Abbildung 1: Darstellung

# 0.1 Numerisches Lösen nichtlinearer Gleichungen

## 0.1.1 Einführung und Wiederholung

Viele Modelle physikalscher Prozesse führen auf nichtlineare Gleichungen.

**Beispiel 1.1.** Allgemeines Polynom $n$-ten Grades $a_n X^n + \cdots a_0 = 0$. Die Nullstellen sind für $n \geq 5$ nicht mehr in Radikalen ausdrückbar, aber nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat das Polynom in $\mathbb{C}$ genau fünf Nullstellen (mit Vielfachheit).

**Beispiel 1.2.** *Hexapod-Steward-Plattform:* Es gibt sechs Freiheitsgrade, um ein lokales Koordinatensystem beliebig zu platzieren (3 Verschiebungen, 3 Drehungen). Sechs Beine mit Längen $l_{ij}$. Gesucht sind die $l_{ij}$ mit denen $(u, v, w)$ mit Drehungen $(\alpha, \beta, \gamma)$ erreicht wird.

*Mathematisches Modell:* Drehmatrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Umrechnen des lokalen Koordinatensystems (ohne Translationen)

$$\begin{pmatrix} e_x & e_y & e_z \end{pmatrix} = \underbrace{T_\alpha T_\beta T_\gamma}_{T(\alpha,\beta,\gamma)} \begin{pmatrix} e_\xi & e_\eta & e_\delta \end{pmatrix}$$

und

$$Q_j = r + T(\alpha, \beta, \gamma)\tilde{q}_j,$$

wobei $\tilde{q}_j = \begin{pmatrix} \xi_j & \eta_j & \delta_j \end{pmatrix}$. Verbinden des Fußpunktes $P_i$ durch $Q_j$ mit Beinen der Länge $l_{ij}$:

$$l_{ij}^2 = |P_i Q_j|^2 = \|p_i - (r + T(\alpha, \beta, \gamma))\tilde{q}_j\|^2.$$

Nun $x = \begin{pmatrix} u & v & w & x & y & z \end{pmatrix}$, $y = (l_{ij})1 \leq i \leq j \leq 3$ und $F(x, y) = 0$ für gegebene $P_i$ und $Q_j$. Bestimme dann $x(y)$ (direkte Aufgabe) bzw. $y(x)$ (trivial).

**Satz 1.1 (Satz über implizite Funktion).** *$F(X, Y) = 0$, $F(X_0, Y_0) = 0$, $F_X(X_0, Y_0)$ regulär, dann existiert (so $F$ stetig differenzierbare Funktion ist) eine lokale Auflösung $X = X(Y)$ um $(X_0, Y_0)$.*

Auf den Beweis mit dem BANACH'schen Fixpunktsatz verzichten wir hier.

**Beispiel 1.3.** *Euler implizit:* $y' = f(y)$, $y(0) = y_0$. Dann liefert mit

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{h_n} = f(y^{n+1})$$

die Zahl $y^n$ eine Approximation von $y(t_n)$. Falls $f$ nichtlinear ist, so ist das Auflösen obiger Gleichung im Allgemeinen nur numerisch möglich.

Wenn wir annehmen, dass $f(x) = Ax + b$ affin linear ist, ergibt sich

$$(I - hA)y^{n+1} = y^n + hb$$

auf äquidistantem Gitter. Obige Matrix ist invertierbar für hinreichend kleine $h$.

## 0.2 Die wichtigsten Regeln zum Simplexverfahren zusammengefasst

### 0.2.1 Das Simplex-Verfahren

Wir nehmen an, dass ein Simplextableau der folgenden Gestalt vorliegt.

| | $x_N^\top$ | $1$ |
|---|---|---|
| $x_B =$ | $P$ | $p$ |
| $z =$ | $q^\top$ | $q_0$ |

Dabei ist $x_N$ der Vektor der Nichtbasisvariablen, $x_B$ der Vektor der Basisvariablen (Koordinaten). Das Tableau heißt *primal zulässig*, falls alle Einträge in $p$ (aktuelle Basisvariablen) nicht negativ sind.

#### Entscheidbares oder nicht entscheidbares Tableau?

Ein primal zulässiges Simplextableau heißt *entscheidbar*, falls einer der folgenden Fälle vorliegt:

(I) Die Zielfunktionskoeffizienten, also die Einträge des Vektors $q^\top$ sind alle $\geq 0$. In diesem Falle ist die Lösung optimal. Sei lautet $x_B = p$ und $x_N = 0$. Enthält $q^\top$ Nullen, so ist die Lösung nicht eindeutig und es ergeben sich entsprechende Ungleichungsrestriktionen für die Lösungsmenge.

(II) Es gibt eine Spalte $j$, in welcher der Eintrag $q_j$ negativ ist, die darüberliegenden Einträge $P_{ij}$ aber alle $\geq 0$. Dann ist das Problem nicht lösbar, da die Zielfunktion von unten unbeschränkt ist im zulässigen Bereich.

Liegt keiner der obigen Fälle vor, dann heißt das Tableau *nicht entscheidbar* und es ist ein Austauschschritt zu vollziehen.

#### Wie wird das Pivotelement ausgewählt?

Man geht wie folgt vor:

1. Wähle eine Spalte mit negativem Zielfunktionskoeffizienten. Das ist dann die Pivotspalte (am besten ist der Koeffizient möglichst klein).

2. Bilde für die negativen Einträge der Pivotspalte (und nur für diese) folgende Quotienten:
$$-\frac{\text{Eintrag auf der rechten Seite}}{\text{Eintrag in der Pivotspalte}}$$
3. Wähle eine Zeile aus, in der der Quotient am kleinsten ist. Das ist die Pivotzeile.

Der Eintrag, in dem sich die Pivotzeile und Pivotspalte kreuzen heißt *Pivotelement*.

**Wie wird das neue Tableau erzeugt?**

Zunächst wird an das alte Tableau eine Kellerzeile angefügt. Diese hat in der Spalte, in der das Pivotelement steht, einen $*$ stehen. Alle anderen Einträge berechnen sich wie folgt:
$$\text{Kellerzeile} = -\frac{\text{Pivotzeile}}{\text{Pivotelement}}.$$
Danach geht man wie folgt vor:

1. An der Stelle, wo das Pivotelement stand, steht jetzt
$$\text{neuer Eintrag} = \frac{1}{\text{altes Pivotelement}}.$$
2. Die Spalte, die Pivotspalte war, berechnet sich gemäß
$$\text{neuer Eintrag} = \frac{\text{alte Pivotspalte}}{\text{altes Pivotelement}}.$$
3. Die Zeile, die Pivotzeile war, ist gleich der alten Kellerzeile.
4. Alle anderen Einträge ergeben sich nach der Vorschrift:
$$\begin{aligned}\text{neuer Eintrag} = \text{alter Eintrag}& \\ &+ \text{alter Pivotspalteneintrag} \cdot \text{alter Kellerzeileneintrag}\end{aligned}$$

### 0.2.2 Das duale Simplex-Verfahren

Wir nehmen an, dass ein Simplextableau der folgenden Gestalt vorliegt.

$$\begin{array}{c|cc} & x_N^\top & 1 \\ \hline x_B = & P & p \\ \hline z = & q^\top & q_0 \end{array}$$

Das Tableau heißt *dual zulässig*, falls alle Einträge in $p$ (aktuelle Basisvariablen) nicht negativ sind.

**Entscheidbares oder nicht entscheidbares Tableau?**

Ein dual zulässiges Simplextableau heißt *entscheidbar*, falls einer der folgenden Fälle vorliegt:

(I) Die rechte Seite, also die Einträge des Vektors $p$, sind alle $\geq 0$. In diesem Falle ist eine optimale Lösung gefunden.

(II) Es gibt eine Zeile, in welcher der Eintrag von $p$ negativ ist und die daneben liegenden Einträge der Matrix $P$ alle $\leq 0$ sind. In diesem Fall ist das Problem nicht lösbar, da der zulässige Bereich leer ist.

Liegt keiner der obigen Fälle vor, dann heißt das Tableau *nicht entscheidbar* und es ist ein Austauschschritt zu vollziehen.

**Wie wird das Pivotelement ausgewählt?**

Man geht wie folgt vor:

1. Wähle eine Zeile $i$ mit negativem $p_i$. Das ist dann die Pivotzeile (am besten ist der Koeffizient möglichst klein).
2. Bilde für die negativen Einträge der Pivotspalte (und nur für diese) folgende Quotienten:

$$\frac{\text{Eintrag des Zielfunktionsvektors}}{\text{Eintrag in der Pivotzeile}}$$

3. Wähle eine Spalte aus, in der der Quotient am kleinsten ist. Das ist die Pivotspalte.

Der Eintrag, in dem sich die Pivotzeile und Pivotspalte kreuzen heißt *Pivotelement*. Der Austausch funktioniert analog zum normalen Simplexverfahren.

## 0.3 Beleg

**Übung 3.1.** Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht leer und durch

$$G = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0, h(x) = 0\},$$

wobei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ stetig differenzierbare Funktionen seien. Für einen Punkt $x \in G$ ist der *Kegel der zulässigen Richtungen* definiert durch

$$Z(X) := \{d \in R : \exists t > 0 : \forall s \in [0,t] : g(x+sd) \leq 0, h(x+sd) = 0\}.$$

Weiter sei der *Linearisierungskegel* gegeben durch

$$L(x) := \{d \in \mathbb{R}^n : g_i'(x)d \leq 0, \forall i \in I_0(x), h'(x)d = 0\},$$

wobei $I_0(x)$ die Indexmenge der in $x$ aktiven Richtungen bezeichne, d.h.

$$I_0(x) := \{i \in m : g_i(x) = 0\}.$$

(a) Skizzieren Sie die folgenden Bereiche $G \subseteq \mathbb{R}^2$ und geben Sie für $x = 0$ jeweils $Z(x)$ und $L(x)$ an.

a. $G = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1^2 + 4x_2^2 \leq 4\}$,
b. $G = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 - x_2 \leq 0, -x_1 + x_2^2 \leq 0\}$,
c. $G = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + (x_2 - 1)^2 = 1\right\}$.

(b) Zeigen Sie, dass für jeden Punkt $x \in G$ gilt: $\mathrm{cl}(Z(x)) \subseteq L(x)$, wobei cl den topologischen Abschluss bezeichne.

(c) Die Funktionen $g_1, \ldots, g_m$ seien konvex und es existiere ein Punkt $y \in G$ mit $g_i(y) < 0$ für $i = 1, \ldots, m$. Ferner sei $h$ affin. Zeigen Sie dass dann $\mathrm{cl}(Z(x)) = L(x)$ für $x \in G$.

*Lösung.*

(a) Man erhält die folgenden Zeichnungen.

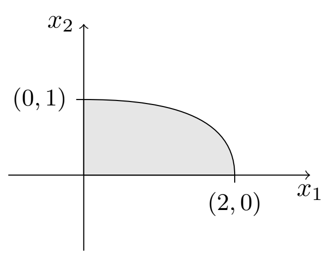


Abbildung 2: (a) Viertelellipse, $Z(x) = L(x) = [0, \infty)^2$.

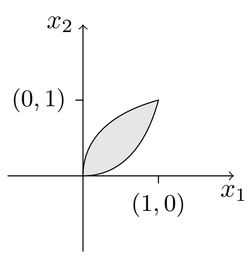


Abbildung 3: (b) Schnitt von zwei parabolisch betrenzten Mengen, $Z(x) = (0, \infty)^2$, $L(x) = [0, \infty)^2$.

(b) Sei $d \in \mathrm{cl}(Z(x))$, dann existiert for alle $\varepsilon > 0$ ein Punkt $d' \in Z(x)$ mit $\|d - d'\| < \varepsilon$. Wir haben dann,

$$g_i'(x)d' \leq 0, h_j'(x)d' = 0$$

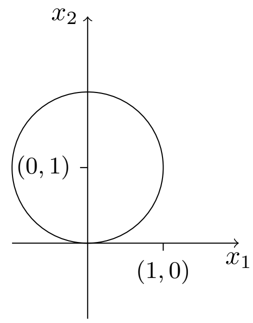


Abbildung 4: (c)Kreis, $Z(x) = \emptyset$, $L(x) = \mathbb{R} \times 0$.

for $i \in I_0$, $j = 1, \dots, l$. Wir haben nun $g_i'(x)d \leq g_i'(x)(d - d') \leq \varepsilon \|g_i'(x)\|$. Damit folgt $g_i'(x)d \leq 0$. In analoger Weise erhält man $|h_i'(x)d| = |h_i'(x)(d - d')| \leq \varepsilon \|h_i'(x)\|$. Also $d \in L(x)$.

(c) Ohne Einschränkung können die $h_i$ weggelassen werden, indem wir uns auf den affinen Unterraum $\bigwedge_{i=1}^{l} \ker h_i$ beschränken (oder, indem wir die Gleichungsbedingungen durch je zwei Ungleichungsbedingungen ausdrücken, durch lineare, also konvexe Funktionen). Sei also $d \in L(x)$, dann gilt

$$g_i'(x)d \leq 0$$

für $i \in I_0(x)$. Ist die strikte Ungleichung erfüllt, so ist unmittelbar klar (aus der WEIERSTRASS'schen Formel), dass $x \in Z(x)$. Wir dürfen also von Gleichheit ausgehen. In diesem Falle ist $\lambda \mapsto g_i(x + \lambda(y - x))$ konvex und wir haben

$$g_i'(x)(d + \varepsilon(y - x)) = \varepsilon g_i'(x)(y - x) \leq \varepsilon g(y) < 0$$

für $\varepsilon > 0$. Damit liegen aber alle $d + \varepsilon(y - x)$ aufgrund derselben Argumentation wie oben (WEIERSTRASS'sche Formel) in $Z(x)$. Also liegt $d$ in dessen Abschluss.

## 0.4 Übung (Teil 4)

02.06.2014

**Übung 4.1.** Man gebe die Gleichungsnormalform der folgenden Optimierungsaufgaben an und löse sie mit dem Simplexverfahren:

(a) Maximierungsproblem

$$z = 2x_1 - x_2 \to \max$$

bei

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und $x_1, x_2 \geq 0$.

(b)

*Lösung.*

(a) Es ergibt sich das Minimierungsproblem:

$$\tilde{z} = -2x_1 + x_2 \leftarrow \min$$

bei

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

als erstes Tableau ergibt sich

| | $x_1$ | $x_2$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $x_3$ | 1 | $-2$ | 4 |
| $x_4$ | $-2$ | $-2$ | 1 |
| $x_5$ | $-1$ | 4 | 4 |
| $\tilde{z}$ | 2 | 1 | 0 |

was ein zulässiges Tableau darstellt, da der Vektor $x = (0, 0, 4, 1, 4) \geq 0$ im zulässigen Bereich liegt. Dies Basisvariablen sind hier $x_3, x_4, x_5$ und Nicht-Basisvariablen $x_1, x_2$. Da weder der Vektor $q^\top$ vollständig nicht-negativ ist, noch eine Spalte $i$ existiert, sodass $q_i < 0$ und alle $P_{ji} \geq 0$ (Nicht-Lösbarkeit mit unbeschränktem Bereich), muss ein Pivotelement gewählt werden. Wähle also $-2$ als Pivotelement (negatives $q_i$) und bilde die Quotienten $P_{j1}/q_1$ für alle. Diese sind 1/2 und 4. Ihr Minimum ist also 1/2.

Wir führen nun den Austauschschritt durch. Dazu muss die Basisvariable $x_1$ durch $x_4$ ersetzt werden. Am besten rechnet man mit einer sogenannten Kellerzeile:

| | $x_1$ | $x_2$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $x_3$ | 1 | $-2$ | 4 |
| $x_4$ | $-2$ | $-2$ | 1 |
| $x_5$ | $-1$ | 4 | $4\cdot$ |
| $\tilde{z}$ | 2 | 1 | 0 |
| | $*$ | $-1$ | $\frac{1}{2}$ |

Diese ergibt sich einfach durch

$$-\frac{\text{“Pivotzeile”}}{\text{“Pivotelement”}}.$$

Das neue Tableau hat dann die Gestalt:

| | $x_4$ | $x_2$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $x_3$ | $-\frac{1}{2}$ | $-3$ | $\frac{9}{2}$ |
| $x_1$ | $-\frac{1}{2}$ | $-1$ | $\frac{1}{2}$ |
| $x_5$ | $\frac{1}{2}$ | 5 | $\frac{7}{2}$ |
| $\tilde{z}$ | 1 | 3 | $-1$ |

Man erhält hier beispielsweise die $-3$ in der Spalte von $x_2$ durch $-3 = -2 + 1 \cdot (-1)$, wobei $-2$ der alte Matrixeintrag ist, 1 der assoziierte eintrag in der Pivotspalte und $-1$ der assoziierte Eintrag der Kellerzeile. Die Pivotspalte berechnet sich über die Vorschrift

$$\text{“neue Einträge”} = \frac{\text{“alte Pivotspalte”}}{\text{“altes Pivotelement”}}$$

bis auf das Pivotelement, was sich über

$$\text{“neuer Eintrag”} = \frac{1}{\text{“altes Pivotelement”}}.$$

Alle anderen Einträge ergeben sich aus der Vorschrift

$$\text{“neuer Eintrag”}$$
$$=$$
$$\text{“alter Eintrag”} + \text{“Eintrag der alten Pivotspalte”} \cdot \text{“Eintrag der Kellerzeile”}.$$

(b) Es ergibt sich das Tableau

| | $x_1$ | $x_2$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $x_3$ | $-2$ | 1 | 10 |
| $x_4$ | $-1$ | 3 | 15 |
| $x_5$ | $-1$ | 0 | 4 |
| $z$ | 1 | $-3$ | 0 |

was nicht lösbar ist, da die zweite Spalte $q_2 = -3 < 0$ und $P_{j2} \geq 0$ erfüllt.

**Übung 4.2.** Gegeben

$$z = x_2 + x_4 - x_5 + 3 \to \min$$

bei
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$
bei $x_1, \dots, x_5 \geq 0$

*Lösung.* Wir führen Schlupfvariablen ein
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & y_1 & y_2 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Zur Bestimmung eines ersten zulässigen Tableaus lösen wir das Hilfsproblem $h = y_1 + y_2 \to \min$. Es ergibt sich das Tableau (mit Kellerzeile und dem Koeffizientenvektor von $z$)

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | $-2$ | $-3$ | $-1$ | $-1$ | 2 | 10 |
| $y_2$ | $-1$ | 1 | $-3$ | 2 | $-4$ | 0 |
| $h$ | $-3$ | $-2$ | $-4$ | 1 | $-1$ | 3 |
| $z$ | 0 | 1 | 0 | 1 | $-1$ | 3 |
| | $*$ | 1 | $-3$ | 2 | $-4$ | 0 |

Ein Austauschschritt von $x_1$ und $y_2$ (wähle die Spalte, in der $h$ den Koeffizienten $-3$ hat und noch dem Quotientenvergleich die $-1 = P_{21}$ als Pivotelement). Wir bekommen das neue Tableau

| | $y_2$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 2 | $-5$ | 5 | $-5$ | 10 | 10 |
| $x_1$ | $-1$ | 1 | $-3$ | 2 | $-4$ | 0 , |
| $h$ | 3 | $-5$ | 5 | $-5$ | 10 | 10 |
| $z$ | 0 | 1 | 0 | 1 | $-1$ | 3 |

wobei man die Spalte, welche zu $y_2$ gehört, schon weglassen kann. Wir müssen nun noch $y_2$ eliminieren, um nur noch $x$-Variablen im Tableau zu haben. Ein weiterer Austauschschritt mit $x_2$ und $y_1$ liefert:

| | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 1 | $-1$ | 2 | 2 |
| $x_1$ | $-2$ | 1 | $-2$ | 2 . |
| $z$ | 1 | 0 | 1 | 5 |

Dieses Tableau ist offensichtlich schon optimal. Um nun alle Lösungen zu bestimmen, gilt es zu beachten, dass $q$ noch eine 0 enthält. Wir sehen also, dass wir $x_4 \geq 0$ beliebig wählen können, sodass noch $x_1$ und $x_2$ nicht-negativ bleiben. Daraus ergibt sich aus $x_2 = 2 - x_4$ und $x_1 = 2 + x_4$, dass $x_4 \in [0, 2]$, also eine ganze Kante die Lösungsmenge darstellt.

**Übung 4.3.** Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$z = 3x_1 + 2x_2 + 3 \to \min$$

bei

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und $x_1, x_2, x_2 \geq 0$ mit dem dualen Simplexverfahren.

*Lösung.* Wieder führen wir Schlupfvariablen $x_4, x_5 \geq 0$ ein.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das erste Simplextableau des dualen Simplexverfahrens ist also

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $x_4$ | 1 | 1 | −2 | −2 |
| $x_5$ | −1 | 1 | −1 | −2. |
| $x_6$ | −1 | 0 | 2 | −1 |
| $z$ | 3 | 2 | 0 | 3 |

Dieses ist nicht entscheidbar. Wir wählen die erste Zeile als Pivotzeile. Nun bilden wir die Quotienten 3/1 und 2/1, wobei das Minimum bei 2 angenommen wird (hier sind nur die Quotienten mit positiven Elementen ausschlaggebend). Unser Pivotelement ist also $P_{12} = 1$.

Ein Austauschschritt liefert

| | $x_1$ | $x_4$ | $x_3$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | −1 | 1 | 2 | 2 |
| $x_5$ | −2 | 1 | 1 | 0 |
| $x_6$ | −1 | 0 | 2 | −1 |
| $z$ | 1 | 2 | 4 | 7 |

Lösung ist also: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1/2$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1/2$, $x_6 = 0$.

21

**Übung 4.4.**

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_5$ | 1 | 3 | 0 | −2 | $2-s$ |
| $x_6$ | −1 | 0 | −3 | −1 | $3-s$ |
| $x_7$ | $s$ | 2 | −1 | 3 | 5 |
| $z$ | 4 | $s+2$ | $s+5$ | $s$ | 1 |

*Lösung.*

(a) *Optimalität* liegt bei $p, q \geq 0$ vor, also $s+2, s+5, s \geq 0$ und $2-s, 3-s \geq 0$, also $0 \leq s \leq 2$. *Nicht lösbar durch unbeschränktes Fallen der Zielfunktion* ist das Tableau bei $s < -2$, denn das Schema ist primal zulässig und in der zweiten Spalte ist der Zielfunktionskoeffizient negativ, aber alle $P_{ij}$ $(j = 2)$ darüber nicht-negativ. *Nicht-Lösbarkeit wegen Leerheit des zulässigen Bereiches* gilt für $s > 3$, denn dann ist die $z$-Zeile nicht-negativ in der zweiten Zeile der Wert rechts kleiner als 0, die Werte $P_{ij}$ danaben aber alle nicht-positiv (duale Unbeschränktheit).

(b) Bei $s = 0$ ist die Lösung nicht eindeutig. Setze $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = t \geq 0$. Die Bedingungen an $t$ sind dann

a. $x_5 = -2t + 2 \geq 0$, also $t \leq 1$,
b. $x_6 = -t + 3 \geq 0$, also $t \leq 3$,
c. $3t + 5 \geq 0$, also $t \geq -3/5$,

womit sich die Kante $0 \leq t \leq 1$ als Lösungsmenge im Falle $s = 0$ herausstellt.

(c) Für $2 < s \leq 3$ lässt sich das duale Simplexverfahren anwenden, da der erste Eintrag der rechten Seite kleiner als 0 ist. Nun sind beim Ermitteln des Pivotelements die Quotienten $4/1$ und $(s+2)/3$ zu vergleichen. Da $s \leq 3$, ist das Minimum dieser immer $(s+2)/3$. Das Pivotelement ist also $P_{12} = 3$.

(d) Nach einem Simplexschritt ergibt sich

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_5$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_4$ | $1/2$ | $3/2$ | $0$ | $-1/2$ | $3/8$ |
| $x_6$ | $-3/2$ | $-3/2$ | $-3$ | $1/2$ | $5/2$ · |
| $x_7$ | $1/2$ | $13/2$ | $-1$ | $3/2$ | $19/2$ |
| $z$ | $7/2$ | $-1/2$ | $4$ | $1/2$ | $-1/2$ |

05.06.2014

Zuletzt betrachteten wir das Problem

$$c^\top x \to \min \text{ bei } Ax \geq b, x \geq 0 \qquad (P(b))$$

als eine vom Parameter $b$ abhängige lineare Optimierungsaufgabe. Dabei hingen der zulässige Bereich $G(b)$, sowie der Minimalwert $f_{\min}(b)$ von $b$ ab, es kann also $G : \mathbb{R}^n \to \operatorname{Sub} \mathbb{R}^n$ als Mengenwertige Funktion interpretiert werden.

Es kann nun eine Aussage über die Gestalt der Menge $B$ aller $b \in \mathbb{R}^n$, für die die Aufgabe keinen leeren Bereich hat, getroffen werden.

**Lemma 4.1.** *Die Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ der Stellen $b \in \mathbb{R}^n$, sodass $G(b) \neq \emptyset$ ist konvex.*

*Beweis.* Seien $b_1, b_2 \in B$, dann gibt es $x_i \in G(b_i)$ für $i = 1, 2$, Also

$$Ax_i \geq b_i,\ x_i \geq 0$$

Damit gilt, dass $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in G(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2)$, wie man direkt überprüft. □

Falls nun Entartung derart auftritt, dass für einen Wert $\hat{b} \in B$ die Aufgabe unlösbar aufgrund der Unbeschränktheit der Zielfunktion von unten ist, dann gilt dies schon für alle $b \in B$, wei das folgende Lemma verdeutlicht.

**Lemma 4.2.** *Sei ein $\hat{b} \in B$ mit $f_{\min}(\hat{b}) = -\infty$. Dann gilt $f_{\min}(b) = -\infty$ für alle $b \in B$.*

*Beweis.* Aus $f_{\min}(\hat{b}) = -\infty$ folgt, dass $P(\hat{b})$ unlösbar ist. Wegen Folgerung 3.5 ist dann das duale Problem $(D(\hat{b}))$

$$d = b^\top \to \max \text{ bei } A^\top u \leq c,\ u \geq 0$$

auch unlösbar ist mit $G_D(\hat{b}) = \emptyset$. Es gilt $G_D(\hat{b}) = G_D = \emptyset$ für alle $b \in B$. Also folgt $f_{\min}(b) = -\infty$ für alle $b \in B$. □

Das Lemma Lemma 4.2 beschreibt eine Entartungssituation — im regulären Falle gilt:

**Lemma 4.3.** *Sei $f_{\min}(\hat{b}) > -\infty$ für ein $\hat{b} \in B$. Dann ist $f_{\min} : B \to \mathbb{R}$ konvexe Funktion und es gilt*

$$f_{\min}(b) \geq f_{\min}(\hat{b}) + u^*(b - \hat{b})$$

*für alle $b \in B$. Ist $u^*$ eine Lösung von $(D(\hat{b}))$.*

Eine Verschärfung ergibt sich wie folgt:

Ist $x^* = x^*(\hat{b})$ eine nichtentartete Basislösung (Ecke von $G(\hat{b})$), so ist die Optimalwertfunktion $f_{\min}$ an der Stelle $b$ differenzierbar mit

$$\frac{\partial f_{\min}}{\partial b_j} = u_j^*$$

für $j = 1, \ldots, n$.

**Beispiel 4.1.** Ein Betrieb möchte seinen Gewinn $c^\top x \to \max$ maximieren, bei Restriktionen $Ax \leq b$, $x \geq 0$. Dabei ist der Einsatz der Resourcen $b$ variabel (über eine Zeitraum). Dual ergibt sich dann $b^\top \to \min$ bei $A^\top u \geq c$ und $u \geq 0$. Falls der Einsatz der Resource $b_j$ nun um eine Einheit erhöht wird, so ist der $u_j^*$ der 'Schattenpreis' der Resource $b_j$ (d.h., wenn $b_j$ weniger kostet, lohnt es sich zu investieren).

## 0.5 Transportoptimierung

### 0.5.1 Aufgabenstellung — das Standard-TOP

**Definition 5.1.** Gegeben sind $r$ Betriebe (Produzenten) $A_1, \ldots, A_r$, die ein gleiches Gut produzieren. (Kapazitäten $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \geq 0$), $s$ Verbraucher $B_1, \ldots, B_s$ mit Bedarf $\beta_1 \ldots, \beta_s$. Als mathematisches Modell ergibt sich mithin: Seien $c_{ik}$ die Transportkosten (je Einheit) und $x_{ik}$ die Mengen (die von $A_i$ nach $B_k$ gehen), dann ist

$$c = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{s} c_{ik} x_{ik} \to \min \text{ bei } x_{ik} \geq 0 \tag{1}$$

zu optimieren mit den Bedingungen

$$\sum_{k=1}^{s} x_{ik} = \alpha_i$$

für $i = 1, \ldots, r$, sowie

$$\sum_{i=1}^{r} x_{ik} = \beta_k$$

für $k = 1, \ldots, s$.

**Bemerkung 1.** In praktischen Aufgaben gilt $\alpha_i, \beta_k > 0$ bzgl. der Zielfunktionskoeffizienten gilt $c_{ik} \geq 0$ wird nicht gefordert. Auch möglich: $\sum_{c_{ik} x_{ik}} \to \max$ (aus Sicht der Transportunternehmens.

Dies ist klarerweise eine LOA[1] spezieller Struktur (!). Dabei sei $A$ die Matrix $rsx(r+s)$

$$x = (x_{ik}),\ c = (c_{ik}),\ b = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_r)$$

$a^{ij}$ Spaltenvektor $\begin{pmatrix} e_i \\ e_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$,

$$c^\top x \to \min \text{ bei } Ax = b,\ x \geq 0, \tag{2}$$

was die LOA in Gleichungsnormalform darstellt.

**Satz 5.1.** *Das Transportproblem (1) ist genau dann lösbar, wenn gilt*

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = \sum_{k=1}^{s} \beta_k \qquad (3),$$

*was man auch als* Sättigungsbedingung *bezeichnet.*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst $G \neq \emptyset$ genau dann, wenn die Sättigungsbedingung (3) gilt

[1] lineare Optimierungsaufgabe

$\Longrightarrow$ : Für $x \in G$ folgt:

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} x_{ik} = \sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{r} x_{ik} = \sum_{k=1}^{s} \beta_k$$

$\Longleftarrow$ : Definieren wir $\tilde{x}$ mit $\tilde{x}_{ik} := \alpha_i\beta_k/\sigma$ mit $\sigma := \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = \sum_{i=1}^{s} \beta_i$. Offenbar gilt dann $\tilde{x} \in G$.

Weiterhin ist die zulässige Menge polyedrisch, insbesondere abgeschlossen. $G$ ist aber auch beschränkt, denn $0 \leq x_{ik} \leq \min\{\alpha_i, \beta_i\}$ — also kompakt.

Die Zielfunktion $x \mapsto c^\top x$ ist nun stetig, also nimmt sie auf der zulässigen Menge ihr Minimum an (Satz von Weierstrass). □

Die duale LOA zu (2) bzw. (1) lautet nun $b^\top \to \max$ bei $u \in \mathbb{R}^{r \sqcup s}$ ('frei'). Dabei setzen wir $u^\top = (u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s)$, $u_i + v_j \leq c_{ij}$, $A_{ij}^\top = (e_i^\top e_j^\top)$.

**Satz 5.2 (Optimalitätskriterium).** *Sei $x \in G$ ($Ax = b$, $x \geq 0$). Dann sind äquivalent*

*(I) $x$ ist optimal.*

*(II) $\exists u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s$ mit $u_i + v_k - c_{ik} \leq 0$, $x_{ik}(u_i + v_k - c_{ik}) = 0$ für alle $i, j$.*

*Beweis.* Sei $x$ optimal fpr (1) und $u$ optimal für das duale Problem. Mit Satz 5.1 ist dies äquivalent zu $c^\top x = b^\top u$, was äquivalent zu $x^\top(c - A^\top u) = 0$ und $A^\top u \leq c$, das ist die Behauptung. □

**Satz 5.3.** *Jedes Simplexschema zu (2) hat genau $r + s - 1$ Basisvariable.*

*Beweis.* Zunächst $\mathrm{rg}A \leq r + s - 1$. Dies ist unmittelbar klar, denn $\sum_{i,k} x_{ik} = \sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{r} x_{ik} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} x_{ik}$ (damit muss der Defekt mindestens 1 sein). Nun noch $\mathrm{rg}A \geq r + s - 1$, denn es lässt sich eine reguläre Untermatrix dieser Größe finden: Wähle einfach die Spalten $a_{11}, \ldots, a_{1s}, a_{21}, \ldots, a_{r1}$ stellen sich als linear unabhängig heraus.

16.06.2014

□

**Korollar 1.** Jede Ecke hat maximal $r + s - 1$ positive Komponenten.

**Definition 5.2 (Zyklus).** Eine Folge von $2l$ Zellen $(i_1, k_1), (i_1, k_2), (i_2, k_2), \ldots, (i_l, k_1)$ mit $i_\nu \neq i_\mu$, $k_\nu \neq k_\mu$ heißt Zyklus.

**Beispiel 5.1.** Es ist

$$(3,1), (3,5), (2,5), (2,2), (4,2), (4,3), (1,3), (1,3), (1,1)$$

ein Zyklus.

**Lemma 5.1 (Existenz von Zyklen).**

*(I) Sei $\mathcal{J}$ eine Menge von Zellen. Falls $|\mathcal{J}| \geq r+s$, so enthält $\mathcal{J}$ einen Zyklus.*

*(II) Sei $x = (x_{ik})$ ein zulässiger Transportplan. $x$ ist genau dann eine Ecke von $G$, wenn $\mathcal{J}_+ := \{(i,k) : x_{ik} > 0\}$ keinen Zyklus enthält.*

*Beweis.* Übung. □

**Satz 5.4.** *Es seien $u_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ $v_j$ $(j = 1, \ldots, s)$ beliebige Zahlen. Es sei eine weitere Zielfunktion gegeben:*

$$\overline{z} = \overline{z}(x) = \sum \sum \overline{c}_{ik} x_{ik}$$

*mit $\overline{c}_{ik} = c_{ik} - (u_i + v_k)$. Dann gilt für alle $x \in G$. $\overline{z}(x) = z(x) - w$ mit $w = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i + \sum_{k=1}^{s} \beta_k v_k$.*

### 0.5.2 Erzeugen eines ersten Simplexschemas

Es gibt drei ‘Grundregeln’:

1. Markieren eines (Tableau-)Elementes und maximale Belegung $\overline{x}_{ik} = \min \{\alpha_i, \beta_k\}$.

2. Korrigieren von $\alpha_i$ und $\beta_k$:

$$\tilde{\alpha}_i = \alpha_i - \overline{x}_{ik},$$

$$\tilde{\beta}_k = \beta_k - \overline{x}_{ik}.$$

3. Streichung von ‘abgesättigten’ Zeilen bzw. Spalten ($\tilde{\alpha}_i = 0$ bzw. $\tilde{\beta}_k = 0$).

Methoden unterscheiden sich nur in der Auswahl der ersten der obigen Regel.

**Nord-West-Ecken-Regel:** Markierung des linken oberen Eintrags.

**Minimale-Kosten-Regel:** Auswahl $(\bar{i}, \overline{k})$ mit $c_{\overline{i},\overline{k}} = \min_{i,k} c_{i,k}$.

**Methode von Vogel:** Bestimme in jeder Zeile und Spalte die Differenz zwischen den beiden kleinsten Elementen. Belege diejenige Zeile bzw. Spalte, in denen diese Differenz maximal wird.

**Bemerkung 1.** Falls weniger als $r + s - 1$ Zellen mit $v_{ik} > 0$ belegt werden, so ‘Auffüllen’ mit ‘0’, dabei ist auf Zyklenfreiheit zu achten.

**Abarbeiten im 'Rechteckschema':** Daten sind in einer rechteckigen Anordnung gegeben.

| $R$ | $\beta_1$ | $\cdots$ | $\beta_s$ |
|---|---|---|---|
| $\alpha_1$ | $c_{11}$ | $\cdots$ | $c_{1s}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ |
| $\alpha_r$ | $c_{r1}$ | $\cdots$ | $c_{rs}$ |

**Beispiel 5.2 (Nord-West-Ecken-Regel, Minimale Kosten).** Gegeben das Schema

| $R$ | 12 | 5 | 6 | 7 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 12 | 6 | 10 | 9 | 5 |
| 19 | 10 | 16 | 17 | 3 | 7 |
| 14 | 4 | 11 | 5 | 8 | 10 |

NW-Ecken-Regel liefert:

| $NW$ | 12 | 5 | 6 | 7 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 4 | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ |
| 19 | 8 | 5 | 6 | 0 | $*$ |
| 14 | $*$ | $*$ | $*$ | 7 | 7 |

Die 0 entsteht hier gemäß der Bemerkung. Minimale Kosten:

| $MK$ | 12 | 5 | 6 | 7 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | 4 |
| 19 | $*$ | 5 | 4 | 7 | 3 |
| 14 | 12 | $*$ | 2 | $*$ | $*$ |

Komplementäres Schema ($d_{ik} = c_{ik} - (u_i + v_k)$):

| $T$ | $\overline{v}_1$ | $\cdots$ | $\overline{v}_s$ |
|---|---|---|---|
| $\overline{u}_1$ | $x_{11}$ | $d_{ik}$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $x_{12}$ | | |
| $\overline{u}_r$ | | | |

### 0.5.3 Das Simplexverfahren für TOP

Verfahren zur Bestimmung eines optimalen Transportplans: aktuelle Basislösung (Startlösung).

1. Sei $\mathcal{J}_B$ die Indexmenge der Basisvariablen ('Zellen'). Bestimmen von $u_i$, $v_k$ (Optimalitätsindikatoren) aus $u_i + v_k - c_{ik} = 0$ $((i,k) \in \mathcal{J}_B)$. Wegen $|\mathcal{J}| = r + s - 1$ (und rg$X = r + s - 1$). Das System ist also unterbestimmt. Setzen von $u_1 = 0$ (z.B. eine Variable beliebig wählbar). Die Lösung kann also sukzessive explizit bestimmt werden.

2. Setze (für Nicht-Basis-Variablen) $d_{ik} = c_{ik} - u_i - v_k$. Falls gilt $d_{ik} \geq 0$ für alle $i, k$, dann ist die aktuelle Basislösung optimal.

3. Falls die Basislösung nicht optimal ist (letzte Bedingungen nicht erfüllt), so ermittle Indexpaar $(p, q)$ mit $d_{pq} < 0$ (mit $d_{pq} = \min_{i,j} d_{ij}$). Bestimme einen Zyklus in $\mathcal{J}_B \cup \{(p, q)\}$ (immer möglich wegen Lemma 5.1 (S. 14)). Markiere die Indexpaare des Zyklus ausgehend von $(p, q)$ mit '+' und '−' ($(i, k) \in \mathcal{J}_-, \mathcal{J}_+$). Bestimme $\hat{t} := x_{\overline{pq}} = \min\{x_{ik} : (i, k) \in \mathcal{J}_-\}$. Setze $\tilde{x}_{pq} = x_{pq}$, $\tilde{x}_{ik} = x_{ik} + \hat{t}$, ($(i, k) \in \mathcal{J}_+$), $\tilde{x}_{ik} = x_{ik} - \hat{t}$ ($(i, k) \in \mathcal{J}_-$) und $\mathcal{J}_{\tilde{B}} = \mathcal{J}_B \setminus \{(\overline{p}, \overline{q})\} \cup p, q$

**Beispiel 5.3.** Daten seien:

| $R$ | 3 | 4 | 2 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 2 | 5 | 1 | 3 |
| 7 | 2 | 6 | 4 | 1 |
| 3 | 1 | 3 | 1 | 5 |

Man erhält mit der Nord-West-Ecken-Regel (Basiselemente in dieser Reihenfolge ($i$) selektiert).

| $T0$ | 2 | 5 | 3 | 0 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 3(1) | 2(2) | $-2$ | 3 |
| 1 | $-1$ | 2(3) | 2(4) | 3(5) |
| 5 | $-6$ | $-7$ | $\to -7$ | 3(6) |

($z = 54$), ($\hat{t} = 2$) Der Zyklus ist das $2 \times 2$-Quadrat unten rechts. Also $(p, q) = (3, 3)$. Damit ist der Zyklus $(3, 3)+, (3, 4)-, (2, 4)+, (2, 3)-$.

| $T1$ | 2 | 5 | $-4$ | 0 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 3(1) | 2(2) | 5 | 3 |
| 1 | $-1$ | 2(3) | 7 | $\to 5$ |
| 5 | $-6$ | $-7(4)$ | 2(5) | 1(2) |

($z = 40$)

**Bemerkung 2 zu Optimalitätstest.** Die reduzierten Kosten $d_{ik} = c_{ik} - u_i - v_k$ sind unabhängig von der speziellen Wahl der Lösung in (*) (insbesondere unabhängig von der Wahl $u_1 = 0$)

*Beweis.* $u_i, v_k$ Lösung von (*) ist gleichbedeutend mit $\tilde{u}_i = u_i + s$, $\tilde{v}_k = v_k - s$ ($s \in \mathbb{R}$). $d_{ik} = \tilde{d}_{ik}$ □

**Bemerkung 3 zu Modifikationen.**

1. "Verbotene Wege" $A_i$ soll $B_j$ nicht beliefern, dann $c_{ij} = \infty$ ($\geq K$) bzw. $c_{ij} = K \geq \max\{c_{ik}\} \sum a_i >> 1$.

2. $A_i$ soll mindestens $r$ Einheiten nach $B_k$ liefern, dann $\tilde{\alpha}_i = \alpha_i - r$, $\tilde{\beta}_k = \beta_k - r$ ($c^0_{ik} = r$)
3. "Überkapazität"$\sum \alpha_i > \sum \beta_i$, SStrohmann"$\beta_{k+1} = \sum \alpha_i \sum \beta_k$ ("Lagerkosten"+Transportkosten)
4. 'Unterversorgung' $\alpha_{r+1} = \sum \beta_k - \sum \alpha_i$ ('Strafkosten')
5. Kapazitätsbeschränkungen $x_{ik} \leq s_{ik}$ ('upper bounding')
6. Offene TOP: '=' (weitere Ungleichungsbeschränkungen).

## 0.6 Ganzzahlige Optimierung

### 0.6.1 Die Methode 'Branch and Bound' (BaB)

**Grundprinzipien:** Aufgabenstellung ist es $f \to \min$ bei $x \in G$ mit $G$ endlich. Zum Beispiel betrachte das Rucksackproblem $\sum_{i=1}^n c_i x_i \to \max$, $G := \left\{x \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} : \sum_{i=1}^n x_i \leq l, x_i \in \mathbb{N}\right\}$.

**Vorgehensweise** (dabei sei ein 'aktuell bestes' $\overline{x} \in G$ bekannt) ist die schrittweise Zerlegung in disjunkte Teilmengen $G', G''$ mit $G' \cup G'' = G$, $G' \cap G'' = \emptyset$. Verzweigung (branch): Gewinnung von unteren Schranken auf den erzeugten Teilmengen durch einfache Hilfsaufgaben (d.h $d(G') \leq f(x)$ für alle $x \in G'$).

Danach verfährt man rekursiv (man erhält einen 'Aufsplittungsbaum').

Im weiteren Verlauf braucht *nicht* weiter verzweigt zu werden, wenn einer der folgenden Fälle eintritt:

*Fall 1.* $G' = \emptyset$.

*Fall 2.* $d(G') > f(\overline{x})$

*Fall 3.* $d(G'') = f(\overline{x})$ und $\overline{x} \in G''$

**Definition 6.1.** Das Problem $z(x) \to \min$ bei $x \in Q$ (1.1), heißt Relaxation zum Problem $f(x) \to \min$, bei $x \in G$ (1.2), falls gilt $G \subseteq Q$, $z(x) \leq f(x)$ für alle $x \in G$.

**Lemma 6.1 (hinreichendes Optimalitätskriterium).** *Es sei $\hat{x} \in Q$ Lösung von (1.1). Gilt $\tilde{x} \in G$ und $z(\tilde{x}) = f(\tilde{x})$, dann ist $\tilde{x}$ Lösung von (1.2).*

Möglich ist

- lineare Optimierungsaufgabe ohne Ganzzahligkeitsforderung
- Straf-Ersatzprobleme
- duale Probleme

**Anwendung von 'Branch and Bound' in der ganzzahligen Optimierung** *Der Algorithmus von Land/Doig/Dakin:* Gegeben sei die Aufgabe

$$z(x) = c^\top x \to \min \text{ bei } Ax = b, x \geq 0 \text{ und } x \in \mathbb{Z} \tag{1.3}$$

Sei ein optimales Tableau für (1) erreicht.

$$\begin{array}{ccc} & x_N(=0) & \\ \hline x_B & P & p \\ z & q^\top & q_0 \end{array} \quad \text{bei } (x_b, x_n) = (p, 0) \tag{1.4}$$

$p \geq 0$, $q \geq 0$. Falls $p \in \mathbb{N}_+^m$, dann löst $(p, 0)$ die Aufgabe (2). $p_i \notin \mathbb{N}$, dann Verzweigung in $G'$:$x_i \leq \lfloor p_i \rfloor$, $x \in G$ und $G''$:$x_i \geq \lfloor p_i \rfloor + 1$, Danach

$(1_1)$ (1) mit $x_i \leq \lfloor p_i \rfloor$

$(1_2)$ (1) mit $x_i \geq \lfloor p_i \rfloor + 1$,

$x_i + s_i = \lfloor p_i \rfloor$.

Beim Algorithmus von Land/Doig/Dakin: Einfügen neuer Restriktionen:

1. $x_i \leq [p_i] \Rightarrow s = [p_i] - x_i = [p_i] - p_i - \sum P_{ij} x_j$

2. $x_i \geq [p_i] + 1 \Rightarrow s = x_i - [p_i] - 1 = p_i - [p_i] - 1 \pm \sum P_{ij} x_j$

**BaB beim Rundreiseproblem (Travelling Salesman Problem)** Aufgabenstellung: Gegeben sind $n$ Städte, bekannte Kosten $c_{i,j} \geq 0$ (Start bei $i = 1$). Man bestimme von einem Startpunkt ausgehend eine kostenoptimierte Tour, in der jede Stadt genau eimal erreicht wird.

$$z = \sum_{k=1}^{n} c_{i_k i_{k+1}} \to \min \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_n) \in \mathrm{P}(1, 2, \ldots, n) i_{1+n} = i_1 = 1 \quad ((4))$$

Zulässiger Bereich endlich: $(n + 1)!$ Rundreisen.

**Bemerkung** Falls $c_{ij} \neq c_{ji}$ wird das Problem *The windy chinese postman problem* genannt.

Äquivalente Formulierung: ((4)arabic19) ist äquivalent zu

1. $$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \sum_j x_{ij} = 1 \forall i \sum_i x_{ij} = 1 \forall j$$

2. $x_{ij} \in \{0, 1\}$

3. keine Subtouren erlaubt

**1D-Zuschnittsproblem (informativ)** Aufgabe: Rohmaterial der Länge $L$

Benötigt: $m$ Teile der Länge $l_i \leq L$ für $i = 1, \dots, m$ mit benötigter Stückzahl $s_1 \in \mathbb{Z}_+$.

Modell:

1. Generiere alle Zuschnittvarianten $a_j = (a_1^j, \dots, a_m^j) \in \mathbb{Z}_+^m$ mit

$$\sum_{i=1}^{m} a_l^j l_i \leq L \;, j = 1, \dots, n$$

(zum Beispiel $a^i = e_i$) mit $n >> m$.

$x_j \in \mathbb{Z}_+$ ist die verwendete Anzahl von Zuschnittsvarianten.

(ZP): $\sum x_j \to \min$ mit $\sum_{j=1}^{n} a_i^j x_j \geq s_i,\ x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, n$

Sinnvolle Vorgehensweise: Ausgehend von aktueller Basislösung generiere eine neue 'bestmögliche' Varianten anhand der aktuellen Optimalitätsindikatoren.

Das Problem der Spaltengenerierung

$s := \left\{a^j\right\} \subset \mathbb{Q}^m$ mit $|s| = n >> m$. Das Problem

$c^T x = \sum c_j x_j$ bei $\sum a^j x_j = b$ mit $x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, n$. Spezieller Zuschnitt $c = 1$, $b = (s_1, \dots s_n)^T$

Sei nun $J_B$ bekannt mit $(a^j)$, $j \in J_B$ linear unabhängig.

O.B.d.A. sei $J_B = \{1, \dots, m\}$, $B := (a^1, \dots, a^m)$, $(\exists B^{-1})$

Lineare Optimierungsaufgabe für reduzierte Kosten: $c_N - c_B^T B^{-1} N$ mit $j \in J_N$

Daraus wird eine 'Richtungssuchaufgabe' $c_j - c_B^T B^{-1} a^j \to \min$ bei $a^j \in s, \sum a_i^j l_i \leq L$.

Speziell für den Zuschnitt:

$1 - (1, \dots, 1)^T B^{-1} a \to \min$ bei

$$\sum_{i=1}^{m} a_i l_i \leq L,$$

$a_i \in \mathbb{Z}_+$ (Rucksackproblem).

23

**Übung 6.1.** Gegeben seien Vektoren $a \in \mathbb{R}^{m_1}, b \in \mathbb{R}^{m_2}, c \in \mathbb{R}^{n_1}, d \in \mathbb{R}^{n_2}$ und Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$, $B \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_2}$, $C \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_1}$ $D \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$. Betrachtet werde die lineare Optimierungsaufgabe

$$z = c^\top x + d^\top y \to \min$$

bei

$$Ax + By \leq a,\ Cx + Dy = b,\ x \in \mathbb{R}_+^{n_1}, y \in \mathbb{R}^{n_2}.$$

(a) Gib die duale Aufgabe an.

(b) Formuliere eine angepasste Version des Charakterisierungssatzes der primalen und dualen Optimierungsaufgaben.

*Lösung.*

(a) Es soll $z = c^\top x + d^\top y \to \min$ bei

$$Ax + By \leq a,$$

$$Cx + Dy = b,$$

$$x \geq 0, \; y \text{ frei}$$

erreicht werden. Idee ist es die Aufgabe in die duale Form zu überführen: $z = \tilde{c}^\top \tilde{x} \to \min$ bei

$$\tilde{A}x \geq \tilde{b}, \; \tilde{x} \geq 0 \tag{P}$$

Dafür ist dann die duale Aufgabe bekannt:

$$\tilde{b}^\top \tilde{u} \to \max \text{ bei } \tilde{A}^\top \tilde{u} \leq \tilde{c}, \; \tilde{u} \leq 0. \tag{D}$$

Dazu führen wir Variablen $y^+, y^- \geq 0$ ein mit $y = y^+ - y^-$, dadurch ist $z = c^\top x + d^\top y^+ - d^\top y^-$. Weiter kann man mithin $Ax + By \leq a$ nach $-Ax - By^+ + By^- \geq a$ überführen. $Cx + Dy = b$ schreibt man als die zwei Ungleichungen $Cx + Dy \geq b$ und $Cx + Dy \leq b$, also mit $y^+, y^-$ dann $-Cx - Dy^+ + Dy^- \geq, \leq -b$. Es ergibt sich also

$$\tilde{c} = \begin{pmatrix} -c \\ d \\ -d \end{pmatrix}, \; \tilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ y^+ \\ y^- \end{pmatrix}, \; \tilde{b} = \begin{pmatrix} -a \\ b \\ -b \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} -A & -B & B \\ C & D & -D \\ -C & -D & D \end{pmatrix}.$$

mit der Zerlegung

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}$$

lässt sich schreiben $(D)$ schreiben als

$$-a^\top u^1 b^\top u^2 - b^\top u^3 \to \max$$

bei

$$-A^\top u^1 + C^\top u^2 - C^\top u^3 \leq c$$

$$-B^\top u^1 + D^\top u^2 - D^\top u^3 \leq d$$

$$B^\top u^1 - D^\top u^2 + D^\top u^3 \leq -d$$

bei $u^i \geq 0$. Man kann $v := u^2 - u^3$ als eine freie Variable schreiben und die letzten beiden Ungleichungen zusammenfassen zu $-B^\top u^1 + D^\top v = d$. Setze $u := -u^1$ $(u \leq 0)$. Dann ergibt sich

$$a^\top u + b^\top \to \max$$

bei

$$A^\top u + C^\top v \leq c,$$

$$B^\top u + D^\top v = d$$

und $u \leq 0$, $v$ frei, als duales Problem.

(b) Für $(P)/(D)$ ist der Charakterisierungssatz bekannt. $\tilde{x}^*$ ist genau dann optimale Lösung von $(P)$, wenn $\tilde{u}^*$ existiert, sodass

- $\tilde{x}^*$ für $(P)$, $\tilde{u}^*$ zulässig für $(D)$
- $(\tilde{u}^*)^\top(\tilde{A}\tilde{x}^* - \tilde{b}) = 0$, $(\tilde{x}^*)(\tilde{A}^\top \tilde{u}^* - \tilde{c}) = 0$.

Bei uns gilt:

$$(\tilde{A}\tilde{x} - \tilde{b}) = \begin{pmatrix} -Ax - By^+ + By^- + a \\ Cx + Dy^+ - Dy^- - b \\ -Cx - Dy^+ + Dy^- + b \end{pmatrix}, \; \tilde{u} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}.$$

Also

$$\begin{aligned} \tilde{u}^\top(\tilde{A}\tilde{x} - \tilde{b}) &= (u^1)^\top(-Ax - By^+ + By^- + a) \\ &\quad (u^2)^\top(Cx + Dy^+ - Dy^- - b) \\ &\quad (u^3)^\top(-Cx - Dy^+ + Dy^- + b) \\ &= u^\top(Ax + By - a) \\ &\quad + v^\top \underbrace{(Cx + Cy - b)}_{=0 \text{ für zulässiges } (x,y)} \\ &= u^\top(Ax + By - a) \end{aligned}$$

analog: $(\tilde{x})^\top(\tilde{A}^\top \tilde{u} - \tilde{c}) = x^\top(A^\top u + C^\top - c)$ (falls $(u, v)$ zulässig für $(D)$). Bedingungen im angepassten Charakterisierungssatz:

- $(x^*, y^*)$ zulässig für $(P)$, $(u^*, v^*)$ zulässig für $D$.
- $(u^*)^\top(Ax^* + By^* - a) = 0$, $(x^*)^\top(A^\top u^* + C^\top v^* - c) = 0$.

*Lösung.*

(a) $z = 10x_1 - x_2 \to \max$ bei

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix}$$

und $x_1 \geq 0$, $x_2$ frei. Optimaler Zielfunktionswert ist $z^* = 69$. Drei $\leq$-Ungleichungen führen auf $\geq 0$-Variablen $u_1, u_2, u_3$. Die Bedingung $x_1 \geq 0$ führt auf $\geq$-Ungleichung (erste Spalte und Zielfunktionskoeffizient)

$$2u_1 + u_2 + u_3 \geq 10,$$

weil $x_2$ frei ist erhalten wir die Gleichung (zweite Spalte und Zielfunktionskoeffizient)

$$u_1 + 2u_2 - u_3 = -1$$

Zielfunktion des dualen Problems ist $z_D = 7u_1 + 10u_2 + 12u_3 \to \min$ (da $(P)$ ein Maximierungsproblem war, die Koeffizienten sind die rechte Seite von $(P)$). Es ist daher $u^* = (3, 0, 4)$ eine Lösung des dualen Problems, denn $z_D(u^*) = 7 \cdot 3 + 12 \cdot 4 = 69 = z^*$. Aufgrund der Dualität ist $u^*$ optimale Lösung der dualen Aufgabe.

(b) Charakterisierungssatz liefert: Optimale Lösung des Ausgangspbolems muss erfüllen:

$$u_1^*(2x_1+x_2-7) = 0,\ u_2^*(x_1+2x_2-10) = 0, u_3^*(x_1-x_2-12) = 0,\ x_1(2u_1^*+u_2^*-10) = 0$$

erfüllt für $u^*$ sind die Gleichung mit $u_2^*$ und $x_1$. Es muss noch gelten $2x_1 + x_2 - 7 = 0$, $x_1 - x_2 - 12 = 0$ also $x_1^* = 19/3$, $x_2^* = -17/3$.

## 0.7 Optimierungsprobleme über Graphen

### 0.7.1 Grundbegriffe

Ausgangssituation (Graph): $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ ist Bogenmenge ($|X| = m$), $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$ Knotenmenge ($|V| = n$), Abbildungen $a, e : X \to V$.

**Definition 7.1.** Die Abbildungen $a, e$ heißen *Inzidenzabbildungen*.

$G = \{X, V, a, e\}$ ist Graph mit Anfangsknoten $a(x)$ und Endknoten $e(x)$. $x_{ik} \in X$ mit $a(a_{ik}) = v_i$, $e(x_{ik}) = v_k$.

**Definition 7.2.** Die *Adjazenzmatrix* $A$ ist definiert als

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n := \begin{cases} 0, & x_{ij} \notin X \\ 1, & x_{ij} \in X \end{cases}$$

und die *Inzidenzmatrix* als

$$B = (b_{ij})_{i,j=1}^{n,m} := \begin{cases} 1, & v_i = a(x_j) \\ 0, & \text{sonst} \\ 1, & v_i = e(x_j) \end{cases}$$