ÜBUNGSAUFGABEN ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE - SERIE 4

FRANZ PATZIG

1. Aufgabe

Für je zwei komplexe abelsche Gruppen K und L definieren wir einen Komplex Hom(K,L) in dem wir für jedes $n \in \mathbb{Z}$ setzen

$$\mathrm{Hom(K,L)}_n := X_{k\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}(\mathrm{K}_k, \mathrm{K}_{k+n})$$

d.h. ein Element von Hom(K,L) ist eine Familie

$$f = \{f_k : K_k \to L_{k+n}\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

von Gruppenhomomorphismen. Der Rand von f sei durch

$$\partial_n(f) := \{\partial_n^L \circ f_k - (-1)^n f_{k-1} \circ \partial_n^K\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

gegeben.

(i) Zu zeigen: Auf diese Weise ist tatsächlich ein Komplex definiert.

Definition 1 (Komplex K)**.** *Ein Komplex K ist eine Familie* $\{\partial_n : K_n \to K_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *von aufeinanderfolgenden Homomorphismen mit der Eigenschaft, dass die Zusammensetzung von je zwei aufeinanderfolgenden Homomorphismen Null ist:*

(1)
$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$$

Damit müssen wir 1 zeigen mit $\partial_n((f_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (\partial_n^L \circ f_n - 1 \cdot (-1)^n f_{n-1} \circ \partial_n^K)_{n\in\mathbb{Z}}$.

$$\begin{aligned}
\partial_{n-1} \circ \partial_n &= \partial_{n-1}((f_n)_{n\in\mathbb{Z}}) \circ \partial_n((f_n)_{n\in\mathbb{Z}}) \\
&= (\partial_{n-1}^L \circ f_n - 1 \cdot (-1)^{n-1} f_{n-1} \circ \partial_{n-1}^K) \circ (\partial_n^L \circ f_n - 1 \cdot (-1)^n f_{n-1} \circ \partial_n^K) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(ii) Zu beschreiben: Zyklen Z_0Hom(K,L).

Definition 2 (Zyklen)**.**

(2)
$$Z_n K := Ker(\partial_n)$$

Was bedeutet es, wenn jeder Eintrag 0 ist, also auf der rechten Seite nur 0en stehen?

(iii) Zu beschreiben: Ränder B_0Hom(K,L).

Definition 3 (Ränder)**.**

(3)
$$B_n K := Im(\partial_{n+1})$$

Linke Seite gleich 0.

2. Aufgabe

3. Aufgabe

Zu zeigen: Für eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{A} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{B} \xrightarrow{\beta} \mathrm{C} \longrightarrow 0$$

von abelschen Gruppen sind die folgenden Bedingungen äquivalent.

(i) Die Sequenz zerfällt, d.h. es handelt sich bis auf Isomorphie um die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{A} \xrightarrow{\alpha} A \oplus C \xrightarrow{\beta} \mathrm{C} \longrightarrow 0 \quad \text{mit } \alpha(a) = (a, 0) \text{ und } \beta(a, c) = c.$$

(ii) Es gibt einen zu α linksinversen Homomorphismus.

(iii) Es gibt einen zu β rechtsinversen Homomorphismus.

(iv) Es gibt Homomorphismus: $a' : B \to A$ und $b' : C \to B$ mit $\alpha' \circ \alpha = \text{id}$, $\beta \circ \beta' = \text{id}$, $\alpha \circ \alpha' + \beta' \circ \beta = \text{ id}$.

(i) → (ii): Wir zeigen als erstes, dass es einen Isomorphismus $\varphi : A \oplus C \to B$ mit $\varphi(a, 0) = f(a)$ und $h \circ \varphi(a, c) = c$ gibt. Wir definieren $\varphi(a, c) = f(a) + r(c)$. Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & \text{A} \arrow[r, "i_A"] \arrow[d, "\text{id}_A"] & A \oplus C \arrow[r, "\pi_C"] \arrow[d, "\varphi"] & \text{C} \arrow[r] \arrow[d, "\text{id}_C"] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \text{A} \arrow[r, "\alpha"] & \text{B} \arrow[r, "\beta"] & \text{C} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

und das Fünferlemma zeigt, dass φ ein Isomorphismus ist. Setzt man $r(c) = \varphi(0, c)$ so erkennt man, dass die Sequenz spaltet. Es sei $\psi = \varphi^{-1}$. Dann erhalten wir r durch $r(b) = (\pi_A \circ \psi)(b)$.

(ii) → (iii): Sei $r : B \to A$ eine *Retraktion* von α. Wir definieren dann eine Abbildung $s : C \to B$ durch $c \mapsto b - \alpha \circ r(b)$. Für ein $b \in \beta^{-1}(c)$. Dabei verwenden wir, dass für $b, b' \in \beta^{-1}(c)$ gilt $b - b' \in \text{Her}(\beta) = \text{Im}(\alpha)$, d.h. $\alpha \circ r(b - b') = b - b'$, also $b - \alpha \circ r(b) = b' - \alpha \circ r(b')$. Sofort prüft man jetzt nach, dass s ein Homomorphismus ist und dass $\beta \circ s = \text{id}_T$ gilt.

(iii) → (ii): Sei $s : C \to B$ ein *Schnitt* zu β. Wir definieren einen Homomorphismus $r : B \to A$ durch die Vorschrift $b \mapsto \alpha^{-1}(b - s \circ \beta(b))$. Wir verwenden hier erstens, dass durch $b \mapsto m - s \circ \beta(b)$ ein Homomorphismus $B \to B$ definiert wird, zweitens, dass wegen $\beta(m - s \circ \beta(b)) = \beta(b) - \beta \circ s \circ \beta(b) = \beta(b) - \beta(b) = 0$ jeweils $b - s \circ \beta(b) \in \text{Ker}(\beta) = \text{Im}(\alpha)$, und drittens, dass α injektiv ist. Für $a \in A$ folgt wegen der Injektivität von α und s, dass $r \circ \alpha(a) = \alpha^{-1}(\alpha(a) - s \circ \beta(\alpha(a))) = \alpha^{-1}(\alpha(a)) - \alpha^{-1}(s(0)) = a$. Damit gilt: $r \circ \alpha = \text{id}_A$.

(iii) → (iv):