Лабораторная работа №3
Численные методы
Вариант 3

При выполнении этой лабораторной работы пользоваться символьными вычислениями можно *только* для проверки результатов на правильность.

1 [1]. Построить график разности $S_n - S$, где S_n — n-я частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!} = S$. Вывести оценку на погрешность $\psi(n)$ — убывающую и сходящуюся к нулю функцию, такую, что $|S_n - S| \leqslant \psi(n)$ для всех n. Простроить график $\psi(n)$.

2 [1]. Найти корни уравнения $\sqrt{x} = tg(x)$ с помощью функции fzero. Использовать указатели на функции. Для определения начальных приближений нарисовать левую и правую часть на графике и воспользоваться функцией ginput.

3 [1]. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

нарисовать график на отрезке $[-1, 1]$: по оси абсцисс — начальное приближение, по оси ординат — корень функции, найденный с помощью fzero.

4 [2]. Для заданной матрицы $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ необходимо вычислить её матричный экспоненциал e^A. Необходимо сделать это двумя разными способами: 1) при помощи степенного ряда (взять его конечную сумму при достаточно большом числе слагаемых); 2) при помощи численного решения задачи Коши для ОДУ (использовать однократно ode45). Результаты вычислений сравнить между собой, а также с результатами работы встроенной функции expm.

5 [2]. *Задача об эпидемии (SIR+ модель).* Пусть $S_1 = S_1(t)$ — количество непривитых людей, $S_2 = S_2(t)$ — количество привитых людей, $I = I(t)$ — количество инфицированных (продолжающих заражать окружающих), $R = R(t)$ — количество изолированных людей с инфекцией, $t = \overline{0, T}$. Подбирая различные начальные данные, а также параметры (все параметры положительны, $\beta_1 > \beta_2$), продемонстрировать различные сценарии распространения эпидемии, математическая модель которой представлена системой ОДУ:

$$\begin{cases} \frac{dS_1}{dt} = -\beta_1 I S_1 + \kappa S_2, \\ \frac{dS_2}{dt} = -\beta_2 I S_2 + \alpha R - \kappa S_2, \\ \frac{dI}{dt} = \beta_1 I S_1 + \beta_2 I S_2 - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \delta R - \alpha R, \\ \frac{du}{dt} = \omega \left(V_2 - V_1\right) u, \end{cases}$$

где $V_1 = \dfrac{c}{\delta + \beta_1 I}$, $V_2 = \dfrac{c}{\delta + \beta_2 I} - a$.

Примечание. Величина βI характеризует частоту заболевания, δR — количество умерших, κS_2 — потеря имунитета, $\frac{1}{\kappa}$ — период сохранения иммунитета, $u S_1$ — поток прививающихся.

6 [2]. Движение шарика на плоскости описывается уравнением $\ddot{x} = 0$, $x \in \mathbb{R}^2$. Реализовать моделирование движение шарика внутри участка, окружённого четырьмя перегородками, параллельными осям координат. При попадании на перегородку шарик от неё упруго отскакивает (так, при ударе о вертикальную стенку в момент t' вертикальная компонента скорости меняет знак: $x_1(t'+0) = x_1(t'-0)$, $x_2(t'+0) = -x_2(t'-0)$, и так далее). При ударе о перегородку скорость шарика уменьшается в α раз. Спустя время τ участок, окружённый перегородками разделяют на два (устанавливают ещё одну вертикальную перегородку посередине). При ударе о новую перегородку скорость шарика уменьшается в β раз. Нарисовать анимацию, изображающую движение шарика с ненулевой начальной скоростью.

7 [2]. Рассмотреть систему двух тел на плоскости:

$$m_1\ddot{x}_1 = G\frac{m_1 m_2(x_2 - x_1)}{||x_1 - x_2||^3},$$

$$m_2\ddot{x}_2 = G\frac{m_1 m_2(x_1 - x_2)}{||x_1 - x_2||^3},$$

$x_1 \in \mathbb{R}^2$, $x_2 \in \mathbb{R}^2$. Решить систему численно. Нарисовать на плоскости анимацию движения траекторий $x_1(t)$, $x_2(t)$. Подобрать параметры так, чтобы продемонстрировать движение двух типов: по пересекающимся орбитам («восьмёрка») и вокруг общего центра.

8 [2]. Для линейной системы дифференциальных уравнений второго порядка построить фазовый портрет. Подобрать параметры системы таким образом, чтобы проиллюстрировать различные виды особых точек (узел, дикритический узел, седло, фокус, центр).

9 [3]. Пусть $\lambda > 0$, $\sigma > 0$, $\delta_0 > 0$, $\theta > 0$. Задана краевая задача ОДУ Риккати

$$\begin{cases} \dot{D}_2 = -4C_2 D_2 + 2\sigma^2 D_2^2, \\ \dot{C}_2 = -2C_2^2 - D_2 + \lambda, \\ D_2(0) = -\frac{1}{2\delta_0^2}, C_2(T) = -\theta. \end{cases}$$

Требуется найти неподвижные точки системы, определить их вид, построить фазовый портрет системы в плоскости D_2C_2 и исследовать на продолжимость решение системы для любого $T > 0$.

10 [2]. Уравнение Матьё имеет вид

$$\ddot{x} + \omega^2\left(1 + a\cos(\nu t)\right)x = 0,$$

с начальными условиями

$$\dot{x}(0) = x_{10},$$

$$x(0) = x_{20}.$$

Здесь ω — невозмущённая частота собственных колебаний, a — величина возмущения, ν — частота колебаний, $t \in [0, T]$. Требуется построить области неустойчивости дифференциального уравнения в плоскости $aO\omega$ при $a \in [-15, 15]$, $\omega \in [-15, 15]$ в зависимости от параметра ν.

11 [3]. Движение математического маятника описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$mL\ddot{\theta} = -mg\sin\theta,$$

где m — масса маятника, L — длина нити, g — ускорение свободного падения, θ — угол отклонения маятника от нижнего положения равновесия. Задать начальные угол отклонения и его производную. Требуется построить анимацию движения математического маятника. На каждом кадре в заголовке отображать текущую кинетическую и потенциальную энергии маятника.