30.05.2014

Definition 0.1. Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit M heißt ein Raum konstanter (Schnitt-)Krümmung, wenn es eine Zahl κ mit $K_\sigma = \kappa$ for alle 2-dimensionalen Unterräume σ von Tangentialräumen von M. Eine solche Mannigfaltigkeit M nennt man *elliptisch*, falls $\kappa > 0$, *flach*, falls $\kappa = 0$ bzw. *hyperbolisch* falls $\kappa < 0$.

Beispiel 0.1. Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ist ein flacher Raum, die sphäre $\mathbb{S}^n$ ist ein elliptischer Raum konstanter Krümmung.

Zur Erinnerung: Bezeichnungsmäßig galt

$$R_1(X,Y)Z := g(Y,Z)X - g(X,Z)Y,$$

und

$$\begin{aligned} k_1(X,Y) &:= g(r_1(X,Y)Y,X) \\ &= g(g(Y,Y)X - g(X,Y)Y, X) = g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2. \end{aligned}$$

Fakt 0.1. Falls die Schnittkrümmung K_σ nur von p aber nicht von $\sigma \subseteq T_pM$ abhängt, also eine funktion $K : M \to \mathbb{R}$ ist, dann gilt $R = KR_1$.

Beweis. Es galt $k(X,Y) = Kk_1(X,Y)$. Die Formel zur Bestimmung von R aus k im Beweis von Lemma 3.7 ist eine Linearkombination von Termen der Form $k(aX + bY, cX + dY)$, ferner erfüllt $R_1(X,Y)Z$ dieselben Rechenregeln (1)–(4) aus Lemma 3.6 wie $R(X,Y)Z$, also $R = KR_1$ (da man R aus k in gleicher Weise extrahiert wie R_1 aus k_1). □

Insbesondere im Falle $n = 2$ ist die Voraussetzung erfüllt, da es nur einen 2-dimensionalen Unterraum von T_pM gibt, also $R = KR_1$.

für $n \geq 3$ gitl aber

Satz 0.1 (F. Schur, 1886). *Wenn die Schnittkrümmung K_σ einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$ nicht von der Richtung σ, sondern nur von dme Punkt p abhängt, dann ist sie konstant (hängt auch nicht von dem Punkt ab).*

Für den Beweis benötigen wir noch ein paar Vorbereitungen.

Definition 0.2 (Erweiterung des linearen Zusammenhangs auf $\mathfrak{F}(M)$). Für $f \in \mathfrak{F}(M)$ bezeichne $\nabla_X f := Xf \in \mathfrak{F}(M)$.

Definition 0.3 (Kovariante Ableitung von Tensorfeldern). Sie ∇ ein linearer Zusammenhang und $A : \mathfrak{X}_r(M) \to \mathfrak{X}_s(M)$ ein Tensorfeld auf M vom Typ (r,s) mit $r \geq 1, s \in \{0,1\}$. Dann definieren wir die *kovariante Ableitung* von A in Richtung X durch

$$(\nabla_X A)(Y_1, \ldots, Y_r) := \nabla(A(Y_1, \ldots, Y_r)) \\ - \sum_{i=1}^{r} A(Y_1, \ldots, Y_{i-1}, \nabla_X Y_i, Y_{i+1}, \ldots, Y_r).$$

Im Falle $r = 0$, $\nabla_X = Xf$.

Bemerkung 1. Es ist dann $\nabla_X A$ ein Tensorfeld desselben Typs wie A. Ferner ist ∇A mit $(\nabla A)(X, Y_1, \ldots, Y_r) = (\nabla_X a)(Y_1, \ldots, Y_r)$ ein Tensorfeld des Typs $(r + 1, s)$.

Beweis. Wir müssen die $\mathfrak{F}(M)$-Linearität von $\nabla A(X, Y_1, \ldots, Y_r)$. Additivität ist unmittelbar ersichtlich, da A r-multilinear ist und $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$. Zu zeigen ist $\mathfrak{F}(M)$-Homogenität in jeder Komponente

$$(\nabla_X A)(Y_1, \ldots, Y_{i-1}, fY_i, Y_{i+1}, \ldots, Y_r) = f(\nabla_X A)(Y_1, \ldots, Y_r).$$

Es gilt

$$\begin{aligned}(\nabla_X A)(Y_1, \ldots, Y_{i-1}, fY_i, Y_{i+1}, \ldots, Y_r) &= \nabla_X(fA(Y_1, \ldots, Y_r)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{r} fA(Y_1, \ldots, Y_{i-1} \nabla_X Y_i, Y_{i+1}, \ldots, Y_r) \\ &\quad - (Xf)(A(Y_1, \ldots, Y_r)) \\ &= (Xf)A(Y_1, \ldots, Y_r) \\ &\quad + f\nabla_X A(Y_1, \ldots, Y_r) \\ &\quad - f(\sum_{i=1}^{r} A(Y_1, \ldots, Y_{i-1}, \nabla_X Y_i, Y_{i+1}, \ldots, Y_r)) \\ &\quad - (Xf)A(Y_1, \ldots, Y_r),\end{aligned}$$

wie gewünscht. Fenrer ist

$$(\nabla A)(fX, Y_1, \ldots, Y_r) = (\nabla_{fX} A)(Y_1, \ldots, Y_r) = f(\nabla_X A)(Y_1, \ldots, Y_r)$$

und damit der zweite Teil der Bemerkung erfüllt. □

Nach lemma 3.5 hängt $(\nabla_X A)|_p (Y_1, \ldots, Y_r)$ nur von $Y_1|_p, \ldots, Y_r|_p$ ab.

Daher kann $(\nabla_X A)|_p$ als multilineare Abbildung $T_pM \times \cdots \times T_pM \to (T_pM)^s$ aufgefasst werden.

Wir führen die Schreibweise $(\nabla_X R)(Y, Z)V = \nabla_X(RY, Z)V) - R(\nabla_X Y, Z) - R(Y, \nabla_X Z) - R(Y, Z)\nabla_X V$. Weitere Rechenregeln für R.

Lemma 0.1. *Sei ∇ ein torsionsfreier linearer Zusammenhang und R der zugehörige Krümmungstensor. Dann gilt $(\nabla_X R)(Y, Z)V + (\nabla_Y R)(Z, X)V + (\nabla_Z R)(X, Y)V = 0$ (zweite Biorchi Identität).*

Beweis. Der Beweis wird eine Übungsaufgabe sein **TODO** (Hinweis: Argumentieren Sie wie im Beweis von Lemma 3.6, aber ausführlich). □

Fakt 0.2 (Kovariante Ableitung von g). für die (semi-)RIEMANN'sche Metrik g und den zugehörigen LEVI-CIVITA-Zusammenhang gilt:

$$\begin{aligned}(\nabla g)(X,Y,Z) &= \nabla_X(g(X,Y)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z)\\ &= Xg(Y,Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0,\end{aligned}$$

da dies genau die Verträglichkeitsbedingung (6) aus Satz 3.2 darstellt ($X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, also $\nabla g = 0$).

Fakt 0.3. Es gilt $\nabla_X R_1 = 0$, wobei R_1 wie gehabt definiert sei ($R_1(X,Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y$). Beweis ist Aufgabe.

Nun können wir den Beweis von Satz 0.1 (S. 1) führen.

Beweis von Satz 0.1 (S. 1). Nach Fakt 0.1 (S. 1) folgt $R = KR_1$ mit $K \in \mathfrak{F}(M)$. Also

$$(\nabla_X R)(Y,Z)V = K(\nabla_X R_1)(Y,Z)V + X(K)R_1(Y,Z)V \text{ (nach Fakt 0.3)}$$

Wir zeigen nun $X(K) = 0$ für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$. Für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ gilt

$$\begin{aligned}(\nabla_X R)(Y,Z)V &= X(K)(g(Z,V)Y - g(Y,V)Z)\\ (\nabla_Y R)(Z,X)V &= Y(K)(g(X,V)Z - g(Z,V)X)\\ (\nabla_Z R)(X,Y)V &= X(K)(g(Y,V)X - g(X,V)Y).\end{aligned}$$

Nach Lemma 0.1 (S. 2) ist die Summe der drei Ausdrücke gleich 0, also

$$\begin{aligned}0 = &(Z(K)g(Y,V) - Y(K)g(Z,V))X + (X(K)g(Z,V) - Z(K)g(X,V))Y\\ &+ (Y(K)g(X,V) - X(K)g(Y,V))Z.\end{aligned}$$

Sie $X \in \mathfrak{X}(M)$ beliebig. Da nach Voraussetzung die Dimension $n \geq 3$ ist, gibt es lokal (bzgl. g orthogonale Vektorfelder Y, Z. Für $V = Y$ folgt $0 = Z(K)X - X(K)Z$ also $X(K) = 0$. Damit ist K lokal konstant und wegen M zusammenhängend global konstant. □

05.06.2014

Definition 0.4. Seien (M,g), $(\tilde{M},\tilde{g})$ RIEMANN'sche Mannigfaltigkeit und $F : M \to \tilde{M}$ eine differenzierbar Abbildung. F heißt eine *lokale Isometrie* (oder isometrisch), falls für alle $p \in M, X, Y \in T_pM$ gilt: $\tilde{g}_{F(p)}(\left.DF\right|_p(X), \left.DF\right|_p(Y)) = g_p(X,Y)$. Eine *isometrischer Diffeomorphismus* heißt auch eine *Isometrie*. F heißt *konform*, falls es eine Funktion $\lambda : M \to \mathbb{R}^+$ gibt, sodass $\lambda(p) \neq 0$ und

$$\left.\tilde{g}\right|_p(\left.DF\right|_p(X), \left.DF\right|_p(Y)) = \lambda(p)\, \left.g\right|_p(X,Y)$$

für alle $p \in M, X, Y \in T_pM$.

Es gilt sogar:

Satz 0.2. *Für je zwei* RIEMANN*'sche Mannigfaltigkeiten* (M, g), $(\tilde{M}, \tilde{g})$ *derselben Dimension mit derselben konstanten Krümmung gilt, dass es zu je zwei* $p \in M, \tilde{p} \in \tilde{M}$ *Umgebungen* $O \in \mathcal{U}(p), \tilde{O} \in \mathcal{U}(\tilde{p})$ *gibt und eine Isometrie*

$$F : O \to \tilde{O}.$$

Definition 0.5. Für einen linearen Zusammenhang ∇ und den zugehörigen Krümmungstensor definiert man den *Ricci*-Tensor durch $\mathrm{Ric}(V, W) := \mathrm{tr}(R(\bullet, V)W)$ für $U, V, W \in T_pM$, $p \in M$.

$$\mathrm{Ric}(V, W)\big|_p = \mathrm{tr}(U_p \mapsto R(U_p, V_p)W_p)$$

für $U, V, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Da die Spur eine lineare Abbildung vom Raum der Endomorphismen nach $\mathbb{R}$ ist, ist Ric ein Tensor vom Type $(2, 0)$ $(\mathrm{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \,\mathrm{tr}\, A + \mu \,\mathrm{tr}\, B$.

Bemerkung 1. Aus einem Tensorfeld vom Typ $(r, 1)$ erhält man somit durch Bildung der Spur ein Tensorfeld (Kontraktion) vom Typ $(r - 1, 0)$.

Sei M nun eine semi-RIEMANN'sche Mannigfaltigkeit und $E_1, \ldots, E_n$ eine Orthogonalbasis von T_pM bzgl. g, d.h. $g(E_i, E_j) = \varepsilon_i \delta_{ij}$ mit $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$. Ein Vektor $X_p \in T_pM$ hat also bzgl. der Basis $E_1, \ldots, E_n$ die Darstellung

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g_p(X, E_i) E_i.$$

Auf der Diagonalen der Matrix der linearen Abbildung $U_p \mapsto R(U_p, V_p)W_p$ bzgl. der Basis $E_1, \ldots, E_n$ stehen also die Elemente $\varepsilon_i g_p(R(E_i, V_p)W_p, E_i)$. Also

$$\mathrm{Ric}(V, W)_p = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g_p(R(E_i, V_p)W_p, E_i).$$

Wir würden eigentlich gerne noch einmal die Spur bilden, aber Achtung (!) die Spur einer Bilinearform ist apriori nicht sinnvoll (basisabhängig). Aber man definiert die Spur einer Biliniearform bzgl. einer nicht entarteten symmetrischen Bilinearform g als $\mathrm{tr}\, A$, wobei A die eindeutig bestimmte lineare Abbildung ist mit $\beta(X, Y) = g(X, AY)$.

Für eine Pseudo-ON-Basis $E_1, \ldots, E_n$ bzgl. g, g.h. $g(E_i, E_j) = \varepsilon \delta_{ij}$ ergibt sich

$$\mathrm{tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(E_i, AE_i) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \beta(E_i, E_i)$$

Die Skalarkrümmung s einer semi-Riemann'schen Mannigfaltigkeit ist definiert als die Spur bzgl. g, also

$$s(p) := \operatorname{tr}(A_p)$$

mit

$$\operatorname{Ric}(X_p, Y_p) = g(X_p, AY_p),$$

also für eine Pseudo-ON-Basis $E_1, \ldots, E_n$ von T_pM bzgl. g:

$$\boxed{s(p) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \operatorname{Ric}(E_i, E_i) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j g(R(E_i, E_j)E_j, E_i).}$$

Definition 0.6. Die Ricci-*Krümmung* von M in Richtung V mit $g(V, V) \neq 0$ ist definiert als

$$\operatorname{ric}(V) := \frac{\operatorname{Ric}(V, V)}{g(V, V)}.$$

Es gilt also für eine Pseudo-ON-Basis $E_1, \ldots, E_n$ bzgl. g, dass

$$s = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{ric}(E_i).$$

Im Zusammenhang mit Differenzialgeometrie I:

Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine ON-Basis von Hauptkrümmungsrichtungen zu Hauptkrümmungen $k_1, \ldots, k_n$ einer parametrisierten Hyperfläche. Dann ist $g(X_i, X_j) = \delta_{ij}$, $LX_i = k_i X_i$ (L Weingarten-Abbildung).

$$g(R(X_i, x_j)X_k, X_l) = g(g(LX_j, X_k)LX_i - g(LX_i, X_k)LX_j, X_l) = k_i k_j \delta_{jk}\delta_{il} - k_i k_j \delta_{ik}\delta_{jl},$$

wobei wir die Gauss-Gleichungen in koordinatenfreier Form benutzt haben. Also

$$g(R(X_i, X_j)X_k, X_l) = \begin{cases} k_i k_j & : \text{falls } j = k \text{ und } i = l \text{ und } i \neq j \\ -k_i k_j & : \text{falls } i = k \text{ und } j = l \text{ und } i \neq j \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Und weiterhin

$$K(X_i, X_j) = k_i k_j \text{für } i \neq j.$$

Zum Ricci-Tensor ergibgt sich

$$\operatorname{Ric}(X_i, X_j) = \begin{cases} k_i \sum_{l=1, l\neq i}^{n} k_l \text{ falls } i = j \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

und damit

$$\mathrm{ric}(X_i) = k_i \sum_{j=1, j\neq i}^{n} k_j.$$

Für die Skalarkrümmung ergibt sich weiterhin

$$s = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} k_i k_j = n(n-1)K_2,$$

wobei K_2 die zweite elementarsymmetrische Krümmung ist.

13.06.2014

1 Übung — Teil 3

Übung 1.1. Seien $\nabla, \tilde{\nabla}$ lineare Zusammenhänge auf einer Mannigfaltigkeit M. Zeige:

(a) Es ist $\nabla - \tilde{\nabla}$ ein Tensorfeld vom Typ $(2, 1)$.

(b) Es ist $\tau : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ mit $\tau(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ ein Tensorfeld vom Typ $(2, 1)$.

Lösung.

(a) Die Additivität in beiden Komponenten von $\nabla - \tilde{\nabla}$ folgt sogleich aus der Additivität von ∇ und $\tilde{\nabla}$ in diesen. In der ersten Komponente sind ∇ und $\tilde{\nabla}$ sogar $\mathfrak{F}(M)$-linear, damit auch ihre Differenz. Für die zweite Komponente berechnet man

$$(\nabla - \tilde{\nabla})_X fY = f\nabla_X Y + X(f)Y - f\tilde{\nabla}_X Y - X(f)Y.$$

Also ist der Ausdruck auch in dieser Komponente $\mathfrak{F}(M)$-homogen und damit linear.

(b) Es ist offensichtlich, dass $\tau(X, Y) = -\tau(Y, X)$, also τ schiefsymmetrisch (was wegen $\mathrm{char}\,\mathbb{R} \neq 2$ äquivalent zu alternierend ist). Wir zeigen $\mathfrak{F}(M)$-Homogenität in einer Komponente (aufgrund der Schiefsymmetrie gilt sie dann auch in der anderen). Additivität in beiden Komponenten ist trivial, da alle Ausdrücke aus denen τ kombiniert wird biadditiv sind.

$$\begin{aligned}\nabla_{fX} Y - \nabla_Y fX - [fX, Y] &= f\nabla_X Y - f\nabla_Y X - Y(f)X - (fX)Y + Y(fX) \\ &= f\tau(X, Y) - Y(f)X + Y(f)X\end{aligned}$$

wie gewünscht.

Übung 1.2. Sei ∇ ein linearer Zusammenhang auf der Mannigfaltigkeit M. Setze $R : \mathfrak{X}(M)^3 \to \mathfrak{X}(M)$ mit $R(X,Y)Z := \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla[X,Y]Z$. Zeige, dass R ein Tensorfeld ist (RIEMANN'scher Krümmungstensor).

Lösung. Es ist R offensichtlich antisymmetrisch in X und Y. Additivität in jeder Komponente ist wieder trivial, da alle auftretende Ausdrücke in der Definition von R diese Eigenschaft haben. Für $\mathfrak{F}(M)$-Homogenität in X (und damit Y) rechnen wir:

$$\begin{aligned} R(fX,Y) &= f\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y(f\nabla_X) - \nabla_{f[X,Y]-Y(f)X} \\ &= f(\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}) - Y(f)\nabla_X + Y(f)\nabla_X, \end{aligned}$$

was das gewünschte Resultat ist. Für die $\mathfrak{F}(M)$-Homogenität in Z berechnet man:

$$\begin{aligned} R(X,Y)(fZ) = f\nabla_X\nabla_Y Z &+ X(f)\nabla_Y Z + Y(f)\nabla_X Z + XY(f)Z \\ &- f\nabla_Y\nabla_X Z - Y(f)\nabla_X Z - X(f)\nabla_Y Z - YX(f)Z \\ &- f\nabla_{[X,Y]}Z - [X,Y](f)Z = fR(X,Y)Z. \end{aligned}$$

Alle Terme, welche 'unerwünscht' sind, heben sich hinweg.

Übung 1.3. Gib ein Beispiel einer 4-dimensionalen semi-RIEMANN'schen Mannigfaltigkeit M mit Signatur $(3,1)$ an und eine 3-dimensionale Untermannigfaltigkeit, die mit der induzierten Biliniearform keine semi-RIEMANN'sche Mannigfaltigkeit ist.

Lösung. Wir wählen den $\mathbb{R}^4$ mit den Karten $\phi : U \to U$, $u \mapsto u$ ($U \subseteq \mathbb{R}^4$ offen). Als Untermannigfaltigkeit wählen wir den linearen Unterraum $\ker(x_1^* + x_2^* + x_3^* - \sqrt{3}x_4^*)$. Es enthält dann dieser Raum den bzgl. g isotropen Vektor $(1,1,1,\sqrt{3})$. Damit ist die induzierte Biliniearform auf dem Unterraum jedoch in jedem Punkt entartet.

Übung 1.4. Definiere das Produkt $M_1 \times M_2$ in natürlicher Weise für M_i differenzierbare Mannigfaltigkeit ($i = 1,2$). Zeige, dass $M_1 \times M_2$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist und $\pi_i : M_1 \times M_2 \to M_i$ Submersionen sind.

Lösung. Wir setzen die zugrundeliegende Menge von $M_1 \times M_2$ gleich mit dem kartesischen Produkt der Mengen von M_1 und M_2. Gleichzeitig setzen wir auch die Kartenabbildungen $\phi_{\alpha,\beta} := \phi_\alpha^1 \times \phi_\beta^2$, wobei $\phi_\alpha^1, \phi_\beta^2$ Karten von M_1 bzw. M_2 sind. Es ist dann klar, dass

$$\bigcup_{\alpha,\beta} \operatorname{dom}\phi_{\alpha,\beta} = \bigcup_{\alpha,\beta} \operatorname{dom}\phi_\alpha^1 \times \operatorname{dom}\phi_\beta^2 = M_1 \times M_2.$$

Andererseits gilt auch, dass

$$\operatorname{im}\phi_{\alpha,\beta} \cap \operatorname{im}\phi_{\alpha',\beta'} = \operatorname{im}\phi_\alpha^1 \cap \operatorname{im}\phi_{\alpha'}^1 \times \operatorname{im}\phi_\beta^1 \cap \operatorname{im}\phi_{\beta'}^1,$$

was als Produkt zweier offener Mengen offen in der Produkttopologie ist ($\mathbb{R}^n$ sind so definiert, dass die darauf erklärte Topologie genau die n-te Potenz der Topologie auf $\mathbb{R}$ ist). Weiter ist die Komposition $\phi_{\alpha,\beta} \circ \phi_{\alpha',\beta'}$ auch differenzierbare Abbildung, da sie gleich dem Produkt der Abbildungen $\phi^1_\alpha \circ (\phi^1_{\alpha'})^{-1}$ und $\phi^2_\beta \circ (\phi^2_{\beta'})^{-1}$ ist und ein solches Produkt wieder differenzierbar ist (die Ableitung ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix},$$

wobei J_i die entsprechenden Ableitungen der ersten bzw. zweiten Funktion sind. Nun muss noch gezeigt werden, dass π_i Submersionen sind. Dafür benötigen wir, dass $\phi^i_{\alpha'} \circ \pi_i \circ \phi^{-1}_{\alpha,\beta}$ überall surjektives Differential hat. Diese Abbildung ist jedoch einfach nur die Projektion $(x_1, x_2) \mapsto x_i$, welche klarerweise surjektives Differential in jedem Punkte hat (denn sie ist schon linear und 'surjektiv').

Übung 1.5. Seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M \to N$ Submersion. Zeige, dass für alle $q \in N$ gilt: $F^{-1}(q)$ ist Untermannigfaltigkeit von M.

Lösung. TODO

Übung 1.6. Gegeben sei die Abbildung $\Phi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^6$ mit

$$\Phi(X_1, X_2, X_3) = (X_1^2, X_2^2, X_3^2, \sqrt{2}X_1X_2, \sqrt{2}X_1X_3, \sqrt{2}X_2X_3).$$

(a) Zeige, dass $\operatorname{im}\Phi \subseteq \mathbb{S}^5$ und $\operatorname{im}\Phi$ in einer 4-dimensionalen Sphäre vom Radius $\sqrt{\frac{2}{3}}$ liegt.

(b) Zeige, Φ ist Immersion.

(c) Bestimme die von Φ induzierte RIEMANN'sche Metrik auf $\mathbb{S}^2$.

Lösung.

(a) Es gilt

$$X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 + 2X_1^2X_2^2 + 2X_1^2X_3^2 + 2X_2^2X_3^2 = (X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)^2.$$

Damit liegt $\operatorname{im}\Phi$ in $\mathbb{S}^5$, da $(X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{S}^2$. Weiterhin ist klar, dass die Hyperebene $\ker(x_1^* + x_2^* + x_3^* - 1)$ ebenfalls $\operatorname{im}\Phi$ enthält. Der Schnitt dieser mit der $\mathbb{S}^5$ ist eine 4-dimensionale Sphäre mit Mittelpunkt

$$(1/3, 1/3, 1/3, 0, 0, 0)$$

und Radius $\sqrt{(1 - \frac{1}{3})^2 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

(b) Wir können die obere Halbsphäre (und auch jede andere Halbsphäre nach Koordinatentransformation) parametrisieren durch

$$\phi^{-1}(X_1, X_2) = (X_1, X_2, \sqrt{1 - X_1^2 - X_2^2}).$$

Damit ist

$$\Psi \circ \phi^{-1}(X_1, X_2) = (X_1^2, X_2^2, 1 - X_1^2 - X_2^2, \sqrt{2} X_1 X_2, \sqrt{2} X_1 \sqrt{1 - X_1^2 - X_2^2}, \sqrt{2} X_2 \sqrt{1 - X_1^2 - X_2^2}).$$

Das Differential dieser Abbildung ist offensichtlich injektiv, da die Ableitung gegeben ist durch

$$\begin{pmatrix} 2X_1 & 0 \\ 0 & 2X_2 \\ -2X_1 & -2X_2 \\ \sqrt{2}X_2 & \sqrt{2}X_1 \\ \sqrt{2}\frac{1-2X_1^2-X_2^2}{\sqrt{1-X_1^2-X_2^2}} & -\sqrt{2}\frac{X_1X_2}{\sqrt{1-X_1^2-X_2^2}} \\ -\sqrt{2}\frac{X_1X_2}{\sqrt{1-X_1^2-X_2^2}} & \sqrt{2}\frac{1-X_1^2-2X_2^2}{\sqrt{1-X_1^2-X_2^2}} \end{pmatrix}.$$

Von den Untermatrizen aus erster und dritter, bzw. zweiter und vierter Zeile ist immer eine regulär außer $X_1 = X_2 = 0$. In diesem Falle ist jedoch die Matrix aus fünfter und sechster Zeile regulär. Damit ist Φ Immersion.

(c) TODO

19.06.2014 Sei (M, g) zusammenghängend (semi-)RIEMANN'sche Mannigfaltigkeit.

Definition 1.1. Sei $c : I \to M$ eine differenzierbare Kurve. Eine differenzierbare Abbildung $X : I \to TM$ heißt Vektorfeld längs c, falls $x(t) \in T_{c(t)}M$ (d.h. $\pi \circ X = c$). Weiter sei $\mathcal{X}$ der Vektorraum der Vektorfelder.

Satz 1.1. *Sei (M, g) (semi-)RIEMANN'sche Mannigfaltigkeit mit LEVI-CIVITA-Zusammenhang ∇, $C : I \to M$ Kurve. Dann gibt es genau eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\frac{\nabla}{\mathrm{d}\,t} : \mathcal{X}_c \to \mathcal{X}_c$ mit $x \mapsto \frac{\nabla x}{t}$ mit*

(I)

$$\frac{\nabla}{t}(f \cdot x) = f'x + \frac{\nabla x}{\mathrm{d}\,t} \quad (\forall x \in \mathcal{X}_c, f \in \mathcal{F}_c)$$

(II)

$$\left.\frac{\nabla Y \circ c}{\mathrm{d}\,t}\right|_{t=t_0} = \nabla_{c'(t_0)}\, Y \in \mathcal{X}_c$$

Beweis. Eindeutigkeit: lokal um $c_0(t) \in M$ wähle Karte $X(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t)\ \partial_i|_{c(t)}$, also $\frac{\nabla X}{\mathrm{d}\,t}(t_0) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i'\ \partial_i|_{c(t_0)} + \nabla_{c'(t_0)}\partial_i)$. Zur Existenz nimmt man selbiges als Definition. $\square$

Lemma 1.1. *Es gilt folgende Produktregel für* $\frac{\nabla}{\mathrm{d}\,t} : \mathcal{X}_c \to \mathcal{X}_c$. *Für alle* $X, Y \in \mathcal{X}_c$ *haben wir*

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\right|_{c(t_0)} g(X(t), Y(t)) = g_{c(t_0)}(\frac{\nabla X}{\mathrm{d}\,t} X(t), Y(t))$$

Beweis. lokal: $X = \sum \alpha_i(\partial_i \circ c), Y = \sum \beta_j(\partial_j \circ c)$. Dann $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\right|_{t=t_0} g(X(t), Y(t)) =$
$\square$