9.3. Интегрирование по частям

Одним из эффективных методов интегрирования является *метод интегрирования по частям.* Этот метод чаще всего применяется для интегрирования некоторых трансцендентных функций (например, $\ln x$, $\arcsin x$, $arctgx$), а также произведений алгебраических и трансцендентных функций. Суть его состоит в следующем. Если $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – непрерывно дифференцируемые на некотором интервале функции, кроме того, на этом интервале существует интеграл $\int vdu$, то на нем существует интеграл $\int udv$ и имеет место формула

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Это соотношение называется *формулой интегрирования по частям*. При использовании этой формулы подынтегральное выражение нужно разбивать на два множителя u и dv таким образом, чтобы интегрирование выражений dv и vdu было более простым, чем интегрирование исходного выражения udv. Формула интегрирования по частям может применяться неоднократно.

Для интегралов вида

$$\int Q(x)e^{ax}dx, \quad \int Q(x)\sin ax\,dx, \quad \int Q(x)\cos ax\,dx,$$

где $Q(x)$ – многочлен, в качестве u следует брать $Q(x)$, а в качестве dv – выражения $e^{ax}dx$, $\sin ax\,dx$, $\cos ax\,dx$ соответственно.

В случае интегралов вида

$$\int Q(x)\ln x\,dx, \qquad \int Q(x)\arcsin x\,dx, \quad \int Q(x)\arccos x\,dx,$$

$$\int Q(x)\mathrm{arctg}\,x\,dx, \quad \int Q(x)\mathrm{arcctg}\,x\,dx$$

в качестве u берут функции $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg}\,x$, $\mathrm{arcctg}\,x$, а в качестве dv – выражение $Q(x)dx$.

Интегрирование по частям иногда приводит к интегралу, совпадающему с исходным или сводящемуся к нему. В этом случае интеграл находится из получающегося относительно исходного интеграла уравнения.

Пример 9.34. Найти интеграл $\int (5 - x^2)e^{2x}dx$.

Р е ш е н и е. Положим $u = 5 - x^2$, $dv = e^{2x}dx$. Тогда

$$v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}d(2x) = \frac{1}{2}e^{2x}, \quad du = -2xdx.$$

По формуле интегрирования по частям имеем

$$\int (5 - x^2)e^{2x}dx = \frac{1}{2}(5 - x^2)e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}(-2x)dx = \frac{1}{2}(5 - x^2)e^{2x} + \int xe^{2x}dx.$$

Итак, мы понизили степень x на единицу. Поступим аналогично с интегралом $\int xe^{2x}dx$, т.е еще раз применим интегрирование по частям: за u возьмем x, а за dv – $e^{2x}dx$. Тогда $du = dx$, $v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}$. Для упрощения вычислений при переходе от dv к v можно полагать $c = 0$. Следовательно,

$\int xe^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x} + c$. Окончательно имеем

$\int (5-x^2)e^{2x}dx = \frac{1}{2}(5-x^2)e^{2x} + \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c.$

Пример 9.35. Найти интеграл $\int \frac{x^2}{(3-x^2)^2}dx$.

Р е ш е н и е. Находим

$$\int \frac{x^2}{(3-x^2)^2}dx = \left[u = x,\ dv = (3-x^2)^{-2}xdx,\ du = dx,\ v = \int (3-x^2)^{-2}xdx = \right.$$

$$\left. = -\frac{1}{2}\int (3-x^2)^{-2}(-2x)dx = -\frac{1}{2}\int (3-x^2)^{-2}d(3-x^2) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(3-x^2)^{-1}}{-1} = \frac{1}{2(3-x^2)}\right] =$$

$$= \frac{x}{2(3-x^2)} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{3-x^2} = \frac{x}{2(3-x^2)} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(\sqrt{3})^2 - x^2} = \frac{x}{2(3-x^2)} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-(\sqrt{3})^2} =$$

$$= \frac{x}{2(3-x^2)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| + c = \frac{x}{2(3-x^2)} + \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| + c.$$

Пример 9.36. Найти интеграл $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$.

Р е ш е н и е. Представив числитель в виде $\frac{1}{a^2}((a^2+x^2)-x^2)$ и разделив его почленно на знаменатель, получим два интеграла. Ко второму применим формулу интегрирования по частям:

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^3} = \frac{1}{a^2}\int\frac{(a^2+x^2)-x^2}{(x^2+a^2)^3}dx = \frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2} - \frac{1}{a^2}\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^3}dx =$$

$$= \left[u = x,\ dv = \frac{xdx}{(x^2+a^2)^3},\ du = dx,\ v = \int\frac{xdx}{(x^2+a^2)^3} = \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^3} = \right.$$

$$\left. = \frac{1}{2}\int (x^2+a^2)^{-3}d(x^2+a^2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+a^2)^{-2}}{-2} = -\frac{1}{4(x^2+a^2)^2}\right] = \frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2} -$$

$$-\frac{1}{a^2}\left(-\frac{x}{4(x^2+a^2)^2} + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}\right) = \frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2} - \frac{1}{4a^2}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2} +$$

$$+ \frac{x}{4a^2(x^2+a^2)^2} = \frac{3}{4a^2}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2} + \frac{x}{4a^2(x^2+a^2)^2}.$$

В результате применения формулы мы понизили степень знаменателя на единицу и получили аналогичный интеграл, к которому вторично применим формулу интегрирования по частям:

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{(a^2+x^2)-x^2}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{x^2+a^2}-\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx=$$

$$=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}-\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx=\Bigg[u=x,\ dv=\frac{xdx}{(x^2+a^2)^2},\ du=dx,$$

$$v=\int\frac{xdx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{2}\int(x^2+a^2)^{-2}d(x^2+a^2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+a^2)^{-1}}{-1}=$$

$$=-\frac{1}{2(x^2+a^2)}\Bigg]=\frac{1}{a^3}arctg\frac{x}{a}-\frac{1}{a^2}\left(-\frac{x}{2(x^2+a^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+a^2}\right)=\frac{1}{a^3}arctg\frac{x}{a}+$$

$$+\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}-\frac{1}{2a^2}\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a^3}arctg\frac{x}{a}+\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}-\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+c=$$

$$=\frac{1}{2a^3}arctg\frac{x}{a}+\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}+c\,.$$

Окончательно получим

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^3}=\frac{3}{4a^2}\left(\frac{1}{2a^3}arctg\frac{x}{a}+\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}+c\right)+\frac{x}{4a^2(x^2+a^2)^2}=$$

$$=\frac{3}{8a^5}arctg\frac{x}{a}+\frac{x}{4a^2(x^2+a^2)^2}+\frac{3x}{8a^4(x^2+a^2)}+c\,.$$

Пример 9.37. Найти интеграл $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$, если $a>0$.

Р е ш е н и е.

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\left[u=\sqrt{a^2-x^2},\quad dv=dx,\quad du=-\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}},\ v=x\right]=$$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\frac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\frac{\left(a^2-x^2\right)-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=x\sqrt{a^2-x^2}-$$

$$-\int\sqrt{a^2-x^2}dx+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\sqrt{a^2-x^2}dx+a^2\arcsin\frac{x}{a}+c_1\,.$$

Мы получили уравнение относительно исходного интеграла, из которого находим

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}+c\,.$$

Пример 9.38. Найти интеграл $\int\log_3(5x+1)\,dx$.

Р е ш е н и е. Так как $\log_3(5x+1)=\frac{1}{\ln 3}\ln(5x+1)$, то

$$\int \log_3(5x+1)\,dx = \frac{1}{\ln 3}\int \ln(5x+1)dx = \left[u = \ln(5x+1),\ \ dv = dx,\ \ \ du = \frac{5dx}{5x+1},\ v = x\right] =$$

$$= \frac{1}{\ln 3}\left(x\ln(5x+1) - \int \frac{5x}{5x+1}dx\right) = \frac{1}{\ln 3}\left(x\ln(5x+1) - \int \frac{(5x+1)-1}{5x+1}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\ln 3}\left(x\ln(5x+1) - \int dx + \frac{1}{5}\int \frac{d(5x+1)}{5x+1}\right) = \frac{1}{\ln 3}(x\ln(5x+1) - x + \frac{1}{5}\ln(5x+1)) + c =$$

$$= \frac{1}{\ln 3}\left(\left(x + \frac{1}{5}\right)\ln(5x+1) - x\right) + c\,.$$

Пример 9.39. Найти интеграл $\int (x^2 - x + 1)\cos 5x\,dx$.

Р е ш е н и е. Так как одним из множителей является многочлен второй степени, то найдем данный интеграл, применив последовательно два раза формулу интегрирования по частям:

$$\int (x^2 - x + 1)\cos 5x\,dx = [u = x^2 - x + 1,\ dv = \cos 5x\,dx,\ du = (2x-1)dx,$$

$$v = \int \cos 5x dx = \frac{1}{5}\int \cos 5x d(5x) = \frac{1}{5}\sin 5x\Big] = \frac{x^2 - x + 1}{5}\sin 5x - \frac{1}{5}\int (2x-1)\sin 5x dx =$$

$$= \left[u = 2x - 1,\ dv = \sin 5x dx,\ \ du = 2dx,\ \ v = \frac{1}{5}\int \sin 5x d(5x) = -\frac{1}{5}\cos 5x\right] =$$

$$= \frac{x^2 - x + 1}{5}\sin 5x - \frac{1}{5}\left(-\frac{2x-1}{5}\cos 5x + \frac{2}{5}\int \cos 5x dx\right) = \frac{x^2 - x + 1}{5}\sin 5x +$$

$$+ \frac{2x-1}{25}\cos 5x - \frac{2}{125}\int \cos 5x d(5x) = \frac{x^2 - x + 1}{5}\sin 5x + \frac{2x-1}{25}\cos 5x - \frac{2}{125}\sin 5x + c =$$

$$= \frac{2x-1}{25}\cos 5x + \frac{1}{5}\left(x^2 - x + \frac{23}{25}\right)\sin 5x + c\,.$$

Пример 9.40. Найти интеграл $\int e^{ax}\sin(bx)\,dx$.

Р е ш е н и е.

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \Big[\ \ u = e^{ax},\ d\nu = \sin(bx)dx,\ \ du = ae^{ax}dx,\ \ v = \int \sin(bx)dx =$$

$$= \frac{1}{b}\int \sin(bx)d(bx) = -\frac{1}{b}\cos(bx)\Big] = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos(bx) + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos(bx)dx =$$

$$= \left[u = e^{ax},\ dv = \cos(bx)dx,\ du = ae^{ax}dx,\ v = \int \cos(bx)dx = \frac{1}{b}\int \cos(bx)d(bx) = \frac{1}{b}\sin(bx)\right] =$$

$$= -\frac{1}{b}e^{ax}\cos(bx) + \frac{a}{b}\left(\frac{1}{b}e^{ax}\sin(bx) - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin(bx)dx\right) + c.$$

Из полученного относительно исходного интеграла уравнения находим
$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx+\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx=\frac{a}{b^2}e^{ax}\sin(bx)-\frac{1}{b}e^{ax}\cos(bx)+c.$ Отсюда

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx=\frac{b^2}{a^2+b^2}\left(\frac{a}{b^2}e^{ax}\sin(bx)-\frac{1}{b}e^{ax}\cos(bx)\right)+c=$$

$$=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin(bx)-b\cos(bx))+c.$$

Пример 9.41. Найти интеграл $\int\sin(\ln x)\,dx$.

Р е ш е н и е. Применим подстановку $\ln x=t$, тогда $x=e^t$, $dx=e^t dt$ и $\int\sin(\ln x)\,dx=\int e^t\sin t\,dt$. Последний интеграл уже найден в общем виде с помощью интегрирования по частям (см. пример 9.40), поэтому

$$\int\sin(\ln x)\,dx=\int e^t\sin t\,dt=\frac{e^t}{2}(\sin t-\cos t)+c=\frac{x}{2}(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))+c.$$

Пример 9.42. Найти интеграл $\int\frac{arctg\,\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\int\frac{arctg\,\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}dx=\left[\sqrt[3]{x}=t,\ x=t^3,\ dx=3t^2dt\right]=\int\frac{arctg\,t}{t}\cdot 3t^2dt=3\int t\,arctg\,t\,dt=$$

$$=\left[u=arctg\,t,\ dv=tdt,\ du=\frac{dt}{1+t^2},\ v=\int tdt=\frac{1}{2}t^2\right]=$$

$$=3\left(\frac{1}{2}t^2arctg\,t-\frac{1}{2}\int\frac{t^2}{1+t^2}dt\right)=\frac{3}{2}t^2arctg\,t-\frac{3}{2}\int\frac{(t^2+1)-1}{1+t^2}dt=\frac{3}{2}t^2arctg\,t-\frac{3}{2}\int dt+$$

$$+\frac{3}{2}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{3}{2}t^2arctg\,t-\frac{3}{2}t+\frac{3}{2}arctg\,t+c=\frac{3}{2}\left((t^2+1)arctg\,t-t\right)+c=$$

$$=\frac{3}{2}\left((\sqrt[3]{x^2}+1)arctg\,\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x}\right)+c.$$

Пример 9.43. Найти интеграл $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^5}}dx$.

Р е ш е н и е. Находим

$$\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^5}}dx=\left|u=\arcsin x,\ dv=\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^5}},\ du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ v=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^5}}=\right.$$

$$=\int\frac{dx}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}=\left(1-x^2=\frac{1}{t},\ x^2=1-\frac{1}{t},\ x=\sqrt{\frac{t-1}{t}},\ dx=\frac{1}{2t^2}\sqrt{\frac{t}{t-1}}dt\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2}\sqrt{\frac{t}{t-1}}\cdot t^2\sqrt{t}\ dt=\frac{1}{2}\int\frac{tdt}{\sqrt{t-1}}=\frac{1}{2}\int\frac{(t-1)+1}{\sqrt{t-1}}dt=\frac{1}{2}\int(t-1)^{\frac{1}{2}}d(t-1)+$$

$$+\frac{1}{2}\int(t-1)^{-\frac{1}{2}}d(t-1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(t-1)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\,2\sqrt{t-1}=\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)^{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}}=$$

$$=\left.\frac{x(3-2x^2)}{3(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right|=\frac{x(3-2x^2)}{3(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\arcsin x-\frac{1}{3}\int\frac{(3x-2x^3)dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{x(3-2x^2)}{3(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\arcsin x-\frac{1}{3}\int\frac{(3x-2x^3)dx}{(1-x^2)^2}=\frac{x(3-2x^2)}{3(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\arcsin x+$$

$$+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{(4x^3-4x)-2x}{(1-x^2)^2}dx=\frac{3x-2x^3}{3(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\arcsin x+\frac{1}{6}\int\frac{d(1-2x^2+x^4)}{1-2x^2+x^4}-\frac{1}{3}\int\frac{xdx}{(1-x^2)^2}=$$

$$=\frac{3x-2x^3}{3(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\arcsin x+\frac{1}{3}\ln(1-x^2)+\frac{1}{6}\int\frac{d(1-x^2)}{(1-x^2)^2}=\frac{3x-2x^3}{3(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\arcsin x+\frac{1}{3}\ln(1-x^2)-$$

$$-\frac{1}{6(1-x^2)}+c\,.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти интегралы.

9.221. $\int e^{\sqrt{x}}dx$.

9.222. $\int xe^{x}dx$.

9.223. $\int xe^{-x}dx$.

9.224. $\int(x+3)e^{x}dx$.

9.225. $\int(x^2+3x-5)e^{\frac{x}{3}}dx$.

9.226. $\int(5x^2+7x-1)e^{-\frac{x}{2}}dx$.

9.227. $\int(2x-7)e^{2x}dx$.

9.228. $\int e^{\sqrt{3x}}dx$.

9.229. $\int e^{\sqrt[4]{x+1}}dx$.

9.230. $\int xe^{3x}dx$.

9.231. $\int xe^{-4x}dx$.

9.232. $\int x2^{x}dx$.

9.233. $\int x7^{x}dx$.

9.234. $\int(ax+b)e^{\alpha x}dx$.

9.235. $\int\frac{x}{\pi}e^{2n\pi x}dx$.

9.236. $\int x^2e^{x}dx$.