интеграл $\int\frac{dt}{(t^2+k^2)^n}$ можно вычислить с помощью тригонометрической подстановки $t=k\ tgz$ или путем повторного интегрирования по частям свести его к интегралу вида III.

В случае неправильной рациональной дроби $(n\geq m)$ сначала надо выделить целую часть, деля числитель $P_n(x)$ на знаменатель $Q_m(x)$ по правилу «деления углом», т.е. представить дробь в виде

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=M(x)+\frac{P(x)}{Q_m(x)},$$

где $M(x)$– многочлен, а $\frac{P(x)}{Q_m(x)}$ – правильная рациональная дробь.

Таким образом, чтобы проинтегрировать любую рациональную дробь, надо уметь интегрировать многочлен и простейшие рациональные дроби.

Пример 9.44. Найти интеграл $\int\frac{dx}{x^2-6x+18}$.

Р е ш е н и е. Выделив полный квадрат в знаменателе подынтегрального выражения, получим

$$\int\frac{dx}{x^2-6x+18}=\int\frac{dx}{(x-3)^2+9}=\int\frac{d(x-3)}{(x-3)^2+3^2}=\frac{1}{3}arctg\frac{x-3}{3}+c\ .$$

Пример 9.45. Найти интеграл $\int \frac{dx}{3x^2+12x+20}$.

Р е ш е н и е. Вынося за скобки коэффициент при x^2 и выделяя полный квадрат в знаменателе, будем иметь

$$\int \frac{dx}{3x^2+12x+20} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+4x+\frac{20}{3}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+2)^2+\frac{8}{3}} = \frac{1}{3}\int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} arctg \frac{\sqrt{3}(x+2)}{2\sqrt{2}} + c = \frac{1}{2\sqrt{6}} arctg \frac{3(x+2)}{2\sqrt{6}} + c.$$

Пример 9.46. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2-10x+21}$.

Р е ш е н и е. Находим

$$\int \frac{dx}{x^2-10x+21} = \int \frac{dx}{(x-5)^2-4} = \int \frac{d(x-5)}{(x-5)^2-2^2} = [x-5=t] = \int \frac{dt}{t^2-2^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + c = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-7}{x-3}\right| + c.$$

Этот интеграл можно найти и другим способом. Разложим знаменатель подынтегрального выражения на множители: $x^2-10x+21=(x-3)(x-7)$. Так как каждый множитель входит в знаменатель в первой степени, то данная правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей типа I:

$$\frac{1}{x^2-10x+21} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-7}.$$

Приведем правую часть равенства к общему знаменателю:

$$\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-7} = \frac{Ax-7A+Bx-3B}{(x-3)(x-7)} = \frac{(A+B)x+(-7A-3B)}{x^2-10x+21}.$$

Следовательно, $\frac{1}{x^2-10x+21} = \frac{(A+B)x+(-7A-3B)}{x^2-10x+21}$.

Освободившись от знаменателей, получим равенство

$$1=(A+B)x+(-7A-3B).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов A и B

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -7A-3B=1, \end{cases}$$

из которой получим $A=-\frac{1}{4}$, $B=\frac{1}{4}$.

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+18} = \int\left(-\frac{1}{4(x-3)} + \frac{1}{4(x-7)}\right)dx = -\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-3} + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-7} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-7| - \frac{1}{4}\ln|x-3| + c = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-7}{x-3}\right| + c\,.$$

Пример 9.47. Найти интеграл $\int \frac{x-4}{x^2-5x+6}dx$.

Р е ш е н и е. Так как $(x^2-5x+6)' = 2x-5$, то

$$\int\frac{x-4}{x^2-5x+6}dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x-8}{x^2-5x+6}dx = \frac{1}{2}\int\frac{(2x-5)-3}{x^2-5x+6}dx = \frac{1}{2}\int\frac{(2x-5)}{x^2-5x+6}dx -$$

$$-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2-5x+6} = \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-5x+6)}{x^2-5x+6} - \frac{3}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{5}{2}\right)}{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-5x+6\right| -$$

$$-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}}{x-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}\right| + c = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-5x+6\right| - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + c =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\left|(x-2)(x-3)\right| - \ln\left|\left(\frac{x-3}{x-2}\right)^3\right|\right.+c = \frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^4}{(x-3)^2} + c = \ln\frac{(x-2)^2}{|x-3|} + c\,.$$

Пример 9.48. Найти интеграл $\int\frac{2x+9}{x^2+x+2}dx$.

Р е ш е н и е. Находим

$$\int\frac{2x+9}{x^2+x+2}dx = \int\frac{(2x+1)+8}{x^2+x+2}dx = \int\frac{(2x+1)}{x^2+x+2}dx + 8\int\frac{dx}{x^2+x+2} = \int\frac{d(x^2+x+2)}{x^2+x+2} +$$

$$+8\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \ln\left|x^2+x+2\right| + \frac{16}{\sqrt{7}}arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{7}} + c\,.$$

Пример 9.49. Найти интеграл $\int \frac{7x-5}{(x^2-2x+9)^2}dx$.

Р е ш е н и е.

$$\int \frac{7x-5}{(x^2-2x+9)^2}dx = 7\int \frac{x-\frac{5}{7}}{((x-1)^2+8)^2} = \left[x-1=t,\ \ x=t+1,\ \ \ dx=dt\right] =$$

$$=7\int \frac{t+\frac{2}{7}}{(t^2+8)^2}dt = 7\int \frac{t\,dt}{(t^2+8)^2} + 2\int \frac{dt}{(t^2+8)^2} = \frac{7}{2}\int \frac{d(t^2+8)}{(t^2+8)^2} + 2\int \frac{dt}{(t^2+8)^2} =$$

$$=\frac{7}{2}\frac{(t^2+8)^{-1}}{-1} + 2\int \frac{dt}{(t^2+8)^2} = -\frac{7}{2(t^2+8)} + 2\int \frac{dt}{(t^2+8)^2}\ .$$

Представив числитель последнего интеграла в виде $\frac{1}{8}\left((t^2+8)-t^2\right)$ и почленно разделив его на знаменатель, получим два интеграла. Ко второму применим формулу интегрирования по частям:

$$\int \frac{dt}{(t^2+8)^2} = \frac{1}{8}\int \frac{(t^2+8)-t^2}{(t^2+8)^2}dt = \frac{1}{8}\int \frac{dt}{t^2+8} - \frac{1}{8}\int \frac{t^2}{(t^2+8)^2}dt = \frac{1}{8}\int \frac{dt}{t^2+(2\sqrt{2})^2} -$$

$$-\frac{1}{8}\int \frac{t^2}{(t^2+8)^2}dt = \left[u=t,\ dv=\frac{tdt}{(t^2+8)^2},\ \ du=dt,\ \ v=\int \frac{t}{(t^2+8)^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+8)}{(t^2+8)^2} =\right.$$

$$\left.=\frac{1}{2}\frac{(t^2+8)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{2(t^2+8)}\right] = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\,\frac{t}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{8}\left(\frac{-t}{2(t^2+8)} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+8}\right) =$$

$$=\frac{1}{16\sqrt{2}}arctg\,\frac{t}{2\sqrt{2}} + \frac{t}{16(t^2+8)} - \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\,\frac{t}{2\sqrt{2}} + c =$$

$$=\frac{1}{32\sqrt{2}}arctg\,\frac{t}{2\sqrt{2}} + \frac{t}{16(t^2+8)} + c\ .$$

Окончательно имеем:

$$\int \frac{7x-5}{(x^2-2x+9)^2}dx = -\frac{7}{2(t^2+8)} + \frac{1}{16\sqrt{2}}arctg\,\frac{t}{2\sqrt{2}} + \frac{t}{8(t^2+8)} + c =$$

$$=\frac{1}{16\sqrt{2}}arctg\,\frac{t}{2\sqrt{2}} + \frac{t-28}{8(t^2+8)} + c = \frac{1}{16\sqrt{2}}arctg\,\frac{x-1}{2\sqrt{2}} + \frac{x-29}{8(x^2-2x+9)} + c\ .$$

Пример 9.50. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^3+27}$.

Р е ш е н и е. Разложим на множители знаменатель подынтегрального выражения: $x^3+27=(x+3)(x^2-3x+9)$ и представим исходную дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{1}{x^3+27}=\frac{A}{x+3}+\frac{Bx+C}{x^2-3x+9}.$$

Освобождаемся от знаменателей:

$$1=A(x^2-3x+9)+(Bx+C)(x+3).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -3A+3B+C=0 \\ 9A+3C=1, \end{cases}$$

из которой $A=\frac{1}{27}$, $B=-\frac{1}{27}$, $C=\frac{2}{9}$. Тогда

$$\int\frac{dx}{x^3+27}=\frac{1}{27}\int\frac{dx}{x+3}-\frac{1}{27}\int\frac{x-6}{x^2-3x+9}dx=\frac{1}{27}\ln|x+3|-\frac{1}{54}\int\frac{(2x-3)-9}{x^2-3x+9}dx=$$

$$=\frac{1}{27}\ln|x+3|-\frac{1}{54}\int\frac{2x-3}{x^2-3x+9}dx+\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x^2-3x+9}=\frac{1}{27}\ln|x+3|-$$

$$-\frac{1}{54}\int\frac{d(x^2-3x+9)}{x^2-3x+9}+\frac{1}{6}\int\frac{d\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{27}\ln|x+3|-\frac{1}{54}\ln\left|x^2-3x+9\right|+$$

$$+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}}arctg\,\frac{2x-3}{3\sqrt{3}}+c=\frac{1}{27}\ln\left|\frac{x+3}{\sqrt{x^2-3x+9}}\right|+\frac{1}{9\sqrt{3}}arctg\,\frac{2x-3}{3\sqrt{3}}+c.$$

Пример 9.51. Найти интеграл $\int\frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$.

Р е ш е н и е. Разложим рациональную дробь на простейшие множители

$$\frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Освободимся от знаменателя:

$$3x^2+2x+1=A(x+1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x+1)^2.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим

$$3x^2+2x+1=(A+C)x^3+(A+B+2C+D)x^2+(A+C+2D)x+(A+B+D).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений: $A+C=0,\ A+B+2C+D=3,\ A+C+2D=2,\ A+B+D=1.$ Решения системы: $A=-1,\ B=1,\ C=1,\ D=1.$ Следовательно,

$$\int\frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx=-\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{dx}{(x+1)^2}+\int\frac{x+1}{x^2+1}dx=-\ln|x+1|+\frac{(x+1)^{-1}}{-1}+$$

$$+\int\frac{x}{x^2+1}dx+\int\frac{dx}{x^2+1}=-\ln|x+1|-\frac{1}{(x+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}+arctg\,x=-\ln|x+1|-$$

$$-\frac{1}{(x+1)}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+arctg\,x+c=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x+1|}-\frac{1}{x+1}+arctg\,x+c\,.$$

Пример 9.52. Найти интеграл $\int\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx$.

Р е ш е н и е. Выделим целую часть исходной неправильной рациональной дроби. Для этого разделим числитель на знаменатель «углом»:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{l} x^5 \qquad + 2x^3 \qquad + 4x + 4 \\ \underline{x^5 + 2x^4 + 2x^3 \qquad\qquad\qquad} \end{array} & \begin{array}{l}\underline{x^4 + 2x^3 + 2x^2} \\ x-2\end{array} \\ -\begin{array}{l} -2x^4 \qquad\quad + 4x + 4 \\ \underline{-2x^4 - 4x^3 - 4x^2 \qquad\quad} \end{array} & \\ 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 & \end{array}$$

Тогда

$$\int\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx=\int\left(x-2+\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\right)dx=\int xdx-2\int dx+$$

$$+4\int\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+2x^3+2x^2}dx=\frac{1}{2}x^2-2x+4\int\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2(x^2+2x+2)}dx\,.$$

Разложим дробь в последнем интеграле на простейшие рациональные дроби: $\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$.

С помощью метода неопределенных коэффициентов получим систему

$$\begin{cases} A+C=1 \\ 2A+B+D=1 \\ 2A+2B=1 \\ 2B=1\,, \end{cases}$$

из которой $A=0,\ B=\frac{1}{2},\ C=1,\ D=\frac{1}{2}.$ Следовательно,

$$\int\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx=\frac{1}{2}x^2-2x+2\int\frac{dx}{x^2}+4\int\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+2x+2}dx=\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{2}{x}+$$

$$+2\int\frac{(2x+2)-1}{x^2+2x+2}dx=\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{2}{x}+2\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx-2\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}=$$

$$=\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{2}{x}+2\ln(x^2+2x+2)-2\,arctg(x+1)+c\,.$$