

Algebraische Topologie

Vorlesungsskript
Carsten Schultz

Fachbereich Mathematik
TU Dresden

Dresden, Wintersemester 2013/2014

Inhaltsverzeichnis

0	Präliminarien: Etwas allgemeine Topologie.	3
	Metrische Räume	3
	Homöomorphie 4 Offene Mengen 7	
	Topologische Räume	9
	Mehr Mengen 11 Mehr Stetigkeit 12	
	Unterräume und das Produkt zweier Räume	14
	Zusammenhang	17
	Komponenten 19 Wegzusammenhang 21	
	Kompaktheit	22
	Produkte 24 Metrische Räume 24	
	Trennungsaxiome	26
	Definitionen und erste Eigenschaften 26 Kompakte Räume sind normal 27	
	Literatur	28
1	Quotienten	29
	Homotopie, erste Definitionen	29
	Quotienten	30
	Äquivalenzrelationen	32
	Das Zusammenschlagen von Unterräumen	33
	Projektive Räume	35
	Definition und erste Eigenschaften 35 Eine andere Dar- stellung 36	
	Quotienten und Produkte	36
2	Homotopie	38
	Homotopie	38
	Zusammenziehbare Räume	40
3	Die Fundamentalgruppe	42
	Wege	42
	Die Fundamentalgruppe	43
	Überlagerungen und die Fundamentalgruppe von \mathbb{S}^1	46

4 Erste Anwendungen von $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ und mehr Elementares über π_1	51
Der Brouwersche Fixpunktsatz	51
Abbildungsgrad und der Fundamentalsatz der Algebra	52
Weitere Eigenschaften der Fundamentalgruppe	54
Der Einfluss des Basispunktes 54	Homotopieäquivalenz 55
Freie Homotopie und die Fundamentalgruppe	56
5 Beispiele von Überlagerungen	58
Einfache Beispiele von Überlagerungen	58
Projektive Räume 58	Die Kleinsche Flasche 60
6 Mehr Beispiele von Überlagerungen	63
Die Operation der Fundamentalgruppe auf der Faser einer Überlagerung	63
$\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$	65
7 Deckbewegungen und die Klassifikation von Überlagerungen	68
Die Deckbewegungsgruppe	69
Klassifikation von Überlagerungen	71
Die universelle Überlagerung von $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$	73
8 Der Satz von Seifert und van Kampen	75
9 Das Anheften von Zellen	82
Verkleben	82
Summen 82	Verkleben 83
Das Anheften einer Zelle	84
Der Effekt auf die Fundamentalgruppe	86
Beispiele	88
Kleinsche Flasche 88	Projektive Räume 88
10 Simplicialkomplexe	90
Abstrakte Simplicialkomplexe und Triangulierungen	90
11 Die Fundamentalgruppen von Simplicialkomplexen	95
Die Fundamentalgruppe eines unendlichen Simplicialkomplexes . .	95
Zusammenhang	96
Graphen	96
Einschub: Freie Gruppen	98
Die Fundamentalgruppe eines Simplicialkomplexes	100

12 Die Homologiegruppen eines Simplicialkomplexes	104
Definition der Homologiegruppen	104
Die Homologie eines Simplexes	107
13 Kettenabbildungen und Kettenhomotopien	110
Simpliciale Abbildungen und Kettenabbildungen	110
Kettenabbildungen 110	
Kettenhomotopien	112
Bäume sind azyklisch	113
14 Exakte Sequenzen und H_1	115
Exakte Sequenzen	115
Relative Homologie	117
H_1	119
15 Topologische Invarianz der Homologie	121
Simpliciale Approximation	121
Unterteilungen	123
Der simpliciale Approximationssatz	125
Funktorialität bezüglich stetiger Abbildungen	126
Eine erste Anwendung	126
16 Homotopieinvarianz, Euler-Charakteristik und mehr	127
Mehr zu simplicialen Abbildungen	127
Homotopieinvarianz	128
Die Euler-Charakteristik	130
17 Der Satz vom Igel und mehr	132
Der Satz vom Igel und verwandte Sätze	132
Die Homologie des Produkts eines Raumes mit einer Sphäre	134
18 Zelluläre Homologie und der Satz von Borsuk und Ulam	137
Zelluläre Homologie	137
Einfache Beispiele zur Berechnung von Homologiegruppen 137	
Der zelluläre Komplex 137	
Die Homologie von projektiven Räumen 137	
Der Satz von Borsuk-Ulam	137
Die \mathbb{Z}_2 -Homologiesequenz einer zweifachen Überlagerung 138	
Der Satz von Borsuk-Ulam 138	

Abschnitt 0

Präliminarien: Etwas allgemeine Topologie.

Metrische Räume

Eine ebenso richtige wie nichtssagende Antwort auf die Frage, was denn Topologie sei, wäre „das Studium stetiger Abbildungen.“ Stetigkeit kennen wir bisher als Eigenschaft von Funktionen zwischen Teilmengen des euklidischen Raums oder allgemeiner zwischen metrischen Räumen.

0.0 Definition. Sei X eine beliebige Menge. Eine *Metrik* auf X ist eine Funktion $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

- (i) $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$ und $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$,
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$ (*Symmetrie*),
- (iii) $d(x, z) + d(z, y) \geq d(x, y)$ für alle $x, y, z \in X$ (*Dreiecksungleichung*).

Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d) bestehend aus einer Menge X und einer Metrik d auf ihr.

Wir werden den metrischen Raum (X, d) nur mit X bezeichnen, wenn keine Verwechslungsmöglichkeit besteht.

0.1 Beispiele und Definitionen.

- ▷ Der *euklidische Raum* \mathbb{R}^n mit der Metrik $d(x, y) = (\sum_k (x_k - y_k)^2)^{\frac{1}{2}}$ ist wohl der metrische Raum, den wir am besten kennen. Wenn wir von dem \mathbb{R}^n als metrischen Raum reden, ohne näher die Metrik zu bestimmen, werden wir immer diese meinen.
- ▷ Ist (X, d) ein metrischen Raum und $Y \subset X$, so ist auch $(Y, d|_{Y \times Y})$ ein metrischer Raum. Insbesondere können wir also jede Teilmenge eines euklidischen Raumes als metrischen Raum auffassen.

▷ Eine beliebige Menge X wird durch die *diskrete Metrik*

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

zu einem (nicht sehr spannenden, aber durchaus wichtigen) metrischen Raum.

0.2 Definition (Stetigkeit). Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine Funktion. Ist $x \in X$, so heißt f *stetig in x* , wenn zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, ein $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x' \in X$ mit $d_X(x, x') < \delta$ gilt, dass $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$. Die Funktion f heißt *stetig*, wenn sie in jedem $x \in X$ stetig ist.

Für ein paar wichtige Teilmengen von euklidischen Räumen legen wir Bezeichnungen fest.

0.3 Notation. Es sei

$$I := \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$$

das Einheitsintervall und für $n \in \mathbb{N}$

$$D^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$$

die n -dimensionale Scheibe (auch Ball oder Kugel genannt) und

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$$

die n -dimensionale Sphäre, wobei $\|\bullet\|$ die euklidische Norm bezeichne.

Homöomorphie

In der Topologie betrachtet man Räume meist nur bis auf Homöomorphie, eine Äquivalenzrelation, die wir jetzt definieren.

0.4 Definition. Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen heißt ein *Homöomorphismus*, wenn f stetig ist und es eine stetige Abbildung $g: Y \rightarrow X$ gibt, so dass $f \circ g = \text{id}_Y$, $g \circ f = \text{id}_X$. Zwei Räume X und Y heißen *homöomorph*, $X \approx Y$, wenn zwischen ihnen ein Homöomorphismus existiert.

Etwas direkter ausgedrückt ist ein Homöomorphismus also eine stetige Bijektion, deren Umkehrfunktion auch stetig ist.

0.5 Beispiel. Man betrachte $I^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_k \in I \text{ für alle } k\}$. Die Abbildung

$$I^n \rightarrow D^n$$

$$x \mapsto \begin{cases} 2 \frac{x - (1/2, 1/2, \dots, 1/2)}{\|x - (1/2, 1/2, \dots, 1/2)\|} \max_k |x_k - 1/2|, & x \neq (1/2, 1/2, \dots, 1/2), \\ 0, & x = (1/2, 1/2, \dots, 1/2), \end{cases}$$

ist ein Homöomorphismus mit inverser Abbildung

$$D^n \rightarrow I^n$$

$$x \mapsto (1/2, 1/2, \dots, 1/2) + \begin{cases} \frac{x}{2 \max_k |x_k|} \|x\|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

wie man durch Nachrechnen feststellt.

0.6 Beispiel. Die Abbildung

$$[0, 2\pi) \rightarrow S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

$$x \mapsto (\sin x, \cos x)$$

ist stetig und bijektiv, aber *kein* Homöomorphismus, denn die Umkehrabbildung ist bei $(0, 1) \in S^1$ unstetig. In der Tat sind $[0, 2\pi)$ und S^1 nicht homöomorph; um das zu zeigen, könnte man die Kompaktheit von S^1 ausnutzen, oder dass $[0, 2\pi)$ einen Randpunkt hat, S^1 aber nicht, oder dass S^1 nie in zwei Teile zerfällt, wenn man einen Punkt herausnimmt, oder...

0.7 Beispiel. Man betrachte einen Doughnut¹ und eine Kaffeetasse als Unterräume des \mathbb{R}^3 . Diese sind homöomorph, wie wir jetzt andeuten wollen. Zunächst schlagen wir von der Tasse den Henkel ab, markieren aber auf beiden Teilen die Bruchstelle. Ebenso schneiden wir den Doughnut so in zwei Teile, dass jeder von ihnen wie ein Henkel aussieht. Nun gibt es schon einmal einen Homöomorphismus von dem Tassenhenkel zu der einen Doughnuthälfte, der Bruchstelle auf Schnittstelle abbildet. Die zweite Doughnuthälfte ist ein (gebogener) Zylinder, also, da wir ja bereits in Beispiel 0.5 gesehen haben, dass Kanten nichts ausmachen, ein Ball. Von dem von der Tasse übriggebliebenen Becher bemerken wir, dass er auch bis auf Homöomorphie nichts anderes ist als ein Ball, auch wenn er recht platt ist und gebogen im \mathbb{R}^3 liegt. Nun gibt es zwischen diesen beiden Stücken also wieder einen Homöomorphismus, und zwar sogar einen, der wieder Bruchstelle auf Schnittstelle abbildet. Das ganze lässt sich so einrichten, dass die beiden Homöomorphismen an der Bruch- beziehungsweise Schnittstelle zusammenpassen und so einen Homöomorphismus von der Tasse zum Doughnut liefern.

¹Man verzeihe die Amerikanisierung. Natürlich gibt es auch deutsches Gebäck gleicher Form, und das schmeckt sicher auch zu Kaffee.

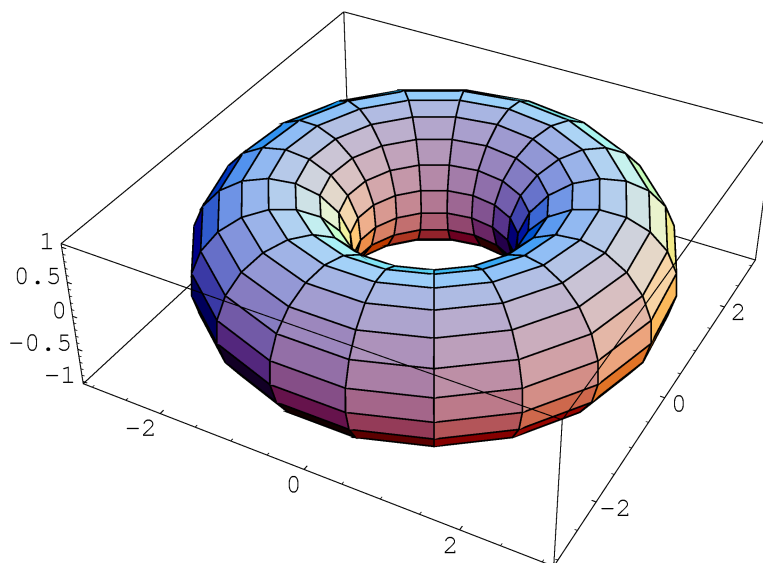


Abbildung 1: Torus in Mathematica

0.8 Beispiel. Den Doughnut aus dem letzten Beispiel nennen wir üblicherweise den Volltorus, seinen Rand den Torus. Als Rotationskörper im \mathbb{R}^3 erhält man sie zum Beispiel als

$$\{(x \sin \phi, x \cos \phi, y) : (x, y, \phi) \in \mathbb{R}^3, (x - 2)^2 + y^2 \leq 1\}$$

für den Volltorus und

$$\{(x \sin \phi, x \cos \phi, y) : (x, y, \phi) \in \mathbb{R}^3, (x - 2)^2 + y^2 = 1\}$$

für den Torus, man vergleiche mit Abbildung 1, die die Mathematica-Ausgabe für

```
ParametricPlot3D[
  {Sin[phi](Sin[rho] + 2), Cos[phi](Sin[rho] + 2), Cos[rho]},
  {phi, 0, 2Pi}, {rho, 0, 2Pi}]
```

zeigt. Hier wurde also auch noch $\{(x, y) : (x - 2)^2 + y^2 = 1\}$ durch $(\sin \rho + 2, \cos \rho)$ parametrisiert.

Natürlicher jedoch erhält man zu diesen homöomorphe Räume als Teilmengen des $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, nämlich den Volltorus als $S^1 \times D^2$ und den Torus als $S^1 \times S^1$. Ein Homöomorphismus ist in beiden Fällen die Einschränkung der Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &\mapsto ((x_3 + 2)x_1, (x_3 + 2)x_2, x_4) \end{aligned}$$

und die Umkehrabbildung die Einschränkung von

$$(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2, x_3 \right)$$

Das Nachrechnen ist lästig, aber elementar.

0.9 Beispiel. Ist X eine Menge, auf der zwei Metriken d und d' definiert sind, und gibt es eine Konstante $C > 0$, so dass $d'(x, y) \leq Cd(x, y)$ für alle $x, y \in X$, so ist die Abbildung

$$i: (X, d) \rightarrow (X, d')$$

$$x \mapsto x$$

stetig (setze $\delta := \frac{\varepsilon}{C}$); gibt es außerdem ein $C' > 0$, so dass $d(x, y) \leq C'd'(x, y)$, so ist i ein Homöomorphismus. Dies lässt sich auf die Metriken $d_p(x, y) := (\sum_k |x_k - y_k|^p)^{\frac{1}{p}}$, $p \geq 1$ und $d_\infty(x, y) := \max_k |x_k - y_k|$ auf \mathbb{R}^n anwenden, die also alle homöomorphen Räume liefern, denn es ist ja

$$d_\infty(x, y) \leq d_p(x, y) \leq d_1(x, y) \leq nd_\infty(x, y).$$

0.10 Beispiel. Die Abbildung $\tan: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein Homöomorphismus, denn sie ist stetig und hat die stetige Umkehrabbildung \arctan .

Das letzte Beispiel zeigt, dass Vollständigkeit keine Eigenschaft ist, die von einem Homöomorphismus erhalten bleibt: \mathbb{R} ist vollständig, aber das offene beschränkte Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ nicht. Das liegt daran, dass stetige Abbildungen im allgemeinen Cauchy-Folgen nicht auf Cauchy-Folgen werfen.

Die letzten beiden Beispiele zeigen, dass eine Metrik viel mehr Information trägt, als man wirklich braucht, wenn man nur an Eigenschaften interessiert ist, die unter Homöomorphie erhalten bleiben. Eine wesentlichere Rolle als die Metrik selbst werden die offenen Mengen spielen, die von ihr bestimmt werden.

Offene Mengen

0.11 Definition. Sei X ein metrischer Raum. Für $\varepsilon > 0$ ist die ε -Umgebung eines Punktes $x \in X$ die Menge $B_\varepsilon(x) := \{x' \in X : d(x, x') < \varepsilon\}$. Eine beliebige Menge $U \subset X$ heißt *Umgebung* von x , wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $B_\varepsilon(x) \subset U$. Eine Menge $U \subset X$ heißt *offen*, wenn sie Umgebung eines jeden der Punkte ist, die sie enthält.

0.12 Bemerkungen.

- ▷ Aus der Dreiecksungleichung folgt sofort, dass $B_\varepsilon(x)$ offen ist.
- ▷ Wir haben den Begriff der offenen Menge mit Hilfe des Begriffes der Umgebung definiert. Andersherum gilt: Eine Menge U ist Umgebung von x , wenn eine offene Menge O existiert, so dass $x \in O \subset U$. Beachte, dass wir, im Gegensatz zu einigen älteren Autoren, nicht fordern, dass U selbst offen ist.

0.13 Beispiel. Ist X mit der diskreten Metrik versehen, so gilt für jedes $x \in X$, dass $B_{1/2}(x) = \{x\}$ ist, also ist $\{x\}$ und damit jede Menge, die x enthält, eine Umgebung von x und jede Teilmenge von X offen.

Um stetige Abbildungen zu beschreiben, genügt es völlig, die offenen Mengen der beteiligten Räume zu kennen.

0.14 Proposition. Seien X, Y metrische Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (i) f ist stetig.
- (ii) Für jede offene Menge $U \subset Y$ ist auch $f^{-1}[U]$ offen.

Beweis. „ \Rightarrow “: Sei f stetig und $U \subset Y$ offen. Sei $x \in f^{-1}[U]$, also $f(x) \in U$. Da U offen ist, gibt es dann ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(f(x)) \subset U$. Aufgrund der Stetigkeit von f existiert nun ein $\delta > 0$, so dass $f[B_\delta(x)] \subset B_\varepsilon(f(x))$. Das heißt, dass $B_\delta(x) \subset f^{-1}[U]$; also ist, da x beliebig gewählt war, $f^{-1}[U]$ offen.

„ \Leftarrow “: Sei f nicht stetig. Dann existiert ein $x \in X$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass es zu jedem $\delta > 0$ ein $x' \in B_\delta(x)$ gibt, so dass $f(x') \notin B_\varepsilon(f(x))$. Es gibt also kein $\delta > 0$, so dass $B_\delta(x) \subset f^{-1}[B_\varepsilon(f(x))]$ wäre. $f^{-1}[B_\varepsilon(f(x))]$ ist also keine Umgebung von x und damit nicht offen, obwohl $B_\varepsilon(f(x))$ offen ist. \square

0.15 Korollar. Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn f bijektiv ist und für alle Mengen $M \subset X$ gilt, dass $f[M]$ genau dann offen ist, wenn M offen ist. \square

Die offenen Mengen sind also tatsächlich, worauf es ankommt, wenn man Räume bis auf Homöomorphie betrachtet. Die folgenden Eigenschaften der Familie der offenen Mengen eines metrischen Raumes sind so fundamental, dass wir sie bald zu Definitionen erheben werden.

0.16 Proposition. In einem metrischen Raum X gilt:

- (i) Der Schnitt einer endlichen Menge von offenen Mengen ist offen.
- (ii) Die Vereinigung einer beliebigen Menge von offenen Mengen ist offen.
- (iii) Sind $x, y \in X$ und ist $x \neq y$, so existieren offene Mengen $U, V \subset X$ mit $x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$.

Beweis. Zu (i): Seien U_1, \dots, U_r offen, $r \in \mathbb{N}$, und sei $x \in \bigcap_k U_k$. Dann gibt es $\varepsilon_k > 0$, so dass $B_{\varepsilon_k}(x) \subset U_k$. Mit $\varepsilon := \min\{\varepsilon_k\}$ ist $\varepsilon > 0$ und $B_\varepsilon(x) \subset \bigcap_k U_k$.

Zu (ii): Sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$, und U offen für alle $U \in \mathcal{U}$. Sei nun $x \in \bigcup \mathcal{U}$. Dann gibt es ein $U \in \mathcal{U}$, so dass $x \in U$, und damit ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \in U \subset \bigcup \mathcal{U}$.

Zu (iii): Ist $x \neq y$, so ist $\varepsilon := d(x, y)/2 > 0$. Sei nun $z \in B_\varepsilon(x)$. Dann ist nach der Dreiecksungleichung $z \notin B_\varepsilon(y)$. Also ist $B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset$. \square

Topologische Räume

Wir haben gesehen, dass es, wenn man Räume — das waren bisher metrische Räume — bis auf Homöomorphie betrachtet nur auf die offenen Mengen ankommt und haben angekündigt, die Eigenschaften aus Proposition 0.16 zu Axiomen zu machen. Das geschieht nun.

0.17 Definition. Sei X eine beliebige Menge. Eine *Topologie* auf X ist eine Teilmenge \mathcal{T} der Potenzmenge von X , so dass die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind.

- (i) Für alle $\mathcal{O} \subset \mathcal{T}$ ist $\bigcup \mathcal{O} \in \mathcal{T}$.
- (ii) Sind $O_1, \dots, O_n \in \mathcal{T}$, $n \in \mathbb{N}$, so ist $\bigcap_{k=1}^n O_k \in \mathcal{T}$.

Eine Teilmenge von X heißt *offen*, wenn sie in \mathcal{T} enthalten ist. Ein *topologischer Raum* ist eine Paar (X, \mathcal{T}) bestehend aus einer Menge X und einer Topologie \mathcal{T} auf ihr.

0.18 Bemerkung. Häufig fordert man auch noch $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$, aber das ist in obigem bereits enthalten: Es ist $\emptyset \subset \mathcal{T}$ und $\bigcup \emptyset = \emptyset$, außerdem $0 \in \mathbb{N}$ und $\bigcap_{k=1}^0 O_k = \bigcap \emptyset = X$.

Wie auch schon bei metrischen Räumen werden wir den topologischen Raum (X, \mathcal{T}) nur mit X bezeichnen, wenn keine Verwechslungsmöglichkeit besteht.

Eine der Eigenschaften, die wir in Proposition 0.16 festgestellt haben, fehlt noch.

0.19 Definition. Ein topologischer Raum (X, \mathcal{T}) heißt *hausdorffsch* und damit ein *Hausdorff-Raum* oder auch *T_2 -Raum*, wenn zu je zwei Punkten $x_0, x_1 \in X$, $x_0 \neq x_1$, Mengen $O_0, O_1 \in \mathcal{T}$ mit $x_i \in O_i$ und $O_0 \cap O_1 = \emptyset$ existieren.

Das T in T_2 kommt daher, dass es sich um eine Trennungseigenschaft handelt: Je zwei verschiedene Punkte können durch offene Mengen getrennt werden. Die 2 in T_2 verspricht, dass es derer noch mehr gibt.

Die nächste Definition ist durch Proposition 0.14 motiviert.

0.20 Definition. Es seien (X, \mathcal{T}_X) und (Y, \mathcal{T}_Y) topologische Räume. Eine *stetige Abbildung* $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ ist eine Funktion $f: X \rightarrow Y$, so dass $f^{-1}[O] \in \mathcal{T}_X$ für alle $O \in \mathcal{T}_Y$.

Trivial, aber so wichtig, dass wir es notieren:

0.21 Proposition. Ist X ein topologischer Raum, so ist die Identität id_X eine stetige Abbildung. Sind X, Y, Z topologische Räume und $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen, so ist die Komposition $g \circ f: X \rightarrow Z$ eine stetige Abbildung.

Beweis. Es ist $\text{id}^{-1}[O] = O$ und $(g \circ f)^{-1}[O] = f^{-1}[g^{-1}[O]]$. □

Und schließlich wiederholen wir in diesem neuen Kontext die Definition der Homöomorphie.

0.22 Definition. Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen heißt ein *Homöomorphismus*, wenn f stetig ist und es eine stetige Abbildung $g: Y \rightarrow X$ gibt, so dass $f \circ g = \text{id}_Y$, $g \circ f = \text{id}_X$. Zwei Räume X und Y heißen *homöomorph*, $X \approx Y$, wenn zwischen ihnen ein Homöomorphismus existiert.

Homöomorphie war bei metrischen Räumen nur eine von mehreren sinnvollen Äquivalenzrelationen, und eine recht schwache noch dazu, das heißt eine, die einiges an Information ignorierte. Bei topologischen Räumen hingegen ist Homöomorphie eine sehr natürliche Äquivalenzrelation, in gewisser Weise die stärkstmögliche sinnvolle Äquivalenzrelation. Insbesondere ist, wenn \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 Topologien auf derselben Menge X sind, die Funktion

$$\begin{aligned} i: (X, \mathcal{T}_1) &\rightarrow (X, \mathcal{T}_2) \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

genau dann ein Homöomorphismus, wenn $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Nun ist es aber Zeit für ein paar Beispiele. Eigentlich jedoch war der letzte Teil schon voll von ihnen:

0.23 Beispiel und Definition. Ist X eine Menge und d eine Metrik auf X , so bilden die bezüglich d offen Teilmengen von X eine Topologie auf X , die *von der Metrik d induzierte Topologie*. Diese Topologie ist hausdorffsch. Ist Y ein weiterer metrischer Raum, so ist eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ genau dann stetig als Abbildung zwischen metrischen Räumen, wenn sie es als Abbildung zwischen den induzierten topologischen Räumen ist.

0.24 Beispiele und Definitionen. Ist X eine Menge, so ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ selbst eine Topologie, die *diskrete Topologie*. Wir haben bereits in Beispiel 0.13 gesehen, dass sie von der diskreten Metrik induziert wird.

$\{\emptyset, X\}$ ist ebenfalls eine Topologie auf X , sie wird manchmal die *indiscrete Topologie* oder auch anschaulicher die *Klumpentopologie* genannt. Hat X mindestens zwei Elemente, so ist sie nicht hausdorffsch, also gibt es keine Metrik, die diese Topologie induzieren würde.

0.25 Beispiel. Ist X eine beliebige Menge, so bilden all die Teilmengen von X , deren Komplemente endlich sind zusammen mit der leeren Menge eine Topologie auf X (Nachrechnen!), die *kofinite Topologie*.

Ist X unendlich, so ist auch die kofinite Topologie auf X nicht hausdorffsch. Nun scheint das wieder eine sehr „komische“, nur zum Konstruieren von Gegenbeispielen geeignete Topologie zu sein. Das täuscht aber, denn in der Tat geben algebraische Geometer gerne der eindimensionalen Linie diese Topologie.² Wir tun also gut daran, nicht nur Hausdorff-Räume zu betrachten.

0.26 Definition. Ein topologischer Raum heißt *metrisierbar*, wenn es eine Metrik gibt, die seine Topologie induziert.

Mehr Mengen

Wir definieren nun für Teilmengen topologischer Räume ein paar Eigenschaften und Operationen, die zumindest für Teilmengen des \mathbb{R}^n schon aus der Analysis-Grundvorlesung bekannt sein sollten.

0.27 Definition. Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge von X heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement offen ist.

Da Schnitte von Komplementen Komplemente von Vereinigungen und umgekehrt sind, folgt sofort aus der Definition einen topologischen Raumes.

0.28 Proposition. Sei X ein topologischer Raum, dann gilt:

- (i) *Beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.*
- (ii) *Endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.*

Ist X eine Menge, $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, und ist die Menge $\{A \subset X : X - A \in \mathcal{T}\}$ abgeschlossen gegenüber beliebigen Schnitten und endlichen Vereinigungen, so ist \mathcal{T} eine Topologie auf X . \square

Eine Topologie kann also genau so gut wie durch Angabe der offenen Mengen durch Angabe der abgeschlossenen Mengen definiert werden.

0.29 Beispiel. In einem mit der kofiniten Topologie versehenen Raum ist eine Menge genau dann abgeschlossen, wenn sie endlich oder gleich dem ganzen Raum ist. Dass dies eine Topologie ist, liegt also im wesentlichen daran, dass Schnitte endlicher Mengen endlich sind und ebenso endliche Vereinigungen endlicher Mengen.

²Dies ist ein sehr spezieller Fall der Zariski-Topologie.

Was wir in Bemerkung 0.12 für Umgebungen in metrischen Räumen festgestellt haben, machen wir wieder zur Definition.

0.30 Definition. Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Eine Menge $U \subset X$ heißt *Umgebung* von x , wenn eine offene Menge O existiert, so dass $x \in O \subset U$. Die Menge aller Umgebungen von x bezeichnen wir mit $\mathcal{U}(x)$.

0.31 Definitionen und Propositionen. Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$.

$$\text{int } A := \bigcup \{U \subset A : U \text{ offen}\}$$

ist die größte in A enthaltene offene Menge und heißt das *Innere* von A .

$$\overline{A} := \bigcap \{C \subset X : A \subset C, C \text{ abgeschlossen}\}$$

ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält und heißt der *Abschluss* von A .

$$\partial A := \overline{A} - \text{int } A$$

heißt der *Rand* von A .

Ein Punkt $x \in X$ heißt *innerer Punkt* von A , wenn $x \in \text{int } A$, *Berührungspunkt* von A , wenn $x \in \overline{A}$ und *Randpunkt* von A , wenn $x \in \partial A$.

An dieser Stelle sei es den StudentInnen ans Herz gelegt, die verschiedenen ihnen bereits bekannten Charakterisierungen und Eigenschaften dieser Begriffe aus diesen Definitionen herzuleiten.

0.32 Definitionen. Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *dicht*, wenn $\overline{A} = X$, *nirgends dicht*, wenn $\text{int } \overline{A} = \emptyset$.

Mehr Stetigkeit

Wir haben Stetigkeit bisher nur global definiert. Von metrischen Räumen her kennen wir auch den lokalen Begriff der Stetigkeit in einem Punkt.

0.33 Definition. Seien X, Y topologische Räume, $x \in X$ und $f: X \rightarrow Y$ eine Funktion. f heißt *stetig in x* , wenn für jede Umgebung U von $f(x)$ das Urbild $f^{-1}[U]$ eine Umgebung von x ist.

Wir bemerken:

0.34 Proposition. Eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen ist genau dann stetig, wenn sie in jedem $x \in X$ stetig ist. \square

Eine einfache Umformulierung der Definition ist

0.35 Proposition. Eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen ist in $x \in X$ genau dann stetig, wenn es zu jeder Umgebung V von $f(x)$ eine Umgebung U von x gibt, so dass $f[U] \subset V$.

Beweis. Sei V eine Umgebung von $f(x)$. Ist f in x stetig, so ist $f^{-1}[V]$ eine Umgebung von x , und es ist $f[f^{-1}[V]] \subset V$. Existiert andererseits eine Umgebung U von x mit $f[U] \subset V$, so ist $U \subset f^{-1}[V]$ und auch $f^{-1}[V]$ eine Umgebung von x . \square

Für metrische Räume stimmen diese Definitionen mit denen überein, die wir bereits hatten.

0.36 Proposition. Seien (X, d_X) , (Y, d_Y) metrische Räume, $x \in X$ und $f: X \rightarrow Y$ eine Funktion. Seien außerdem \mathcal{T}_{d_X} und \mathcal{T}_{d_Y} die von den Metriken induzierten Topologien. Dann sind äquivalent:

- (i) $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ ist stetig in x .
- (ii) $f: (X, \mathcal{T}_{d_X}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_{d_Y})$ ist stetig in x .

Beweis. „ \Rightarrow “: Sei V eine Umgebung von $f(x)$. Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(f(x)) \subset V$. Nun existiert ein $\delta > 0$, so dass $f[B_\delta(x)] \subset B_\varepsilon(f(x)) \subset V$.

„ \Leftarrow “: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine Umgebung U von x , so dass $f[U] \subset B_\varepsilon(f(x))$. Nun gibt es wiederum ein $\delta > 0$, so dass $B_\delta(x) \subset U$, also $f[B_\delta(x)] \subset B_\varepsilon(f(x))$. \square

Wir schauen uns den Beweis noch einmal an: Die ε - δ -Definition der Stetigkeit ist fast genau die Beschreibung in Proposition 0.35, nur dass sie nur ε -Umgebungen anstelle beliebiger zulässt. Da es aber genügend viele ε -Umgebungen gibt, macht das keinen Unterschied. Wir formalisieren nun dieses „genügend viele“.

0.37 Definition. Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Eine *Umgebungsbasis* von x ist eine Menge \mathcal{B} von Umgebungen von x , so dass es zu jeder Umgebung U von x ein $V \in \mathcal{B}$ gibt, so dass $V \subset U$.

Was wir also soeben die folgende Tatsache benutzt.

0.38 Proposition. Ist X ein metrischer Raum und $x \in X$, so ist die Menge $\{B_\varepsilon(x) : \varepsilon > 0\}$ eine Umgebungsbasis von x . \square

Und eigentlich haben wir das folgende gezeigt.

0.39 Proposition. Es seien X, Y topologische Räume, $x \in X$, $f: X \rightarrow Y$ eine Funktion. Sei außerdem \mathcal{B} eine Umgebungsbasis von x , \mathcal{B}' eine Umgebungsbasis von $f(x)$. Dann ist f in x genau dann stetig, wenn es zu jedem $V \in \mathcal{B}'$ ein $U \in \mathcal{B}$ gibt, so dass $f[U] \subset V$. \square

Das ist typisch: Anstatt eine Eigenschaft für alle Umgebungen eines Punktes nachzuprüfen, genügt es häufig, dies nur für alle Elemente einer Umgebungsbasis zu tun.

Man lasse sich nicht von dem Wort *Umgebungsbasis* verwirren. Vergleicht man die Situation mit Vektorräumen, so entspricht das eher einem Erzeugendensystem. Zum Beispiel ist ja immer die Menge aller Umgebungen eines Punktes eine Umgebungsbasis.

Unterräume und das Produkt zweier Räume

Eine Teilmenge eines topologischen Raumes wird auf natürliche Art selbst zu einem topologischen Raum.

0.40 Definition und Proposition. Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und $Y \subset X$. Dann ist $\{O \cap Y : O \in \mathcal{T}\}$ eine Topologie auf Y , die *Unterraumtopologie*. Y versehen mit der Unterraumtopologie heißt ein *Unterraum* von X .

Die Unterraumtopologie ist gerade so gemacht, dass die Inklusionsabbildung stetig wird. Um das besser formulieren zu können, führen wir zwei Begriffe ein.

0.41 Definition. Seien X eine Menge und $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ Topologien auf X . \mathcal{T}_1 heißt *größer* als \mathcal{T}_2 und \mathcal{T}_2 *feiner* als \mathcal{T}_1 , wenn $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.

0.42 Proposition. Ist X ein topologischer Raum und $Y \subset X$, so ist die Unterraumtopologie die größte Topologie auf Y , so dass die Inklusionsabbildung $i: Y \rightarrow X$ stetig ist. \square

Wir notieren noch eine weitere einfache aber wichtige Eigenschaft.

0.43 Proposition. Seien X, Z topologische Räume, $Y \subset X$ mit der Unterraumtopologie versehen und $i: Y \rightarrow X$ die Inklusion. Eine Funktion $f: Z \rightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn $i \circ f$ stetig ist.

Beweis. Ist f stetig, so auch $i \circ f$, da i stetig ist. Sei nun $i \circ f$ stetig und $U \subset Y$ offen. Dann gibt es eine offene Menge $O \subset X$ mit $U = O \cap Y$, also $U = i^{-1}[O]$. Es folgt, dass $f^{-1}[U] = f^{-1}[i^{-1}[O]] = (i \circ f)^{-1}[O]$ offen ist. \square

Eine weitere wichtige Konstruktion ist das Produkt von Räumen. Wir werden Produkte —auch unendlich vieler Räume— später noch genauer behandeln, daher begnügen wir uns hier mit dem Produkt zweier Räume.

Mengen der Form $U \times V$ sollten für offene U, V offen sein; diese bilden allerdings noch keine Topologie, da die Vereinigung zweier Mengen dieser Form nicht wieder von dieser Form zu sein braucht. Wir müssen also Vereinigungen auch noch hinzunehmen. Wir machen dies nun systematisch.

0.44 Definition. Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Eine *Basis* der Topologie \mathcal{T} ist eine Familie von offenen Mengen $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, so dass jede offene Menge Vereinigung von Elementen aus \mathcal{B} ist, so dass also $\mathcal{T} = \{\bigcup M : M \subset \mathcal{B}\}$ gilt.

Da eine Basis offenbar die Topologie bestimmt, kann man die Topologie beschreiben, indem man eine Basis angibt. Dabei ist es hilfreich, zu wissen, wann eine gegebene Familie von Teilmengen Basis einer Topologie ist.

0.45 Proposition. Sei X eine Menge, und $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$. Ist \mathcal{B} abgeschlossen unter endlichen Schnitten, so ist $\{\bigcup M: M \subset \mathcal{B}\}$ eine Topologie auf X mit Basis \mathcal{B} . \square

0.46 Bemerkung. Die Voraussetzung in dieser Proposition kann noch abgeschwächt werden, wir brauchen das aber im Moment nicht.

Wir sind nun bereit, das Produkt zweier topologischer Räume zu definieren.

0.47 Definition. Seien (X, \mathcal{T}_X) und (Y, \mathcal{T}_Y) topologische Räume. Die *Produkttopologie* auf $X \times Y$ ist die Topologie mit der Basis

$$\{U \times V: U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}.$$

$X \times Y$ versehen mit dieser Topologie heißt das *Produkt* der Räume (X, \mathcal{T}_X) und (Y, \mathcal{T}_Y) .

Wenn nichts anderes gesagt ist, werden wir immer davon ausgehen, dass $X \times Y$ die Produkttopologie trägt.

Noch bevor wir Produkte genauer untersuchen, können wir feststellen:

0.48 Proposition. Das Produkt zweier Hausdorffräume ist hausdorffsch.

Beweis. Seien X, Y Hausdorffräume, $(x, y), (x', y') \in X \times Y$, $(x, y) \neq (x', y')$. Dann ist $x \neq x'$ oder $y \neq y'$, oBdA $x \neq x'$. Seien U, U' disjunkte Umgebungen von x beziehungsweise x' . Dann sind $U \times Y$ und $U' \times Y$ disjunkte Umgebungen von (x, y) beziehungsweise (x', y') . \square

Zur Vorbereitung noch ein weiterer Begriff.

0.49 Definition. Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Eine *Subbasis* der Topologie \mathcal{T} ist eine Familie von offenen Mengen $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, so dass jede offene Menge Vereinigung von endlichen Schnitten von Elementen von \mathcal{S} ist, so dass also $\{\bigcap_{k=1}^n O_k: n \in \mathbb{N}, O_k \in \mathcal{S}\}$ eine Basis von \mathcal{T} ist.

Wir bemerken kurz:

0.50 Proposition. Ist X eine Menge, so ist jede Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$ eine Subbasis einer Topologie auf X .

Beweis. $\{\bigcap_{k=1}^n O_k: n \in \mathbb{N}, O_k \in \mathcal{S}\}$ ist unter endlichen Schnitten abgeschlossen und daher nach Proposition 0.45 die Basis einer Topologie. \square

Doch nun weiter.

0.51 Proposition. Seien (X, \mathcal{T}_X) und (Y, \mathcal{T}_Y) topologische Räume. Dann ist die Menge

$$\{O \times Y: O \in \mathcal{T}_X\} \cup \{X \times O: O \in \mathcal{T}_Y\}$$

eine Subbasis der Produkttopologie auf $X \times Y$. \square

0.52 Proposition. Seien X, Y topologische Räume und

$$\begin{array}{ll} p_1: X \times Y \rightarrow X & p_2: X \times Y \rightarrow Y \\ (x, y) \mapsto x & (x, y) \mapsto y \end{array}$$

die kanonischen Projektionen. Die Produkttopologie ist die grösste Topologie auf $X \times Y$, so dass p_1 und p_2 stetig sind.

Beweis. p_1 ist genau dann stetig, wenn $p_1^{-1}[O] = O \times Y$ für alle offenen $O \subset X$ offen ist. Ebenso ist p_2 genau dann stetig, wenn alle $X \times O$, $O \subset Y$ offen, offen sind. Nun ist eine Topologie offenbar genau dann die grösste, in der diese Mengen offen sind, wenn diese Mengen eine Subbasis von ihr bilden. \square

Um Stetigkeit nachzuprüfen, genügt es, eine Subbasis zu betrachten:

0.53 Proposition. Seien X, Y topologische Räume und \mathcal{S} eine Subbasis der Topologie von Y . Eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn $f^{-1}[O]$ für alle $O \in \mathcal{S}$ offen ist.

Beweis. „ \Rightarrow “ ist klar, denn alle $O \in \mathcal{S}$ sind offen. „ \Leftarrow “: Sei $U \subset Y$ offen. Dann gibt es eine Indexmenge I , $n_i \in \mathbb{N}$ für alle $i \in I$ und $O_{ik} \subset \mathcal{S}$ für alle $i \in I, 1 \leq k \leq n_i$, so dass $U = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k=1}^{n_i} O_{ik}$. Nun ist $f^{-1}[O_{ik}]$ für alle i, k offen. Damit ist auch

$$f^{-1}[U] = f^{-1}\left[\bigcup_{i \in I} \bigcap_{k=1}^{n_i} O_{ik}\right] = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k=1}^{n_i} f^{-1}[O_{ik}]$$

offen. \square

0.54 Proposition. Seien X, Y topologische Räume, dann ist die Produkttopologie die feinste Topologie auf $X \times Y$, so dass für alle topologischen Räume Z und alle stetigen Abbildungen $f: Z \rightarrow X$ und $g: Z \rightarrow Y$ die Abbildung

$$\begin{array}{l} (f, g): Z \rightarrow X \times Y \\ z \mapsto (f(z), g(z)) \end{array}$$

stetig ist.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $X \times Y$ mit der Produkttopologie diese Eigenschaft hat. Dazu genügt es nach Proposition 0.53, Urbilder von Elementen einer Subbasis zu betrachten. Sei daher U ein beliebiges Element der Subbasis aus Proposition 0.51, etwa $O \times Y$ mit $O \subset X$ offen. Nun ist $(f, g)^{-1}[U] = (f, g)^{-1}[O \times Y] = f^{-1}[O]$ offen, da f stetig ist.

Bezeichnen wir nun die Produkttopologie mit \mathcal{T} und nehmen wir an, \mathcal{T}' sei eine weitere Topologie auf $X \times Y$ der Eigenschaft aus der Proposition. Wir betrachten die Abbildung

$$i: (X \times Y, \mathcal{T}) \rightarrow (X \times Y, \mathcal{T}') \\ x \mapsto x.$$

Es ist $i = (p_1, p_2)$ und nach Proposition 0.52 sind p_1 und p_2 stetig. Nach der Voraussetzung an \mathcal{T}' ist also i stetig. Das heißt aber gerade, dass $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. \square

Die Propositionen 0.52 und 0.54 ergeben zusammen eine wichtige Charakterisierung der Produkttopologie.

0.55 Korollar. *Seien X, Y Räume. Die Produkttopologie ist die einzige Topologie auf $X \times Y$, die die folgenden Eigenschaften gleichzeitig erfüllt:*

- (i) *Die kanonischen Projektionen auf die Faktoren sind stetig.*
- (ii) *Für einen beliebigen Raum Z und stetige Abbildungen $f: Z \rightarrow X$ und $g: Z \rightarrow Y$ ist die Abbildung $(f, g): Z \rightarrow X \times Y$ stetig.*

\square

Zusammenhang

0.56 Definition. Ein Raum X heißt *zusammenhängend*, wenn er außer X und \emptyset keine Teilmengen hat, die zugleich offen und abgeschlossen sind.

Ein Raum X ist also genau dann nicht zusammenhängend, wenn er sich als disjunkte Vereinigung $A \cup B$ nicht-leerer offener (oder abgeschlossener) Mengen schreiben lässt. Man beachte, dass die Topologie auf X in diesem Fall vollständig von den Unterraumtopologien auf A und B bestimmt wird, denn $U \subset X$ ist dann genau dann offen, wenn $U \cap A$ und $U \cap B$ offen sind. Man kann in dieser Situation tatsächlich oft A und B einzeln betrachten.

0.57 Beispiele.

- ▷ Ein diskreter Raum ist genau dann zusammenhängend, wenn er nur einen Punkt hat.
- ▷ $\mathbb{R} - \{0\}$ ist nicht zusammenhängend, wie die Zerlegung $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ zeigt.

Ein nicht-triviales Beispiel eines zusammenhängenden Raumes liefert die folgende Charakterisierung.

0.58 Proposition. *Sei X ein Raum. Dann sind äquivalent:*

(i) X ist zusammenhängend.

(ii) Ist $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sind $y, y', m \in \mathbb{R}$ mit $y, y' \in \text{im } f$, $y < m < y'$, dann ist auch $m \in \text{im } f$.

Beweis. „ \Rightarrow “ Seien f, y, y', m wie in der Proposition. Dann sind die Mengen $f^{-1}[(−\infty, m)]$ und $f^{-1}[(m, \infty)]$ disjunkte offene und nicht-leere Teilmengen von X . Da X zusammenhängend ist, kann die Vereinigung dieser beiden Mengen nicht ganz X sein, also ist $m \in \text{im } f$.

„ \Leftarrow “ Sei $X = A \cup B$ eine Zerlegung in disjunkte offene Mengen. Dann ist die Funktion

$$f: X \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} -1, & x \in A \\ 1, & x \in B \end{cases}$$

stetig. Da $0 \notin \text{im } f$, können 1 und -1 nicht beide im Bild von f liegen. Also ist A oder B leer. \square

Einen zusammenhängenden Raum kennen wir also aus Analysis I.

0.59 Proposition (Zwischenwertsatz). *Das Einheitsintervall I ist zusammenhängend.* \square

Auf eine Wiedergabe des aus dem ersten Semester bekannten Beweises verzichten wir, bemerken aber, dass die Vollständigkeit von \mathbb{R} wesentlich war.

Im Beweis von Proposition 0.58 haben wir nebenbei schon fast gezeigt, dass stetige Bilder zusammenhängender Räume zusammenhängend sind.

0.60 Proposition. *Seien X, Y Räume, X zusammenhängend und $f: X \rightarrow Y$ stetig und surjektiv. Dann ist Y zusammenhängend.*

Beweis. Sei $Y = A \cup B$ eine Zerlegung in disjunkte offene Teilmengen. Dann ist $X = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$ und $f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B] = f^{-1}[A \cap B] = \emptyset$, und da f stetig ist, sind $f^{-1}[A]$ und $f^{-1}[B]$ offen. Da X zusammenhängend ist, ist $f^{-1}[A] = \emptyset$ oder $f^{-1}[B] = \emptyset$. Aus der Surjektivität von f folgt $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$. \square

Nun noch zwei Propositionen, die später nützlich sein werden.

0.61 Proposition. *Ist X ein Raum und $D \subset X$ dicht und zusammenhängend, so ist X zusammenhängend.*

Beweis. Sei $A \subset X$ offen-abgeschlossen und nicht-leer. Da A offen und nicht-leer und D dicht ist, ist $A \cap D \neq \emptyset$. Da D zusammenhängend und $A \cap D$ offen-abgeschlossen in D ist, ist nun $A \cap D = D$, also $D \subset A$. Damit ist auch A dicht in X . Da A abgeschlossen ist, ist $A = X$. \square

0.62 Proposition. Sei X ein Raum und $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$. Sind alle $M \in \mathcal{M}$ zusammenhängend und ist $X = \bigcup \mathcal{M}$, $M \cap M' \neq \emptyset$ für alle $M, M' \in \mathcal{M}$, so ist X zusammenhängend.

Beweis. Sei $A \subset X$ offen-abgeschlossen. Dann ist $A \cap M$ offen-abgeschlossen in M für alle $M \in \mathcal{M}$. Sei nun $A \neq \emptyset$. Dann gibt es ein $M \in \mathcal{M}$ mit $A \cap M \neq \emptyset$. Da M zusammenhängend ist, ist $A \cap M = M$. Für beliebiges $M' \in \mathcal{M}$ ist nun $\emptyset \neq M \cap M' \subset A \cap M'$, also, da M' zusammenhängend ist, $A \cap M' = M'$. Damit ist $A = X$. \square

Komponenten

Wir wollen nun einen gegebenen Raum X als disjunkte Vereinigung zusammenhängender Unterräume darstellen. Man könnte nun hoffen, dass dies immer so möglich sei, dass jeder dieser Unterräume zugleich offen und abgeschlossen ist. Dies wird aber im allgemeinen nicht möglich sein, wie schon das Beispiel $X = \{1/n : n \in \mathbb{N}, n > 0\} \cup \{0\}$ zeigt: Jeder Unterraum mit mehr als einem Punkt ist nicht zusammenhängend, denn das größte Element kann von dem Rest durch eine offen-abgeschlossene Menge getrennt werden. Andererseits ist aber $\{0\}$ nicht offen in X .

Um dennoch jeden Raum als disjunkte Vereinigung möglichst großer zusammenhängender Teilräume darzustellen, betrachten wir die folgende Äquivalenzrelation.

0.63 Definition. Sei X ein Raum. Wir definieren auf X eine Relation \sim_z durch

$$p \sim_z q :\iff$$

Es gibt einen zusammenhängenden Unterraum $Z \subset X$ mit $p, q \in Z$.

0.64 Proposition. \sim_z ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Zur Reflexivität bemerke, dass einelementige Unterräume zusammenhängend sind. Symmetrie ist klar. Die Transitivität folgt aus Proposition 0.62. \square

0.65 Definition. Die Äquivalenzklassen der Relation \sim_z heißen die *Zusammenhangskomponenten* oder kurz *Komponenten* des Raumes.

0.66 Proposition. Sei X ein Raum.

- (i) Die Komponenten von X sind nicht-leer, und X ist disjunkte Vereinigung seiner Komponenten.
- (ii) Jede zusammenhängende Teilmenge von X ist in einer Komponente enthalten.

(iii) Die Komponenten sind abgeschlossen und zusammenhängend.

Die Komponenten sind also maximal zusammenhängende Teilmengen.

Beweis. (i) folgt daraus, dass \sim_z eine Äquivalenzrelation ist, (ii) direkt aus der Definition von \sim_z . Sei nun K eine Komponente und $x \in K$. K ist die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen, die x enthalten. Nach Proposition 0.62 ist K zusammenhängend. Da nach Proposition 0.61 der Abschluss von K ebenfalls zusammenhängend ist, muss nach dem bisher gezeigten K selbst abgeschlossen sein. Damit ist auch (iii) gezeigt. \square

0.67 Beispiel. Die Komponenten von $\mathbb{R} - \{0\}$ sind $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$.

0.68 Beispiel. Obiger Diskussion ist zu entnehmen, dass jede einelementige Teilmenge von $\{1/n : n \in \mathbb{N}, n > 0\} \cup \{0\}$ eine Komponente ist. Dieser Raum enthält also mit $\{0\}$ eine Komponente, die nicht offen ist.

Das Verständnis der Komponenten vereinfacht den Beweis des folgenden Satzes.

0.69 Proposition. Sind X und Y zusammenhängende Räume, so ist auch $X \times Y$ zusammenhängend.

Beweis. Seien (x, y) und (x', y') beliebige Punkte von $X \times Y$. Da $\{x\} \times Y \approx Y$ zusammenhängend ist, liegen (x, y) und (x, y') in der selben Komponente von $X \times Y$. Da $X \times \{y'\}$ zusammenhängend ist, liegen (x, y') und (x', y') in der selben Komponente. Damit liegen (x, y) und (x', y') in der selben Komponente, und da sie beliebig gewählt waren, hat $X \times Y$ nicht mehr als eine Komponente. \square

Eine Situation, in der die Zerlegung in Komponenten besonders angenehm ist, ist die folgende.

0.70 Definition. Ein Raum heißt *lokal zusammenhängend*, wenn jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus zusammenhängenden Umgebungen besitzt.

0.71 Proposition. Die Komponenten eines lokal zusammenhängenden Raumes sind offen-abgeschlossen.

Beweis. Sei K eine Komponente und $x \in K$. Dass K abgeschlossen ist, haben wir bereits gezeigt. Nun besitzt x eine zusammenhängende Umgebung. Diese muss in K enthalten sein, also ist K selbst Umgebung von x . Da x beliebig gewählt war, ist K offen. \square

Wegzusammenhang

Ein anderer wichtiger Zusammenhangsbegriff ist der des Wegzusammenhangs. Wir gehen nun etwas schneller vor und definieren gleich die entsprechende Äquivalenzrelation.

0.72 Definition. Sei X ein Raum. Wir definieren eine Relation \sim_w durch

$$p \sim_w q :\Longleftrightarrow$$

Es existiert eine stetige Abbildung $w: I \rightarrow X$ mit $w(0) = p$, $w(1) = q$.

Eine solche Abbildung w heißt ein *Weg von p nach q* .

0.73 Proposition. \sim_w ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Seien $p, q, r \in X$. Der konstante Weg

$$\begin{aligned} c_p: I &\rightarrow X \\ t &\mapsto p \end{aligned}$$

zeigt $p \sim_w p$ und damit die Reflexivität. Sei nun $p \sim_w q$ und w ein Weg von p nach q . Dann ist

$$\begin{aligned} w^-: I &\rightarrow X \\ t &\mapsto w(1-t) \end{aligned}$$

ein Weg von q nach p , was $q \sim_w p$ und die Symmetrie zeigt. Sei schließlich zusätzlich $q \sim_w r$ und w' ein Weg von q nach r . dann ist

$$\begin{aligned} w * w': I &\rightarrow X \\ t &\mapsto \begin{cases} w(2t), & t \leq \frac{1}{2}, \\ w'(2t-1), & t \geq \frac{1}{2}, \end{cases} \end{aligned}$$

ein Weg von p nach r , was $p \sim_w r$ und die Transitivität zeigt. \square

0.74 Definition. Sei X ein Raum. Die Äquivalenzklassen bezüglich \sim_w heißen die *Wegzusammenhangskomponenten* oder *Wegkomponente* von X . Ein Raum heißt *wegzusammenhängend*, wenn er nicht mehr als eine Wegzusammenhangskomponente besitzt.

0.75 Proposition. Sei X ein Raum. Ist X wegzusammenhängend, so auch zusammenhängend.

Beweis. Seien $p, q \in X$ beliebig. Da X wegzusammenhängend ist, existiert ein Weg $w: I \rightarrow X$ von p nach q . Da nach Proposition 0.59 I zusammenhängend ist, ist nach Proposition 0.60 auch $w[I]$ zusammenhängend, also liegen p und q in der gleichen Komponente. Damit hat X nicht mehr als eine Zusammenhangskomponente. \square

Dass die Umkehrung im allgemeinen nicht gilt, macht man sich als Übung an dem Beispiel $\{0\} \times [-1, 1] \cup \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x}\right) : x > 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$ klar.

0.76 Definition. Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig*, wenn ein $v \in X$ existiert, so dass für alle $p \in X$ und $s \in I$ auch $sv + (1-s)p \in X$.

0.77 Proposition. Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig, so ist X wegzusammenhängend.

Beweis. Sei $v \in X$ wie in Definition 0.76 und $p \in X$ beliebig. Dann ist $p \sim_w v$. \square

0.78 Korollar. Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ konvex, so ist X wegzusammenhängend. \square

0.79 Definition. Ein Raum heißt *lokal wegzusammenhängend*, wenn jeder Punkt eine Umgebungsbasis (Definition 0.37) aus wegzusammenhängenden Umgebungen besitzt.

0.80 Proposition. Die Wegzusammenhangskomponenten eines lokal wegzusammenhängenden Raumes sind offen-abgeschlossen und stimmen mit den Zusammenhangskomponenten überein.

Beweis. Sei K eine Wegzusammenhangskomponente und $x \in K$. Nun existiert eine wegzusammenhängende Umgebung U von x . Da $x' \sim_w x$ für alle $x' \in U$, ist $U \subset K$. Damit ist K offen. Da das Komplement von K aber die Vereinigung aller anderen Wegzusammenhangskomponenten ist, ist das Komplement von K auch offen. Damit ist K offen-abgeschlossen.

Nun ist, da die Wegzusammenhangskomponenten zusammenhängend sind, jede Zusammenhangskomponente disjunkte Vereinigung von Wegzusammenhangskomponenten. Da die Zusammenhangskomponenten selbst zusammenhängend und die Wegzusammenhangskomponenten offen-abgeschlossen sind, kann keine Zusammenhangskomponente disjunkte Vereinigung von mehr als einer Wegzusammenhangskomponente sein. \square

Kompaktheit

Den Begriff der Kompaktheit muss man wohl für jemanden, der eine Analysisvorlesung gehört hat, nicht weiter motivieren. Für uns ist es nur wichtig, aus den verschiedenen Charakterisierungen, die dort kennengelernt wurden und die für Teilmengen des \mathbb{R}^n äquivalent sind, die richtige als Definition herauszupicken.

0.81 Definition. Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Eine Familie $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X heißt *Überdeckung* (von X), wenn $\bigcup \mathcal{C} = X$, *offene Überdeckung*, wenn zusätzlich $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$. Eine Teilmenge einer Überdeckung, die selbst Überdeckung ist, heißt *Teilüberdeckung*.

0.82 Definition. Sei X ein topologischer Raum. X heißt *quasikompakt*, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Der Raum X heißt *kompakt*, wenn er quasikompakt und hausdorffsch ist.

Häufig werden quasikompakte Räume schon kompakt genannt, man lasse also beim Literaturstudium Vorsicht walten.

Da schon bekannt sein sollte, wann Unterräume von euklidischen Räumen kompakt sind, heben wir uns diese noch ein wenig auf und begnügen uns mit einem Beispiel, das zeigt, dass Kompaktheit als Verallgemeinerung von Endlichkeit angesehen werden kann.

0.83 Beispiel. Jeder endliche Raum (in der Tat jeder Raum mit nur endlich vielen offenen Mengen) ist quasikompakt. Ein diskreter Raum X ist genau dann quasikompakt (und damit kompakt), wenn er endlich ist (betrachte die Überdeckung $\{\{x\} : x \in X\}$).

Nun wieder ein wenig Prüfungsvorbereitung für die, die die Analysisprüfung noch nicht hinter sich haben.

0.84 Proposition. Ein abgeschlossener Unterraum A eines quasikompakten Raumes X ist quasikompakt.

Beweis. Sei $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(A)$ eine offene Überdeckung von A . Betrachte nun $\mathcal{C}' := \{U \subset X : U \text{ offen}, U \cap A \in \mathcal{C}\}$. Nach der Definition der Unterraumtopologie gibt es zu jedem $V \in \mathcal{C}$ ein $U \in \mathcal{C}'$ mit $U \cap A = V$. Daher ist $\mathcal{C}' \cup \{X - A\}$ eine offene Überdeckung von X und hat eine endliche Teilüberdeckung \mathcal{C}'' . $\{U \cap A : U \in \mathcal{C}''\}$ ist nun eine endliche Teilüberdeckung von \mathcal{C} . \square

0.85 Proposition. Eine quasikompakte Teilmenge K eines Hausdorffraumes X ist abgeschlossen.

Beweis. Sei $x \in X - K$. Es ist zu zeigen, dass $X - K$ Umgebung von x ist. Setze $\mathcal{C} := \{X - \bar{U} : U \text{ Umgebung von } x\}$. Da X hausdorffsch ist, ist $\bigcup \mathcal{C} = X - \{x\}$, also $\mathcal{C}' := \{U \cap K : U \in \mathcal{C}\}$ eine offene Überdeckung von K . Nun existiert eine endliche Teilüberdeckung von \mathcal{C}' , also auch eine endliche Menge \mathcal{U} von Umgebungen von x , so dass $\bigcup \{X - \bar{U} : U \in \mathcal{U}\} \supset K$, also $\bigcap \mathcal{U} \subset X - K$. Nun ist $\bigcap \mathcal{U}$ eine Umgebung von x , also ist auch $X - K$ eine Umgebung von x . \square

Stetige Bilder quasikompakter Räume sind quasikompakt.

0.86 Proposition. Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig und surjektiv und X quasikompakt. Dann ist auch Y quasikompakt.

Beweis. Sei \mathcal{C} eine offene Überdeckung von Y . Dann ist $\{f^{-1}[U] : U \in \mathcal{C}\}$ eine offene Überdeckung von X . Es gibt daher eine endliche Teilmenge $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$, so dass $\{f^{-1}[U] : U \in \mathcal{C}'\}$ eine Überdeckung von X ist. Aus der Surjektivität von f folgt, dass \mathcal{C}' eine Überdeckung von Y ist: Sei $y \in Y$ und $x \in X$ mit $f(x) = y$. Nun existiert $U \in \mathcal{C}'$ mit $x \in f^{-1}[U]$, also $y = f(x) \in U$. \square

Produkte

Eine einfache, aber wichtige Anwendung von Kompaktheit ist die folgende.

0.87 Proposition. *Seien X, Y Räume. Ist Y quasikompakt, $x \in X$ und $O \subset X \times Y$ offen mit $\{x\} \times Y \subset O$, so existiert eine Umgebung U von x , so dass $U \times Y \subset O$.*

Beweis. Wir erinnern uns, dass $\{V \times W : V \subset X \text{ offen, } W \subset Y \text{ offen}\}$ eine Basis der Produkttopologie ist. Daher gilt, wenn wir

$$\mathcal{C} := \{V \times W : V \text{ Umgebung von } x, W \subset Y \text{ offen, } V \times W \subset O\}$$

setzen, $\{x\} \times Y \subset \bigcup \mathcal{C}$. Nun ist $\{W \subset Y : \text{Es ex. } V \subset X \text{ mit } V \times W \in \mathcal{C}\}$ eine offene Überdeckung von Y . Aus der Quasikompaktheit von Y folgt nun die Existenz von $n \in \mathbb{N}$ und für $1 \leq k \leq n$ Umgebungen $V_k \subset X$ von x und offenen Mengen $W_k \subset Y$, so dass $V_k \times W_k \subset O$ und $\bigcup_{k=1}^n W_k = Y$. Nun ist $U := \bigcap_{k=1}^n V_k$ eine Umgebung von x und

$$U \times Y = U \times \bigcup_{k=1}^n W_k \subset \bigcup_{k=1}^n (V_k \times W_k) \subset O,$$

wie gefordert. □

Dies ist auch ein Schritt im Beweis der folgenden Proposition.

0.88 Proposition. *Das Produkt zweier quasikompakter Räume ist quasikompakt.*

Beweisskizze. Man nimmt eine beliebige offene Überdeckung von $X \times Y$. Für beliebiges $x \in X$ zeigt man, dass es eine endliche Teilüberdeckung von $\{x\} \times Y$ gibt. Dann wendet man Proposition 0.87 an und schließlich noch die Quasikompaktheit von X . □

Die Ausarbeitung des Beweises eignet sich als Übung.

Metrische Räume

Wenn wir uns nicht zu sehr auf das in der Analysis gezeigte beziehen wollen, sollten wir nun noch zeigen, dass eine Teilmenge eines euklidischen Raumes genau dann kompakt ist, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Aufgrund des bisher gezeigten, würde es genügen, zu zeigen, dass das Einheitsintervall kompakt ist; man überlege sich das. Das ginge auch schnell, wäre aber nicht sonderlich spannend. In [?, Chap. 3, Thm. 6.1] findet man eine Verallgemeinerung auf gewisse geordnete Räume. Wir werden eine Verallgemeinerung auf metrische Räume behandeln, wie sie zum Beispiel in [?, I.9] dargestellt ist. Dazu müssen wir allerdings für metrische Räume gewisse Begriffe wie Cauchy-Folgen als bekannt voraussetzen.

0.89 Definition. Ein metrischer Raum heißt *vollständig*, wenn in ihm jede Cauchy-Folge konvergiert.

0.90 Definition. Ein metrischer Raum heißt *total beschränkt*, wenn er für beliebiges $\varepsilon > 0$ eine Überdeckung durch endlich viele ε -Kugeln besitzt.

0.91 Proposition. In einem metrischen Raum X sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (i) X ist kompakt.
- (ii) X ist vollständig und total beschränkt.

Der Beweis ist im wesentlichen der, mit dem in Analysis II häufig gezeigt wird, dass I^n kompakt ist. Insofern ist die Formulierung der Proposition vielleicht interessanter als der Beweis, da hier in gewisser Weise die richtige Verallgemeinerung gefunden wurde.

Beweis. „ \Rightarrow “ Sei X nicht vollständig und (a_n) eine nicht konvergente Cauchy-Folge. Zu beliebigem $x \in X$ existiert dann ein $\varepsilon > 0$, so dass unendlich viele Folgenglieder nicht in $B_\varepsilon(x)$ liegen. Da (a_n) Cauchy-Folge ist, folgt daraus, dass es ein ε_x gibt, so dass nur endlich viele Folgenglieder in $B_{\varepsilon_x}(x)$ liegen. Nun ist $\{B_{\varepsilon_x}(x) : x \in X\}$ eine offene Überdeckung von X . Da in jedem Element dieser Überdeckung nur endlich viele Folgenglieder liegen, kann sie keine endliche Teilüberdeckung haben. Damit ist X nicht kompakt.

Sei nun X kompakt und $\varepsilon > 0$. Die Menge aller ε -Bälle überdeckt X und aufgrund der Kompaktheit genügen tatsächlich endlich viele. Damit ist X total beschränkt.

„ \Leftarrow “ Sei X vollständig und total beschränkt und \mathcal{C} eine offene Überdeckung von X . Wir werden die Annahme, dass \mathcal{C} keine endliche Teilüberdeckung habe, zum Widerspruch führen. Setze zunächst $A_{-1} := X$. Angenommen $A_{n-1} \subset X$ sei definiert und werde von keiner endlichen Teilmenge von \mathcal{C} überdeckt. Dann können wir X mit endlich vielen $\frac{1}{2^n}$ -Kugeln überdecken, und eine von denen, die A_{n-1} treffen wird wiederum von keiner endlichen Teilmenge von \mathcal{C} überdeckt. Sei A_n eine solche Kugel und x_n ihr Mittelpunkt. Nun ist (x_n) eine Cauchy-Folge und $B_{\frac{1}{2^n}}(x_n)$ wird von keiner endlichen Teilmenge von \mathcal{C} überdeckt. Da X vollständig ist, konvergiert (x_n) gegen einen Punkt, den wir y nennen wollen. Nun gibt es ein $O \in \mathcal{C}$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(y) \subset O$. Nun gibt es aber ein n , so dass $x_n \in B_{\varepsilon/2}(y)$ und $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$, was zu einem Widerspruch führt. \square

0.92 Korollar. Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und in der euklidischen Norm beschränkt ist.

Beweis. Der Unterraum X des vollständigen metrischen Raumes \mathbb{R}^n ist genau dann vollständig, wenn er abgeschlossen ist. Wir zeigen nun noch, dass er genau dann beschränkt ist, wenn er total beschränkt ist. Es ist leicht zu

sehen, dass ein unbeschränktes X nicht total beschränkt sein kann. Sei nun X beschränkt und $\varepsilon > 0$. Wiederum ist leicht zu sehen, dass es möglich ist, X mit endlich vielen $\frac{\varepsilon}{2}$ Kugeln in \mathbb{R}^n zu überdecken. Lasse nun jede Kugel einer solchen Überdeckung weg, falls ihr Schnitt mit X leer ist und ersetze sie ansonsten durch die ε -Kugel um einen Punkt in diesem Schnitt. Dies ergibt eine Überdeckung von X mit endlich vielen ε -Kugeln. \square

Trennungsaxiome

Neben der Hausdorffeigenschaften gibt es noch weitere sogenannter Trennungseigenschaften.

Definitionen und erste Eigenschaften

0.93 Definition. Sei X ein Raum. Ein Raum heißt ein T_i -Raum, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, wenn er die entsprechende der folgenden Eigenschaften erfüllt.

- (T_1) Für alle $x_0, x_1 \in X$ mit $x_0 \neq x_1$ existiert eine offene Menge $O \subset X$ mit $x_0 \in O, x_1 \notin O$.
- (T_2) Für alle $x_0, x_1 \in X$ mit $x_0 \neq x_1$ existieren offene Mengen $O_0, O_1 \subset X$ mit $x_i \in O_i$ und $O_0 \cap O_1 = \emptyset$.
- (T_3) Für alle Punkte $x \in X$ und abgeschlossenen Mengen $A \subset X$ mit $x \notin A$ existieren offene Mengen $O_0, O_1 \subset X$ mit $x \in O_0, A \subset O_1$ und $O_0 \cap O_1 = \emptyset$.
- (T_4) Für alle abgeschlossenen Mengen $A_0, A_1 \subset X$ existieren offene Mengen $O_0, O_1 \subset X$ mit $A_i \subset O_i$ und $O_0 \cap O_1 = \emptyset$.

Der Raum X heißt *regulär*, wenn er T_3 und T_1 erfüllt, *normal*, wenn er T_4 und T_1 erfüllt.

0.94 Proposition.

- ▷ T_1 -Räume sind genau die Räume, in denen alle einelementigen Mengen abgeschlossen sind.
- ▷ T_2 -Räume erfüllen T_1 .
- ▷ Reguläre Räume erfüllen T_2 .
- ▷ Normale Räume sind regulär.

\square

0.95 Bemerkung. Alle nicht in der Definition oder dieser Proposition notierten Implikationen gelten nicht. Zum Beispiel gibt es T_3 -Räume, die nicht T_2 erfüllen, und T_4 -Räume, die nicht T_3 erfüllen.

Bevor all dies zu obskur erscheint, beginnen wir mit einer einfachen Feststellung.

0.96 Proposition. *Metrisierbare Räume sind normal.*

Beweis. Sei X ein Raum, d eine Metrik auf X , die die Topologie induziert und $A_0, A_1 \subset X$ abgeschlossen und disjunkt.

Für $M \subset X$ definiert $\text{dist}_M(x) := \inf \{d(x, m) : m \in M\}$ eine stetige Funktion auf M , wie sich leicht aus der Dreiecksungleichung ergibt. Es ist $\text{dist}_M(x) = 0 \iff x \in \overline{M}$. Für $i \in \{0, 1\}$ setze nun $O_i := \{x \in X : \text{dist}_{A_i}(x) < \text{dist}_{A_{1-i}}(x)\}$. Dann sind O_0, O_1 disjunkte offene Mengen und $O_i \supset A_i$. \square

Kompakte Räume sind normal

Die folgenden Überlegungen werden zeigen, dass kompakte Räume normal sind. Die Zwischenschritte sind es aber wert, notiert zu werden.

0.97 Proposition. *Sei X ein T_2 -Raum, $K \subset X$ kompakt und $x \in X \setminus K$. Dann existiert eine offene Menge O mit $K \subset O$ und $x \notin \overline{O}$.*

Beweis. Da X ein T_2 -Raum ist, existiert zu jedem $y \neq x$ eine Umgebung U von x , so dass $y \notin \overline{U}$. Daher ist $\{K \setminus \overline{U} : U \in \mathcal{U}(x)\}$ eine offene Überdeckung von K . Da K kompakt ist, existieren $n \in \mathbb{N}$ und $U_k \in \mathcal{U}(x)$, $1 \leq k \leq n$, so dass

$$K \subset \bigcup_{k=1}^n (X \setminus \overline{U}_k) = X \setminus \bigcap_{k=1}^n \overline{U}_k =: O.$$

O ist offen und

$$X \setminus \overline{O} = \text{int} \bigcap_{k=1}^n \overline{U}_k \supset \bigcap_{k=1}^n \text{int} U_k \ni x.$$

\square

0.98 Proposition. *Sei X ein T_2 -Raum, $K_0, K_1 \subset X$ kompakt und disjunkt. Dann existieren offene Mengen $O_0, O_1 \subset X$ mit $K_i \subset O_i$ und $O_0 \cap O_1 = \emptyset$.*

Beweis. Wir wiederholen den vorherigen Beweis mit K_0 an der Stelle von x , K_1 an der Stelle von K und der soeben gezeigten Eigenschaft an der Stelle der Hausdorff-Eigenschaft.

Wegen Proposition 0.97 ist $\{K_1 \setminus \overline{U} : U \supset K_0, U \text{ offen}\}$ eine offene Überdeckung von K_1 . Da K_1 kompakt ist, existieren $n \in \mathbb{N}$ und offene $U_k \supset K_0$, $1 \leq k \leq n$, so dass

$$K_1 \subset \bigcup_{k=1}^n (X \setminus \overline{U}_k) = X \setminus \bigcap_{k=1}^n \overline{U}_k =: O_1.$$

O_1 ist offen und mit

$$O_0 := X \setminus \overline{O_1} = \text{int} \bigcap_{k=1}^n \overline{U_k} = \bigcap_{k=1}^n \text{int} \overline{U_k} \supset \bigcap_{k=1}^n U_k \supset K_0$$

ist auch O_0 offen und $O_0 \cap O_1 = \emptyset$. □

0.99 Korollar. *Kompakte Räume sind normal.* □

Literatur

Alles, das wir an allgemeiner Topologie benötigen, ist im ersten Kapitel des Lehrbuchs zu Algebraische Topologie von Bredon [?] enthalten.

Ein einführendes Lehrbuch zur allgemeinen Topologie ist [?]. Querenburg behandelt auf wenig Raum viel mengentheoretische Topologie.

Wem das alles zu wenig abstrakt ist, der findet wie immer bei Bourbaki Hilfe [?]. Ein ‚echtes‘ Buch über mengentheoretische Topologie ist Engelking's Werk [?], in dem man angeblich alles findet.

Ein Buch einer ganz anderen Art ist das von Steen und Seebach. Sucht man einen Raum mit Eigenschaften α und β aber weder γ noch δ , so hat man gute Chancen, ihn in [?] zu finden.

Abschnitt 1

Quotienten

Homotopie, erste Definitionen

Wir betrachten nun das Deformieren einer Abbildung in eine andere.

1.1 Definition. Seien X, Y topologische Räume und $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ stetige Abbildungen. Eine *Homotopie* zwischen f_0 und f_1 ist eine stetige Abbildung $F: X \times I \rightarrow Y$, so dass $F(x, 0) = f_0(x)$ und $F(x, 1) = f_1(x)$ für alle $x \in X$. Wir nennen f_0 und f_1 zu einander *homotop* und schreiben $f_0 \simeq f_1$, wenn eine Homotopie zwischen f_0 und f_1 existiert.

Für die Anschauung mag es manchmal sinnvoll sein, sich F als Abbildung vom Zylinder $X \times I$ vorzustellen, und manchmal, F als eine mit der Zeit $t \in I$ variierende Schar von Funktionen

$$\begin{aligned} f_t: X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto F(x, t) \end{aligned}$$

anzusehen.

1.2 Beispiel. Seien X, Y nicht-leere Räume und $f, g: X \rightarrow Y$ konstante Funktionen. Dann ist $f \simeq g$ genau dann, wenn die Bilder von f und g in der selben Wegzusammenhangskomponente von Y liegen.

1.3 Beispiel. Sei $n \geq 0$ und

$$\begin{aligned} r: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \\ x &\mapsto \frac{x}{\|x\|}. \end{aligned}$$

Dann ist $r \simeq \text{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ wie die Homotopie

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times I &\rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \\ (x, t) &\mapsto \frac{x}{(1-t)\|x\| + t} \end{aligned}$$

zeigt.

1.4 Definition. Seien X, Y Räume, $A \subset X$ und $f, g: X \rightarrow Y$ stetige Abbildungen. Wir sagen, f sei *relativ zu A homotop* zu g , $f \simeq g \text{ rel } A$, wenn eine Homotopie $F: X \times I \rightarrow Y$ zwischen f und g existiert, so dass $F(a, t) = F(a, 0)$ für alle $a \in A, t \in I$.

Damit $f \simeq g \text{ rel } A$ gelten kann, muss natürlich $f|_A = g|_A$ erfüllt sein.

1.5 Beispiel. In Beispiel 1.3 ist $r \simeq \text{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \text{ rel } \mathbb{S}^{n-1}$.

Quotienten

Um das Konzept einer Quotiententopologie vorzubereiten beginnen wir mit einem einfachen Beispiel, das zwei verschiedene Arten, Schleifen zu beschreiben, miteinander vergleicht.

1.6 Proposition. *Es sei p die Abbildung*

$$\begin{aligned} p: I &\rightarrow \mathbb{S}^1, \\ t &\mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)). \end{aligned}$$

Dann ist für jeden Raum X durch $f \mapsto f \circ p$ eine Bijektion

$$\{f: \mathbb{S}^1 \rightarrow X: f \text{ stetig}\} \rightarrow \{w: I \rightarrow X: w \text{ stetig}, w(0) = w(1)\}$$

gegeben.

Beweis. Da p stetig mit $p(0) = p(1)$ ist $f \mapsto f \circ p$ eine Abbildung wie angegeben, zu zeigen ist die Bijektivität. Die Injektivität folgt bereits aus der Surjektivität von p . Es sei nun eine stetige Abbildung $w: I \rightarrow X$ mit $w(0) = w(1)$ gegeben. Da p surjektiv und $p(x) = p(y)$ nur für $x = y$ oder $\{x, y\} = \{0, 1\}$, existiert eine eindeutige Funktion f mit $w = f \circ p$, und es bleibt die Stetigkeit von f zu zeigen. Dazu werden wir zeigen, dass jede Menge $M \subset \mathbb{S}^1$, für die $p^{-1}[M]$ offen ist, selbst offen ist. Dies genügt, denn für eine offene Menge $O \subset X$ ist $p^{-1}[f^{-1}[O]] = (f \circ p)^{-1}[O] = w^{-1}[O]$ offen und damit dann $f^{-1}[O]$ offen.

Es sei also $M \subset \mathbb{S}^1$ und $p^{-1}[M]$ offen. Um (hoffentlich) die Notation weniger verwirrend zu gestalten setzen wir $y_0 := (1, 0) \in \mathbb{S}^1$. Da p einen Homöomorphismus $(0, 1) \rightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \{y_0\}$ induziert, ist die Menge $M \setminus \{y_0\} = p[p^{-1}[M] \setminus \{0, 1\}]$ offen in \mathbb{S}^1 . Ist $y_0 \notin M$, so sind wir also bereits fertig. Ansonsten ist $\{0, 1\} \subset p^{-1}[M]$. Da M offen ist, existiert nun ein $\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$, so dass $[0, \varepsilon) \cup (1 - \varepsilon, 1] \subset p^{-1}[M]$. Nun ist aber $U_\varepsilon := p[[0, \varepsilon) \cup (1 - \varepsilon, 1]]$ offen, wie man sich leicht überzeugt, also ist auch $M = (M \setminus \{y_0\}) \cup U_\varepsilon$ offen. \square

Der Eigenschaft, die wir für p gerade nachgewiesen haben, geben wir einen Namen.

1.7 Definition. Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt eine *Quotientenabbildung*, wenn sie stetig und surjektiv ist und für jeden Raum Z und jede Funktion $f: Y \rightarrow Z$, für die $f \circ p$ stetig ist, bereits f stetig ist.

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ p \downarrow & \searrow f & \\ Y & \xrightarrow{\quad} & Z \end{array}$$

1.8 Proposition. Eine injektive Quotientenabbildung ist ein Homöomorphismus.

Beweis. Ist f eine injektive Quotientenabbildung, so ist f bijektiv und f^{-1} stetig, da $f^{-1} \circ f = \text{id}$ stetig ist. \square

1.9 Proposition und Definition. Ist X ein topologischer Raum, M eine Menge und $p: X \rightarrow M$ eine Surjektion, so gibt es genau eine Topologie \mathcal{T} auf M , für die $p: X \rightarrow (M, \mathcal{T})$ eine Quotientenabbildung ist, nämlich

$$\mathcal{T} := \{O \subset M : p^{-1}[O] \text{ ist offen}\}.$$

Diese heißt die Quotiententopologie (oder auch Finaltopologie) zu p .

Beweis. Dass die so definierte Menge \mathcal{T} eine Topologie auf M , also abgeschlossen unter Vereinigungen und endlichen Schnitten ist, folgt daraus, dass $O \mapsto p^{-1}[O]$ mit diesen Mengenoperationen vertauscht.

Versieht man M mit dieser Topologie, so ist p offenbar stetig. Dass p damit auch Quotientenabbildung ist, sieht man wie zuvor: Ist $f: M \rightarrow Z$ eine Funktion und $f \circ p$ stetig, so ist für offenes $O \subset Z$ auch $(f \circ p)^{-1}[O] = p^{-1}[f^{-1}[O]]$ offen, also $f^{-1}[O] \in \mathcal{T}$.

Es seien nun \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 Topologien auf M und schreiben wir

$$\begin{array}{ll} q_i: X \rightarrow (M, \mathcal{T}_i), & j: (M, \mathcal{T}_1) \rightarrow (M, \mathcal{T}_2), \\ x \mapsto p(x), & x \mapsto x. \end{array}$$

Ist q_2 stetig und q_1 Quotientenabbildung, so ist wegen $j \circ q_1 = q_2$ die Abbildung j stetig, das heißt $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$. Sind beides Quotientenabbildungen, so ist also $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$, was die Eindeutigkeit zeigt. \square

Die folgende Proposition ist sehr nützlich und hätte uns in der Tat den lästigen Teil des Beweises von Proposition 1.6 erspart.

1.10 Proposition. Seien X, Y Räume, X quasikompakt, Y hausdorffsch und sei $p: X \rightarrow Y$ eine stetige Surjektion. Dann ist p eine Quotientenabbildung.

Beweis. Sei Z ein Raum und $f: Y \rightarrow Z$ eine Funktion, so dass $f \circ p$ stetig ist.

Sei $A \subset Z$ abgeschlossen. Es ist zu zeigen, dass $f^{-1}[A]$ abgeschlossen ist. Da $f \circ p$ stetig ist, ist $p^{-1}[f^{-1}[A]]$ abgeschlossen, also nach Proposition 0.84 quasikompakt. Nach Proposition 0.86 ist $p[p^{-1}[f^{-1}[A]]]$ quasikompakt und nach Proposition 0.85 abgeschlossen. Da p surjektiv ist, ist $p[p^{-1}[f^{-1}[A]]] = f^{-1}[A]$. \square

1.11 Korollar. *Ist $h: X \rightarrow Y$ eine stetige Bijektion von einem quasikompakten Raum in einen Hausdorffraum, so ist h ein Homöomorphismus.* \square

1.12 Proposition. *Es seien $n \geq 0$, X ein Raum, $f: \mathbb{S}^n \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- (i) *Die Abbildung f ist homotop zu einer konstanten Abbildung.*
- (ii) *Es existiert eine stetige Abbildung $F: \mathbb{D}^{n+1} \rightarrow X$ mit $F|_{\mathbb{S}^n} = f$.*

Beweis. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} p: \mathbb{S}^n \times I &\rightarrow \mathbb{D}^{n+1}, \\ (x, t) &\mapsto (1-t)x. \end{aligned}$$

Ist F wie in (ii), so definiert $H = F \circ p$ eine Abbildung wie in (i).

Ist andererseits H gegeben, so definieren wir

$$F(y) := \begin{cases} H(y/\|y\|, 1 - \|y\|), & y \neq 0, \\ H(*, 1), & y = 0, \end{cases}$$

wobei $*$ ein beliebiger Punkt aus \mathbb{S}^n sei. Da H auf \mathbb{S}^n konstant ist, gilt $H = F \circ p$. Da p nach Proposition 1.10 eine Quotientenabbildung ist, ist F stetig. \square

Äquivalenzrelationen

Quotiententopologien formalisieren das anschauliche Konzept des Verklebens von Räumen an Punkten. Um das besser zu verstehen, beschäftigen wir uns kurz mit surjektiven Abbildungen und ihrem Zusammenhang mit Äquivalenzrelationen.

Seien zunächst M, N Mengen und $f: M \rightarrow N$ eine Funktion. Dann definiert f eine Äquivalenzrelation \sim_f auf M durch $x \sim_f x' :\Leftrightarrow f(x) = f(x')$. Ist andererseits \sim eine Äquivalenzrelation auf M und bezeichnet M/\sim die Menge der Äquivalenzklassen, so definiert dies eine surjektive Funktion $q: M \rightarrow M/\sim$ durch $q(x) := [x]_\sim$. Ist nun \sim eine Äquivalenzrelation, q die

zugehörige Surjektion auf die Äquivalenzklassen und \sim_q die hierdurch definierte Relation, so ist offenbar $\sim_q = \sim$. Ist andererseits $f: M \rightarrow N$ surjektiv, so existiert genau eine Bijektion $M/\sim_f \rightarrow N$, die

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ & \searrow x \mapsto [x] & \uparrow \\ & & M/\sim_f \end{array}$$

kommutativ macht. Wenn einen also nicht interessiert, was die Elemente von N sind —und bei Räumen schauen wir uns ja meist nicht an, was ein ‚Punkt‘ ist—, so wird die Surjektion f vollständig durch die Relation \sim_f beschrieben.

Wir legen entsprechend noch Notation fest.

1.13 Notation. Ist X ein Raum und \sim eine Äquivalenzrelation auf X , so bezeichnet X/\sim den Raum, der aus der Menge der Äquivalenzklassen bezüglich \sim versehen mit der Quotiententopologie bezüglich der kanonischen Surjektion $X \rightarrow X/\sim$ besteht.

Das Zusammenschlagen von Unterräumen

Für einen häufig vorkommenden Fall führen wir eine einfachere Notation ein.

1.14 Notation. Sei X ein Raum und $A \subset X$. Ist \sim die Äquivalenzrelation auf X mit

$$x \sim y \iff (x = y) \vee (x, y \in A),$$

die A zu einem Punkt identifiziert, so schreiben wir

$$X/A$$

für den Quotientenraum X/\sim . Sind etwas allgemeiner $A_1, \dots, A_n \subset X$ paarweise disjunkt und

$$x \sim y \iff (x = y) \vee (x, y \in A_1) \vee \dots \vee (x, y \in A_n),$$

so schreiben wir

$$X/(A_1, \dots, A_n)$$

für X/\sim .

1.15 Definition. Sei X ein Raum. Dann nennen wir

$$CX := X \times I/X \times \{1\}$$

den *Kegel* über X und

$$\Sigma X := X \times I/(X \times \{0\}, X \times \{1\})$$

die *Einhängung* von X .

1.16 Proposition. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

- (i) $C\mathbb{S}^n \approx \mathbb{D}^{n+1}$,
- (ii) $\Sigma\mathbb{S}^n \approx \mathbb{S}^{n+1}$,
- (iii) $\mathbb{D}^{n+1}/\mathbb{S}^n \approx \mathbb{S}^{n+1}$.

Wir zeigen den ersten Teil und lassen die beiden anderen zur Übung.

Beweis von (i). Es sei $q: \mathbb{S}^n \times I \rightarrow C\mathbb{S}^n$ die Quotientenabbildung aus der Definition des Kegels. Wir benutzen auch wieder die Abbildung

$$p: \mathbb{S}^n \times I \rightarrow \mathbb{D}^{n+1}, \\ (x, t) \mapsto (1 - t)x.$$

aus dem Beweis von Proposition 1.12. Wir stellen fest, dass p surjektiv ist und $p(y) = p(y') \iff q(y) = q(y')$ für alle $y, y' \in \mathbb{S}^n \times I$ gilt.

Wegen der Surjektivität von q und $q(y) = q(y') \implies p(y) = p(y')$ existiert eine eindeutige Abbildung $h: C\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{D}^{n+1}$ mit $p = h \circ q$. Da q Quotientenabbildung ist und p stetig ist, ist h stetig.

Da p surjektiv ist, ist h surjektiv.

Wegen $p(y) = p(y') \implies q(y) = q(y')$ ist p injektiv.

Also ist p eine stetige Bijektion. Wir können den Beweis nun auf zwei fast gleiche Arten beenden.

Variante 1. Da $\mathbb{S}^n \times I$ quasikompakt und q surjektiv ist, ist auch $C\mathbb{S}^n$ quasikompakt. Außerdem ist \mathbb{D}^{n+1} hausdorffsch. Nach Korollar 1.11 ist damit h ein Homöomorphismus.

Variante 2. Da $\mathbb{S}^n \times I$ quasikompakt und \mathbb{D}^{n+1} hausdorffsch ist, ist die Surjektion p nach Proposition 1.10 eine Quotientenabbildung. Da $q = h^{-1} \circ p$ stetig ist, ist daher auch h^{-1} stetig, also h ein Homöomorphismus. \square

Sehen wir uns den Beweis in Variante 2 noch einmal an, sehen wir, dass wir nebenbei die folgende Tatsache gezeigt haben. Dies ist nur eine andere Art, die Eindeutigkeit der Quotiententopologie zu formulieren.

1.17 Lemma. *Seien X, Y_0, Y_1 Räume und $q_i: X \rightarrow Y_i$ Quotientenabbildungen. Ist für alle $x, x' \in X$ genau dann $q_0(x) = q_0(x')$, wenn $q_1(x) = q_1(x')$, so existiert eine eindeutig bestimmte Funktion h , so dass*

$$\begin{array}{ccc} & & Y_0 \\ & \nearrow q_0 & \downarrow h \\ X & & \\ & \searrow q_1 & \downarrow \\ & & Y_1 \end{array}$$

kommutiert, und h ist ein Homöomorphismus. \square

Projektive Räume

Bisher haben wir Quotienten betrachtet, die homöomorph zu Räumen waren, die wir bereits gut kannten. Spannender ist es, mit Hilfe von Quotienten neue Räume zu erschaffen.

Definition und erste Eigenschaften

1.18 Definition. Sei $n \in \mathbb{N}$. Der n -dimensionale (reell-)projektive Raum, \mathbb{RP}^n , ist definiert durch

$$\mathbb{RP}^n := \mathbb{S}^n / \sim,$$

wobei für $x, y \in \mathbb{S}^n$

$$x \sim y \iff (x = y) \vee (x = -y).$$

Es werden also Antipoden identifiziert.

Wir sollten kurz zwei Begriffe einführen, auf die wir bisher verzichtet haben.

1.19 Definition. Seien X, Y Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine Funktion. f heißt *offen*, wenn $f[O]$ für alle offenen $O \subset X$ offen ist, *abgeschlossen*, wenn $f[A]$ für jede abgeschlossene Menge $A \subset X$ abgeschlossen ist.

Man mache sich klar, dass diese beiden Begriffe *nicht* äquivalent sind.

1.20 Lemma. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $p: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ die Quotientenabbildung, die sich aus der Definition des projektiven Raums ergibt. Dann ist p eine offene Abbildung.

Beweis. Es bezeichne $a: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ den Homöomorphismus $x \mapsto -x$. Ist nun $O \subset X$ offen, so ist $p^{-1}[p[O]] = O \cup a[O]$ offen, also $p[O]$ offen. \square

1.21 Proposition. Sei $n \in \mathbb{N}$. \mathbb{RP}^n ist hausdorffsch.

Beweis. Seien $y, y' \in \mathbb{RP}^n$. Es seien p und a wie eben. Wir wählen $x, x' \in \mathbb{S}^n$ mit $p(x) = y$ und $p(x') = y'$. Seien nun U_0, U_0' offene disjunkte Umgebungen von x und x' und ebenso U_1, U_1' offene disjunkte Umgebungen von x und $-x'$. Setze nun $V := p[U_0 \cap U_1]$ und $V' := p[U_0' \cap a[U_1']]$. Da p eine offene Abbildung ist, sind V und V' offen, außerdem ist $y \in V$ und $y' \in V'$. Schließlich ist

$$\begin{aligned} p^{-1}[V \cap V'] &= ((U_0 \cap U_1) \cup a[U_0 \cap U_1]) \cap ((U_0' \cap a[U_1']) \cup (a[U_0'] \cap U_1')) \\ &= (U_0 \cap U_1 \cap U_0' \cap a[U_1']) \cup (U_0 \cap U_1 \cap a[U_0'] \cap U_1') \\ &\quad \cup (a[U_0 \cap U_1] \cap U_0' \cap a[U_1']) \cup (a[U_0 \cap U_1] \cap a[U_0'] \cap U_1') \\ &= \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset = \emptyset, \end{aligned}$$

also $V \cap V' = \emptyset$. \square

1.22 Bemerkung. Das wäre vielleicht etwas einfacher gegangen, hätte man die euklidische Metrik auf $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ benutzt.

Eine andere Darstellung

Wir können die projektiven Räume auch auf eine andere Art erhalten.

1.23 Proposition. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Ist \sim die Äquivalenzrelation auf \mathbb{D}^n mit*

$$x \sim y \iff (x = y) \vee ((x, y \in \mathbb{S}^{n-1}) \wedge (x = -y)),$$

so ist $\mathbb{D}^n / \sim \approx \mathbb{RP}^n$.

Beweis. Es sei $p: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ die Quotientenabbildung und h der Homöomorphismus von \mathbb{D}^n auf die obere Halbkugel von \mathbb{S}^n

$$h: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{S}^n, \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2}).$$

Da zu jedem $y \in \mathbb{S}^n$ ein $x \in \mathbb{D}^n$ mit $h(x) = y$ oder $h(x) = -y$ existiert, ist $p \circ h$ surjektiv. Da \mathbb{D}^n quasikompakt und \mathbb{RP}^n hausdorffsch ist, ist also $p \circ h$ eine Quotientenabbildung. Nun sieht man, dass für $x, x' \in \mathbb{D}^n$ genau dann $(p \circ h)(x) = (p \circ h)(x')$ gilt, wenn $x \sim x'$. Mit Lemma 1.17 folgt die Behauptung. \square

Quotienten und Produkte

Ist $X \rightarrow Y$ eine Quotientenabbildung, so können wir stetige Abbildungen aus Y heraus konstruieren, indem wir auf X geeignete stetige Abbildungen angeben. Manchmal wollen wir aber nicht nur eine Abbildung konstruieren, sondern eine Familie solcher, die stetig durch einen weiteren Z parametrisiert werden sollen, also eine Abbildung aus $Y \times Z$ heraus. Hierzu wäre es nützlich, wenn auch die induzierte Abbildung $X \times Z \rightarrow Y \times Z$ eine Quotientenabbildung wäre. Dies ist sie auch, aber nur unter einer Annahme an Z , die zum Glück für den häufigen Fall $Z = I$ (wir wollen ja Homotopien untersuchen) erfüllt ist. Dazu rufen wir uns einiges über Kompaktheit in Erinnerung.

Zunächst eine Folgerung aus (fast eher eine Umformulierung von) Proposition 0.87.

1.24 Lemma. *Es seien X, Y Räume, $O \subset X \times Y$ offen und $K \subset Y$ quasikompakt. Dann ist $U := \{x \in X: \{x\} \times K \subset O\}$ offen.*

Beweis. Es sei $x \in U$. Wir setzen $\tilde{O} := O \cap (X \times K)$. Dann ist $\{x\} \times K \in \tilde{O}$ und nach Proposition 0.87 existiert eine Umgebung V von x , so dass $V \times K \subset \tilde{O}$, also $V \subset U$. Damit ist U Umgebung von x . Da $x \in U$ beliebig gewählt war, ist U offen. \square

Lokalkompakte Räume sind als Hausdorffräume, in denen jeder Punkt eine kompakte Umgebung hat, definiert. In der Tat hat in ihnen jeder Punkt beliebig kleine kompakte Umgebungen.

1.25 Definition. Sei X ein Raum. X heißt *lokal kompakt*, wenn X hausdorffsch ist und jeder Punkt von x eine kompakte Umgebung besitzt.

1.26 Proposition. Es sei X ein lokal kompakter Raum, $x \in X$ und U eine Umgebung von x . Dann existiert eine kompakte Umgebung K von x , so dass $K \subset U$.

Beweis. Da X lokal kompakt ist, hat x eine kompakte Umgebung K_0 . Nach Proposition 0.97 existiert eine offene Menge $W \supset K_0 \setminus \text{int } U$ mit $x \notin \overline{W}$. Setzen wir $K := K_0 \setminus W$, so ist K eine kompakte Umgebung von x und $K \subset U$. \square

Nun das Ergebnis.

1.27 Lemma. Sei $q: X \rightarrow Y$ eine Quotientenabbildung und Z ein lokal kompakter Raum. Dann ist die Abbildung $q \times \text{id}_Z: X \times Z \rightarrow Y \times Z$ eine Quotientenabbildung.

Beweis. Die Abbildung $q \times \text{id}_Z$ ist stetig und surjektiv. Sei $U \subset Y \times Z$ mit $\tilde{U} := (q \times \text{id}_Z)^{-1}[U]$ offen. Es ist zu zeigen, dass U offen ist.

Sei $(y, z) \in U$. Da Z lokal kompakt ist, hat z eine kompakte Umgebung K , so dass $\{y\} \times K \subset U$. Setze $V := \{y' \in Y: \{y'\} \times K \subset U\} \ni y$. Es ist $q^{-1}[V] = \{x \in X: \{q(x)\} \times K \subset U\} = \{x \in X: \{x\} \times K \subset \tilde{U}\}$ nach Lemma 1.24 offen, also ist, da q eine Quotientenabbildung ist, V offen. Nun ist $(y, z) \in V \times K \subset U$ und damit U eine Umgebung von (y, z) . \square

Abschnitt 2

Homotopie

Homotopie

Den Begriff der Homotopie von Abbildungen haben wir bereits in Definition 1.1 und Definition 1.4 eingeführt. Wir zeigen nun grundlegende Eigenschaften.

2.1 Proposition. *Seien X, Y Räume. Die Relation \simeq ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Funktionen von X nach Y .*

Beweis. Es seien $f, g, h: X \rightarrow Y$ stetig.

Die stetige Funktion

$$\begin{aligned} X \times I &\rightarrow Y \\ (x, t) &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

zeigt $f \simeq f$ und damit die Reflexivität von \simeq .

Ist $f \simeq g$ und F eine Homotopie zwischen f und g , so ist mit

$$\begin{aligned} r: I &\rightarrow I \\ t &\mapsto 1 - t \end{aligned}$$

$F \circ (\text{id}_X \times r)$ eine Homotopie zwischen g und f , also $g \simeq f$, was die Symmetrie von \simeq zeigt.

Ist $f \simeq g$ und $g \simeq h$ und mit zugehörigen Homotopien F und G , so ist

$$\begin{aligned} X \times I &\rightarrow Y \\ (x, t) &\mapsto \begin{cases} F(x, 2t), & t \leq \frac{1}{2}, \\ G(x, 2t - 1), & t \geq \frac{1}{2}, \end{cases} \end{aligned}$$

eine Homotopie zwischen f und h . Für die wohldefiniert beachte, dass $F(x, 1) = g(x) = G(x, 0)$ und für die Stetigkeit, dass $X \times [0, \frac{1}{2}]$ und $X \times [\frac{1}{2}, 1]$ in $X \times I$ abgeschlossen sind. Dies zeigt $f \simeq h$ und die Transitivität von \simeq . \square

Die Komposition von Abbildungen respektiert die Äquivalenzrelation Homotopie:

2.2 Proposition. *Seien X, Y, Z Räume und $f, f': X \rightarrow Y$, $g, g': Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen. Ist $f \simeq f'$ und $g \simeq g'$, so ist $g \circ f \simeq g' \circ f'$.*

Beweis. Ist F eine Homotopie zwischen f und f' , so ist $g \circ F$ eine Homotopie zwischen $g \circ f$ und $g \circ f'$. Ist G eine Homotopie zwischen g und g' , so ist $G \circ (f' \times \text{id}_I)$ eine Homotopie zwischen $g \circ f'$ und $g' \circ f'$. Es ist also $g \circ f \simeq g \circ f' \simeq g' \circ f'$. \square

Entsprechendes gilt für Homotopie relativ zu einem Unterraum.

2.3 Proposition. *Seien X, Y Räume, $A \subset X$. Dann ist Homotopie relativ zu A eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Man wiederhole den Beweis, den wir oben für $A = \emptyset$ gegeben haben. \square

2.4 Proposition. *Seien X, Y, Z Räume, $A \subset X$ und $f, f': X \rightarrow Y$, $g, g': Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen. Ist $f \simeq f' \text{ rel } A$ und $g \simeq g' \text{ rel } f[A]$, so ist $g \circ f \simeq g' \circ f' \text{ rel } A$.* \square

Nützlich ist auch die folgende Tatsache.

2.5 Proposition. *Seien X ein Raum, $A \subset X$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, $f, g: X \rightarrow Y$. Ist $f|_A = g|_A$ und Y konvex, so ist $f \simeq g \text{ rel } A$.*

Beweis. Betrachte

$$\begin{aligned} H: X \times I &\rightarrow Y \\ (x, \lambda) &\mapsto (1 - \lambda)f(x) + \lambda g(x). \end{aligned}$$

Es ist $H(x, 0) = f(x)$ und $H(x, 1) = g(x)$ für alle $x \in X$. Außerdem ist $H(a, \lambda) = f(a) = g(a)$ für alle $a \in A$, $\lambda \in I$. \square

2.6 Beispiel. Ist X ein Raum und sind $w, w': I \rightarrow X$ stetige Wege mit gleichem Anfangspunkt, also $w(0) = w'(0)$, so ist $w \simeq w' \text{ rel } \{0\}$: Ist $c_0: I \rightarrow I$ die Abbildung, die konstant 0 ist, so ist nämlich, da I konvex ist, $c_0 \simeq \text{id}_I \text{ rel } \{0\}$ und daher

$$\begin{aligned} w &= w \circ \text{id}_I \\ &\simeq w \circ c_0 \text{ rel } \{0\} \\ &= w' \circ c_0 \\ &\simeq w' \circ \text{id}_I \text{ rel } \{0\} \\ &= w'. \end{aligned}$$

Andererseits scheint auch offensichtlich, dass für

$$\begin{aligned} w: I &\rightarrow \mathbb{S}^1, & w': I &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ s &\mapsto (\cos s\pi, \sin s\pi) & s &\mapsto (\cos s\pi, -\sin s\pi), \end{aligned}$$

also zwei Wege in von $(1, 0)$ nach $(-1, 0)$ in \mathbb{S}^1 , wobei einer oben, der andere unten entlang geht, gilt, dass

$$w \not\sim w' \text{ rel } \{0, 1\},$$

dass es also nicht möglich ist, den einen Weg in den anderen zu überführen, wenn man beide Endpunkte festhält. Das ist auch in der Tat wahr, wir werden aber noch einiges an Vorbereitung benötigen, um das zu zeigen.

Zusammenziehbare Räume

Wir definieren nun noch eine Klasse von Räumen, die aus der Sicht der Homotopietheorie trivial sind.

2.7 Definition. Sei X ein Raum. Wir sagen X sei *zusammenziehbar*, wenn $X \neq \emptyset$ und die Identitätsabbildung id_X homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

2.8 Beispiel. Nicht-leere konvexe Teilmengen von \mathbb{R}^n sind zusammenziehbar.

Beispiele von nicht zusammenziehbaren Räumen anzugeben, fällt uns schwerer. Die Sphären \mathbb{S}^n sind nicht zusammenziehbar, aber für $n > 0$ können wir das noch nicht zeigen. Leicht ist hingegen, dass zusammenziehbare Räume wegzusammenhängend sind. In der Tat können wir etwas allgemeineres zeigen.

2.9 Definition. Es sei X ein Raum, $n \geq -1$. Der Raum X heißt *n -zusammenhängend*, wenn sich jede stetige Abbildung $f: \mathbb{S}^k \rightarrow X$, $-1 \leq k \leq n$ zu einer stetigen Abbildung $F: \mathbb{D}^{k+1} \rightarrow X$ fortsetzen lässt.

Wir sehen:

2.10 Proposition. Ein Raum ist genau dann (-1) -zusammenhängend, wenn er nicht-leer ist, und 0 -zusammenhängend, wenn er nicht-leer und wegzusammenhängend ist. \square

2.11 Proposition. Ist X ein zusammenziehbarer Raum, so ist X n -zusammenhängend für jedes n .

Beweis. Da der Raum X nicht-leer ist, ist er (-1) -zusammenhängend. Es sei $f: \mathbb{S}^k \rightarrow X$ eine stetige Abbildung, $k \geq 0$. Da id_X homotop zu einer konstanten Abbildung ist, ist es nach Proposition 2.2 auch $f = \text{id}_X \circ f$. Nach Proposition 1.12 lässt sich f damit auf \mathbb{D}^{k+1} fortsetzen. \square

2.12 Bemerkung. Für ausreichend anständige Räume gilt auch die Umkehrung (Satz von Whitehead).

Wir halten noch fest:

2.13 Proposition. *Ist X ein Raum, so ist der Kegel über X zusammenziehbar.*

Beweis. Zur Übung.

□

Abschnitt 3

Die Fundamentalgruppe

Wege

3.1 Definition. Seien X ein Raum und $w, w': I \rightarrow X$ Wege in X mit $w(1) = w'(0)$. Wir bezeichnen mit w^- den Weg

$$\begin{aligned} w^-: I &\rightarrow X \\ t &\mapsto w(1-t) \end{aligned}$$

und mit $w * w'$ den Weg

$$\begin{aligned} w * w': I &\rightarrow X \\ t &\mapsto \begin{cases} w(2t), & t \leq \frac{1}{2}, \\ w'(2t-1), & t \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Außerdem bezeichnen wir für $x \in X$ mit c_x den konstanten Weg

$$\begin{aligned} c_x: I &\rightarrow X \\ t &\mapsto x, \end{aligned}$$

der in $\{x\}$ verläuft.

3.2 Proposition. Seien X, Y Räume, $f: X \rightarrow Y$ stetig, $w, w': I \rightarrow X$ stetig mit $w(1) = w'(0)$. Dann ist $(f \circ w)(1) = (f \circ w')(0)$ und $(f \circ w) * (f \circ w') = f \circ (w * w')$. \square

3.3 Proposition. Sind $v, v', w, w': I \rightarrow X$ stetig mit $v(1) = w(0)$, und ist $v \simeq v' \text{ rel } \{0, 1\}$, $w \simeq w' \text{ rel } \{0, 1\}$, so ist $v * w \simeq v' * w' \text{ rel } \{0, 1\}$.

Beweis. Sei F die Homotopie zwischen v und v' , G die Homotopie zwischen w und w' . Dann ist

$$\begin{aligned} I \times I &\rightarrow X \\ (s, t) &\mapsto \begin{cases} F(2s, t), & s \leq \frac{1}{2}, \\ G(2s-1, t), & s \geq \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

eine Homotopie zwischen $v * w$ und $v' * w'$, und diese Homotopie hält $\{0, 1\}$ (sogar $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$) fest. \square

3.4 Proposition. Sei X ein Raum, $w, w', w'': I \rightarrow X$ stetig, $w(1) = w'(0)$, $w'(1) = w''(0)$. Dann gilt:

- (i) $(w * w') * w'' \simeq w * (w' * w'') \quad \text{rel } \{0, 1\},$
- (ii) $c_{w(0)} * w \simeq w \simeq w * c_{w(1)} \quad \text{rel } \{0, 1\},$
- (iii) $w * w^- \simeq c_{w(0)} \quad \text{rel } \{0, 1\}.$

Beweis. Zu (i): Man kann die Homotopie direkt angeben, und das sei zur Übung empfohlen. Wir gehen hier etwas anders vor: Wir definieren zunächst

$$f: [0, 3] \rightarrow X$$

$$s \mapsto \begin{cases} w(s), & 0 \leq s \leq 1, \\ w'(s-1), & 1 \leq s \leq 2, \\ w''(s-2), & 2 \leq s \leq 3, \end{cases}$$

f ist stetig, und für $a, b \in \mathbb{R}$,

$$l_{a,b}: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \mapsto s \cdot b + (1-s) \cdot a.$$

Dann ist zum Beispiel $w' = f \circ l_{1,2}$, also $(w * w') * w'' = f \circ ((l_{0,1} * l_{1,2}) * l_{2,3})$ und $w * (w' * w'') = f \circ (l_{0,1} * (l_{1,2} * l_{2,3}))$. Wegen Proposition 2.4 genügt es nun, zu zeigen, dass

$$(l_{0,1} * l_{1,2}) * l_{2,3} \simeq l_{0,1} * (l_{1,2} * l_{2,3}) \quad \text{rel } \{0, 1\},$$

beide Seiten aufgefasst als Wege in $[0, 3]$. Da beide Wege Anfangspunkt 0 und Endpunkt 3 haben, folgt dies aber mit Proposition 2.5 aus der Konvexität von $[0, 3]$.

Zu (ii): Es ist $c_{w(0)} * w = w \circ (c_0 * \text{id}_I)$ und $w = w \circ \text{id}_I$. Nun sind $c_0 * \text{id}_I$ und id_I beides Wege in I mit Anfangspunkt 0 und Endpunkt 1 und $c_{w(0)} * w \simeq w \quad \text{rel } \{0, 1\}$ folgt wie eben, und $w \simeq w * c_{w(1)} \quad \text{rel } \{0, 1\}$ ebenso.

Zu (iii): Wie eben mit $w * w^- = w \circ (l_{0,1} * l_{1,0})$, $c_{w(0)} = w \circ c_0$. \square

Die Fundamentalgruppe

Diese Untersuchungen machen die folgende Definition möglich.

3.5 Definition. Sei X ein Raum und $x_0 \in X$. Dann bezeichnen wir mit $\pi_1(X, x_0)$ die Menge der Äquivalenzklassen von stetigen Wegen $w: I \rightarrow X$ mit $w(0) = w(1) = x_0$ bezüglich Homotopie relativ zu $\{0, 1\}$. Einen Weg w mit $w(0) = w(1) = x_0$ nennen wir einen *geschlossenen Weg bei x_0* oder eine *Schleife bei x_0* .

Auf $\pi_1(X, x_0)$ ist durch

$$[w] \cdot [w'] := [w * w']$$

eine Multiplikation erklärt, die $\pi_1(X, x_0)$ zu einer Gruppe mit neutralem Element $[c_{x_0}]$ macht. $\pi_1(X, x_0)$ heißt die *Fundamentalgruppe* von X mit *Basispunkt* x_0 .

3.6 Definition. Ein *Raum mit Basispunkt* ist ein Paar (X, x_0) , wobei X ein Raum ist und $x_0 \in X$. Sind $(X, x_0), (Y, y_0)$ Räume mit Basispunkt, so heißt eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ *basispunkterhaltend*, wenn $f(x_0) = y_0$. Wir schreiben hierfür $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$. Sind $f, g: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ basispunkterhaltende Abbildungen, so werden wir unter einer Homotopie zwischen f und g , wenn wir nichts anderes bemerken, immer eine Homotopie relativ zu $\{x_0\}$ verstehen. Wollen wir explizit sagen, dass eine Homotopie nicht relativ zum Basispunkt zu sein braucht, so reden wir von einer *freien Homotopie*.

3.7 Definition und Proposition. Seien (X, x_0) und (Y, y_0) Räume mit Basispunkt, $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ stetig. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} \pi_1(f): \pi_1(X, x_0) &\rightarrow \pi_1(Y, y_0) \\ [w] &\mapsto [f \circ w]. \end{aligned}$$

Dies ist wohldefiniert und ein Homomorphismus von Gruppen. An Stelle von $\pi_1(f)$ schreiben wir auch $f_\#$.

Beweis. Die Wohldefiniertheit folgt aus Proposition 2.4, die Verträglichkeit mit der Multiplikation aus Proposition 3.2. \square

3.8 Proposition. Seien $(X, x_0), (Y, y_0), (Z, z_0)$ Räume mit Basispunkt, $f, f': (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, $g: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ stetig. Dann gilt:

(i) Ist $f \simeq f'$ (relativ zu $\{x_0\}$), so ist $\pi_1(f) = \pi_1(f')$.

(ii) Es ist $\pi_1(\text{id}_{(X, x_0)}) = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$.

(iii) Es ist $\pi_1(g \circ f) = \pi_1(g) \circ \pi_1(f)$.

Beweis. (i) folgt aus Proposition 2.4, (ii) und (iii) sind klar. \square

Die Fundamentalgruppe erlaubt es uns, topologische Situationen in algebraische zu übersetzen, wobei man dann hofft, dass letztere einfacher sind. Zum Beispiel hat man:

3.9 Proposition. Seien (X, x_0) und (Y, y_0) Räume mit Basispunkt und $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ und $g: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ stetige Abbildungen. Gelten $g \circ f \simeq \text{id}_{(X, x_0)}$ und $f \circ g \simeq \text{id}_{(Y, y_0)}$, so ist $f_\#: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ ein Isomorphismus.

Beweis. Aus $g \circ f \simeq \text{id}_{(X, x_0)}$ folgt $g_{\#} \circ f_{\#} = (g \circ f)_{\#} = (\text{id}_{(X, x_0)})_{\#} = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$. Aus $f \circ g \simeq \text{id}_{(Y, y_0)}$ folgt, dass $f_{\#} \circ g_{\#} = \text{id}_{\pi_1(Y, y_0)}$. Das heißt gerade, dass $f_{\#}$ ein Isomorphismus und invers zu $g_{\#}$ ist. \square

3.10 Beispiel. Sei $x_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ und $i: (\mathbb{S}^{n-1}, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x_0)$ die Inklusion. Wir haben in Beispiel 1.3 eine Abbildung $r: (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x_0) \rightarrow (\mathbb{S}^{n-1}, x_0)$ angegeben, so dass $r \circ i = \text{id}_{(\mathbb{S}^{n-1}, x_0)}$ und $i \circ r \simeq \text{id}_{(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x_0)}$, es ist also $i_{\#}: \pi_1(\mathbb{S}^{n-1}, x_0) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x_0)$ ein Isomorphismus mit inverser Abbildung $r_{\#}$.

In Proposition 3.9 müssen wir bei den Abbildungen und Homotopien die Basispunkte beachten, wir werden später sehen, dass sich das in diesem Fall umgehen lässt. Für den Spezialfall, dass Y ein einpunktiger Raum ist, sehen wir es bereits in dem gleich folgenden Korollar.

3.11 Proposition. *Ein Raum X ist genau dann 1-zusammenhängend, wenn X nicht-leer und wegzusammenhängend ist und für jedes $x_0 \in X$ die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ trivial ist.*

3.12 Bemerkung. Es ist auch nicht schwer zu zeigen, dass für einen wegzusammenhängenden Raum X gilt, dass wenn $\pi_1(X, x_0)$ für einen Basispunkt x_0 trivial ist, dann für alle. Wir werden später noch eine allgemeinere Aussage zeigen.

3.13 Korollar. *Sei X zusammenziehbar und $x_0 \in X$. Dann ist $\pi_1(X, x_0)$ eine triviale Gruppe.*

Beweis von Proposition 3.11. Sei wieder

$$\begin{aligned} p: I &\rightarrow \mathbb{S}^1, \\ p(t) &= (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \end{aligned}$$

und $z_0 = p(0) = p(1)$. Wir erinnern daran, dass stetige Abbildungen $f: (\mathbb{S}^1, z_0) \rightarrow (X, x_0)$ via $f \mapsto f \circ p$ in Bijektion zu Schleifen bei z_0 stehen, und dass $f \simeq g \text{ rel } \{x_0\}$ genau dann, wenn $f \circ p \simeq g \circ p \text{ rel } \{0, 1\}$.

Es ist also $\pi_1(X, x_0)$ für alle $x_0 \in X$ genau dann trivial, wenn für alle $f: (\mathbb{S}^1, z_0) \rightarrow (X, x_0)$ gilt, dass f relativ zu $\{z_0\}$ homotop zu der Abbildung ist, die konstant x_0 ist. Nach Proposition 1.12 und Aufgabe ?? ist dies genau dann der Fall, wenn sich jedes solche f zu einer Abbildung auf \mathbb{D}^2 fortsetzen lässt. Die Behauptung folgt. \square

Bisher wissen wir nicht einmal, dass es einen Raum gibt, dessen Fundamentalgruppe nicht trivial ist, und ohne dieses Wissen kann diese Theorie nicht hilfreich sein. Unser nächstes Ziel wird daher sein, die Fundamentalgruppe von \mathbb{S}^1 zu bestimmen und zu zeigen, dass sie nicht trivial ist. Später werden wir dann noch Hilfsmittel kennenlernen, um die Fundamentalgruppen vieler Räume zu bestimmen.

Überlagerungen und die Fundamentalgruppe von \mathbb{S}^1

Überlagerungen (die Definition folgt weiter unten) stehen in engem Zusammenhang mit der Fundamentalgruppe. Wir beginnen mit einem einfachen, aber grundlegenden Beispiel.

Wenn wir die Theorie der Fundamentalgruppe gewinnbringend anwenden wollen, müssen wir die Fundamentalgruppe eines Raumes bestimmen, für den sie nicht trivial ist. Der grundlegende Fall ist die Kreislinie. Wir betrachten für $k \in \mathbb{Z}$ die Abbildung

$$\begin{aligned} u_k: I &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ s &\mapsto (\cos 2\pi ks, \sin 2\pi ks). \end{aligned}$$

Das ist eine Schleife bei $(1, 0)$. Anschaulich wickelt diese das Einheitsintervall k -mal um die Kreislinie herum. Wir werden im folgenden zeigen, dass wir $u_k \simeq u_l \text{ rel } \{0, 1\}$ nur für $k = l$ haben und dass zu jeder Schleife w in \mathbb{S}^1 bei $(1, 0)$ ein $k \in \mathbb{Z}$ existiert, so dass $w \simeq u_k \text{ rel } \{0, 1\}$. Wir werden also zeigen, dass

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{Z} &\rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0)) \\ k &\mapsto [u_k] \end{aligned}$$

eine Bijektion (und in der Tat ein Isomorphismus von Gruppen) ist. Dabei wird es sich als hilfreich erweisen, die Abbildung

$$\begin{aligned} p: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ r &\mapsto (\cos 2\pi r, \sin 2\pi r) \end{aligned}$$

und die Wege

$$\begin{aligned} v_k: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\mapsto ks \end{aligned}$$

in \mathbb{R} mit Anfangspunkt 0 und Endpunkt k zu betrachten. Es ist dann $u_k = p \circ v_k$. Die Abbildung $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ ist ein Beispiel einer Überlagerung.

3.14 Definition. Eine Abbildung $p: X \rightarrow Y$ heißt eine *Überlagerung*, wenn X und Y wegzusammenhängende und lokal wegzusammenhängende (Definitionen 0.74 und 0.79) Hausdorffräume sind, p surjektiv ist und zu jedem $y \in Y$ eine offene Umgebung U existiert, so dass für jede Wegkomponente (Definition 0.74) V von $p^{-1}[U]$ die Einschränkung von p einen Homöomorphismus $V \rightarrow U$ ergibt. Mengen U dieser Art nennen wir *gleichmäßig überdeckt* oder *elementar*, die Wegkomponenten von $p^{-1}[U]$ die *Blätter* über U .

3.15 Proposition. Die oben beschriebene Abbildung $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ ist eine Überlagerung.

Beweis. Zunächst sind \mathbb{R} und \mathbb{S}^1 zusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und hausdorffsch. Außerdem ist p surjektiv. Sei nun $x \in \mathbb{S}^1$ beliebig, etwa $x = p(r)$. Wir zeigen, dass $U := \mathbb{S}^1 \setminus \{x\}$ gleichmäßig überdeckt ist. U ist offen und $p^{-1}[U] = \mathbb{R} \setminus \{r + z : z \in \mathbb{Z}\}$. Die Wegkomponenten von $p^{-1}[U]$ sind also die offenen Intervalle $(r + z, r + z + 1)$ für $z \in \mathbb{Z}$. Für jedes $z \in \mathbb{Z}$ ist die Einschränkung von p

$$\begin{aligned} (r + z, r + z + 1) &\rightarrow U \\ z &\mapsto (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x) \end{aligned}$$

ein Homöomorphismus. Ist nun $y \in \mathbb{S}^1$ beliebig, so liegt y in der gleichmäßig überdeckten Menge $\mathbb{S}^1 \setminus \{-y\}$. \square

Ist Z ein Raum, $p: X \rightarrow Y$ eine Überlagerung und $f: Z \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung, so können wir uns fragen, ob eine stetige *Hochhebung* von f , also eine Abbildung $\tilde{f}: Z \rightarrow X$ mit $p \circ \tilde{f} = f$, existiert. Das wird im allgemeinen von Z und f abhängen. Für Wege, also für $Z = I$, werden wir nun aber sehen, dass eine stetige Hochhebung immer existiert und zwar für jedes $x \in p^{-1}[\{f(0)\}]$ genau eine mit $\tilde{f}(0) = x$.

Ist der Weg so kurz, dass er ganz in einer gleichmäßig überdeckten Menge verläuft, so ist dies klar. Im allgemeinen werden wir den Weg in so kurze Stücke zerlegen, dass dies für diese gilt. Dies wird das Lebesgue-Lemma leisten, das wahrscheinlich aus der Analysis-Grundvorlesung bekannt ist. Wir erinnern kurz daran.

3.16 Lemma (Lebesgue). *Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und \mathcal{C} eine offene Überdeckung von X . Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass für jedes $x \in X$ ein $O \in \mathcal{C}$ existiert, so dass $B_\delta(x) \subset O$.*

Beweis. Zu jedem $x \in X$ gibt es ein $\varepsilon_x > 0$, so dass $B_{2\varepsilon_x}(x)$ in einem Element von \mathcal{C} liegt. Da $\{B_{\varepsilon_x}(x) : x \in X\}$ eine offene Überdeckung von X ist, existiert aufgrund der Kompaktheit von X ein $n \in \mathbb{N}$ und x_1, \dots, x_n , so dass $X = \bigcup_{k=1}^n B_{\varepsilon_{x_n}}(x_n)$. Setze $\delta := \min \{\varepsilon_{x_n} : 1 \leq k \leq n\}$. Ist nun $y \in X$ beliebig, so existiert ein k mit $y \in B_{\varepsilon_{x_k}}(x_k)$. Nun ist $B_\delta(y) \subset B_{2\varepsilon_{x_k}}$ und liegt damit ganz in einem Element von \mathcal{C} . \square

3.17 Proposition (Hochheben von Wegen). *Ist $p: X \rightarrow Y$ eine Überlagerung, $w: I \rightarrow Y$ stetig und $x_0 \in X$ mit $p(x_0) = w(0)$, dann gibt es genau eine stetige Abbildung $\tilde{w}: I \rightarrow X$ mit $\tilde{w}(0) = x_0$ und $p \circ \tilde{w} = w$.*

Beweis. Sei $\{U_j : j \in J\}$ eine offene Überdeckung von Y bestehend aus gleichmäßig überdeckten Mengen. Dann ist $\{w^{-1}[U_j] : j \in J\}$ eine offene Überdeckung von I . Nach dem Lebesgue-Lemma gibt es also ein $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so dass zu jedem k mit $0 < k \leq N$ ein $j \in J$ mit $w \left[\left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right] \right] \subset U_j$ existiert. Für solches N werden wir für $0 \leq k \leq N$ induktiv zeigen, dass es genau ein

stetiges $\tilde{w}_k: [0, \frac{k}{N}] \rightarrow X$ mit $\tilde{w}_k(0) = x_0$ und $p \circ \tilde{w}_k = w|_{[0, \frac{k}{N}]}$ gibt. Der Fall $k = N$ zeigt dann die Behauptung. Wir setzen $I_k := [\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}]$.

$\tilde{w}_0(0) = x_0$ erledigt $k = 0$. Sei nun $0 < k \leq N$ und Existenz und Eindeutigkeit von \tilde{w}_{k-1} bereits gezeigt. Dann muss \tilde{w}_k , wenn es existiert, auf $[0, \frac{k-1}{N}]$ mit \tilde{w}_{k-1} übereinstimmen. Es bleibt also zu zeigen, dass es genau ein stetiges $f: I_k \rightarrow X$ mit $f(\frac{k-1}{N}) = \tilde{w}_{k-1}(\frac{k-1}{N})$ und $p \circ f = w|_{I_k}$ gibt. \tilde{w}_k erhält man dann durch Zusammensetzen von \tilde{w}_{k-1} und f . Nun gibt es ein $j \in J$ mit $w[I_k] \subset U_j$. Es ist $p(\tilde{w}_{k-1}(\frac{k-1}{N})) = w(\frac{k-1}{N}) \in U_j$. Sei V die Wegkomponente von $p^{-1}[U_j]$, in der $\tilde{w}_{k-1}(\frac{k-1}{N})$ liegt. Jede stetige Abbildung f mit den geforderten Eigenschaften muss nun, da I_k wegzusammenhängend ist, ihr Bild in V haben. Da die Einschränkung von p einen Homöomorphismus $V \rightarrow U_j$ liefert, gibt es genau ein solches f , nämlich die Komposition von $w|_{I_k}$ mit dem Inversen dieses Homöomorphismus. \square

3.18 Korollar. *Die Abbildung Φ ist surjektiv.*

Beweis. Sei $\alpha \in \pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))$, $\alpha = [w]$. Wir betrachten die oben beschriebene Überlagerung $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$. w lässt sich zu einem Weg in \mathbb{R} mit Anfangspunkt 0 hochheben, das heißt es gibt einen stetigen Weg $\tilde{w}: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $w(0) = 0$ und $p \circ \tilde{w} = w$. Aus $p(\tilde{w}(1)) = w(1) = (1, 0)$ folgt, dass $w(1) \in \mathbb{Z}$, sagen wir $w(1) = k$. Nun ist aber \mathbb{R} konvex, also ist $\tilde{w} \simeq v_k \text{ rel } \{0, 1\}$. Damit ist $\alpha = [w] = [p \circ \tilde{w}] = [p \circ v_k] = [u_k] = \Phi(k)$. \square

Als nächstes wollen wir zeigen, dass Hochhebungen homotoper Wege mit gleichem Anfangspunkt homotop sind.

3.19 Proposition (Hochheben von Homotopien). *Sei $p: X \rightarrow Y$ eine Überlagerung und $F: I \times I \rightarrow Y$ stetig. Ist $\tilde{f}: I \rightarrow X$ stetig mit $p \circ \tilde{f} = F(\bullet, 0)$, so existiert eindeutig eine stetige Abbildung $\tilde{F}: I \times I \rightarrow X$ mit $\tilde{F}(\bullet, 0) = \tilde{f}$ und $p \circ \tilde{F} = F$.*

Beweis. Existiert ein solches \tilde{F} , so ist für jedes $s \in I$ die Einschränkung $\tilde{F}(s, \bullet)$ eine Hochhebung des Weges $F(s, \bullet)$ zu einem Weg mit Anfangspunkt $\tilde{f}(s)$. Aus der Eindeutigkeit von Hochhebungen von Wegen folgt also schon die Eindeutigkeit von \tilde{F} . Außerdem definiert dies \tilde{F} bereits, so dass wir nur noch die Stetigkeit nachzuprüfen haben.

Aus dem Lebesgue-Lemma folgt wieder die Existenz eines $N \in \mathbb{N}$, so dass $F\left[\left[\frac{l}{N}, \frac{l+1}{N}\right] \times \left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right]\right]$ für alle $0 \leq k, l < N$ in einer gleichmäßig überdeckten Menge enthalten ist. Es genügt, zu zeigen, dass für alle $0 \leq k, l < N$ die Einschränkung von \tilde{F} auf $\left[\frac{l}{N}, \frac{l+1}{N}\right] \times \left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right]$ stetig ist, da $I \times I$ die Vereinigung dieser endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist. Wir tun dies für festes l per Induktion über k . Zur Abkürzung setzen wir $B := \left[\frac{l}{N}, \frac{l+1}{N}\right]$ und $I_k := \left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right]$.

Sei also $0 \leq k < N$ und \tilde{F} für alle $k' < k$ auf $B \times I_{k'}$ stetig. Dann ist \tilde{F} zumindest auf $B \times \left\{\frac{k}{N}\right\}$ stetig. (Für $k = 0$ folgt das aus der Stetigkeit von \tilde{f} .) Sei U eine gleichmäßig überdeckte Menge, die $F[B \times I_k]$ enthält. Da $B \times \left\{\frac{k}{N}\right\}$ wegzusammenhängend ist, folgt nun aus der Stetigkeit von \tilde{F} auf dieser Menge, dass $\tilde{F}\left[B \times \left\{\frac{k}{N}\right\}\right]$ ganz in einer Wegkomponente V von $p^{-1}[U]$ liegt. Da ja die Einschränkung von p einen Homöomorphismus von V auf U ergibt, existiert eine stetige Abbildung $G: B \times I_k \rightarrow V$ mit $p \circ G = F|_{B \times I_k}$ und $G|_{B \times \left\{\frac{k}{N}\right\}} = \tilde{F}|_{B \times \left\{\frac{k}{N}\right\}}$. Für jedes $r \in B$ sind $G|_{\{r\} \times I_k}$ und $\tilde{F}|_{\{r\} \times I_k}$ Hochhebungen von $F|_{\{r\} \times I_k}$ mit $G\left(r, \frac{k}{N}\right) = \tilde{F}\left(r, \frac{k}{N}\right)$. Aus der Eindeutigkeit von Hochhebungen von Wegen bei vorgegebenem Anfangspunkt folgt, dass \tilde{F} auf $B \times I_k$ mit G übereinstimmt und daher dort stetig ist. \square

3.20 Korollar. Sei $p: X \rightarrow Y$ eine Überlagerung, $v, w: I \rightarrow Y$ stetig. Ist $v \simeq w \text{ rel } \{0, 1\}$ und sind $\tilde{v}, \tilde{w}: I \rightarrow X$ stetige Hochhebungen mit gleichem Anfangspunkt, also $v = p \circ \tilde{v}$, $w = p \circ \tilde{w}$, $\tilde{v}(0) = \tilde{w}(0)$, so ist $\tilde{v} \simeq \tilde{w} \text{ rel } \{0, 1\}$, also insbesondere $\tilde{v}(1) = \tilde{w}(1)$.

Beweis. Sei F eine Homotopie relativ zu $\{0, 1\}$ zwischen v und w . Dann existiert nach dem eben gezeigten eine stetige Abbildung $\tilde{F}: I \times I \rightarrow X$ mit $\tilde{F}(s, 0) = \tilde{v}(s)$ für alle $s \in I$. Da $\tilde{F}(0, \bullet)$ eine stetige Hochhebung des konstanten Weges $F(0, \bullet)$ ist, konstante Wege aber sicher eine konstante Hochhebung besitzen, folgt aus der Eindeutigkeit der Hochhebung eines Weges bei gegebenem Anfangspunkt, dass $\tilde{F}(0, t) = \tilde{v}(0)$ für alle $t \in I$ und ebenso $\tilde{F}(1, t) = \tilde{v}(1)$. Nun sind $\tilde{F}(\bullet, 1)$ und \tilde{w} beides stetige Hochhebungen von $F(\bullet, 1) = w$, und es ist $\tilde{F}(0, 1) = \tilde{v}(0) = \tilde{w}(0)$. Wieder aus der Eindeutigkeit der Hochhebung von Wegen folgt $\tilde{F}(s, 1) = \tilde{w}(s)$ für alle $s \in I$. Wir haben gezeigt, dass \tilde{F} eine Homotopie zwischen \tilde{v} und \tilde{w} relativ zu $\{0, 1\}$ ist. \square

3.21 Korollar. Die Abbildung Φ ist injektiv.

Beweis. Seien $k, l \in \mathbb{Z}$, $\Phi(k) = \Phi(l)$, also $[u_k] = [u_l]$. Die Wege v_k und v_l sind Hochhebungen von u_k beziehungsweise u_l und $v_k(0) = 0 = v_l(0)$. Aus $[u_k] = [u_l]$ folgt nun $k = v_k(1) = v_l(1) = l$. \square

3.22 Korollar. \mathbb{S}^1 ist nicht zusammenziehbar.

Beweis. Zusammenziehbare Räume haben triviale Fundamentalgruppen, aber $\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))$ ist nicht trivial. \square

3.23 Proposition. Die Abbildung $\Phi: (\mathbb{Z}, +) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))$ ist ein Isomorphismus.

Beweis. Wir haben bereits gesehen, dass Φ eine Bijektion ist, müssen also nur noch zeigen, dass Φ ein Homomorphismus ist. Seien $k, l \in \mathbb{Z}$. v_k ist eine Hochhebung von u_k mit Anfangspunkt 0 und Endpunkt k . Nun ist

$$\begin{aligned} w: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\mapsto k + ls \end{aligned}$$

eine Hochhebung von u_l mit Anfangspunkt k und Endpunkt $k+l$. Wir können also $v_k * w$ bilden, und da \mathbb{R} konvex und dies ein Weg mit Anfangspunkt 0 und Endpunkt $k+l$ ist, gilt $v_k * w \simeq v_{k+l} \text{ rel } \{0, 1\}$. Es folgt $\Phi(k)\Phi(l) = [u_k][u_l] = [u_k * u_l] = [(p \circ v_l) * (p \circ w)] = [p \circ (v_l * w)] = [p \circ v_{k+l}] = [u_{k+l}] = \Phi(k+l)$. \square

Dies ermöglicht nun schon einige Anwendungen.

Abschnitt 4

Erste Anwendungen von $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ und mehr Elementares über π_1

Der Brouwersche Fixpunktsatz

Bisher haben wir nur die Fundamentalgruppen kontrahierbarer Räume und der Kreislinie berechnet. Das genügt aber schon für die folgende Proposition.

4.1 Proposition. *Es gibt keine stetige Retraktion von der Kreisscheibe auf die Kreislinie, das heißt keine stetige Abbildung $r: \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ mit $r|_{\mathbb{S}^1} = \text{id}_{\mathbb{S}^1}$.*

Beweis. Sei $p \in \mathbb{S}^1$ ein Punkt, $i: (\mathbb{S}^1, p) \rightarrow (\mathbb{D}^2, p)$ die Inklusion, und $r: (\mathbb{D}^2, p) \rightarrow (\mathbb{S}^1, p)$ stetig. Wir nehmen an, dass $r \circ i = \text{id}$, dass also das Diagramm von Räumen mit Basispunkt

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{S}^1, p) & \xrightarrow{i} & (\mathbb{D}^2, p) \\ & \searrow \text{id}_{(\mathbb{S}^1, p)} & \downarrow r \\ & & (\mathbb{S}^1, p) \end{array}$$

kommutiert. Wegen Proposition 3.8 erhalten wir daraus das kommutative Diagramm von Gruppen

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathbb{S}^1, p) & \xrightarrow{i_{\#}} & \pi_1(\mathbb{D}^2, p) \\ & \searrow \text{id}_{\pi_1(\mathbb{S}^1, p)} & \downarrow r_{\#} \\ & & \pi_1(\mathbb{S}^1, p). \end{array}$$

Da \mathbb{D}^2 zusammenziehbar ist, ist $\pi_1(\mathbb{D}^2, p)$ trivial. Damit ist auch die Komposition $r_{\#} \circ i_{\#} = \text{id}_{\pi_1(\mathbb{S}^1, p)}$ trivial. Dies ist ein Widerspruch zu $\pi_1(\mathbb{S}^1, p) \cong \mathbb{Z}$. \square

Dies ist auch für Abbildungen $\mathbb{D}^{m+1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ wahr. Der Fall $m = 0$ ist gerade der Zwischenwertsatz, der Fall $m > 1$ liegt nicht im Bereich der Methoden, die wir im Moment zur Verfügung haben.

Als direkte Folgerung haben wir:

4.2 Satz (Brouwerscher Fixpunktsatz in Dimension 2). *Jede stetige Abbildung $f: \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ hat einen Fixpunkt.*

Beweis. Sei $f: \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ stetig und fixpunktfrei. Wir zeigen, dass die Existenz einer stetigen Retraktion $r: \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ folgt, was der vorhergehenden Proposition widerspricht.

Die folgende Konstruktion ist an dieser Stelle die übliche, da man dazu eine gute Zeichnung anfertigen kann. Man tue dies. Sei $x \in \mathbb{D}^2$. Da $f(x) \neq x$ existiert ein eindeutig bestimmter von $f(x)$ ausgehender Strahl, der durch x geht. Man definiere $r(x)$ als den Schnittpunkt dieses Strahls mit \mathbb{S}^1 . Offenbar ist für $x \in \mathbb{S}^1$ dann $r(x) = x$. Leider ist es etwas lästig, die Stetigkeit von r nachzurechnen.

Eine alternative Konstruktion, bei der die Stetigkeit sofort ersichtlich ist, findet man in [?, 11.12]. \square

Abbildungsgrad und der Fundamentalsatz der Algebra

Im folgenden identifizieren wir \mathbb{S}^1 mit der Menge der komplexen Zahlen vom Betrag 1.

4.3 Definition. Sei $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ eine stetige Abbildung. Wir definieren den *Grad von f* , $\deg f \in \mathbb{Z}$ wie folgt. Sei

$$\begin{aligned} \bar{f}: (\mathbb{S}^1, 1) &\rightarrow (\mathbb{S}^1, 1), \\ z &\mapsto f(z)/f(1) \end{aligned}$$

und Φ der Isomorphismus aus Proposition 3.23. Dann sei $\deg f$ die ganze Zahl, die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) & \xrightarrow{\bar{f}_\#} & \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \\ \cong \uparrow \Phi & & \cong \uparrow \Phi \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot \deg f} & \mathbb{Z} \end{array}$$

kommutativ macht.

4.4 Bemerkung. Wir haben in der Definition benutzt, dass jeder Homomorphismus von \mathbb{Z} nach \mathbb{Z} die Multiplikation mit einer eindeutig bestimmten ganzen Zahl ist.

4.5 Proposition. *Sind $f, g: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ Abbildungen und $f \simeq g$, so ist $\deg f = \deg g$.*

Beweis. Sei $H: \mathbb{S}^1 \times I \rightarrow \mathbb{S}^1$ eine Homotopie von f nach g . Wir betrachten $\bar{H}: \mathbb{S}^1 \times I \rightarrow \mathbb{S}^1$, $\bar{H}(z, t) := H(z, t)/H(1, t)$. Dann ist $\bar{H}(z, 0) = f(z)/f(1) = \bar{f}(z)$, $\bar{H}(z, 1) = g(z)/g(1) = \bar{g}(z)$, und $\bar{H}(1, t) = 1$ für alle $z \in \mathbb{S}^1$, $t \in I$. Also ist $\bar{f} \simeq \bar{g}: (\mathbb{S}^1, 1) \rightarrow (\mathbb{S}^1, 1)$ und damit $\bar{f}_\# = \bar{g}_\#$, also $\deg f = \deg g$. \square

4.6 Proposition. Für $k \in \mathbb{Z}$ und $a \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ ist der Grad der Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^1 &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ z &\mapsto az^k \end{aligned}$$

gleich k .

Beweis. Sei f die Abbildung $f(z) = az^k$. Dann ist $\bar{f}(z) = f(z)/f(1) = z^k$. Sei $l \in \mathbb{Z}$. Der Weg u_l , der in der Definition von Φ vorkam, war gerade durch $u_l(r) = \exp(2\pi i \cdot lr)$ gegeben, auch wenn wir es dort anders formuliert haben. Dann ist $\bar{f}(u_l(r)) = \exp(2\pi i \cdot lr)^k = \exp(2\pi i \cdot klr) = u_{kl}(r)$, also $\bar{f}_\#(\Phi(l)) = \bar{f}_\#([u_l]) = [\bar{f} \circ u_l] = [u_{kl}] = \Phi(kl)$, also, da l beliebig war ($l = 1$ hätte natürlich genügt), $\deg f = k$. \square

4.7 Proposition (Fundamentalsatz der Algebra). Sei $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ein komplexes Polynom vom Grad n , also $a_n \neq 0$. Hat p keine Nullstelle, so ist $n = 0$.

Zum Beweis halten wir ein Polynom p vom Grad n wie in der Formulierung des Satzes fest und definieren für reelles $r \geq 0$, so dass p keine Nullstelle vom Betrag r hat,

$$\begin{aligned} f_r: \mathbb{S}^1 &\rightarrow \mathbb{S}^1, \\ z &\mapsto \frac{p(rz)}{|p(rz)|}. \end{aligned}$$

4.8 Lemma. Ist $p(0) \neq 0$, so ist $\deg f_0 = 0$.

Beweis. $f_0(z) = \frac{p(0)}{|p(0)|} = \frac{p(0)}{|p(0)|} z^0$. \square

4.9 Lemma. Es sei $0 \leq r_0 \leq r_1$. Hat p keine Nullstelle auf dem Kreisring $\{z \in \mathbb{C}: r_0 \leq |z| \leq r_1\}$, so ist $\deg f_{r_0} = \deg f_{r_1}$.

Beweis. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^1 \times I &\rightarrow \mathbb{S}^1, \\ (z, t) &\mapsto \frac{p((r_0 + t(r_1 - r_0))z)}{|p((r_0 + t(r_1 - r_0))z)|} \end{aligned}$$

ist eine Homotopie von f_{r_0} nach f_{r_1} . \square

4.10 Lemma. Es sei $0 < r$. Hat p keine Nullstelle auf dem unbeschränkten Kreisring $\{z \in \mathbb{C}: r \leq |z|\}$, so ist $\deg f_r = n$.

Beweis. Die Idee ist, das vorherige Lemma damit zu kombinieren, dass sich f_r für große r in etwa wie $z \mapsto \frac{a_n}{|a_n|} z^n$ verhält.

Wir definieren

$$H: \mathbb{S}^1 \times I \rightarrow \mathbb{S}^1,$$

$$(z, t) \mapsto \frac{\sum_{k=0}^n a_k r^k t^{n-k} z^k}{|\sum_{k=0}^n a_k r^k t^{n-k} z^k|}.$$

Man beachte, dass sich der Zähler für $t \neq 0$ als $t^n \cdot f_{r/t}(z)$ schreiben lässt. Daher ist der Nenner in diesem Fall nie Null, und insbesondere ist $H(z, 1) = f_r(z)$. Außerdem ist $H(z, 0) = a_n/|a_n| \cdot z^n$. Es ist also $\deg f_r = \deg H(\bullet, 0) = n$. \square

Beweis des Fundamentalsatzes. Hat p gar keine Nullstelle, so liefern die drei Lemmata die drei Gleichungen $0 = \deg f_0 = \deg f_1 = n$. \square

4.11 Bemerkung. Man kann diesen Beweis auch für reelle Polynome durchführen. Man erhält dann Abbildungen $f_r: \mathbb{S}^0 \rightarrow \mathbb{S}^0$ und dass die Abbildung $\mathbb{S}^0 \rightarrow \mathbb{S}^0$, $x \mapsto \frac{a_n}{|a_n|} x^n$ homotop zu einer konstanten Abbildung ist. Da $\text{id}_{\mathbb{S}^0}$ nicht homotop zu einer konstanten Abbildung ist (Zwischenwertsatz!), folgt, dass n gerade (also nicht unbedingt 0, aber kongruent 0 modulo 2) ist. Aber der Beweis, dass aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass ein reelles Polynom ungeraden Grades eine Nullstelle hat, lässt sich wohl auch einfacher formulieren.

Weitere Eigenschaften der Fundamentalgruppe

Der Einfluss des Basispunktes

Da I (der Urbildraum von Wegen) und $I \times I$ (der Urbildraum von Homotopien von Wegen) wegzusammenhängend sind, „sieht“ $\pi_1(X, x_0)$ nur die Wegkomponente von X , in der x_0 liegt. Liegen allerdings x_0 und x_1 in der selben Wegkomponente, so werden wir nun sehen, dass $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$ isomorph sind.

4.12 Definition. Sei X ein Raum und $p: I \rightarrow X$ stetig, $p(0) = x_0$, $p(1) = x_1$. Dann definieren wir

$$h_p: \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

$$[w] \mapsto [p * w * p^-].$$

Die Wohldefiniertheit folgt aus Proposition 3.3 (und Proposition 3.4).

4.13 Proposition. Sei X ein Raum, $p, p', q: I \rightarrow X$ stetig, $p(1) = q(0)$, $x_0 \in X$. Dann gilt:

- (i) h_p ist ein Homomorphismus.
- (ii) Ist $p \simeq p'$ rel $\{0, 1\}$, so ist $h_p = h_{p'}$.

(iii) Es ist $h_{c_{x_0}} = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$.

(iv) Es ist $h_{p*q} = h_p \circ h_q$.

(v) Ist p eine Schleife bei x_0 und $\gamma := [p] \in \pi_1(X, x_0)$, so ist $h_p: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ der innere Automorphismus $h_p(\alpha) = \gamma \alpha \gamma^{-1}$.

Beweis. Das sind alles einfache Folgerungen aus Proposition 3.4. \square

4.14 Proposition. Sei X ein Raum, $x_0, x_1 \in X$. Liegen x_0, x_1 in der selben Wegkomponente von X , so ist $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$, denn für jeden stetigen Weg $p: I \rightarrow X$ mit $p(0) = x_0$, $p(1) = x_1$ ist

$$h_p: \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

ein Isomorphismus. Sind p, q zwei solche Wege, so ist $q * p^-$ eine Schleife bei x_0 und mit $\alpha := [q * p^-] \in \pi_1(X, x_0)$ ist

$$h_q(\beta) = \alpha h_p(\beta) \alpha^{-1} \quad \text{für alle } \beta \in \pi_1(X, x_0),$$

h_p und h_q unterscheiden sich also um einen inneren Automorphismus von $\pi_1(X, x_0)$.

Beweis. Ist p ein stetiger Weg von x_0 nach x_1 , so ist $h_p \circ h_{p^-} = h_{p * p^-} = h_{c_{x_0}} = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$ und ebenso $h_{p^-} \circ h_p = \text{id}_{\pi_1(X, x_1)}$. Damit ist h_p ein Isomorphismus.

Ist q ein weiterer stetiger Weg von x_0 nach x_1 , so ist $h_q = h_{q * p^- * p} = h_{q * p^-} \circ h_p$. \square

Ist X wegzusammenhängend und $\pi_1(X, x_0)$ abelsch, so hängt h_p nicht von p ab und wir können $\pi_1(X)$ als unabhängig vom Basispunkt betrachten. So ist es im Nachhinein auch nicht verwunderlich, dass wir bei der Diskussion des Grades einer Abbildung $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ nicht verlangen mussten, dass Abbildungen oder Homotopien (siehe auch Proposition 4.19) den Basispunkt erhalten. Im allgemeinen ist mehr Vorsicht nötig.

Homotopieäquivalenz

Homotopie von Abbildungen führt uns zu einer Äquivalenzrelation auf Räumen, die schwächer als Homöomorphie ist. Eine Variante dieses Konzepts für punktierte Räume ist uns bereits in Proposition 3.9 begegnet.

4.15 Definition. Seien X, Y Räume. Eine *Homotopieäquivalenz* zwischen X und Y ist eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$, so dass eine stetige Abbildung $g: Y \rightarrow X$ mit

$$g \circ f \simeq \text{id}_X \quad \text{und} \quad f \circ g \simeq \text{id}_Y$$

existiert. In dieser Situation nennen wir g *homotopieinvers* zu f . Wir sagen, X und Y seien *homotopieäquivalent*, und schreiben $X \simeq Y$, wenn zwischen ihnen eine Homotopieäquivalenz existiert.

4.16 Proposition. *Homotopieäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Seien X, Y, Z Räume. $\text{id}_X: X \rightarrow X$ zeigt $X \simeq X$ und damit die Reflexivität. Symmetrie ergibt sich sofort aus der Definition. Seien nun $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ Homotopieäquivalenzen mit Homotopieinversen f' und g' . Dann ist

$$(f' \circ g') \circ (g \circ f) = f' \circ (g' \circ g) \circ f \simeq f' \circ \text{id}_Y \circ f = f' \circ f \simeq \text{id}_X$$

und ebenso

$$(g \circ f) \circ (f' \circ g') \simeq \text{id}_Z,$$

also $g \circ f: X \rightarrow Z$ eine Homotopieäquivalenz. Das zeigt die Transitivität. \square

4.17 Beispiel. Sei $i: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ die Inklusionsabbildung. Wir haben in Beispiel 1.3 eine Abbildung $r: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ angegeben, die homotopieinvers zu i ist. Es ist also $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq \mathbb{S}^{n-1}$.

Eine einfache Umformulierung ist:

4.18 Proposition. *Sei X ein Raum. Dann ist X genau dann zusammenziehbar, wenn X homotopieäquivalent zu einem einpunktigen Raum ist.* \square

Freie Homotopie und die Fundamentalgruppe

Wir werden nun untersuchen, was man über die von homotopen Abbildungen induzierten Homomorphismen sagen kann, wenn die Homotopien den Basispunkt bewegen dürfen.

4.19 Proposition. *Seien X, Y Räume, $x_0 \in X$, $f, g: X \rightarrow Y$ stetig und $f \simeq g$. Ist $H: X \times I \rightarrow Y$ eine Homotopie zwischen f und g , $H(\bullet, 0) = f$, $H(\bullet, 1) = g$, und $p: I \rightarrow Y$ der Weg $H(x_0, \bullet)$ in Y , $y_0 := p(0)$, $y_1 := p(1)$, so ist das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{g\#} & \pi_1(Y, y_1) \\ & \searrow f\# & \downarrow \cong \downarrow h_p \\ & & \pi_1(Y, y_0) \end{array}$$

kommutativ. Ist insbesondere eine der beiden Abbildungen $f\#$, $g\#$ ein Isomorphismus, so auch die andere.

Beweis. Wir definieren die Wege $l, r, o, u: I \rightarrow I \times I$, $l(s) = (0, s)$, $r(s) = (1, s)$, $o(s) = (s, 1)$, $u(s) = (s, 0)$. Da $I \times I$ konvex ist, ist $u \simeq l * o * r^{-1}$ rel $\{0, 1\}$.

Ist nun w eine Schleife bei x_0 und $G := H \circ (w \times \text{id}_I)$, so ist $G \circ l = p = G \circ r$, $G \circ u = f \circ w$, $G \circ o = g \circ w$ und daher $f \circ w \simeq p * (g \circ w) * p^{-1}$ rel $\{0, 1\}$, also $f\#([w]) = h_p(g\#([w]))$. \square

Wir können nun eine stärkere Form von Proposition 3.9 beweisen. Der Spezialfall $X = \{x_0\}$ ist Korollar 3.13.

4.20 Proposition. *Seien X, Y Räume, $f: X \rightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz. Dann ist für $x_0 \in X$ die Abbildung*

$$f_{\#}: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Sei $g: Y \rightarrow X$ eine Homotopieinverse. Wir betrachten

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_{\#}} \pi_1(Y, f(x_0)) \xrightarrow{g_{\#}} \pi_1(X, g(f(x_0))) \xrightarrow{f_{\#}} \pi_1(Y, f(g(f(x_0)))),$$

wobei die erste und dritte Abbildung natürlich verschieden sind, obwohl sie gleich bezeichnet sind. Da $g \circ f \simeq \text{id}_X$ und $(\text{id}_X)_{\#}: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ ein Isomorphismus, nämlich die Identität, ist, ist nach der vorherigen Proposition auch $(g \circ f)_{\#}: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, (g \circ f)(x_0))$ ein Isomorphismus. Also ist die Komposition der ersten beiden Abbildungen unseres Diagrammes ein Isomorphismus. Ebenso folgt aus $f \circ g \simeq \text{id}_Y$, dass die Komposition der letzten beiden Abbildungen ein Isomorphismus ist. Damit ist die mittlere Abbildung sowohl ein Epimorphismus als auch ein Monomorphismus, also ein Isomorphismus. Daher müssen auch die anderen beiden Abbildungen Isomorphismen sein, insbesondere die erste. \square

Abschnitt 5

Beispiele von Überlagerungen

Einfache Beispiele von Überlagerungen

Projektive Räume

5.1 Proposition. *Die sich aus der Definition von \mathbb{RP}^n ergebende Quotientenabbildung $p: S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ ist eine zweiblättrige Überlagerung.*

Beweis. Zur Übung. □

Wir betrachten nun für $n \geq 1$ in S^n den Weg

$$\begin{aligned} v: I &\rightarrow S^n \\ s &\mapsto (\cos(\pi s), \sin(\pi s), 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

von $x_0 := (1, 0, \dots, 0)$ nach $-x_0$. Wir setzen $y_0 := p(x_0) \in \mathbb{RP}^n$. Da $p(-x) = p(x)$, ist $p \circ v$ eine Schleife bei y_0 , und wir benennen $\alpha := [p \circ v] \in \pi_1(\mathbb{RP}^n, y_0)$.

5.2 Proposition. *Es ist $\alpha \neq e$.*

Beweis. Wäre $p \circ v \simeq c_{y_0} \text{ rel } \{0, 1\}$, so wäre nach Korollar 3.20 $v(1) = c_{x_0}(1) = x_0$, da $c_{x_0}(0) = x_0 = v(0)$ und $p \circ c_{x_0} = c_{y_0}$. □

Nun bemerken wir ein Phänomen, das vielleicht unerwartet ist.

5.3 Proposition. *Ist $n \geq 2$, so ist $\alpha^2 = e$.*

Beweis. Es sei $a: S^n \rightarrow S^n$ die Antipodenabbildung $a(x) = -x$ (man beachte $p \circ a = p$). Es ist $u := v * (a \circ v)$ eine geschlossene Schleife bei x_0 , die in $S^1 \subset S^n$ verläuft, und $p \circ u = (p \circ v) * (p \circ v)$, also $p_{\#}([u]) = \alpha^2$. Das Element α^2 ist daher im Bild der Komposition

$$\pi_1(S^1, x_0) \xrightarrow{\text{Inkl.}\#} \pi_1(S^n, x_0) \xrightarrow{p\#} \pi_1(\mathbb{RP}^n, y_0).$$

Für $n \geq 2$ bezeichnet aber der erste Fall den konstanten Homomorphismus, denn in diesem Fall $S^1 \subset \mathbb{D}_+^n$ mit $\mathbb{D}_+^n = \{x \in S^n: x_{n+1} \geq 0\}$ und \mathbb{D}_+^n ist zusammenziehbar. □

Offenbar ist für $n \geq 2$ also $\{e, \alpha\}$ eine Untergruppe von $\pi_1(\mathbb{RP}^n)$. Ist dies bereits die ganze Gruppe? Dies werden wir nicht beantworten können, ohne auch etwas über die Fundamentalgruppe von \mathbb{S}^n zu erfahren, wie folgende Proposition zeigt.

5.4 Proposition. *Es sei $p: X \rightarrow Y$ eine Überlagerung, $x_0 \in X$, $y_0 = p(x_0)$. Dann ist $p_\#: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ ein Monomorphismus.*

Beweis. Es sei $[w] \in \pi_1(X, x_0)$. Ist $e = p_\#([w]) = [p \circ w]$, so ist nach dem Homotopiehochhebungslemma Proposition 3.19 bereits $[w] = e$. \square

In der Tat hat \mathbb{S}^n aber nichts zur Fundamentalgruppe beizutragen.

5.5 Proposition. *Für $n \geq 2$ ist \mathbb{S}^n einfach zusammenhängend.*

Da wir dieses Resultat später erneut erhalten werden, begnügen wir uns mit einer

Beweisskizze. Wir bemerken zunächst, dass wir für einen Weg $w: I \rightarrow \mathbb{S}^n$, der ganz in einer offenen Hemisphäre verläuft, leicht eine Homotopie relativ zu den Endpunkten zu einem Weg, der auf einem Großkreis verläuft, angeben können, nämlich

$$H: I \times I \rightarrow \mathbb{S}^n$$

$$(s, t) \mapsto \frac{(1-t)w(s) + t(w(0) + s(w(1) - w(0)))}{\|(1-t)w(s) + t(w(0) + s(w(1) - w(0)))\|}.$$

In der Tat gilt, wenn $\Lambda: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ein lineares Funktional ist, so dass $\Lambda(w(s)) > 0$ für alle $s \in I$, auch $\Lambda((1-t)w(s) + t(w(0) + s(w(1) - w(0)))) > 0$ für alle $s, t \in I$. Ein solcher Weg $H(\bullet, 1)$ hat aber für $n \geq 2$ ein Bild in \mathbb{S}^n , das leeres Inneres hat.

Ist nun w eine beliebige Schleife in \mathbb{S}^n , so sichert das Lebesgue-Lemma die Existenz eines $N > 0$, so dass $w \left[\left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right] \right]$ für jedes k in einer offenen Hemisphäre verläuft, w ist damit relativ zu den Endpunkten homotop zu einer Schleife, die abschnittsweise auf Großkreisen verläuft, deren Bild also eine endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen mit leerem Inneren ist. Damit ist das Bild von w selber abgeschlossen und mit leerem Inneren. Insbesondere ist w nicht surjektiv. Ist nun aber $y \in \mathbb{S}^n \setminus \text{im } w$, so ist, da $\mathbb{S}^n \setminus \{y\} \approx \mathbb{R}^n$ zusammenziehbar ist, die Schleife w relativ $\{0, 1\}$ homotop zur konstanten Schleife, also $[w] = e \in \pi_1(\mathbb{S}^n)$. \square

Das genügt nun aber schon.

5.6 Proposition. *Für $n \geq 2$ ist $\pi_1(\mathbb{RP}^n, y_0) = \{e, \alpha\}$.*

Wir schicken ein Lemma voraus, dass wir schon früher hätten formulieren sollen.

5.7 Lemma. Sind $u, w: I \rightarrow X$ mit $u(0) = w(0) = x_0$ und $u(1) = w(1) = x_1$, so ist $u \simeq w \text{ rel } \{0, 1\}$ genau dann, wenn $u * w^- \simeq c_{x_0} \text{ rel } \{0, 1\}$.

Beweis. Ist $u \simeq w$, so ist $u * w^- \simeq w * w^- \simeq c_{x_0}$. Ist $u * w^- \simeq c_{x_0}$, so ist $u \simeq u * c_{x_1} \simeq u * (w^- * w) \simeq (u * w^-) * w \simeq c_{x_0} * w \simeq w$. \square

Beweis von Proposition 5.6. Es sei w eine Schleife bei y_0 . Es existiert eine Hochhebung \tilde{w} von w mit $\tilde{w}(0) = x_0$. Es ist $\tilde{w}(1) \in \{x_0, -x_0\}$. Ist $\tilde{w}(1) = x_0$, so folgt wegen $\pi_1(\mathbb{S}^n, x_0) = \{e\}$, dass $\tilde{w} \simeq c_{x_0}$, also $w \simeq c_{y_0}$, $[w] = e$. Ist $\tilde{w}(1) = -x_0$, so ist aus gleichem Grund und mit Lemma 5.7 $\tilde{w} \simeq v$, also $w \simeq p \circ v$, $[w] = \alpha$. \square

Die Kleinsche Flasche

Das nächste Beispiel beginnen wir mit einer Gruppe, nämlich einer Untergruppe der Homoömorphien von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R}^2 . Dazu definieren wir die zwei affin linearen Isometrien

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 & g: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x+1, -y) & (x, y) &\mapsto (x, y+1). \end{aligned}$$

Es sei G die von f und g erzeugte Gruppe. Wir wollen zunächst G direkter beschreiben. Dazu berechnen wir

$$(fgf^{-1})(x, y) = (fg)(x-1, -y) = f(x-1, -y+1) = (x, y-1) = g^{-1}(x, y),$$

also $fgf^{-1} = g^{-1}$. Da $g \neq g^{-1}$ können wir also schon einmal festhalten, dass G nicht abelsch ist. Wir erhalten aus dieser Gleichung

$$g^{-1}f = fg, \quad g^{-1}f^{-1} = f^{-1}g, \quad gf = fg^{-1}, \quad gf^{-1} = f^{-1}g^{-1}$$

und per Induktion

$$g^n f^m = f^m g^{(-1)^m n}, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

und daraus

$$G = \{f^m g^n : m, n \in \mathbb{Z}\}, \quad (f^{m_1} g^{n_1})(f^{m_2} g^{n_2}) = f^{m_1+m_2} g^{(-1)^{m_2} n_1 + n_2}.$$

Außerdem ist

$$f^m g^n(0, 0) = (m, (-1)^m n)$$

und damit

$$f^{m_1} g^{n_1} = f^{m_2} g^{n_2} \iff (m_1, n_1) = (m_2, n_2).$$

Betrachten wir nun das von $(0, 1)$ und $(1, 0)$ aufgespannte Gitter in \mathbb{R}^2 , so stellen wir fest, dass jedes Element aus G Gitterpunkte auf Gitterpunkte, horizontale Gitterkanten auf horizontale Gitterkanten, vertikale Gitterkanten

auf vertikale Gitterkanten und Gitterquadrate auf Gitterquadrate abbildet. Mehr noch: gegeben zwei Gitterpunkte gibt es genau ein Element aus G , das den ersten auf den zweiten abbildet, und ebenso für die drei anderen Arten von Objekten.

Daraus ergibt sich folgendes.

5.8 Proposition. *Ist $x \in \mathbb{R}^2$, so existiert eine Umgebung U von x , so dass für alle $\phi, \psi \in G$, $\phi \neq \psi$ gilt, dass $\phi[U] \cap \psi[U] = \emptyset$.*

Es sei nun K der Orbitraum von G , also

$$K := \{Gx : x \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2 / \sim$$

mit der Quotiententopologie, wobei $Gx = \{\phi(x) : \phi \in G\}$ und $x \sim y \iff y \in Gx$. Es sei $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow K$ die Quotientenabbildung.

5.9 Proposition. *Die Abbildung $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow K$ ist eine Überlagerung.*

Beweis. Dies ergibt sich mit wenig Aufwand aus Proposition 5.8, wir werden das Argument später ausführen. □

5.10 Proposition. *Die Abbildung*

$$I \times I \xrightarrow{\subseteq} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{p} K$$

induziert einen Homöomorphismus

$$(I \times I) / \sim \approx K,$$

wobei \sim von $(x, 0) \sim (x, 1)$ und $(0, y) \sim (1, y)$ erzeugt wird.

Beweis. Da jedes der Gitterquadrate Bild des Gitterquadrates $I \times I$ unter einem Element von G ist, ist die Abbildung $I \times I \rightarrow K$ surjektiv. Da K hausdorffsch ist (das ist Teil der vorherigen Proposition) und $I \times I$ kompakt, ist die Abbildung eine Quotientenabbildung. Es ist nun also nur noch zu untersuchen, welche Punkte von ihr identifiziert werden, welche also durch ein Element aus G aufeinander abgebildet werden. Man überprüft leicht, dass dies genau in den angegebenen Fällen passiert. □

Der Raum K heißt die *Kleinsche Flasche*.

Wir setzen nun $x_0 := (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ und $y_0 := p(x_0) \in K$.

5.11 Proposition. *Es sei $\alpha \in \pi_1(K, y_0)$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $D_\alpha \in G$ mit folgender Eigenschaft: Ist $\alpha = [w]$ und \tilde{w} eine Hochhebung von w mit $\tilde{w}(0) = x_0$, so ist $\tilde{w}(1) = D_\alpha(x_0)$.*

Beweis. Die Hochhebung \tilde{w} existiert nach Proposition 3.17, nach Korollar 3.20 hängt $\tilde{w}(1)$ nur von α ab. Es ist $p(\tilde{w}(1)) = y_0 = p(x_0)$, nach Definition existiert also ein $\phi \in G$ mit $\phi(x_0) = \tilde{w}(1)$. Die Eindeutigkeit haben wir bereits zuvor festgestellt. \square

5.12 Proposition. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned}\pi_1(K, y_0) &\rightarrow G \\ \alpha &\mapsto D_\alpha\end{aligned}$$

ist ein Gruppenisomorphismus.

Beweis. Ist $\phi \in G$, so existiert ein Weg \tilde{w} von x_0 nach $\phi(x_0)$. Es ist dann $p \circ \tilde{w}$ eine Schleife bei y_0 und $D_{[w]} = \phi$. Das zeigt die Surjektivität.

Es seien nun $\alpha, \beta \in \pi_1(K, y_0)$ und $\alpha = [w_1], \beta = [w_2]$ mit Hochhebungen $\tilde{w}_i, \tilde{w}_i(0) = x_0$.

Ist $D_\alpha = D_\beta$, so ist $\tilde{w}_1(1) = \tilde{w}_2(1)$. Da \mathbb{R}^2 einfach zusammenhängend ist, ist also $\tilde{w}_1 \simeq \tilde{w}_2$ und damit $\alpha = [p \circ \tilde{w}_1] = [p \circ \tilde{w}_2] = \beta$. Dies zeigt die Injektivität.

Es bleibt zu zeigen, dass die Abbildung ein Homomorphismus ist. Es ist $p \circ D_\alpha \circ \tilde{w}_2 = p \circ \tilde{w}_2 = w_2$, $(D_\alpha \circ \tilde{w}_2)(0) = D_\alpha(x_0) = \tilde{w}_1(1)$, also ist $\tilde{w}_1 * (D_\alpha \circ \tilde{w}_2)$ ein Weg von x_0 nach $D_\alpha(\tilde{w}_2(1)) = D_\alpha(D_\beta(x_0)) = (D_\alpha \circ D_\beta)(x_0)$. Da $p \circ (\tilde{w}_1 * (D_\alpha \circ \tilde{w}_2)) = w_1 * w_2$, ist $D_\alpha \circ D_\beta = D_{[w_1 * w_2]} = D_{\alpha\beta}$. \square

Konkret können wir nun beispielsweise

$$\begin{aligned}w_1, w_2: I &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ w_1(s) &= (s, 0) \\ w_2(s) &= (0, s)\end{aligned}$$

setzen. Dann ist $w_1(0) = w_2(0) = (0, 0) = x_0$ und $w_1(1) = (1, 0) = f(x_0)$, $w_2(1) = (0, 1) = g(x_0)$. Mit

$$\alpha, \beta \in \pi_1(K, y_0) \quad \alpha := [p \circ w_1] \quad \beta := [p \circ w_2]$$

ist also $f = D_\alpha, g = D_\beta$. Damit ist $\pi_1(K, y_0)$ von α und β erzeugt, es ist $\alpha\beta\alpha^{-1} = \beta^{-1}$, und dies ist in dem Sinne die einzige Relation, dass daraus folgt, dass sich jedes Element der Fundamentalgruppe als $\alpha^m\beta^n$ schreiben lässt, diese Elemente aber alle verschieden sind.

Diese Notation werden wir auch später für die Fundamentalgruppe der Kleinschen Flasche verwenden.

Abschnitt 6

Mehr Beispiele von Überlagerungen

Die Operation der Fundamentalgruppe auf der Faser einer Überlagerung

Wir führen ein Konzept, das wir im vorherigen Abschnitt implizit benutzt haben, systematisch ein.

Es sei $p: X \rightarrow Y$ eine Überlagerung. In Y sei der Basispunkt y_0 gewählt. Das Urbild $F := p^{-1}[\{y_0\}]$ nennen wir die *Faser über y_0* . Wir definieren eine Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi: F \times \pi_1(Y, y_0) &\rightarrow F \\ (x, \alpha) &\mapsto \tilde{w}(1), \quad \text{mit } \tilde{w}(0) = x, [p \circ \tilde{w}] = \alpha. \end{aligned}$$

Wir erhalten $\varphi(x, \alpha)$ also als Endpunkt der Hochhebung eines α repräsentierenden geschlossenen Weges zu einem Weg mit Anfangspunkt x . Die Wohldefiniertheit dieser Konstruktion folgt aus Proposition 3.17 und Korollar 3.20.

6.1 Proposition. *Die Funktion φ definiert eine Rechtsoperation von $\pi_1(Y, y_0)$ auf F . Das heißt, dass für alle $x \in F$ und $\alpha, \beta \in \pi_1(Y, y_0)$*

- (i) $\varphi(x, e) = x$ und
- (ii) $\varphi(\varphi(x, \alpha), \beta) = \varphi(x, \alpha\beta)$.

gilt.

Beweis. Zu (i). Wähle $\tilde{w} := c_x$.

Zu (ii). Es seien $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2: I \rightarrow X$ mit $[p \circ \tilde{w}_1] = \alpha$, $[p \circ \tilde{w}_2] = \beta$, $\tilde{w}_1(0) = x$, $\tilde{w}_2(0) = \varphi(x, \alpha)$. Dann ist $\tilde{w}_1(1) = \varphi(x, \alpha) = \tilde{w}_2(0)$, also ist $\tilde{w}_1 * \tilde{w}_2$ definiert und $[p \circ (\tilde{w}_1 * \tilde{w}_2)] = \alpha\beta$, also $\varphi(x, \alpha\beta) = (\tilde{w}_1 * \tilde{w}_2)(1) = \tilde{w}_2(1) = \varphi(\varphi(x, \alpha), \beta)$. \square

Das nehmen wir als Rechtfertigung ab sofort statt $\varphi(x, \alpha)$ einfacher $x\alpha$ zu schreiben. Man beachte, dass (ii) dadurch zu $(x\alpha)\beta = x(\alpha\beta)$ wird.

6.2 Proposition. *Diese Operation ist transitiv, das heißt, zu $x_1, x_2 \in F$ existiert immer ein $\alpha \in \pi_1(Y, y_0)$ mit $x_1\alpha = x_2$.*

Beweis. Da X wegzusammenhängend ist, existiert ein Weg \tilde{w} von x_1 nach x_2 . Dann ist $p \circ \tilde{w}$ eine Schleife bei y_0 und mit $\alpha = [p \circ \tilde{w}]$ ist $x_1\alpha = x_2$. \square

6.3 Proposition. *Es sei $x \in F$. Dann ist*

$$\{\alpha \in \pi_1(Y, y_0) : x\alpha = x\} = \text{im} \left(\pi_1(X, x) \xrightarrow{p_{\#}} \pi_1(Y, y_0) \right),$$

die Standgruppe von x .

Beweis. Ist $x\alpha = x$, so existiert also ein Weg \tilde{w} von x nach x , mit $[p \circ \tilde{w}] = \alpha$. Da \tilde{w} ein geschlossener Weg ist, repräsentiert er ein Element aus $\pi_1(X, x)$ und $\alpha = [p \circ \tilde{w}] = p_{\#}([\tilde{w}])$.

Ist $\beta = [u] \in \pi_1(X, x)$, so ist $x \cdot p_{\#}([u]) = x \cdot [p \circ u] = u(1) = x$. \square

Man beachte die Abhängigkeit von x . In der Tat erhalten wir algebraisch $(x\beta)\alpha = x\beta \iff x(\beta\alpha\beta^{-1}) = x$ und damit $\alpha \in p_{\#}\pi_1(X, x\beta) \iff \beta\alpha\beta^{-1} \in p_{\#}\pi_1(X, x)$, das heißt $p_{\#}\pi_1(X, x\beta) = \beta^{-1}(p_{\#}\pi_1(X, x))\beta$. Selbiges ergibt sich aus Proposition 4.14.

Wir erinnern daran, dass wir in Proposition 5.4 festgestellt haben, dass $p_{\#}$ injektiv ist.

6.4 Beispiel. Wir betrachten $X := (I \times \mathbb{R})/\sim$, wobei \sim die von $(0, y) \sim (1, -y)$ erzeugte Äquivalenzrelation sei. X ist also ein unendlich breites Möbiusband. Nehmen wir die Bezeichnungen aus unserer Diskussion der Fundamentalgruppe der Kleinschen Flasche wieder auf, so ist $(1, -y) = f(0, y)$. Daher induziert die Inklusion $I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Abbildung $q: X \rightarrow \mathbb{R}^2/G = K$. Man sieht leicht, dass dies eine Überlagerung ist. Setzen wir $x_k := [(0, k)] = [(1, -k)] \in X$, so ist $F := q^{-1}[\{y_0\}] = \{x_k : k \in \mathbb{Z}\}$. Wir sehen $x_k\alpha = x_{-k}$, $x_k\beta = x_{k+1}$, also $x_k\alpha^m\beta^n = x_{(-1)^m k + n}$. Damit ist die Standgruppe von x_0 gleich $\{\alpha^m : m \in \mathbb{Z}\}$. Weiterhin folgt, dass $\pi_1(X, x_0)$ eine unendliche zyklische Gruppe ist, die von einem Urbild von α unter $p_{\#}$ erzeugt wird. Dieser Erzeuger wird von einer Schleife in X repräsentiert, die Bild eines Weges in $I \times \mathbb{R}$ von $(0, 0)$ nach $(1, 0)$ ist. Letzteres kann man unabhängig von dieser Überlegung erhalten, indem man zeigt, dass die Abbildung $\mathbb{S}^1 \approx I/\{0, 1\} \approx (I \times \{0\})/\{(0, 0), (1, 0)\} \rightarrow (I \times \mathbb{R})/\sim = X$ eine Homotopieäquivalenz ist.

Allgemeiner sieht man, dass die Standgruppe von x_{k_0} aus den Elementen $\alpha^m\beta^n$ mit $n = 0$ für gerades m und $n = 2k_0$ für ungerades m besteht. Das sieht zunächst verwirrend aus, aber diese Elemente lassen sich als $\alpha^m\beta^{k_0 - (-1)^m k_0} = \beta^{-k_0}\alpha^m\beta^{k_0}$ schreiben, was wegen $x_{k_0} = x_0\beta^{k_0}$ zu unseren Ergebnissen von oben passt.

Abbildung 6.1: Die Überlagerung der Kleinschen Flasche aus Beispiel 6.4.

Abbildung 6.2: Die Überlagerung der Kleinschen Flasche aus Beispiel 6.5.

6.5 Beispiel. Ähnlich wie oben setzen wir $X := \mathbb{R} \times I / \sim$, wobei \sim von $(x, 0) \sim (x, 1)$ erzeugt wird. X ist also homöomorph zu $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$. Dies liefert ebenso eine Überlagerung $q: X \rightarrow K$ der Kleinschen Flasche, und die Faser ist $q^{-1}[\{y_0\}] = \{x_k: k \in \mathbb{Z}\}$ mit $x_k := [(k, 0)] = [(k, 1)]$. Wir sehen $x_k \alpha = x_{k+1}$ und $x_k \beta = x_k$. Für beliebiges $k_0 \in \mathbb{Z}$ ist die Standgruppe von x_{k_0} also $\{\beta^n: n \in \mathbb{Z}\}$. In diesem Fall ist die Standgruppe also für alle Punkte der Faser gleich. In der Tat liefert uns die Überlegung von oben, dass, wenn $\{\beta^n: n \in \mathbb{Z}\}$ die Standgruppe von x_0 ist, die Standgruppe von $x_{k_0} = x_0 \alpha^{k_0}$ gleich $\alpha^{-k_0} \{\beta^n: n \in \mathbb{Z}\} \alpha^{k_0}$ sein muss. Aber $\alpha^{-k_0} \beta^n \alpha^{k_0} = \alpha^{-k_0} \alpha^{k_0} \beta^{(-1)^{k_0} n} = \beta^{(-1)^{k_0} n}$ und $\{\beta^{(-1)^{k_0} n}: n \in \mathbb{Z}\} = \{\beta^n: n \in \mathbb{Z}\}$. In diesem Fall ist also die Untergruppe $p_{\#}[\pi_1(X, x_0)]$ von $\pi_1(K, y_0)$ ein Normalteiler und daher allen $p_{\#}[\pi(X, x_k)]$ gleich.

6.6 Proposition. *Es sei $x_0 \in F$. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} p_{\#}\pi_1(X, x_0) \backslash \pi_1(Y, y_0) &\rightarrow F \\ (p_{\#}\pi_1(X, x_0))\alpha &\mapsto x_0\alpha \end{aligned}$$

von den Rechtsnebenklassen von $p_{\#}\pi_1(X, x_0)$ in $\pi_1(Y, y_0)$ auf die Faser wohldefiniert und eine Bijektion. Insbesondere ist, wenn X einfach zusammenhängend ist, die Abbildung

$$\begin{aligned} \pi_1(Y, y_0) &\rightarrow F \\ \alpha &\mapsto x_0\alpha \end{aligned}$$

eine Bijektion.

Beweis. Wir setzen $G := \pi_1(Y, y_0)$, $H := p_{\#}\pi_1(X, x_0)$.

Ist $H\alpha = H\beta$, so ist $\alpha\beta^{-1} \in H$, also $x_0\beta = (x_0\alpha\beta^{-1})\beta = x_0\alpha$. Damit ist die Abbildung wohldefiniert.

Ist andererseits $x_0\alpha = x_0\beta$, so ist $x_0\alpha\beta^{-1} = x_0$ und damit $\alpha\beta^{-1} \in H$, also $H\beta = (H\alpha\beta^{-1})\beta = H\alpha$. Dies zeigt die Injektivität.

Die Surjektivität folgt aus der Transitivität der Gruppenoperation. \square

$$\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$$

Es sei $Y := \{x \in \mathbb{R}^2: \|x - (1, 0)\| = 1\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2: \|x - (-1, 0)\| = 1\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$ die Vereinigung zweier Kreislinien, die sich in einem Punkt treffen.

Abbildung 6.3: $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ als Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$

Abbildung 6.4: $\alpha, \beta \in \pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$.

6.7 Proposition. *Die Inklusion $i: Y \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$ ist eine Homotopieäquivalenz.*

Beweis. Eine Homotopieinverse (in der Tat eine starke Deformationsretraktion) r ist in Abbildung 6.3 angedeutet. \square

Wir definieren zwei Einbettungen $i^1, i^2: \mathbb{S}^1 \rightarrow Y$.

$$i^1(x) = (1, 0) - x, \quad i^2(x) = x - (-1, 0).$$

Wir schreiben auch $Y = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$, und denken uns diesen Raum dann immer zusammen mit den beiden Abbildungen i^1 und i^2 .

Es sei $g = \Phi(1) \in \pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))$ der Standarderzeuger. Wir setzen

$$\alpha = i_{\#}^1(g), \quad \beta = i_{\#}^2(g).$$

Die Fundamentalgruppe des Raumes $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ wird uns noch näher beschäftigen. Später werden wir zeigen, dass sie von α und β erzeugt wird und zwischen α und β keine Relation besteht (das wird noch zu erklären sein). Vorläufig wollen wir zeigen, dass α und β nicht kommutieren. Dazu benutzen wir eine geeignete Überlagerung.

Abbildung 6.5 zeigt einen Raum X , den wir als Graphen mit sechs Ecken und zwölf Kanten beschreiben können. Wir bilden diesen nach $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ ab, indem wir jede der Ecken auf den Basispunkt (den Schnittpunkt der beiden Kreislinien) abbilden und jede der Kanten auf eine der Kreislinien, wobei die Beschriftung angibt, auf welche und in welcher Richtung. Dabei soll das Innere jeder Kanten homöomorph auf das Komplement des Basispunkts in der entsprechenden Kreislinie abgebildet werden. Man überzeugt sich leicht davon, dass eine Überlagerungsabbildung ist. Die wesentliche Eigenschaft ist, dass in jeder Ecke des Graphen je genau eine mit α beziehungsweise β bezeichnete Kante startet und endet, was der Situation in $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ entspricht.

In dieser Überlagerung besteht die Faser des Basispunkts aus den sechs Ecken. Wir wählen einen dieser als Basispunkt $x_0 \in X$. Wir identifizieren nun leicht, siehe Abbildung 6.6, den Punkt $x_0 \alpha \beta \alpha^{-1} \beta^{-1}$ der Faser. Aus $x_0 \alpha \beta \alpha^{-1} \beta^{-1} \neq x_0$ schließen wir $\alpha \beta \alpha^{-1} \beta^{-1} \neq e$, also kommutieren α und β nicht. Natürlich können wir ebenso einfach direkt $x_0 \alpha \beta \neq x_0 \beta \alpha$ ablesen.

Abbildung 6.5: Eine Überlagerung von $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$.

Abbildung 6.6: $x_0\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \neq x_0$.

Abbildung 6.7: Eine das nicht triviale Element $\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\alpha}^{-1}\bar{\beta}^{-1}$ repräsentierende Schleife in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$.

6.8 Korollar. In $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}, (0, 0))$ ist $\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\alpha}^{-1}\bar{\beta}^{-1} \neq e$, wobei $\bar{\alpha} := (i \circ i^1)_\#(\alpha)$, $\bar{\beta} := (i \circ i^2)_\#(\beta)$.

Beweis. Der Homomorphismus

$$i_\# : \pi_1(X, (0, 0)) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}, (0, 0))$$

ist ein Isomorphismus, da i eine Homotopieäquivalenz ist. Insbesondere ist er injektiv. \square

Man beachte, dass wir mit dieser einen Überlagerung nicht alles über $\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$ erfahren. Beispielsweise ist $x_0\alpha^2 = x_0$, obwohl $\alpha^2 \neq e$. (Wie kann man letzteres zeigen?). Dies liegt daran, dass α^2 im Bild von $\pi_1(X, x_0)$ liegt.

Abschnitt 7

Deckbewegungen und die Klassifikation von Überlagerungen

Wir beginnen mit einer wichtigen Hochhebungseigenschaft. Man mache sich klar, dass in der folgenden Proposition der Fall $Z = \mathbb{S}^1$ bereits direkt aus den Lemmata über Hochhebungen von Wegen und Homotopien von Wegen folgt, denn dieser Fall lässt sich zu der Frage umformulieren, wann sich ein geschlossener Weg zu einem geschlossenen Weg hochheben lässt. Den allgemeinen Fall werden wir ebenfalls darauf reduzieren.

7.1 Proposition. *Es sei $p: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ eine Überlagerung, Z eine wegzusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum, $z_0 \in Z$. Ist $f: (Z, z_0) \rightarrow (Y, y_0)$ eine stetige Abbildung, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i) *Es existiert eine stetige Abbildung $\tilde{f}: (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$ mit $p \circ \tilde{f} = f$.*
- (ii) $\text{im} \left(\pi_1(Z, z_0) \xrightarrow{f_\#} \pi_1(Y, y_0) \right) \subset \text{im} \left(\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{p_\#} \pi_1(Y, y_0) \right).$

In diesem Fall ist die Abbildung \tilde{f} eindeutig bestimmt.

Beweis. „(i) \Rightarrow (ii)“ Aus $p \circ \tilde{f} = f$ folgt $p_\# \circ \tilde{f}_\# = f_\#$ und damit $\text{im } \tilde{f}_\# \subset \text{im } p_\#$.

Zur Eindeutigkeit: Es sei $z \in Z$. Es existiert ein Weg $w: I \rightarrow Z$ von z_0 nach z . Dann ist $u := f \circ w$ ein Weg von y_0 nach $f(z)$ und nach Proposition 3.17 existiert eine eindeutige Hochhebung \tilde{u} von u mit $\tilde{u}(0) = x_0$. Nun ist aber auch $\tilde{f} \circ w$ eine solche Hochhebung, denn $p \circ (\tilde{f} \circ w) = f \circ w$ und $(\tilde{f} \circ w)(0) = \tilde{f}(z_0) = x_0$. Damit ist $\tilde{f} \circ w = \tilde{u}$ und insbesondere $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(1)$.

„(ii) \Rightarrow (i)“ Der Absatz zur Eindeutigkeit zeigt bereits, wie \tilde{f} zu definieren ist: Für $z \in Z$ wähle man einen Weg w von z_0 nach z , erhalte ein \tilde{u} wie dort und setze $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(1)$. Es ist zu zeigen, dass diese Definition von der Wahl von w unabhängig und die so erhaltene Abbildung \tilde{f} stetig ist.

Sind w_1 und w_2 Wege von z_0 nach z , so ist $w_1 * w_2^-$ ein geschlossener Weg bei z_0 . Nach Voraussetzung ist $[f \circ (w_1 * w_2^-)] \in \text{im } f_\# \subset \text{im } p_\#$, so dass $f \circ (w_1 * w_2^-) = (f \circ w_1) * (f \circ w_2)^-$ eine Hochhebung zu einem geschlossenen

Weg bei x_0 besitzt. Dies heißt aber, dass die Hochhebungen von $f \circ w_1$ und $f \circ w_2$ mit Anfangspunkt x_0 den gleichen Endpunkt haben. Dies zeigt die Wohldefiniertheit von \tilde{f} .

Es sei nun $z \in Z$. Es sei U eine gleichmäßig überdeckte Umgebung von $f(z)$ und V die Komponente von $p^{-1}[U]$, die $\tilde{f}(z) \in p^{-1}[f(z)]$ enthält. Da Z lokal wegzusammenhängend ist, existiert eine wegzusammenhängende, in $f^{-1}[U]$ enthaltene Umgebung W von z . Wir wählen eine solche und werden zeigen, dass $\tilde{f}|_W$ stetig ist. Es sei w ein Weg von z_0 nach z und \tilde{u} eine Hochhebung von $f \circ w$ mit $\tilde{u}(0) = x_0$. Es ist also $\tilde{u}(1) = \tilde{f}(z)$. Ist nun $z' \in W$ und v ein Weg von z nach z' in W , so ist $f \circ v$ ein Weg von $f(z)$ nach $f(z')$ in U . Daher ist $\tilde{u} * ((p|_V)^{-1} \circ (f \circ v))$ eine stetige Hochhebung von $f \circ (w * v)$ und $\tilde{f}(z') = (\tilde{u} * ((p|_V)^{-1} \circ (f \circ v))(1) = (p|_V)^{-1}(f(z'))$. Es ist also $\tilde{f}|_W = (p|_V)^{-1} \circ f|_W$ stetig. \square

Die Deckbewegungsgruppe

7.2 Definition. Es sei $p: X \rightarrow Y$ eine Überlagerung. Eine *Deckbewegung* ist ein Homöomorphismus $D: X \rightarrow X$, so dass $p \circ D = p$. Die Menge der Deckbewegungen von p bildet mit der Komposition eine Gruppe, die *Deckbewegungsgruppe*, die wir mit $\Delta(p)$ oder nur Δ bezeichnen.

Insbesondere bilden Deckbewegungen die Faser auf sich ab. Wir halten fest, wie sich diese Operation auf der Faser mit der früher eingeführten der Fundamentalgruppe des überlagerten Raumes verträgt.

7.3 Proposition. Es sei $p: X \rightarrow Y$ eine Überlagerung, $y_0 \in Y$, $F = p^{-1}[\{y_0\}]$. Dann gilt

$$D(x\alpha) = (Dx)\alpha$$

für $D \in \Delta(p)$, $\alpha \in \pi_1(Y, y_0)$, $x \in F$.

Beweis. Es sei $\alpha = [p \circ \tilde{w}]$ mit $\tilde{w}: I \rightarrow X$, $\tilde{w}(0) = x$. Dann ist ebenfalls $[p \circ (D \circ \tilde{w})] = [p \circ \tilde{w}] = \alpha$, $(D \circ \tilde{w})(0) = Dx$. Daher ist $D(x\alpha) = D(\tilde{w}(1)) = (D \circ \tilde{w})(1) = (Dx)\alpha$. \square

7.4 Proposition. Es sei $p: X \rightarrow Y$ eine Überlagerung und $x_0, x_1 \in X$, $p(x_0) = p(x_1)$. Dann existiert genau dann eine Deckbewegung D mit $D(x_0) = x_1$, wenn $p_{\#}[\pi_1(X, x_0)] = p_{\#}[\pi_1(X, x_1)]$.

Beweis. Existiert ein solches $D: (X, x_0) \rightarrow (X, x_1)$ und wählen wir die genaueren Bezeichnungen $p^i: (X, x_i) \rightarrow (Y, y)$, $y = p(x_0) = p(x_1)$, so ist $p_{\#}^1 \circ D_{\#} = p_{\#}^0$ und, da $D_{\#}$ ein Isomorphismus ist, $\text{im } p_{\#}^1 = \text{im } p_{\#}^0$.

Es sei nun $\text{im } p_{\#}^1 = \text{im } p_{\#}^0$. Aus $\text{im } p_{\#}^0 \subset \text{im } p_{\#}^1$ folgt mit Proposition 7.1 die Existenz von $D: (X, x_0) \rightarrow (X, x_1)$ mit $p \circ D = p$. Aus $\text{im } p_{\#}^1 \subset \text{im } p_{\#}^0$ folgt die Existenz von $D': (X, x_1) \rightarrow (X, x_0)$ mit $p \circ D' = p$. Nun ist aber $D' \circ D$ eine Abbildung $(X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ mit $p \circ (D' \circ D) = p \circ D = p$ und

aus der Eindeutigkeitsaussage in Proposition 7.1 folgt $D' \circ D = \text{id}_X$. Ebenso folgt $D \circ D' = \text{id}_X$, also ist D ein Homöomorphismus und damit $D \in \Delta$. \square

7.5 Beispiel. Bei der Überlagerung der Kleinschen Flasche aus Beispiel 6.4 haben wir erhalten, dass $p_\#[\pi_1(X, x_k)] = \{\alpha^m \beta^{(1-(-1)^m)k} : m \in \mathbb{Z}\}$. Da diese Untergruppen paarweise verschieden sind, ist $\Delta = \{\text{id}\}$.

7.6 Proposition und Definition. *Es sei $p: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ eine Überlagerung, $F = p^{-1}[\{y_0\}]$. Dann sind äquivalent:*

- (i) *Die Deckbewegungsgruppe Δ operiert transitiv auf der Faser F , das heißt für alle $x_1, x_2 \in F$ existiert ein $D \in \Delta$ mit $Dx_1 = x_2$.*
- (ii) *Die Untergruppe $p_\#[\pi_1(X, x_0)]$ von $\pi_1(Y, y_0)$ ist ein Normalteiler.*

In diesem Fall heißt die Überlagerung regulär.

Beweis. Zunächst einmal genügt für die Transitivität auf der Faser, dass zu jedem $x_1 \in F$ ein $D \in \Delta$ mit $Dx_0 = x_1$ existiert. Dies ist nach Proposition 7.4 dazu äquivalent, dass $p_\#[\pi_1(X, x_0)] = p_\#[\pi_1(X, x_1)]$ für alle $x_1 \in F$. Nun lässt sich aber jedes $x_1 \in F$ als $x_0\alpha^{-1}$ mit $\alpha \in \pi_1(Y, y_0)$ schreiben, und $p_\#[\pi_1(X, x_0\alpha^{-1})] = \alpha(p_\#[\pi_1(X, x_0)])\alpha^{-1}$. Also ist die Operation auf der Faser genau dann transitiv, wenn die Untergruppen $\alpha(p_\#[\pi_1(X, x_0)])\alpha^{-1}$ alle übereinstimmen, dies ist aber genau die Bedingung, dass $p_\#[\pi_1(X, x_0)]$ ein Normalteiler ist. \square

7.7 Proposition und Definition. *Es sei $p: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ eine reguläre Überlagerung. Dann gibt es zu jedem $\alpha \in \pi_1(Y, y_0)$ genau ein $D_\alpha \in \Delta$ mit $D_\alpha(x_0) = x_0\alpha$. Die dadurch definierte Abbildung*

$$\begin{aligned} \pi_1(Y, y_0) &\rightarrow \Delta(p) \\ \alpha &\mapsto D_\alpha \end{aligned}$$

ist ein Epimorphismus mit Kern $p_\#[\pi_1(X, x_0)]$. Insbesondere ist

$$\Delta(p) \cong \pi_1(Y, y_0) / p_\#[\pi_1(X, x_0)].$$

Speziell ist für den Fall, dass X einfach zusammenhängend ist, die Abbildung $\alpha \mapsto D_\alpha$ ein Isomorphismus $\pi_1(Y, y_0) \cong \Delta(p)$.

Beweis. Die Wohldefiniertheit der Abbildung folgt aus der Voraussetzung der Regularität der Überlagerung und der Eindeutigkeitsaussage aus Proposition 7.1. Aus eben dieser Eindeutigkeit zusammen mit der Transitivität der Operation von $\pi_1(Y, y_0)$ auf der Faser folgt, dass jedes $D \in \Delta$ von der Form D_α ist, also die Surjektivität der Abbildung. Sie ist ein Homomorphismus, denn mit Proposition 7.3 folgt

$$D_{\alpha\beta}(x_0) = x_0\alpha\beta = D_\beta(x_0\alpha) = (D_\beta x_0)\alpha = D_\alpha D_\beta x_0$$

und damit $D_{\alpha\beta} = D_\alpha D_\beta$. Weiterhin ist $D_\alpha = \text{id}_X \iff D_\alpha(x_0) = \text{id}_X(x_0) \iff x_0\alpha = x_0$, was zusammen mit Proposition 6.3 die Aussage über den Kern zeigt. Ist X einfach zusammenhängend, so ist der Kern trivial und die Abbildung ein Isomorphismus, ansonsten liefert der Homomorphiesatz für Gruppen $\Delta(p) \cong \pi_1(Y, y_0)/p_\#[\pi_1(X, x_0)]$. \square

7.8 Beispiel. Für die in Beispiel 6.5 betrachtete Überlagerung der Kleinschen Flasche hatten wir bereits dort festgestellt, dass die Untergruppe $p_\#[\pi_1(X, x_0)] = \{\beta^n : n \in \mathbb{Z}\}$ ein Normalteiler ist, die Überlagerung ist also regulär. Mit $\bar{f}: X \rightarrow X$, $\bar{f}([x, y]) = [x + 1, 1 - y]$ sieht man leicht, dass $\bar{f} \in \Delta$. Es ist $\bar{f}(x_0) = x_1 = x_0\alpha$, also ist $D_\alpha = \bar{f}$. Man erhält nun aus der Proposition, dass $D_{\alpha^m\beta^n} = \bar{f}^m$ und $\Delta = \{\bar{f}^m : m \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$.

Klassifikation von Überlagerungen

7.9 Definition. Sind $p_1: X_1 \rightarrow Y$, $p_2: X_2 \rightarrow Y$ Überlagerungen, so nennen wir sie äquivalent, wenn ein Homöomorphismus $h: X_1 \rightarrow X_2$ existiert, so dass $p_2 \circ h = p_1$.

Sind in allen Räumen Basispunkte gewählt, also $p_1: (X_1, x_1) \rightarrow (Y, y)$, $p_2: (X_2, x_2) \rightarrow (Y, y)$, so heißen p_1 und p_2 äquivalent mit Berücksichtigung des Basispunktes, wenn ein Homöomorphismus $h: (X, x_1) \rightarrow (X, x_2)$ mit $p_2 \circ h = p_1$ existiert.

7.10 Proposition. Es seien $p_1: (X_1, x_1) \rightarrow (Y, y)$, $p_2: (X_2, x_2) \rightarrow (Y, y)$ Überlagerungen. Dann sind p_1 und p_2 äquivalent mit Berücksichtigung des Basispunktes, wenn

$$(p_1)_\#[\pi_1(X_1, x_1)] = (p_2)_\#[\pi_1(X_2, x_2)].$$

Die Überlagerungen p_1 und p_2 sind äquivalent ohne Berücksichtigung des Basispunktes, wenn $(p_1)_\#[\pi_1(X_1, x_1)]$ und $(p_2)_\#[\pi_1(X_2, x_2)]$ konjugierte Untergruppen sind, wenn es also ein $\alpha \in \pi_1(Y, y_0)$ gibt, so dass

$$(p_1)_\#[\pi_1(X_1, x_1)] = \alpha((p_2)_\#[\pi_1(X_2, x_2)])\alpha^{-1}.$$

Beweis. Die Aussage zur Äquivalenz mit Berücksichtigung des Basispunktes wurde für den Spezialfall $X_1 = X_2$ in Proposition 7.4 bewiesen, und der dortige Beweis zeigt auch den hier benötigten allgemeineren Fall.

Um daraus die Aussage zur Äquivalenz ohne Basispunkt abzuleiten, bemerkt man, dass p_1 und p_2 genau dann äquivalent ohne Berücksichtigung des Basispunktes sind, wenn sie nach Wechsel des Basispunktes äquivalent mit Berücksichtigung des Basispunktes sind, wenn also ein $\alpha \in \pi_1(Y, y)$ existiert, so dass $p_1: (X_1, x_1\alpha) \rightarrow (Y, y)$ und $p_2: (X_2, x_2) \rightarrow (Y, y)$ äquivalent mit Berücksichtigung des Basispunktes sind. \square

7.11 Proposition. *Es sei $\tilde{p}: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (Y, y_0)$ eine Überlagerung und \tilde{X} einfach zusammenhängend. Weiterhin sei G eine Untergruppe von $\pi_1(Y, y_0)$.*

Es sei $\tilde{G} := \{D_\alpha: \alpha \in G\} \subset \Delta$ und $X := \tilde{X}/\tilde{G}$, $q: \tilde{X} \rightarrow X$ die Quotientenabbildung, $x_0 := q(\tilde{x}_0)$. Dann definiert $p \circ q = \tilde{p}$ eine Überlagerungsabbildung $p: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, und es ist $p_\#[\pi_1(X, x_0)] = G$.

Beweis. Zunächst einmal gilt für $x, x' \in \tilde{X}$ mit $q(x) = q(x')$ nach Definition, dass ein $D \in \tilde{G} \subset \Delta(\tilde{p})$ mit $Dx = x'$ existiert, also $\tilde{p}(x') = (\tilde{p} \circ D)(x) = \tilde{p}(x)$. Damit ist p wohldefiniert. Da $X = \tilde{X}/\tilde{G}$ die Quotientenabbildung trägt, ist p stetig. Wir skizzieren nun, dass p eine Überlagerung ist.

Es sei $y \in Y$ und U eine gleichmäßig überdeckte Umgebung von y . Ist nun V eine Komponente von \tilde{p}^{-1} und $D \in \Delta(\tilde{p})$, $D \neq \text{id}$, so wird V von D homöomorph auf eine von V verschiedene Komponente V' abgebildet. Es folgt, dass die Abbildungen $V \xrightarrow{q} q[V] \xrightarrow{p} U$ Homöomorphismen sind und $q[V]$ eine Komponente von $p^{-1}[U]$ ist. Daher ist U auch bezüglich p gleichmäßig überdeckt.

Sei nun $\alpha \in \pi_1(Y, y_0)$. Man sieht leicht, dass $x_0\alpha = q(\tilde{x}_0\alpha)$. Es ist also $\alpha \in p_\#[\pi_1(X, x_0)] \iff x_0\alpha = x_0 \iff q(\tilde{x}_0\alpha) = q(\tilde{x}_0) \iff q(D_\alpha\tilde{x}_0) = q(\tilde{x}_0) \iff D_\alpha \in \tilde{G} \iff \alpha \in G$. Die letzte Äquivalenz benutzt dabei, dass \tilde{X} einfach zusammenhängend und damit $\alpha \mapsto D_\alpha$ injektiv ist. \square

7.12 Definition. Aus diesem Grund heißt eine Überlagerung $p: X \rightarrow Y$ von Y , bei der der Raum X einfach zusammenhängend ist, die *universelle Überlagerung* von X .

7.13 Beispiel. Die Überlagerung der Kleinschen Flasche durch \mathbb{R}^2 ist eine universelle Überlagerung. Die Überlagerung aus Beispiel 6.4 ergibt sich hieraus als \mathbb{R}^2/G_1 mit $G_1 = \{f^m: m \in \mathbb{Z}\} = \{D_{\alpha^m}: m \in \mathbb{Z}\}$, die aus Beispiel 6.5 als \mathbb{R}^2/G_2 mit $G_2 = \{g^m: m \in \mathbb{Z}\} = \{D_{\beta^m}: m \in \mathbb{Z}\}$.

7.14 Proposition. *Es sei Y ein wegzusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum. Dann sind äquivalent:*

- (i) Y hat eine universelle Überlagerung.
- (ii) Y ist semilokal einfach zusammenhängend, das heißt, dass zu jedem $y \in Y$ eine Umgebung U von y existiert, so dass

$$\text{im}(\pi_1(U, y) \xrightarrow{\text{Inkl}_\#} \pi_1(Y, y)) = \{e\}.$$

7.15 Beispiel (Die Hawaiianischen Ohrringe). Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ setzen wir $i_n: (\mathbb{S}^1, (1, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^2, (0, 0))$, $i_n(x) = \frac{1}{n}(1 - x)$ und $S_n := \text{im } i_n$. Dann ist der Raum $X := \bigcup_{n=1}^\infty S_n$ nicht semilokal einfach zusammenhängend. Es existiert nämlich zu jedem n eine stetige Abbildung $q_n: X \rightarrow \mathbb{S}^1$ mit $q_n \circ i_n = \text{id}_{\mathbb{S}^1}$, man bilde einfach alle Punkte aus $X \setminus S_n$ auf $(1, 0)$ ab. Dies zeigt, dass

$$\text{im}(\pi_1(S^n, 0) \xrightarrow{\text{Inkl}_\#} \pi_1(X, 0)) \neq \{e\},$$

es enthält aber jede Umgebung von $(0, 0)$ ein (sogar fast alle) S_n .

Beweis von (i) \Rightarrow (ii). Es sei $p: X \rightarrow Y$ eine universelle Überlagerung, $y \in Y$. Es sei weiter U eine gleichmäßig überdeckte Umgebung von y , $x \in p^{-1}[\{y\}]$ und V die Komponente von $p^{-1}[U]$, die x enthält. Die Kommutativität von

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(V, x) & \xrightarrow{\text{Inkl}_\#} & \pi_1(X, x) = \{e\} \\ \cong \downarrow (p|_V)_\# & & \downarrow p_\# \\ \pi_1(U, y) & \xrightarrow{\text{Inkl}_\#} & \pi_1(Y, y) \end{array}$$

zeigt nun die Behauptung. \square

Beweisidee zu (ii) \Rightarrow (i). Zu einer Abbildung $p: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ können wir das kommutative Diagramm von Mengen

$$\begin{array}{ccc} \{\tilde{w}: I \rightarrow X: \tilde{w}(0) = x_0\} / \simeq_{\{0,1\}} & \xrightarrow{[\tilde{w}] \mapsto \tilde{w}(1)} & X \\ \downarrow [\tilde{w}] \mapsto [p \circ w] & & \downarrow p \\ \{w: I \rightarrow Y: w(0) = y_0\} / \simeq_{\{0,1\}} & \xrightarrow{[w] \mapsto w(1)} & Y \end{array}$$

betrachten. Ist p eine Überlagerung, so ist aufgrund der Hochhebungseigenschaften der linke Pfeil eine Bijektion. Ist X einfach zusammenhängend, so ist der obere Pfeil eine Bijektion. Um eine universelle Überlagerung zu erhalten, *definieren* wir daher $X := \{w: I \rightarrow Y: w(0) = y_0\} / \simeq_{\{0,1\}}$ und $p([w]) = w(1)$. Es bleibt dann, auf der Menge X mit Hilfe der Topologie auf Y eine Topologie zu definieren und zu zeigen, dass unter den Voraussetzungen der Proposition damit p zu einer Überlagerung wird und X einfach zusammenhängend ist. Die Details kann man in der Literatur nachlesen. \square

Die universelle Überlagerung von $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$

Wir wollen die universelle Überlagerung des Raums $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ beschreiben und nutzen, um $\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$ zu bestimmen.

Wir definieren zunächst abstrakt einen Graphen. Als erstes fixieren wir eine vierelementige Menge und nennen ihre Elemente gemäß ihrer späteren Verwendung $\alpha, \alpha^{-1}, \beta, \beta^{-1}$, ohne dass damit zunächst Bedeutung verbunden wäre. Die Eckenmenge V sei nun die Menge aller endlichen Folgen in dieser Menge, in denen kein α auf ein α^{-1} , kein α^{-1} auf ein α , kein β auf ein β^{-1} und kein β^{-1} auf ein β folgt. Die Kantenmenge E bestehe nun aus allen Paaren $(u, v) \in V \times V$, so dass die Folge v um eins länger als die Folge u ist und diese als Anfangsstück hat. (Wir haben den Graphen also als gerichteten Graphen definiert.) Wir bemerken jetzt schon, dass jede Ecke Grad 4 hat (die leere Folge ist auch Element der Eckenmenge).

Wir ordnen dem Graphen G nun einen Raum, seine *Realisierung* $|G|$ zu. Dies werden wir später im Rahmen von Simplizialkomplexen genauer beschreiben, vorerst genüge es, zu sagen, dass wir für jede Kante eine Kopie des abgeschlossenen Intervalls $[0, 1]$ nehmen und an den Endpunkten gemäß der Information aus G zusammenkleben, so dass es dem entspricht, was man erhält, wenn man eine Zeichnung von G anfertigt.

Wir definieren nun eine Abbildung $p: |G| \rightarrow \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$. Dazu bilden wir jede der Ecken des Graphen auf den Basispunkt von $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ ab und jede der Kanten auf eine der beiden Kreislinien und zwar so, dass das Innere der Kante homöomorph auf das Komplement des Basispunkts abgebildet wird. Bezeichnen wir ein Element von $\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$, das einem Erzeuger der Fundamentalgruppe einer der Kreislinien entspricht, mit α und das Element, das einem Erzeuger der Fundamentalgruppe der anderen Kreislinie entspricht, mit β , so sei p derart gewählt, dass die Einschränkung von p auf das einer Kante der Form $(u, u\alpha)$ entsprechende Intervall gerade α repräsentiert, für eine Kante der Form $(u, u\alpha^{-1})$ ergebe sich α^{-1} und so weiter.

Man überzeugt sich nun davon, dass p eine Überlagerung ist, was im wesentlichen daran liegt, von den vier an einer Ecke anstoßenden Kanten, je eine eine der beiden Kreislinien in eine der beiden möglichen Richtungen durchläuft.

Jede Ecke u von G repräsentiert auf die offensichtliche Art ein Element $f(u) \in \pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$, so dass beispielsweise für $u = (\alpha, \alpha, \beta, \alpha^{-1})$ gilt, dass $f(u) = \alpha^2\beta\alpha^{-1}$. Unsere Mühe wird nun dadurch belohnt, dass wir sehen, dass f eine Bijektion ist. Wir sehen es zumindest fast:

7.16 Proposition. *Die Abbildung $f: V \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$ ist injektiv. Sie ist genau dann surjektiv, wenn $|G|$ einfach zusammenhängend ist.*

In der Tat ist $|G|$ sogar zusammenziehbar. Das kann man daraus folgern, dass G ein Graph ist, wir wollen dies aber im Moment nicht tun.

Beweis. Wir bezeichnen die Faser des Basispunkts in der Überlagerung p mit F . Die Faser entspricht gerade der Eckenmenge von G , und wir bezeichnen den Punkt, der der leeren Folge entspricht, mit x_0 und den Punkt, der einer beliebigen Ecke u entspricht mit $|u|$.

Die Konstruktion ist nun so, dass, wenn $w_u: I \rightarrow |G|$ der offensichtliche Weg von x_0 nach $|u|$ ist, der Weg $p \circ w_u$ die Klasse $l(u)$ repräsentiert. Es ist also $x_0 l(u) = |u|$. Die Komposition

$$V \xrightarrow{f} \pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1) \xrightarrow{g \mapsto x_0 g} F$$

ist also eine Bijektion. Damit ist f injektiv. Außerdem ist f genau dann surjektiv, wenn die Operation auf der Faser (der zweite Pfeil) injektiv ist. Wir wissen, dass dies genau dann der Fall ist, wenn $p_{\#}[\pi_1(|G|)] = \{e\}$, wenn also $|G|$ einfach zusammenhängend ist ($p_{\#}$ ist injektiv). \square

Abschnitt 8

Der Satz von Seifert und van Kampen

8.1 Satz. *Es sei X ein Raum, $U_0, U_1 \subset X$ offene Teilmengen, $U_0 \cup U_1 = X$, $x_0 \in U_0 \cap U_1$, und es seien $U_0 \cap U_1$, U_0 und U_1 wegzusammenhängend. Wir bezeichnen die Inklusionsabbildungen wie folgt:*

$$\begin{array}{ccc} (U_0 \cap U_1, x_0) & \xrightarrow{j^0} & (U_0, x_0) \\ j^1 \downarrow & & \downarrow i^0 \\ (U_1, x_0) & \xrightarrow{i^1} & (X, x_0). \end{array}$$

Dies liefert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U_0 \cap U_1, x_0) & \xrightarrow{j_{\#}^0} & \pi_1(U_0, x_0) \\ j_{\#}^1 \downarrow & & \downarrow i_{\#}^0 \\ \pi_1(U_1, x_0) & \xrightarrow{i_{\#}^1} & \pi_1(X, x_0). \end{array} \quad (8.1)$$

von Gruppen und Homomorphismen. Dieses erfüllt die folgenden Eigenschaften.

- (i) *Die Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ wird von der Teilmenge $\text{im } i_{\#}^0 \cup \text{im } i_{\#}^1$ erzeugt.*
- (ii) *Ist K eine beliebige Gruppe und sind ϕ_0, ϕ_1 Homomorphismen, die ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U_0 \cap U_1, x_0) & \xrightarrow{j_{\#}^0} & \pi_1(U_0, x_0) \\ j_{\#}^1 \downarrow & & \downarrow \phi_0 \\ \pi_1(U_1, x_0) & \xrightarrow{\phi_1} & K \end{array} \quad (8.2)$$

liefern, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, $s_0, \dots, s_{n-1} \in \{0, 1\}$, $\alpha_k \in \pi_1(U_k, x_0)$, so dass

$$i_{\#}^{s_0}(\alpha_0) i_{\#}^{s_1}(\alpha_1) \cdots i_{\#}^{s_{n-1}}(\alpha_{n-1}) = e \quad (8.3)$$

auch

$$\phi_{s_0}(\alpha_0) \phi_{s_1}(\alpha_1) \cdots \phi_{s_{n-1}}(\alpha_{n-1}) = e.$$

Die in Satz 8.1 gewählte Formulierung ist ein Kompromiss. Einerseits werden wir im Beweis eine konkretere Form von (ii) erhalten: Gegeben (8.3) kann man die linke Seite durch mehrere Schritte der Art „Rechnen in $\pi_1(U_0)$ “ oder $\pi_1(U_1)$ “ und „Ausnutzen der Kommutativität von (8.1)“ auf die Form „e“ bringen. Falls dies jetzt noch etwas nebulös klingen sollte, wird dies hoffentlich im Beweis klarer.

8.3 Definition. Ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{g_0} & H_0 \\ \downarrow g_1 & & \downarrow h_0 \\ H_1 & \xrightarrow{h_1} & K \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{g_0} & H_0 \\ \downarrow g_1 & & \downarrow h'_0 \\ H_1 & \xrightarrow{h'_1} & K' \end{array}$$
$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{g_0} & H_0 \\
 \downarrow g_1 & & \downarrow h_0 \\
 H_1 & \xrightarrow{h_1} & K \\
 & \searrow h'_1 & \nearrow h'_0 \\
 & & K'
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{dotted arrow } k \text{ from } K \text{ to } K' \\
 \text{exclamation mark } ! \text{ below } k
 \end{array}$$

Zunächst bemerken wir, dass das obige Push-Out-Diagramm von g_0 und g_1 bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

8.4 Proposition (Eindeutigkeit des Push-Outs). *Sind*

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{g_0} & H_0 \\ \downarrow g_1 & & \downarrow h_0 \\ H_1 & \xrightarrow{h_1} & K \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{g_0} & H_0 \\ \downarrow g_1 & & \downarrow h'_0 \\ H_1 & \xrightarrow{h'_1} & K' \end{array}$$

Push-Out-Diagramme, so existiert ein Isomorphismus $k: K \rightarrow K'$, so dass

$$\begin{array}{ccc} & H_0 & \\ & \downarrow h_0 & \\ H_1 & \xrightarrow{h_1} & K \\ & \searrow h'_1 & \nearrow h'_0 \\ & & K' \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow k \\ \cong \\ \searrow \end{array}$$

kommutiert. □

Beweis. Die Existenz eines Homomorphismus k , so dass das Diagramm kommutiert folgt aus der Push-Out-Eigenschaft des ersten Diagramms. Ebenso folgt aus der Eigenschaft des zweiten Diagramms die Existenz eines Homomorphismus $k': K' \rightarrow K$, so dass das Diagramm mit k' an Stelle von k kommutiert. Es ist nun nur noch zu zeigen, dass k und k' invers zu einander sind. Dazu bemerken wir, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{g} & H_0 \\ \downarrow h & & \downarrow i \\ H_1 & \xrightarrow{j} & K \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow i \\ \nearrow k' \circ k \\ \searrow j \end{array}$$

kommutiert. Da das Diagramm auch mit id_K an Stelle von $k' \circ k$ kommutiert, folgt aus der Eindeutigkeitsforderung in der Definition eines Push-Out-Diagramms, dass $k' \circ k = \text{id}_K$. Ebenso folgt $k \circ k' = \text{id}_{K'}$. Damit ist k ein Isomorphismus. □

8.5 Proposition. *In Satz 8.1 ist (8.1) ein Push-Out-Diagramm.*

Beweis. In der Situation von Satz 8.1 sei das kommutative Diagramm (8.2) gegeben. Wir wollen zeigen, dass es einen eindeutigen Homomorphismus $h: \pi_1(X, x_0) \rightarrow K$ mit $h \circ i_{\#}^k = \phi_k$ gibt. Der Homomorphismus h erfüllt notwendigerweise

$$h(i_{\#}^{s_0}(\alpha_0) i_{\#}^{s_1}(\alpha_1) \cdots i_{\#}^{s_{n-1}}(\alpha_{n-1})) = \phi_{s_0}(\alpha_0) \phi_{s_1}(\alpha_1) \cdots \phi_{s_{n-1}}(\alpha_{n-1}). \quad (8.4)$$

Aufgrund von (i) ist jedes Element aus $\pi_1(X)$ von der Form $i_{\#}^{s_0}(\alpha_0) \cdots i_{\#}^{s_{n-1}}(\alpha_{n-1})$, so dass dies schon die Eindeutigkeit zeigt. Wir nutzen nun (8.4) zur Definition von h . Es ist die Wohldefiniert zu zeigen, h wird dann sicher ein Homomorphismus sein. Wir müssen also für

$$i_{\#}^{s_0}(\alpha_0) i_{\#}^{s_1}(\alpha_1) \cdots i_{\#}^{s_{n-1}}(\alpha_{n-1}) = i_{\#}^{s'_0}(\alpha'_0) i_{\#}^{s'_1}(\alpha'_1) \cdots i_{\#}^{s'_{n'-1}}(\alpha'_{n'-1})$$

zeigen, dass

$$\phi_{s_0}(\alpha_0) \phi_{s_1}(\alpha_1) \cdots \phi_{s_{n-1}}(\alpha_{n-1}) = \phi_{s'_0}(\alpha'_0) \phi_{s'_1}(\alpha'_1) \cdots \phi_{s'_{n'-1}}(\alpha'_{n'-1}).$$

Dies folgt aber, indem wir (ii) auf

$$i_{\#}^{s_0}(\alpha_0) i_{\#}^{s_1}(\alpha_1) \cdots i_{\#}^{s_{n-1}}(\alpha_{n-1}) i_{\#}^{s'_{n'-1}}(\alpha'_{n'-1}) \cdots i_{\#}^{s'_1}(\alpha'_1) i_{\#}^{s'_0}(\alpha'_0) = e$$

anwenden. \square

8.6 Beispiel. Wir betrachten wieder $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ und die Einbettungen $i^0, i^1: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$. Da die Bilder der Einbettungen nicht offen sind, können wir Satz 8.1 nicht direkt anwenden. Wählt man aber beispielsweise als offene Menge $U_k \subset \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ das Komplement eines Punktes, der nicht in i^k liegt, so ist die Inklusionsabbildung $im i^k \rightarrow U_k$ eine Homotopieäquivalenz und $U_0 \cap U_1$ zusammenziehbar. Man hat also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & U_0 \xleftarrow{\simeq} \mathbb{S}^1 & \\ & \downarrow j^0 \quad \swarrow i^0 & \\ U_1 & \xrightarrow{j^1} \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 & \\ \uparrow \simeq & \nearrow i^1 & \\ \mathbb{S}^1 & & \end{array}$$

mit den Inklusionsabbildungen $j^k: U_k \rightarrow \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$. Dies liefert, da alle Abbildungen Basispunkte erhalten und $U_0 \cap U_1$ einfach zusammenhängend ist, ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \{e\} & & & & \\ & \searrow \simeq & & \searrow \simeq & \\ & \pi_1(U_0 \cap U_1, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(U_0, x_0) & \xleftarrow{\simeq} \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \\ & \downarrow & & \downarrow j^0_{\#} & \swarrow i^0_{\#} \\ & \pi_1(U_1, x_0) & \xrightarrow{j^1_{\#}} & \pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, x_0) & \\ & \uparrow \simeq & \nearrow i^1_{\#} & & \\ & \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) & & & \end{array}$$

Wir können daher das Diagramm (8.1) in Satz 8.1 durch

$$\begin{array}{ccc} \{e\} & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \\ \downarrow & & \downarrow i_{\#}^0 \\ \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) & \xrightarrow{i_{\#}^1} & \pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, x_0) \end{array}$$

ersetzen. Teil (i) des Satzes sagt also aus, dass $\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$ von $\text{im } i_{\#}^0 \cup \text{im } i_{\#}^1$ erzeugt ist. Ist nun g ein Erzeuger von $\pi_1(\mathbb{S}^1)$, so ist $\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$ von $\alpha_0 := i_{\#}^0(g)$ und $\beta_0 := i_{\#}^1(g)$ erzeugt.

Teil (ii) ist hier besonders leicht zu verstehen, da das Diagramm (8.1), wenn $j_{\#}^0$ und $j_{\#}^1$ trivial sind, für beliebige ϕ_0 und ϕ_1 kommutiert. Benutzt man weiter, dass ein Homomorphismus $\phi_j: \pi_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow K$ durch beliebige Angabe von $\phi_j(g) = a_j \in K$ festgelegt wird, so wird die Aussage von Teil (ii) dazu, dass

$$\alpha_{s_0}^{k_0} \alpha_{s_1}^{k_1} \cdots \alpha_{s_{n-1}}^{k_{n-1}} = e$$

nur dann, wenn

$$a_{s_0}^{k_0} a_{s_1}^{k_1} \cdots a_{s_{n-1}}^{k_{n-1}} = e$$

für alle Gruppen K und $a_0, a_1 \in K$. In Proposition 7.16 haben wir bereits gesehen, dass dies für $s_j \neq s_{j+1}$, $k_j \neq 0$, $n > 0$ in der Tat nie der Fall ist, und auch genauere Betrachtung des Beweises von Satz 8.1 wird dies ergeben.

8.7 Beispiel (Kleinsche Flasche). U_0 Komplement des Mittelpunkts. U_1 Inneres. X Rand mit Identifizierungen.

TO DO

Beweis von Satz 8.1. Zu (i). Sei $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ repräsentiert durch den geschlossenen Weg w . Da $\{U_0, U_1\}$ eine offene Überdeckung von X ist, liefert uns das Lebesgue-Lemma ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle k mit $0 \leq k < N$ ein r_k mit $w[[k/N, (k+1)/N]] \subset U_{r_k}$ existiert. Es ist bereits $w(0) = w(1) = x_0$, und wir zeigen nun, dass wir es immer so einrichten können, dass $w(k/N) = x_0$ für alle k mit $0 \leq k \leq N$. Dazu wählen wir zu jedem k mit $0 < k < N$ einen Weg v_k von $w(k/N)$ nach x_0 . Da $U_0 \cap U_1$ wegzusammenhängend ist, können wir es so einrichten, dass v_k in $U_{r_{k-1}} \cap U_{r_k}$ verläuft. Zur Vereinfachung der Notation setzen wir außerdem $v_0 = v_N = c_{x_0}$. Nun ersetzen wir w durch einen Weg w' , indem wir für $0 \leq k < N$ am Anfang des Stücks $w|_{[k/N, (k+1)/N]}$ den Weg v_k^- und am Ende den Weg v_{k+1} einsetzen. Wir machen das an dieser Stelle exakt und werden uns später mit solchen verbalen Beschreibungen begnügen:

$$w': I \rightarrow X$$

$$s \mapsto \begin{cases} v_k^- \left(3N \left(s - \frac{k}{N} \right) \right), & \frac{k}{N} \leq s \leq \frac{3k+1}{3N}, \\ w \left(\frac{k}{N} + 3 \left(s - \frac{3k+1}{3N} \right) \right), & \frac{3k+1}{3N} \leq s \leq \frac{3k+2}{3N}, \\ v_{k+1} \left(3N \left(s - \frac{3k+2}{3N} \right) \right), & \frac{3k+2}{3N} \leq s \leq \frac{k+1}{N}. \end{cases}$$

Da wir an den Enden konstante Wege und an den Stellen k/N für $0 < k < N$ die Wege $v_k * v_k^-$, die relativ zu $\{0, 1\}$ homotop zu konstanten Wegen sind, eingefügt haben, ist $[w'] = [w] = \gamma$. Aufgrund der Wahl der v_k ist auch $w'[[k/N, (k+1)/N]] \subset U_{r_k}$. Da nun $w'(k/N) = x_0$ für alle k , repräsentiert $w|_{[k/N, (k+1)/N]}$ ein $\alpha_k \in \pi_1(U_{r_k})$, $0 \leq k < N$. Damit ist $\gamma = i_{\#}^{r_0}(\alpha_0) i_{\#}^{r_1}(\alpha_1) \cdots i_{\#}^{r_{N-1}}(\alpha_{N-1})$.

Zu (ii). Wir haben zu zeigen, dass aus $i_{\#}^{r_0}(\alpha_0) \cdots i_{\#}^{r_{n-1}}(\alpha_{n-1}) = e$ folgt, dass $\phi_{r_0}(\alpha_0) \cdots \phi_{r_{n-1}}(\alpha_{n-1}) = e$. Der Beweis ähnelt dem ersten Teil, nur dass an Stelle von Schleifen Homotopien von Schleifen zu betrachten sind, was ihn leider technisch aufwendiger macht.

Sei also $n \in \mathbb{N}$ und für $0 \leq k < n$ sei $r_k \in \{0, 1\}$ und $\alpha_k \in \pi_1(U_{r_k}, x_0)$, so dass $\phi_{r_0}(\alpha_0) \cdots \phi_{r_{n-1}}(\alpha_{n-1}) = e$. Es sei $H: I \times I \rightarrow X$ eine Homotopie, die diese Gleichheit zeigt, und zwar sei $H(0, \bullet) = H(1, \bullet) = H(\bullet, 1) = c_{x_0}$ und $H(\bullet, 0)|_{[k/n, (k+1)/n]}$ repräsentiere α_k . Nun wenden wir wieder das Lebesgue-Lemma an, um ein $m \in \mathbb{N}$ zu erhalten, so dass mit $N := mn$ für alle k, l mit $0 \leq k, l < N$ ein $s_{k,l}$ mit $w[[k/N, (k+1)/N] \times [l/N, (l+1)/N]] \subset U_{s_{k,l}}$ existiert. Wir können diese $s_{k,l}$ so wählen, dass $s_{k,0} = r_{[k/m]}$ für alle k .

Zunächst zeigen wir, dass wir es so einrichten können, dass H auf allen Gitterpunkten den Wert x_0 annimmt, dass also $H(k/N, l/N) = x_0$ für alle $0 \leq k, l \leq N$. Dazu definieren wir für alle $0 < k < N$, $0 \leq l < N$ einen Weg $v_{k,l}: I \rightarrow U_{s_{k-1,l}} \cap U_{s_{k,l}}$ durch $v_{k,l}(t) := H(k/N, (l+t)/N)$ und einen Weg $w_{k,l}$ von $H(k/N, l/N)$ nach x_0 , der in U_0 verläuft, falls $H(k/N, l/N) \in U_0$, in U_1 , falls $H(k/N, l/N) \in U_1$ und konstant ist, falls $H(k/N, l/N) = x_0$. Außerdem setzen wir $w_{k,N} = c_{x_0}$ für $0 < k < N$. Dann wählen wir für alle $0 < k < N$, $0 \leq l < N$ eine Abbildung $F_{k,l}: I \times I \rightarrow U_{s_{k-1,l}} \cap U_{s_{k,l}}$ mit $F_{k,l}(0, \bullet) = F_{k,l}(1, \bullet) = v_{k,l}$ und $F_{k,l}(\bullet, 0) = w_{k,l} * w_{k,l}^-$, $F_{k,l}(\bullet, 1) = w_{k+1,l} * w_{k+1,l}^-$. Dies ist möglich, da die auf dem Rand vorgegebene Abbildung homotop zu einer konstanten Abbildung ist. Nun können wir H , indem wir an der Stelle $\{k/N\} \times [l/N, (l+1)/N]$ die Abbildung $F_{k,l}$ einpassen, so abändern, dass die oben bemerkten Eigenschaften von H erhalten bleiben und H zusätzlich auf allen Gitterpunkten den Wert x_0 annimmt. Wir werden diese geänderte Abbildung weiterhin H nennen.

Die alten w und v vergessend definieren wir nun Wege

$$\begin{aligned} w_{k,l}: I &\rightarrow X, & 0 \leq k < N, 0 \leq l \leq N, \\ t &\mapsto H((k+t)/N, l/N), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} v_{k,l}: I &\rightarrow X, & 0 \leq k \leq N, 0 \leq l < N, \\ t &\mapsto H(k/N, (l+t)/N). \end{aligned}$$

Für $0 \leq k, l < N$ gibt uns das Klassen $\beta_{k,l}, \gamma_{k,l}, \delta_{k,l}, \epsilon_{k,l} \in \pi_1(U_{s_{k,l}})$ durch

$$\beta_{k,l} := [w_{k,l}], \quad \gamma_{k,l} := [w_{k,l+1}], \quad \delta_{k,l} := [v_{k,l}], \quad \epsilon_{k,l} := [v_{k+1,l}].$$

Nun ist $\alpha_k = \beta_{mk,0} \beta_{mk+1,0} \cdots \beta_{m(k+1)-1,0}$ für $0 \leq k < n$ und $\gamma_{k,N-1} = e$ für alle $0 \leq k < N$. Es genügt daher zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} \phi_{s_{0,0}}(\beta_{0,0}) \phi_{s_{1,0}}(\beta_{1,0}) \cdots \phi_{s_{N-1,0}}(\beta_{N-1,0}) &= \\ &= \phi_{s_{0,N-1}}(\gamma_{0,N-1}) \phi_{s_{1,N-1}}(\gamma_{1,N-1}) \cdots \phi_{s_{N-1,N-1}}(\gamma_{N-1,N-1}). \end{aligned}$$

Wir tun dies in zwei Schritten.

Für alle $0 \leq k < N$ und $0 \leq l < N-1$ ist $\phi_{s_{k,l}}(\gamma_{k,l}) = \phi_{s_{k,l+1}}(\beta_{k,l+1})$: Nach Definition ist $\gamma_{k,l} = [w_{k,l+1}]$, $\beta_{k,l+1} = [w_{k,l+1}]$. Ist $s_{k,l} = s_{k,l+1}$, so ist $\gamma_{k,l} = \beta_{k,l+1}$ und alles klar. Ist $s_{k,l} \neq s_{k,l+1}$, so leben $\gamma_{k,l}$ und $\beta_{k,l+1}$ in verschiedenen Gruppen. In diesem Fall verläuft aber $w_{k,l+1}$ ganz in $U_0 \cap U_1$, so dass wir ein $\rho \in \pi_1(U_0 \cap U_1)$ durch $\rho := [w_{k,l+1}]$ definieren können. Es ist dann $\phi_{s_{k,l}}(\gamma_{k,l}) = (\phi_{s_{k,l}} \circ j_{\#}^{s_{k,l}})(\rho) = (\phi_{s_{k,l+1}} \circ j_{\#}^{s_{k,l+1}})(\rho) = \phi_{s_{k,l+1}}(\beta_{k,l+1})$.

Für alle $0 \leq l < N$ ist

$$\phi_{s_{0,l}}(\beta_{0,l}) \cdots \phi_{s_{N-1,l}}(\beta_{N-1,l}) = \phi_{s_{0,l}}(\gamma_{0,l}) \cdots \phi_{s_{N-1,l}}(\gamma_{N-1,l}) :$$

Zunächst zeigt $H|_{[k/N, (k+1)/N] \times [l/N, (l+1)/N]}$ für $0 \leq k < N$, dass $\beta_{k,l} = \delta_{k,l} \gamma_{k,l} \epsilon_{k,l}^{-1}$. Es ist also

$$\begin{aligned} \phi_{s_{0,l}}(\beta_{0,l}) \cdots \phi_{s_{N-1,l}}(\beta_{N-1,l}) &= \\ &= \phi_{s_{0,l}}(\delta_{0,l} \gamma_{0,l} \epsilon_{0,l}^{-1}) \cdots \phi_{s_{N-1,l}}(\delta_{N-1,l} \gamma_{N-1,l} \epsilon_{N-1,l}^{-1}) = \\ &= \phi_{s_{0,l}}(e) \phi_{s_{0,l}}(\gamma_{0,l}) \phi_{s_{0,l}}(\epsilon_{0,l})^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot \phi_{s_{1,l}}(\delta_{1,l}) \phi_{s_{1,l}}(\gamma_{1,l}) \cdots \\ &\quad \cdots \phi_{s_{N-2,l}}(\gamma_{N-2,l}) \phi_{s_{N-2,l}}(\epsilon_{N-2,l})^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot \phi_{s_{N-1,l}}(\delta_{N-1,l}) \phi_{s_{N-1,l}}(\gamma_{N-1,l}) \phi_{s_{N-1,l}}(e). \end{aligned}$$

Es genügt also, für $0 \leq k < N-1$ zu zeigen, dass $\phi_{s_{k,l}}(\epsilon_{k,l}) = \phi_{s_{k+1,l}}(\delta_{k+1,l})$. Nun werden $\epsilon_{k,l}$ und $\delta_{k+1,l}$ beide von $v_{k+1,l}$ repräsentiert, so dass sie für $s_{k,l} = s_{k+1,l}$ gleich sind und es ansonsten ein $\rho \in \pi_1(U_0 \cap U_1)$ mit $\epsilon_{k,l} = j_{\#}^{s_{k,l}}(\rho)$, $\delta_{k+1,l} = j_{\#}^{s_{k+1,l}}(\rho)$ gibt, so dass dies wieder aus der Kommutativität des Diagramms folgt. \square

Abschnitt 9

Das Anheften von Zellen

Verkleben

Summen

9.1 Notation. Sei J eine beliebige Menge und M_j eine Menge für alle $j \in J$. Das *Koprodukt* der M_j ist

$$\coprod_{j \in J} M_j := \bigcup_{j \in J} (M_j \times \{j\}).$$

Die *kanonischen Inklusionen* sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} i_k: M_k &\rightarrow \coprod_{j \in J} M_j, & k \in J, \\ x &\mapsto (x, k). \end{aligned}$$

Die Idee hinter der Konstruktion $M_j \times \{j\}$ ist nur, dass so ganz sicher für $j \neq j'$ die Mengen $M_j \times \{j\}$ und $M_{j'} \times \{j'\}$ disjunkt sind. Sind M_j und $M_{j'}$ für alle $j, j' \in J$ mit $j \neq j'$ ohnehin disjunkt, können wir auch einfach $\coprod_{j \in J} M_j = \bigcup_{j \in J} M_j$ und $i_k(x) = x$ setzen.

Ist jedes M_j mit einer Topologie \mathcal{T}_j versehen, so definiert

$$\left\{ O \subset \coprod_{j \in J} M_j : i_j^{-1}[O] \in \mathcal{T}_j \text{ für alle } j \in J \right\}$$

eine Topologie auf $\coprod_{j \in J} M_j$, die größte Topologie, bezüglich der alle i_k stetig werden. Wir verzichten hier darauf, diese Eigenschaften nachzurechnen.

9.2 Definition. Seien J eine beliebige Menge und X_j topologische Räume für $j \in J$. Die *topologische Summe* $\coprod_{j \in J} X_j$ ist das Koprodukt der zugrunde liegenden Mengen versehen mit der soeben beschriebenen Topologie.

9.3 Notation. Wir schreiben auch $X_0 + \cdots + X_{n-1}$ für $\coprod_{j \in \{0, \dots, n-1\}} X_j$.

Verkleben

Wir betrachten nun einen speziellen Fall von Quotientenräumen. Dazu betrachten wir Räume X, Y , eine Teilmenge $A \subset X$ und eine stetige Abbildung $f: A \rightarrow Y$. Wir betrachten nun $Y + X$ mit den kanonischen Inklusionen $i_0: Y \rightarrow Y + X$ und $i_1: X \rightarrow Y + X$ und auf $Y + X$ die Äquivalenzrelation \sim_f , die von $i_0(f(x)) \sim_f i_1(x)$, $x \in A$, erzeugt wird, also

$$\begin{aligned} i_0(y) \sim_f i_0(y') &\iff y = y' \\ i_0(y) \sim_f i_1(x) &\iff (x \in A) \wedge (f(x) = y), \\ i_1(x) \sim_f i_0(y) &\iff (x \in A) \wedge (f(x) = y), \\ i_1(x) \sim_f i_1(x') &\iff (x = x') \vee ((x, x' \in A) \wedge (f(x) = f(x'))). \end{aligned}$$

9.4 Notation. In dieser Situation bezeichnen wir den Quotientenraum $(Y + X)/\sim_f$ mit $Y \cup_f X$ und sagen, er entstehe, indem man X mittels f an Y anlebe. Bezeichnet $q: Y + X \rightarrow Y \cup_f X$ die Quotientenabbildung, so nennen wir

$$j: Y \xrightarrow{i_0} Y + X \xrightarrow{q} Y \cup_f X$$

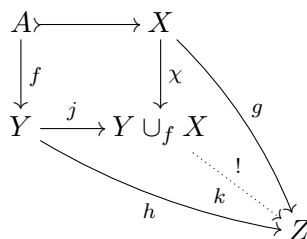
die *kanonische Inklusion* und

$$\chi: X \xrightarrow{i_1} Y + X \xrightarrow{q} Y \cup_f X$$

die *charakteristische Abbildung*.

Wir bemerken, dass $M \subset Y \cup_f X$ genau dann offen (abgeschlossen) ist, wenn $j^{-1}[O]$ und $\chi^{-1}[O]$ offen (abgeschlossen) sind. Daraus ergibt sich sofort die folgende Charakterisierung.

9.5 Proposition. Seien X, Y Räume, $A \subset X$ und $f: A \rightarrow Y$ stetig. Ist Z ein weiterer Raum und sind $g: X \rightarrow Z$, $h: Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen, so dass $g|_A = h \circ f$, so existiert genau eine stetige Abbildung $k: Y \cup_f X \rightarrow Z$, so dass $k \circ j = h$ und $k \circ \chi = g$.



□

Auch einfach, aber nicht völlig automatisch, ergibt sich folgendes.

9.6 Proposition. Seien X, Y Räume, $A \subset X$ und $f: A \rightarrow Y$ stetig. Dann ist die kanonische Inklusion $j: Y \rightarrow Y \cup_f X$ eine Einbettung.

Beweis. Die Stetigkeit von j ist klar. Die Injektivität folgt daraus, dass $i_0(y) \sim_f i_0(y')$ nur für $y = y'$. Sei nun $V \subset Y$ offen. Es ist zu zeigen, dass es ein offenes $U \subset Y \cup_f X$ gibt, so dass $V = j^{-1}[U]$ ist.

Wir betrachten zunächst $j[V]$. Es ist $\chi^{-1}[j[V]] = f^{-1}[V]$ eine offene Teilmenge von A , also existiert eine offene Menge $U' \subset X$ mit $U' \cap A = f^{-1}[V]$. Wir setzen $U := j[V] \cup \chi[U']$. Es ist $j^{-1}[U] = j^{-1}[j[V]] \cup j^{-1}[\chi[U']] = V \cup f[U' \cap A] = V$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\chi^{-1}[U]$ offen ist. Es ist $\chi^{-1}[j[V]] = f^{-1}[V]$ und $\chi^{-1}[\chi[U']] = U' \cup f^{-1}[f[U' \cap A]] = U' \cup f^{-1}[f[f^{-1}[V]]] = U' \cup f^{-1}[V]$ und da $f^{-1}[V] \subset U'$ ist $\chi^{-1}[U] = U'$. \square

9.7 Proposition. *Seien X, Y Räume, $A \subset X$ und $f: A \rightarrow Y$ stetig. Ist $M \subset X \setminus A$ und M offen bzw. abgeschlossen in X , so ist $\chi[M]$ offen bzw. abgeschlossen.*

Ist A in X offen oder abgeschlossen, so ist $\chi|_{X \setminus A}$ eine Einbettung.

Beweis. Ist $M \subset X \setminus A$, so ist $j^{-1}[\chi[M]] = \emptyset$ und $\chi^{-1}[\chi[M]] = M$, also ist $\chi[M]$ genau dann offen beziehungsweise abgeschlossen, wenn M es ist.

Ist A abgeschlossen, so ist M genau dann offen in $X \setminus A$, wenn M offen in X ist. Da die Abbildung $\chi|_{X \setminus A}$ außerdem injektiv ist, ist sie in diesem Falle eine Einbettung. Ebenso ist, falls A offen ist, M genau dann abgeschlossen in $X \setminus A$, wenn M abgeschlossen in X ist. \square

Das Anheften einer Zelle

Sei X ein Raum, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. Dann können wir den Raum

$$Y := X \cup_f \mathbb{D}^n$$

betrachten. Wir sagen in dieser Situation, Y gehe aus X durch Ankleben einer n -Zelle hervor. Wir wollen nun mit Hilfe des Satzes von Seifert und van Kampen untersuchen, wie sich die Fundamentalgruppe von Y aus der von X ergibt.

Mit der Notation aus 9.4 haben wir eine Einbettung $j: X \rightarrow Y$ und die charakteristische Abbildung $\chi: \mathbb{D}^n \rightarrow Y$.

Um den Satz von Seifert und van Kampen anwenden zu können, setzen wir nun

$$\begin{aligned} U_0 &:= Y \setminus \{\chi(0)\}, \\ U_1 &:= \chi[\mathbb{D}^n \setminus \mathbb{S}^{n-1}]. \end{aligned}$$

Wir können U_0 mit $X \cup_f (\mathbb{D}^n \setminus \{0\})$ identifizieren. Wenn wir annehmen, dass X wegzusammenhängend ist, erfüllen U_0 und U_1 für $n \geq 2$ die Voraussetzungen des Satzes von Seifert und van Kampen. Das einzige, das hierbei vielleicht nicht sofort ersichtlich ist, ist, dass U_0 wegzusammenhängend ist. Das folgt aber daraus, dass $U_0 \simeq X$:

9.8 Proposition. Sei $n \geq 1$ und $r: U_0 \rightarrow X$ die Abbildung, die durch die Kommutativität von

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{S}^{n-1} & \xrightarrow{\text{Inkl.}} & \mathbb{D}^n \setminus \{0\} \\
 \downarrow f & & \downarrow \chi \\
 X & \xrightarrow{j} & U_0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \searrow x \mapsto f(x/\|x\|) \\
 \nearrow r \\
 \text{id} \searrow \\
 X
 \end{array}$$

gegeben ist (siehe Proposition 9.5). Dann ist $r \circ j = \text{id}_X$ und $j \circ r \simeq \text{id}_{U_0}$, wobei die Homotopie $H: U_0 \times I \rightarrow U_0$ durch $H(\bullet, t) = h_t$ und die Kommutativität von

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{S}^{n-1} & \xrightarrow{\text{Inkl.}} & \mathbb{D}^n \setminus \{0\} & & \\
 \downarrow f & & \downarrow \chi & \searrow x \mapsto \left(t + \frac{1-t}{\|x\|}\right)x & \\
 X & \xrightarrow{j} & U_0 & & \mathbb{D}^n \setminus \{0\} \\
 \searrow \text{id} & & \searrow h_t & & \downarrow \chi \\
 & & X & \xrightarrow{j} & U_0
 \end{array}$$

gegeben ist.

Beweis. Das einzige Problem ist die Stetigkeit von H . Es bezeichne $q: X + (\mathbb{D}^n \setminus \{0\}) \rightarrow U_0$ die Quotientenabbildung. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 X \times I + (\mathbb{D}^n \setminus \{0\}) \times I & & \\
 \downarrow \cong & \searrow \tilde{H} & \\
 (X + (\mathbb{D}^n \setminus \{0\})) \times I & & \\
 \downarrow q \times \text{id}_I & & \\
 U_0 \times I & \xrightarrow{H} & U_0.
 \end{array}$$

Die Abbildung links oben sei die offensichtliche; dass sie ein Homöomorphismus ist, rechne man zur Übung nach. \tilde{H} sei durch die Kommutativität des Diagramms gegeben und ist stetig, denn die Restriktion auf $X \times I$ ist die Projektion auf X gefolgt von j , und die Restriktion auf $(\mathbb{D}^n \setminus \{0\}) \times I$ ist die Komposition

$$(\mathbb{D}^n \setminus \{0\}) \times I \xrightarrow{(x,t) \mapsto \left(t + \frac{1-t}{\|x\|}\right)x} (\mathbb{D}^n \setminus \{0\}) \times I \xrightarrow{\chi} U_0.$$

Die Stetigkeit von H folgt also daraus, dass $q \times \text{id}_I$ nach Lemma 1.27 eine Quotientenabbildung ist. \square

Der Effekt auf die Fundamentalgruppe

Wir nehmen nun an, dass $n \geq 2$, so dass $U_0 \cap U_1 \approx \mathbb{D}^n \setminus \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{0\} \simeq \mathbb{S}^{n-1}$ wegzusammenhängend ist. Da $U_1 \approx \mathbb{D}^n \setminus \mathbb{S}^{n-1}$ zusammenziehbar, also insbesondere einfach zusammenhängend, ist, haben wir es mit einem einfacheren Spezialfall des Satzes von Seifert und van Kampen zu tun, denn das Push-Out-Diagramm ist von der folgenden Form.

9.9 Lemma. *Ein Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{g} & H \\ \downarrow & & \downarrow h \\ \{e\} & \longrightarrow & K \end{array} \quad (9.1)$$

ist genau dann ein Push-Out-Diagramm, wenn h surjektiv ist und der Kern von h der kleinste Normalteiler ist, der das Bild von g enthält.

Beweis. Es sei $N \subset H$ der kleinste Normalteiler, der $\text{im } g$ enthält. Dann faktorisiert jeder Homomorphismus $\phi: H \rightarrow L$ mit $\text{im } g \subset \ker \phi$ eindeutig über H/N . Das heißt aber gerade, dass

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{g} & H \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{e\} & \longrightarrow & H/N \end{array} \quad (9.2)$$

ein Push-Out-Diagramm ist. Ist h surjektiv und $\ker h = N$, so existiert ein Isomorphismus $K \cong H/N$, so dass

$$\begin{array}{ccc} H & & \\ \downarrow & \searrow h & \\ H/N & \xrightarrow[\cong]{} & K \end{array} \quad (9.3)$$

kommutiert. Damit ist (9.1) auch ein Push-Out-Diagramm. Ist andererseits (9.1) ein Push-Out-Diagramm, so folgt aus Proposition 8.4 die Existenz eines Isomorphismus wie in (9.3), so dass h surjektiv ist und $\ker h = N$. \square

In unserem Fall ist also in der Sequenz von durch Inklusionen induzierten Homomorphismen

$$\pi_1(U_0 \cap U_1) \rightarrow \pi_1(U_0) \rightarrow \pi_1(Y)$$

der zweite Homomorphismus surjektiv und sein Kern der kleinste Normalteiler, der das Bild des ersten enthält. Wir können auch die ersten beiden

Gruppen identifizieren: Es ist $U_0 \cap U_1 \approx \mathbb{D}^n \setminus (\mathbb{S}^{n-1} \cup \{0\}) \simeq \mathbb{S}^{n-1}$ und wie bereits gezeigt $U_0 \simeq X$, also $\pi_1(U_0 \cap U_1) \cong \pi_1(\mathbb{S}^{n-1})$ und $\pi_1(U_0) \cong \pi_1(X)$. Um daraus wirklich $\pi_1(Y)$ bestimmen zu können, müssen wir aber auch die Homomorphismen besser beschreiben.

Dazu legen wir zunächst Basispunkte fest. Wir schreiben $1 = (1, 0, \dots, 0)$ für den Basispunkt von \mathbb{S}^{n-1} und setzen $x_0 := f(1) \in X$, $y_0 := j(x_0) \in Y$. Außerdem wählen wir ein $y'_0 \in U_0 \cap U_1$ mit $r(y_0) = x_0$, wobei wir hier die Bezeichnungen aus Proposition 9.8 beibehalten. Außerdem definieren wir eine Abbildung $r': U_0 \cap U_1 \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ durch Kommutativität von

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}^n \setminus (\mathbb{S}^{n-1} \cup \{0\}) & \xrightarrow[\approx]{x \mapsto \chi(x)} & U_0 \cap U_1 \\ x \mapsto \frac{x}{\|x\|} \downarrow \simeq & \swarrow r' & \\ \mathbb{S}^{n-1} & & \end{array}$$

r' ist eine Homotopieäquivalenz und $r|_{U_0 \cap U_1} = f \circ r'$. Außerdem haben wir bereits festgestellt, dass H eine Homotopie zwischen der Komposition $U_0 \xrightarrow{r} X \xrightarrow{j} Y$ und der Inklusion $U_0 \rightarrow Y$ ist. Wie in Proposition 4.19 sei p der Weg, den y'_0 während dieser Homotopie durchläuft; das ist der ‚direkte‘ Weg von y_0 nach y'_0 . All dies liefert uns ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(\mathbb{S}^{n-1}, 1) & \xrightarrow{f_\#} & \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{j_\#} & \pi_1(Y, y_0) \\ \cong \uparrow r'_\# & & \cong \uparrow r_\# & & \cong \uparrow h_p \\ \pi_1(U_0 \cap U_1, y'_0) & \longrightarrow & \pi_1(U_0, y'_0) & \longrightarrow & \pi_1(Y, y'_0), \end{array}$$

wobei alle nicht beschrifteten Pfeile von Inklusionen induzierte Abbildungen bezeichnen. Aus dem bereits oben über die untere Reihe gezeigten, der Kommutativität des Diagramms und der Tatsache, dass die vertikalen Pfeile Isomorphismen bezeichnen, erhalten wir nun:

9.10 Proposition. *Sei X ein Raum, $n \geq 2$, $f: (\mathbb{S}^{n-1}, 1) \rightarrow (X, x_0)$ eine stetige Abbildung, $Y := X \cup_f \mathbb{D}^n$ und $j: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ die kanonische Einbettung. Dann ist $j_\#$ ein Epimorphismus, dessen Kern der kleinste Normalteiler ist, der das Bild von $f_\#$ enthält.* \square

Wir benutzen nun noch, dass wir $\pi_1(\mathbb{S}^{n-1})$ kennen.

9.11 Proposition. *Sei X ein Raum, $n \geq 3$, $f: (\mathbb{S}^{n-1}, 1) \rightarrow (X, x_0)$ eine stetige Abbildung, $Y := X \cup_f \mathbb{D}^n$ und $j: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ die kanonische Einbettung. Dann ist $j_\#$ ein Isomorphismus.* \square

9.12 Proposition. *Sei X ein Raum, $f: (\mathbb{S}^1, 1) \rightarrow (X, x_0)$ eine stetige Abbildung, $Y := X \cup_f \mathbb{D}^2$ und $j: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ die kanonische Einbettung. Ist $g \in \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ ein Erzeuger, dann ist $j_\#$ ein Epimorphismus, dessen Kern der kleinste Normalteiler ist, der $f_\#(g)$ enthält.* \square

9.13 Bemerkung. Ist $h: I/\{0,1\} \rightarrow \mathbb{S}^1$ ein Homöomorphismus mit $h([\{0,1\}]) = 1$ und $q: I \rightarrow I/\{0,1\}$ die Quotientenabbildung, so ist $e := [h \circ q]$ ein Erzeuger von $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$. Ist nun (X, x_0) ein Raum mit Basispunkt und $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$, $\alpha = [w]$, so definiert, da $w(0) = w(1)$, $f \circ h \circ q = w$ eine Abbildung $f: (\mathbb{S}^1, 1) \rightarrow (X, x_0)$, und es ist $f_{\#}(e) = \alpha$. Durch Ankleben einer 2-Zelle an X mit Hilfe von f (also entlang w) kann man also das Element α gezielt ‚abschießen‘.

Beispiele

Kleinsche Flasche

Projektive Räume

Man kann die reell-projektiven Räume \mathbb{RP}^n durch sukzessives Ankleben von Zellen aus dem einpunktigen Raum erhalten kann. Wir wollen nun sehen, wie man daraus mit Hilfe des eben gezeigten die Fundamentalgruppen dieser Räume bestimmen kann.

Sei $p_n: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ die Projektion, die sich aus der Definition von \mathbb{RP}^n als Quotient von \mathbb{S}^n , bei dem gegenüberliegende Punkte identifiziert werden, ergibt. Dann ist $\mathbb{RP}^n \approx \mathbb{RP}^{n-1} \cup_{p_{n-1}} \mathbb{D}^n$. Man erhält diesen Homöomorphismus so, dass

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^{n-1} & \xrightarrow{\text{Inklusion}} & \mathbb{S}^n \\ \downarrow p_{n-1} & & \downarrow p_n \\ \mathbb{RP}^{n-1} & \xrightarrow{j^{n-1}} \mathbb{RP}^{n-1} \cup_{p_{n-1}} \mathbb{D}^n \xrightarrow{\approx} & \mathbb{RP}^n \end{array}$$

kommutiert, wobei j^{n-1} die kanonische Inklusion bezeichne. Wir nehmen an, dass die Homöomorphismen so gewählt sind und bestimmen Basispunkte $x_n \in \mathbb{RP}^n$ durch $x_{n+1} = j^n(x_n)$.

Es ist \mathbb{RP}^0 ein einpunktiger Raum, also $\pi_1(\mathbb{RP}^0, x_0) = \{e\}$. Es ist $\mathbb{RP}^1 \approx \mathbb{S}^1$, also $\pi_1(\mathbb{RP}^1, x_1) \cong \mathbb{Z}$. Einen Homöomorphismus zwischen \mathbb{RP}^1 und \mathbb{S}^1 kann man zum Beispiel so beschreiben: Die stetige Abbildung $\text{sqr}: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $\text{sqr}(z) := z^2$, ist surjektiv, also eine Quotientenabbildung, da \mathbb{S}^1 kompakt ist. Da nun $\text{sqr}(x) = \text{sqr}(y) \iff (x = y) \vee (x = -y)$ gibt es einen Homöomorphismus $h: \mathbb{RP}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, so dass $h \circ p_n = \text{sqr}$. Da wir uns in Proposition 4.6 bereits überlegt haben, dass die Abbildung sqr vom Grad 2 ist, kann man also Isomorphismen so wählen, dass

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) & \xrightarrow{(p_1)_{\#}} & \pi_1(\mathbb{RP}^1, x_1) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot 2} & \mathbb{Z} \end{array}$$

kommutiert. Aus Proposition 9.12 angewandt auf $\mathbb{RP}^1 \cup_{p_1} \mathbb{D}^2$ ergibt sich also $\pi_1(\mathbb{RP}^2, x_2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} =: \mathbb{Z}_2$. Mit Proposition 9.11 folgt nun induktiv $\pi_1(\mathbb{RP}^n, x_n) \cong \mathbb{Z}_2$ für alle $n \geq 2$. Zusammenfassend und etwas genauer:

9.14 Proposition. *Es ist*

$$\pi_1(\mathbb{RP}^n) \cong \begin{cases} \{e\}, & n = 0, \\ \mathbb{Z}, & n = 1, \\ \mathbb{Z}_2, & n \geq 2. \end{cases}$$

Die von der Inklusion induzierte Abbildung $\pi_1(\mathbb{RP}^n) \rightarrow \pi_1(\mathbb{RP}^{n+1})$ ist ein Epimorphismus für $n = 1$ und ein Isomorphismus für $n \geq 2$. \square

Abschnitt 10

Simplizialkomplexe

Wir haben in Abschnitt 9 gesehen, wie sich die Fundamentalgruppe eines Raumes ändert, wenn wir an ihn eine Zelle ankleben. Dies wäre nun der Zeitpunkt, *Zellkomplexe* einzuführen, dies sind Räume, die man erhält, indem man mit einem diskreten Raum startet (dessen Punkte nennen wir 0-Zellen), an diesen dann 1-Zellen anklebt, an den entstandenen Raum dann 2-Zellen und so weiter. Wir begnügen uns aber mit einem Spezialfall davon, den *Simplizialkomplexen*. Diese lassen sich vollständig (also einschließlich der Anhefteabbildungen der Zellen) kombinatorisch beschreiben. Wir werden dann Eigenschaften des Raumes, beispielsweise seine Fundamentalgruppe, ebenfalls kombinatorisch beschreiben wollen.

Abstrakte Simplizialkomplexe und Triangulierungen

10.1 Definition. Ein (*abstrakter*) *Simplizialkomplex* \mathcal{S} ist eine Menge endlicher Mengen, die abgeschlossen unter Teilmengenbildung ist, so dass also für alle $\sigma \in \mathcal{S}$ und $\tau \subset \sigma$ gilt, dass $\tau \in \mathcal{S}$. In dieser Situation nennen wir σ einen $(|\sigma| - 1)$ -Simplex von \mathcal{S} und τ eine Seite von σ .

Wir nennen $V(\mathcal{S}) := \bigcup \mathcal{S}$ die *Eckenmenge* des abstrakten Simplizialkomplexes \mathcal{S} . Es ist dann $\{\{v\} : v \in V(\mathcal{S})\}$ die Menge der 0-Simplizes von \mathcal{S} . Im allgemeinen werden wir nicht zwischen der Ecke v und dem 0-Simplex $\{v\}$ unterscheiden.

Sind \mathcal{S} und \mathcal{T} abstrakte Simplizialkomplexe und ist $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$, so nennen wir \mathcal{T} einen *Unterkomplex* von \mathcal{S} .

10.2 Bemerkung. Nach dieser Definition gibt es zwei verschiedene abstrakte Simplizialkomplexe mit leerer Eckenmenge, nämlich \emptyset und $\{\emptyset\}$. Diese Unterscheidung ist tatsächlich manchmal sinnvoll.

Man beachte auch, dass außer dem Simplizialkomplex \emptyset jeder abstrakte Simplizialkomplex das (-1) -Simplex \emptyset enthält, auch wenn wir es häufig nicht erwähnen.

10.3 Definition. Sei $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq -1$. Der *Standard- n -Simplex* ist der Raum

$$\Delta^n := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i \geq 0 \text{ für alle } i, \sum_i x_i = 1 \right\}.$$

Allgemeiner setzen wir für eine endliche Menge M

$$\Delta^M := \left\{ x \in \mathbb{R}^M : x_i \geq 0 \text{ für alle } i, \sum_i x_i = 1 \right\}$$

und weiterhin

$$\mathring{\Delta}^M := \left\{ x \in \mathbb{R}^M : x_i > 0 \text{ für alle } i, \sum_i x_i = 1 \right\}, \quad \partial\Delta^M := \Delta^M \setminus \mathring{\Delta}^M.$$

Man beachte, dass letzteres Inneres und Rand in $\{x \in \mathbb{R}^M : \sum_i x_i = 1\}$ sind.

10.4 Bemerkung. Offenbar ist $\Delta^M \approx \Delta^{|M|-1}$, und wir werden oft Δ^n mit $\Delta^{\{0,1,\dots,n\}}$ identifizieren. Durch $n \neq n+1$ entsteht hoffentlich keine Verwirrung, die Notation ist in dieser Hinsicht nicht optimal.

10.5 Definition. Es sei \mathcal{S} ein abstrakter Simplicialkomplex. Für $\tau \subset \sigma \in \mathcal{S}$ definieren wir

$$i_\tau^\sigma : \Delta^\tau \rightarrow \Delta^\sigma$$

$$i_\tau^\sigma(x)_k := \begin{cases} x_k, & k \in \tau, \\ 0, & k \notin \tau. \end{cases}$$

Nun definieren wir

$$|\mathcal{S}| := \coprod_{\sigma \in \mathcal{S}} \Delta^\sigma / \sim$$

mit $x \sim x'$ für $x \in \Delta^\sigma$, $x' \in \Delta^{\sigma'}$ genau dann, wenn ein $y \in \Delta^{\sigma \cap \sigma'}$ mit $i_{\sigma \cap \sigma'}^\sigma(y) = x$ und $i_{\sigma \cap \sigma'}^{\sigma'}(y) = x'$ existiert. Wir nennen den Raum $|\mathcal{S}|$ die *Realisierung von \mathcal{S}* . Für $\sigma \in \mathcal{S}$ definieren wir die Abbildung

$$\chi_\sigma : \Delta^\sigma \rightarrow |\mathcal{S}|$$

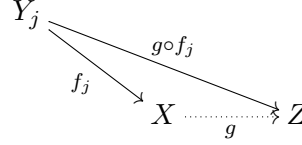
als Komposition der Inklusionsabbildung in die topologische Summe und der Quotientenabbildung, wir nennen sie die *charakteristische Abbildung von σ* .

Wir haben uns bisher um die folgende Definition herumgedrückt, liefern sie nun aber doch noch nach.

10.6 Definition und Proposition. Es seien J eine Menge und X sowie Y_j , $j \in J$ Räume und $f_j : Y_j \rightarrow X$ Funktionen. Wir sagen, X trage die Finaltopologie bezüglich der Funktionen f_j , wenn für alle $M \subset X$ gilt, dass M genau dann offen ist, wenn alle $f_j^{-1}[M]$ offen sind.

Dies ist genau dann der Fall, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind.

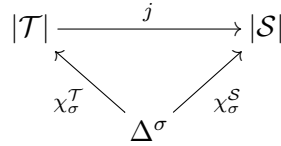
- (i) Die $f_j: Y_j \rightarrow X$ sind stetig.
- (ii) Für alle Räume Z und Funktionen $g: X \rightarrow Z$ gilt: Sind alle $g \circ f_j: Y_j \rightarrow Z$ stetig, so ist $g: X \rightarrow Z$ stetig.



Beispiele von Finaltopologien sind Quotientenräume, topologische Summen und Kombinationen daraus. Insbesondere haben wir:

10.7 Lemma. $|\mathcal{S}|$ trägt die Finaltopologie bezüglich der Abbildungen χ_σ , $\sigma \in \mathcal{S}$. \square

10.8 Proposition. Ist \mathcal{S} ein abstrakter Simplicialkomplex und $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ ein Unterkomplex, so gibt es eine eindeutige Abbildung, $j: |\mathcal{T}| \rightarrow |\mathcal{S}|$, so dass



für alle $\sigma \in \mathcal{T}$ kommutiert. Diese Abbildung ist eine Einbettung mit abgeschlossenem Bild.

Wir können also in dieser Situation $|\mathcal{T}|$ als Unterraum von $|\mathcal{S}|$ auffassen.

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt daraus, dass $|\mathcal{T}|$ Vereinigung der Bilder der $\chi_\sigma^\mathcal{T}$ ist. Betrachten wir nun $\sigma, \sigma' \in \mathcal{T}$ und $x \in \Delta^\sigma$, $x' \in \Delta^{\sigma'}$. Dann ist $\chi_\sigma^\mathcal{T}(x) = \chi_{\sigma'}^\mathcal{T}(x')$ genau dann, wenn $y \in \Delta^{\sigma \cap \sigma'}$ mit $x = i_{\sigma \cap \sigma'}^\sigma(y)$, $x' = i_{\sigma \cap \sigma'}^{\sigma'}(y)$ existiert, also genau dann, wenn $\chi_\sigma^\mathcal{S}(x) = \chi_{\sigma'}^\mathcal{S}(x')$. Damit ist j wohldefiniert und injektiv. Die Stetigkeit folgt sofort daraus, dass $|\mathcal{T}|$ die Finaltopologie bezüglich der $\chi_\sigma^\mathcal{T}$ trägt und die $\chi_\sigma^\mathcal{S}$ stetig sind.

Sei nun $A \subset |\mathcal{T}|$ abgeschlossen und $\sigma \in \mathcal{S}$. Dann ist

$$(\chi_\sigma^\mathcal{S})^{-1}[j[A]] = \bigcup_{\tau: \sigma \supset \tau \in \mathcal{T}} i_\tau^\sigma[(\chi_\tau^\mathcal{T})^{-1}[A]]$$

endliche Vereinigung kompakter Mengen und damit abgeschlossen. Also ist $j[A]$ abgeschlossen in $|\mathcal{S}|$. Damit ist j eine Einbettung mit abgeschlossenem Bild. \square

10.9 Proposition. Es sei \mathcal{S} ein abstrakter Simplicialkomplex, $n \geq 0$ und $f_0: V(\mathcal{S}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion. Dann definiert

$$f(\chi_\sigma(\lambda)) = \sum_{v \in \sigma} \lambda_v f_0(v) \quad \text{für alle } \sigma \in \mathcal{S} \quad (10.1)$$

eindeutig eine stetige Funktion $f: |\mathcal{S}| \rightarrow \mathbb{R}^n$, und es gilt:

(i) Ist für alle $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}$ das System $(f_0(v))_{v \in \sigma \cup \sigma'}$ affin unabhängig, so ist f injektiv.

(ii) Ist f injektiv und \mathcal{S} endlich, so ist f eine Einbettung.

Wir nennen f die affine Fortsetzung von f_0 .

Beweis. Die Funktion ist wohldefiniert, da für $\tau \subset \sigma$ und $\lambda \in \Delta^\tau$

$$\sum_{v \in \sigma} (i_\tau^\sigma(\lambda))_v f_0(v) = \sum_{v \in \tau} \lambda_v f_0(v) + \sum_{v \in \sigma \setminus \tau} 0 \cdot f_0(v) = \sum_{v \in \tau} \lambda_v f_0(v)$$

gilt. Da $|\mathcal{S}|$ die Finaltopologie bezüglich der Abbildungen χ_σ trägt und $\Delta^\sigma \rightarrow |\mathcal{S}|$, $\lambda \mapsto \sum_{v \in \sigma} \lambda_v f_0(v)$ stetig ist, ist f stetig.

(i) Es sei $\lambda \in \Delta^\sigma$, $\lambda' \in \Delta^{\sigma'}$, $f(\chi_\sigma(\lambda)) = f(\chi_{\sigma'}(\lambda'))$. Es ist also

$$\sum_{v \in \sigma} \lambda_v f_0(v) = \sum_{v \in \sigma'} \lambda'_v f_0(v)$$

und aus der affinen Unabhängigkeit von $(f_0(v))_{v \in \sigma \cup \sigma'}$ folgt $\lambda_v = 0$ für $v \in \sigma \setminus \sigma'$ und $\lambda'_v = 0$ für $v \in \sigma' \setminus \sigma$. Also existiert ein $\mu \in \Delta^{\sigma \cap \sigma'}$ mit $\lambda = i_{\sigma \cap \sigma'}^\sigma(\mu)$, $\lambda' = i_{\sigma \cap \sigma'}^{\sigma'}(\mu)$. Es folgt $\chi_\sigma(\lambda) = (\chi_\sigma \circ i_{\sigma \cap \sigma'}^\sigma)(\mu) = (\chi_{\sigma'} \circ i_{\sigma \cap \sigma'}^{\sigma'})(\mu) = \chi_{\sigma'}(\lambda')$.

(ii) Ist \mathcal{S} endlich, so ist $|\mathcal{S}| = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}} \chi_\sigma[\Delta^\sigma]$ endliche Vereinigung quasikompakter Mengen und damit quasikompakt. Da \mathbb{R}^n hausdorffsch ist, ist die injektive stetige Abbildung j eine Einbettung. \square

Im folgenden werden wir für $\chi_\sigma(\lambda)$ auch $\sum_{v \in \sigma} \lambda_v v$ schreiben, was rein symbolisch zu verstehen ist. Die Vorschrift zur Definition von f wird damit zu $f(\sum_{v \in \sigma} \lambda_v v) = \sum_{v \in \sigma} \lambda_v f_0(v)$.

10.10 Proposition. *Es sei \mathcal{S} ein abstrakter Simplicialkomplex.*

(i) Die Realisierung $|\mathcal{S}|$ ist hausdorffsch.

(ii) Ist \mathcal{S} endlich, so ist $|\mathcal{S}|$ homöomorph zu einem kompakten Unterraum von $\mathbb{R}^{|V(\mathcal{S})|-1}$.

Beweis. (ii) Wir wählen affin unabhängige Punkte $f_0(v)$, $v \in V(\mathcal{S})$ und setzen affin fort, um eine Einbettung zu erhalten.

(i) Es seien $x, x' \in |\mathcal{S}|$, $x \neq x'$. Es sei $x \in \text{im } \chi_\sigma$, $x' \in \text{im } \chi_{\sigma'}$. Für $n = |\sigma \cup \sigma'| - 1$ wählen wir $f_0(v) \in \mathbb{R}^n$ affin unabhängig und $f_0(v) \in \mathbb{R}^n$ für $v \in V(\mathcal{S}) \setminus (\sigma \cup \sigma')$ beliebig und setzen affin zu einer Abbildung f fort. Dann ist wie in der vorherigen Proposition $f(x) \neq f(x')$. Nun existieren $U \in \mathcal{U}(f(x))$, $U' \in \mathcal{U}(f(x'))$ mit $U \cap U' = \emptyset$, und es ist $f^{-1}[U] \in \mathcal{U}(x)$, $f^{-1}[U'] \in \mathcal{U}(x')$, $f^{-1}[U] \cap f^{-1}[U'] = \emptyset$. \square

10.11 Lemma. *Es sei \mathcal{S} ein abstrakter Simplicialkomplex und $M \subset |\mathcal{S}|$ derart, dass $\chi_\sigma^{-1}[M]$ für alle $\sigma \in \mathcal{S}$ endlich ist. Dann ist M diskret und in $|\mathcal{S}|$ abgeschlossen.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\chi_\sigma^{-1}[M]$ für alle σ endlich, insbesondere also abgeschlossen. Damit ist M abgeschlossen. Gleiches gilt aber für jede Teilmenge von M , also ist M diskret. \square

10.12 Korollar. *Es sei \mathcal{S} ein abstrakter Simplicialkomplex und $K \subset |\mathcal{S}|$ kompakt. Dann existiert ein endlicher Unterkomplex $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$, so dass $K \subset |\mathcal{T}|$.*

Beweis. Es sei $M := \{\sigma \in \mathcal{S} : \chi_\sigma^{-1}[K] \cap \mathring{\Delta}^\sigma \neq \emptyset\}$. Dann ist $\mathcal{T} := \bigcup_{\sigma \in M} \mathcal{P}(M)$ ein Unterkomplex von \mathcal{S} , $K \subset |\mathcal{T}|$, und \mathcal{T} genau dann endlich, wenn M endlich ist. Letzteres bleibt zu zeigen.

Man wähle für jedes $\sigma \in M$ ein $x_\sigma \in K \cap \chi_\sigma[\mathring{\Delta}^\sigma]$. Dann sind diese x_σ paarweise verschieden und für jedes $\sigma \in \mathcal{S}$ ist $\chi_\sigma^{-1}[\{x_\tau : \tau \in M\}] = \chi_\sigma^{-1}[\{x_\tau : \tau \in M, \tau \subset \sigma\}]$ endlich, also ist $\{x_\sigma : \sigma \in M\}$ abgeschlossene diskrete Teilmenge der kompakten Menge K und damit endlich. \square

Eine wichtige Konsequenz daraus wird sein, dass es zum Verständnis beispielsweise der Fundamentalgruppe eines Simplicialkomplexes genügt, diese für alle endlichen Unterkomplexe zu verstehen, denn jede Schleife verläuft in einem endlichen Unterkomplex und ebenso jede Homotopie von Schleifen, denn I und $I \times I$ sind ja kompakt.

Zunächst bemerken wir aber nur die folgende Konsequenz.

10.13 Proposition. *Es sei \mathcal{S} ein abstrakter Simplicialkomplex. Dann ist $|\mathcal{S}|$ genau dann kompakt, wenn \mathcal{S} endlich ist.* \square

Wir vermerken die folgende Konsequenz aus Lemma 1.27, von der wir wieder den Fall $Z = I$ zur Konstruktion von Homotopien benötigen werden.

10.14 Proposition. *Es sei \mathcal{S} ein abstrakter Simplicialkomplex und Z ein lokal kompakter Raum. Dann trägt $|\mathcal{S}| \times Z$ die Finaltopologie bezüglich der Abbildungen $\chi_\sigma \times \text{id}_Z : \Delta^\sigma \times Z \rightarrow |\mathcal{S}| \times Z$.* \square

10.15 Definition. Sei X ein topologischer Raum. Eine *Triangulierung* von X ist ein abstrakter Simplicialkomplex \mathcal{S} zusammen mit einem Homöomorphismus $h : |\mathcal{S}| \xrightarrow{\cong} X$. Ein Raum heißt *triangulierbar*, wenn er eine Triangulierung besitzt.

Abschnitt 11

Die Fundamentalgruppen von Simplizialkomplexen

Die Fundamentalgruppe eines unendlichen Simplizialkomplexes

Wir zeigen zunächst, dass es für das Verständnis der Fundamentalgruppe eines Simplizialkomplexes genügt, alle endlichen Unterkomplexe zu betrachten.

11.1 Proposition. *Es sei \mathcal{S} ein abstrakter Simplizialkomplex. Für einen endlichen Unterkomplex \mathcal{K} sei $i^{\mathcal{K}}: |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{S}|$ die Inklusionsabbildung. Ist \mathcal{K}' ein weiterer Unterkomplex und $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}'$, so bezeichne auch $i^{\mathcal{K},\mathcal{K}'}: |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{K}'|$ die Inklusionsabbildung.*

- (i) *Ist $\alpha \in \pi_1(|\mathcal{S}|, x_0)$, so existiert ein endlicher Unterkomplex \mathcal{K} mit $x_0 \in |\mathcal{K}|$, so dass $\alpha \in \text{im } i_{\#}^{\mathcal{K}}$.*
- (ii) *Ist \mathcal{K} ein endlicher Unterkomplex und $\alpha \in \ker(\pi_1(|\mathcal{K}|, x_0) \xrightarrow{i_{\#}^{\mathcal{K}}} \pi_1(|\mathcal{S}|, x_0))$, so existiert ein endlicher Unterkomplex \mathcal{K}' , $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}'$, so dass $\alpha \in \ker i_{\#}^{\mathcal{K},\mathcal{K}'}$.*

11.2 Bemerkung. Diese Situation drückt man so aus, dass $\pi_1(|\mathcal{S}|, x_0)$ (zusammen mit den Abbildungen $i_{\#}^{\mathcal{K}}$) direkter Limes oder Kolimes des Systems bestehend aus allen $\pi_1(|\mathcal{K}|, x_0)$ und $i_{\#}^{\mathcal{K},\mathcal{K}'}$ ist. Dabei durchlaufen $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ alle endlichen Unterkomplexe mit $x_0 \in |\mathcal{K}|$ und $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}'$.

Beweis. Ist $\alpha \in \pi_1(|\mathcal{S}|, x_0)$, so existiert ein Weg w mit $\alpha = [w]$. Da I kompakt ist, ist $\text{im } w$ kompakt, und nach Korollar 10.12 existiert ein endlicher Unterkomplex \mathcal{K} mit $\text{im } w \subset |\mathcal{K}|$. Der Weg w repräsentiert also auch ein Element aus $\pi_1(|\mathcal{K}|, x_0)$, und dieses wird von $i_{\#}^{\mathcal{K}}$ auf α abgebildet.

Ist $\alpha \in \ker(\pi_1(|\mathcal{K}|, x_0) \xrightarrow{i_{\#}^{\mathcal{K}}} \pi_1(|\mathcal{S}|, x_0))$, so ist $\alpha = [w]$ für ein $w: I \rightarrow |\mathcal{K}|$, und $w \simeq_{\{0,1\}} c_{x_0}$ in $|\mathcal{S}|$, also via eine Homotopie $H: I \times I \rightarrow |\mathcal{S}|$. Da auch $I \times I$ kompakt ist, existiert ein endlicher Unterkomplex $\mathcal{K}' \supset \mathcal{K}$ mit $\text{im } H \subset |\mathcal{K}'|$, also $i_{\#}^{\mathcal{K},\mathcal{K}'}(\alpha) = e$. \square

Zusammenhang

Wir zeigen zunächst die fast offensichtliche Tatsache, dass sich für einen Simplicialkomplex die Zusammenhangskomponenten kombinatorisch beschreiben lassen.

11.3 Proposition. *Es sei \mathcal{S} ein abstrakter Simplicialkomplex. Auf $V(\mathcal{S})$ sei die Äquivalenzrelation*

$$v \sim w \iff$$

Es existieren $u_0, \dots, u_n \in V(\mathcal{S})$ mit $u_0 = v$, $u_n = w$ und $\{u_j, u_{j+1}\} \in \mathcal{S}$ für alle j , $0 \leq j < n$

definiert und C eine Äquivalenzklasse von \sim . Dann ist $\mathcal{C} := \mathcal{S} \cap \mathcal{P}(C)$ ein Unterkomplex von \mathcal{S} und $|\mathcal{C}|$ offen und abgeschlossen in $|\mathcal{S}|$ sowie wegzusammenhängend, also eine Wegzusammenhangskomponente.

Insbesondere ist $|\mathcal{S}|$ genau dann zusammenhängend, wenn $v \sim w$ für alle $v, w \in V(\mathcal{S})$, und in diesem Fall auch wegzusammenhängend.

Beweis. Dass die Relation eine Äquivalenzrelation ist, ist offensichtlich. Ist $\sigma \in \mathcal{S}$, so sind alle $v \in \sigma$ zueinander äquivalent. Damit ist zunächst \mathcal{C} ein Unterkomplex. Weiterhin heißt das, dass für jedes $\sigma \in \mathcal{S}$ die Menge $\chi_\sigma^{-1}[|\mathcal{C}|]$ leer oder gleich Δ^σ ist, in jedem Fall also offen und abgeschlossen. Damit ist $|\mathcal{C}|$ offen und abgeschlossen.

Sind $x, y \in |\mathcal{C}|$, so existieren $\sigma_0, \dots, \sigma_n \in \mathcal{C}$ mit $x \in \text{im } \chi_{\sigma_0}$, $y \in \text{im } \chi_{\sigma_n}$ und $\sigma_j \cap \sigma_{j+1} \neq \emptyset$, also auch $\text{im } \chi_{\sigma_j} \cap \text{im } \chi_{\sigma_{j+1}} \neq \emptyset$. Da mit Δ^{σ_j} auch $\text{im } \chi_{\sigma_j}$ wegzusammenhängend ist, ist daher $\bigcup_{j=0}^n \text{im } \chi_{\sigma_j}$ wegzusammenhängend. Damit ist $|\mathcal{C}|$ wegzusammenhängend. \square

Graphen

Nun wollen wir uns daran machen, eine kombinatorische Beschreibung für die Fundamentalgruppe eines Simplicialkomplexes zu erarbeiten. Wir betrachten zunächst 1-dimensionale Simplicialkomplexe.

11.4 Definition. Ein Simplicialkomplex \mathcal{S} ist ein *Graph*, wenn er von Dimension höchstens 1 ist, das heißt, wenn $|\sigma| \leq 2$ für alle $\sigma \in \mathcal{S}$.

11.5 Definition. Ein Graph \mathcal{G} heißt ein *Baum*, wenn er zusammenhängend ist (das heißt, wenn $|\mathcal{G}|$ zusammenhängend ist, siehe aber Proposition 11.3) und kreisfrei, wenn es also keine endliche Folge u_0, \dots, u_n mit $n > 2$, $u_0 = u_n$, $\{u_k, u_{k+1}\} \in \mathcal{G}$ für alle $0 \leq k < n$ und $u_k \neq u_{k'}$ für $0 \leq k < k' < n$ gibt.

Es ist plausibel, dass ein Graph, der kreisfrei ist, eine triviale Fundamentalgruppe hat. In der Tat gilt folgendes.

11.6 Proposition. *Sei \mathcal{T} ein Baum. Dann ist $|\mathcal{T}|$ zusammenziehbar.*

Bevor wir diese Tatsache beweisen, führen wir etwas Notation ein. Für $\{u_0, u_1\} \in \mathcal{T}$ sei p_{u_0, u_1} der Weg $t \mapsto (1-t)u_0 + tu_1$ von u_0 nach u_1 . Wir fixieren eine Ecke $v_0 \in V(\mathcal{T})$. Ist nun $u \in V(\mathcal{T})$ und \mathcal{T} ein Baum, so existieren eindeutige $n \in \mathbb{N}$ und $v_j \in V(\mathcal{T})$, $0 < j \leq n$, so dass

$$\begin{aligned} v_n &= u, \\ \{v_j, v_{j+1}\} &\in \mathcal{S} \text{ für alle } j, 0 \leq j < n, \text{ und} \\ v_j &\neq v_k \text{ für } j \neq k. \end{aligned}$$

Mit diesen setzen wir

$$p_u := c_{v_0} * p_{v_0, v_1} * p_{v_1, v_2} * \cdots * p_{v_{n-1}, v_n}.$$

Dieses verstehen wir so geklammert, dass $p_u = p_{v_{n-1}} * p_{v_{n-1}, u}$. (Der konstante Weg am Anfang dient nur dazu, dies auch für $n = 1$ zu erhalten, erheblich ist das nicht.) Damit haben wir:

11.7 Lemma. *Ist $\{u, v\} \in \mathcal{T}$, $u \neq v$, so ist $p_v = p_u * p_{u, v}$ oder $p_u = p_v * p_{v, u}$. In beiden Fällen ist $p_v \simeq_{\{0,1\}} p_u * p_{u, v}$. \square*

Beweis von Proposition 11.6. Wir wollen eine Homotopie $H: |\mathcal{T}| \times I \rightarrow |\mathcal{T}|$ konstruieren, so dass $H(\cdot, 0) = \text{id}_{|\mathcal{T}|}$ und $H(\cdot, 1) = c_{v_0}$ ist. Aus Proposition 10.14 wissen wir, dass wir H konstruieren können, indem wir für jedes $\sigma \in \mathcal{T}$ die Einschränkung von H auf im $\chi_\sigma \times I$ so vorgeben, dass diese Abbildungen mit den Inklusionen verträglich sind. Wir beschreiben daher zunächst für jedes $u \in V(\mathcal{T})$ die Abbildung H auf im $\chi_{\{u\}} \times I$. Wir wollen $H(u, 0) = u$, $H(u, 1) = v_0$. Dies erreichen wir durch $H(u, t) = p_u(1-t)$.

Sei nun $\{u, v\} \in \mathcal{T}$, $u \neq v$. Wir wollen H auf im $\chi_{\{u, v\}} \times I$ definieren. Dabei müssen wir weiterhin $H(u, t) = p_u(1-t)$, $H(v, t) = p_v(1-t)$ haben, außerdem wollen wir $H((1-s)u + sv, 1) = v_0 = c_{v_0}(s)$, $H((1-s)u + sv, 0) = (1-s)u + sv = p_{u, v}(s)$ erreichen. Da aber $c_{v_0} * p_v \simeq_{\{0,1\}} p_u * p_{u, v}$ ist, existiert eine solche Abbildung auf im $\chi_{\{u, v\}} \times I$. In der Tat können wir unter der Annahme, dass $p_v = p_u * p_{u, v}$ ist,

$$H((1-s)u + sv, t) = \begin{cases} p_u(1-t/(1-s/2)), & 2t \geq s, \\ p_{u, v}(s-2t), & 2t \leq s \end{cases}$$

setzen. \square

Damit haben wir auch noch einmal unabhängig vom Satz von Seifert und van Kampen gezeigt, dass der Graph aus Proposition 7.16 eine universelle Überlagerung von $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ ist und seine Ecken die Elemente von $\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$ repräsentieren.

Einschub: Freie Gruppen

Wir müssen ein Konzept nachholen, dass wir schon viel früher hätten einführen sollen.

11.8 Definition. Es sei G eine Gruppe und $(g_j)_{j \in J}$ ein System von Elementen von G . Wir sagen, dass G von diesem System *frei erzeugt* wird, wenn sich jedes Element aus G eindeutig in der Form

$$g_{j_1}^{m_1} g_{j_2}^{m_2} \cdots g_{j_n}^{m_n}, \quad n \in \mathbb{N}, m_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, j_k \in J, j_k \neq j_{k+1} \quad (11.1)$$

(im Falle $n = 0$ bezeichne der Ausdruck das neutrale Element) schreiben lässt. Eine Gruppe heißt *frei*, wenn es ein System gibt, dass sie frei erzeugt.

11.9 Proposition. Die Gruppe G sei frei von $(g_j)_{j \in J}$ erzeugt, H sei eine weitere Gruppe und $(h_j)_{j \in J}$ ein System von Elementen von H . Dann gibt es genau einen Homomorphismus $f: G \rightarrow H$ mit $f(g_j) = h_j$ für alle $j \in J$.

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt bereits daraus, dass die Gruppe G von den Elementen g_j erzeugt wird. Nun ist $f: G \rightarrow H$ durch

$$f(g_{j_1}^{m_1} g_{j_2}^{m_2} \cdots g_{j_n}^{m_n}) = h_{j_1}^{m_1} h_{j_2}^{m_2} \cdots h_{j_n}^{m_n}, \quad n \in \mathbb{N}, m_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, j_k \in J, j_k \neq j_{k+1}$$

wohl-definiert und offensichtlich ein Homomorphismus. \square

Wir benötigen die Existenz freier Gruppen über Mengen beliebiger Kardinalität.

11.10 Proposition. Es sei J eine beliebige Menge. Dann existieren eine Gruppe G und ein System $(g_j)_{j \in J}$, so dass G frei von diesem erzeugt wird.

Beweisskizze 1. Wir verallgemeinern die Konstruktion der universellen Überlagerung von $\mathbb{S} \vee \mathbb{S}^1$ auf den Raum $\bigvee_{j \in J} \mathbb{S}^1 := (J \times \mathbb{S}^1)/(J \times \{1\})$. Es sei $i^j: \mathbb{S}^1 \rightarrow \bigvee_{j \in J} \mathbb{S}^1$ die Einbettung, die sich aus der Komposition

$$\mathbb{S}^1 \xrightarrow{\sim} \{j\} \times \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\hookrightarrow} J \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \bigvee_{j \in J} \mathbb{S}^1$$

ergibt, $\beta \in \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ ein Erzeuger und $\alpha_j := i_{\#}^j(\beta)$. Man konstruiert nun wie in dem Abschnitt vor Proposition 7.16 eine Überlagerung von $\bigvee_{j \in J} \mathbb{S}^1$ durch einen Graphen G mit Basispunkt x , so dass die Abbildung

$$((j_1, m_1), \dots, (j_n, m_n)) \mapsto x \cdot \alpha_{j_1}^{m_1} \cdots \alpha_{j_n}^{m_n}$$

eine Bijektion zwischen den endlichen Folgen $((j_1, m_1), \dots, (j_n, m_n))$ wie in (11.1) und der Faser der Überlagerung ergibt. Wie in Proposition 7.16 ergibt sich daraus, dass $\pi_1(\bigvee_{j \in J} \mathbb{S}^1)$ frei von $(\alpha_j)_{j \in J}$ erzeugt wird. \square

Beweisskizze 2. Wir betrachten endliche Folgen von Paaren (j, m) mit $j \in J$ und $m \in \mathbb{Z}$ in der Absicht, dass die Folge $(j_1, m_1) \cdots (j_s, m_s)$ später das Element $g_{j_1}^{m_1} \cdots g_{j_s}^{m_s}$ darstellen soll. Eine solche Folge nennen wir ein *Wort*. Für Wörter dieser Art führen wir zwei Arten von Reduktionsschritten ein, die die Länge n des Wortes um 1 verkürzen. Die erste Art ist das Weglassen eines Vorkommens von $(j, 0)$, die zweite das Ersetzen von $(j, m)(j, m')$ durch $(j, m + m')$. Worte, die keinen Reduktionsschritt zulassen, sind die, die Bedingungen wie in (11.1) erfüllen. Eine Folge von Reduktionsschritten nennen wir maximal, wenn sie in einem Wort endet, das keinen weiteren Reduktionsschritt zulässt. Offensichtlich gibt es zu jedem Wort eine in ihm startende maximale Folge von Reduktionsschritten.

Das wesentliche technische Lemma, das sich durch Induktion über die Wortlänge beweisen lässt, ist nun, dass zu einem gegebenen Wort jede in ihm startende maximale Folge von Reduktionsschritten in der selben Folge endet. Für zwei Folgen, die mit dem gleichen Schritt beginnen, folgt dies sofort aus der Induktionsvoraussetzung. Für Folgen, die mit verschiedenen Schritten beginnen, überlegt man sich, dass es ein Wort gibt, das sich es ein Wort gibt, dass sich nach jedem der beiden Schritte durch je einen weiteren (im wesentlichen den anderen der beiden) erreichen lässt und nutzt das für die Induktion.

Das Wort, in dem eine maximale Folge von Reduktionsschritten eines Wortes endet, können wir daher die Reduktion dieses Wortes nennen. Wir nennen nun zwei Worte äquivalent, wenn sie die gleiche Reduktion haben. Auf der Menge der Äquivalenzklassen definieren wir eine Multiplikation durch Hintereinanderschreiben von Repräsentanten. Es ist nun leicht zu sehen, dass diese Multiplikation wohldefiniert ist und eine Gruppe mit der Klasse des leeren Wortes als neutralem Element definiert. Diese Gruppe ist dann frei von den Elementen $g_j := [(j, 1)]$ erzeugt. \square

Die folgende Situation tritt auf, wenn im Satz von Seifert und van Kampen die Mengen U_0 und U_1 freie Fundamentalgruppen haben und ihr Schnitt einfach zusammenhängend ist.

11.11 Proposition. *Es sei*

$$\begin{array}{ccc} \{e\} & \longrightarrow & G_0 \\ \downarrow & & \downarrow h_0 \\ G_1 & \xrightarrow{h_1} & H \end{array}$$

ein Push-out-Diagramm und G_i frei von $(\alpha_{k,j})_{j \in J_k}$ erzeugt, $J_0 \cap J_1 = \emptyset$. Setzen wir dann $\beta_j = h_k(\alpha_{k,j})$ für $j \in J_k$, so wird H frei von $(\beta_j)_{j \in J_0 \cup J_1}$ erzeugt.

Beweis. Wir setzen $J := J_0 \cup J_1$. Es sei F eine Gruppe, die frei von $(\gamma_j)_{j \in J}$ erzeugt wird, eine solche Gruppe existiert nach Proposition 11.10. Da G_0

und G_1 frei sind, existieren Homomorphismen $f_k: G_k \rightarrow F$ mit $f_k(\alpha_{k,j}) = \gamma_j$. Nun kommutiert ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \{e\} & \longrightarrow & G_0 \\
 \downarrow & & \downarrow f_0 \\
 G_1 & \xrightarrow{f_1} & F \\
 & \searrow l_1 & \nearrow l_0 \\
 & & L
 \end{array}$$

genau dann, wenn $r(\gamma_j) = l_k(\alpha_{k,j})$ für $j \in J_k$. Da F frei von den γ_j erzeugt wird, existiert ein solcher Homomorphismus für gegebene l_0, l_1 immer eindeutig, was heißt, dass

$$\begin{array}{ccc}
 \{e\} & \longrightarrow & G_0 \\
 \downarrow & & \downarrow f_0 \\
 G_1 & \xrightarrow{f_1} & F
 \end{array}$$

ein Push-Out-Diagramm ist. Aus der Eindeutigkeit von Push-Outs folgt daher, dass ein Isomorphismus $r: L \rightarrow H$ mit $r \circ f_k = h_k$, also $r(\gamma_j) = \beta_j$ existiert. Damit ist H frei von $(\beta_j)_{j \in J}$ erzeugt. \square

Die Fundamentalgruppe eines Simplicialkomplexes

Wir wollen nun die Fundamentalgruppe eines Simplicialkomplexes beschreiben. Wir haben bereits gesehen, dass sich dies auf die Beschreibung der Fundamentalgruppen endlicher Unterkomplexe zurückführen lässt. Einen solchen bauen wir Simplex für Simplex auf und verfolgen dabei, wie sich die Fundamentalgruppe ändert.

Es sei \mathcal{S} ein abstrakter Simplicialkomplex, $k \geq 0$, σ eine $(k+1)$ -elementige Menge mit $\mathcal{P}(\sigma) \cap \mathcal{S} = \mathcal{P}(\sigma) \setminus \{\sigma\}$. Dann ist auch $\mathcal{S}' := \mathcal{S} \cup \{\sigma\}$ ein abstrakter Simplicialkomplex.

Es gibt einen Homöomorphismus $\Delta^\sigma \xrightarrow{\approx} \mathbb{D}^k$, der $\partial\Delta^\sigma$ auf \mathbb{S}^{k-1} abbildet. Wir schreiben dafür $(\Delta^\sigma, \partial\Delta^\sigma) \approx (\mathbb{D}^k, \mathbb{S}^{k-1})$. Wir betrachten die kanonische Einbettung $j: |\mathcal{S}| \rightarrow |\mathcal{S}'|$ aus Proposition 10.8 und die Abbildung $\chi_\sigma: \Delta^\sigma \rightarrow |\mathcal{S}'|$. Wir definieren $f_\sigma: \partial\Delta^\sigma \rightarrow |\mathcal{S}|$ durch $j \circ f_\sigma = \chi_\sigma|_{\partial\Delta^\sigma}$. Man prüft nun leicht nach, dass $|\mathcal{S}'| \approx |\mathcal{S}| \cup_{f_\sigma} \Delta^\sigma$. Das Hinzufügen eines k -Simplexes ist also ein Spezialfall des Anheftens einer k -Zelle wie in Abschnitt 9 betrachtet.

Wir wenden uns zunächst zusammenhängenden Graphen zu. Dazu wählen wir zunächst einen aufspannenden Baum und fügen dann schrittweise neue 1-Simplizes hinzu.

Sei \mathcal{G} ein Graph und \mathcal{T} ein aufspannender Baum von \mathcal{G} , also \mathcal{T} ein Baum, $\mathcal{T} \subset \mathcal{G}$, $V(\mathcal{T}) = V(\mathcal{G})$. (Dass ein solcher auch für einen unendlichen zusammenhängenden Graphen immer existiert, zeigt man mit Hilfe des

Zornschen Lemma.) Wir wollen einen 1-Simplex hinzufügen, sei also $u_0, u_1 \in V(\mathcal{G})$, $\{u_0, u_1\} \notin \mathcal{G}$, $\mathcal{G}' := \mathcal{G} \cup \{\{u_0, u_1\}\}$.

Wir wollen nun gerne den Satz von Seifert und van Kampen anwenden. Dazu setzen wir $U_0 := |\mathcal{G}'| \setminus \left\{\frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2}u_1\right\}$. Wir können Proposition 9.8 anwenden, um zu sehen, dass die Inklusionsabbildung $|\mathcal{G}| \rightarrow U_0$ eine Homotopieäquivalenz ist.

Wir setzen $X := \text{im } p_{u_0} \cup \text{im } p_{u_1} \cup \text{im } p_{u_0, u_1}$. Es existiert eine offene Teilmenge $U_1 \supset X$ von $|\mathcal{G}'|$, so dass die Inklusion $X \rightarrow U_1$ eine Homotopieäquivalenz ist. Beispielsweise kann man für jede Kante $\{w_0, w_1\} \in \mathcal{G}$ mit $w_0 \in X$, $w_1 \notin X$, zu X die Menge $p_{w_0, w_1}[(0, \frac{1}{2})]$ hinzufügen. Ebenso ist dann $U_0 \cap U_1 \simeq X \setminus \left\{\frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2}u_1\right\}$ zusammenziehbar. Mit Hilfe des Satzes von Seifert und van Kampen und der genannten Homotopieäquivalenzen, erhalten wir daher, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \{e\} & \longrightarrow & \pi_1(X, v_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(|\mathcal{G}|, v_0) & \longrightarrow & \pi_1(|\mathcal{G}'|, v_0) \end{array}$$

ein Push-Out-Diagramm ist, wobei die nicht trivialen Homomorphismen von Inklusionsabbildungen induziert sind. Der Raum X ist homotopieäquivalent zu einer Kreislinie, und $p_{u_0} * p_{u_0, u_1} * p_{u_1}^-$ repräsentiert einen Erzeuger von $\pi_1(X, v_0)$.

Dies liefert folgendes.

11.12 Proposition. *Sei \mathcal{G} ein endlicher Graph, \mathcal{T} ein aufspannender Baum und $v_0 \in V(\mathcal{G})$. Für jedes $u \in V(\mathcal{G})$ wählen wir einen Weg $p_u: I \rightarrow |\mathcal{T}| \subset |\mathcal{G}|$ von v_0 nach u . Außerdem bezeichne $p_{u_0, u_1}: I \rightarrow |\mathcal{G}|$ einen Weg von u_0 nach u_1 in dem 1-Simplex $\{u_0, u_1\}$. Für $\{u_0, u_1\} \in \mathcal{G}$ setzen wir*

$$g_{u_0, u_1} := [p_{u_0} * p_{u_0, u_1} * p_{u_1}^-].$$

Dann ist $g_{u_0, u_1} = g_{u_1, u_0}^{-1}$, und für $\{u_0, u_1\} \in \mathcal{T}$ ist $g_{u_0, u_1} = e$.

Wir wählen eine totale Ordnung auf $V(\mathcal{G})$. Dann wird $\pi_1(|\mathcal{G}|, v_0)$ frei von den g_{u_0, u_1} mit $\{u_0, u_1\} \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{T}$, $u_0 < u_1$ erzeugt.

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass es, da $|\mathcal{T}|$ sowie jede Kante zusammenziehbar ist, so dass es egal ist, ob p_{u_0} und p_{u_0, u_1} die konkreten weiter oben konstruierten Wege bezeichnet oder beliebige, die den Bedingungen der Proposition entsprechen.

Für $g_{u_0, u_1} = e$, $\{u_0, u_1\} \in \mathcal{T}$, bemerken wir, dass $p_{u_0} * p_{u_0, u_1}$ in diesem Fall in $|\mathcal{T}|$ verläuft, also homotop relativ $\{0, 1\}$ zu p_{u_1} ist.

Dass $\pi_1(|\mathcal{G}|, v_0)$ frei von den g_{u_0, u_1} mit $\{u_0, u_1\} \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{T}$, $u_0 < u_1$ erzeugt wird, zeigen wir zunächst für den Fall, dass $\mathcal{G} \setminus \mathcal{T}$ endlich ist, durch Induktion über $|\mathcal{G} \setminus \mathcal{T}|$. Dabei liefert Proposition 11.6 den Induktionsanfang und die

obige Diskussion zusammen mit Proposition 11.11 den Induktionsschritt. Der allgemeine Fall folgt daraus mit . Dabei benutzen wir, dass wenn \mathcal{K} ein endlicher Unterkomplex ist, die Behauptung für $familyT \cup \mathcal{K}$ bereits gezeigt ist. \square

11.13 Notation. Für $k \geq 0$ ist das k -Skelett eines Simplicialkomplexes \mathcal{S} der Unterkomplex $\mathcal{S}^{(k)} := \{\sigma \in \mathcal{S} : |\sigma| \leq k + 1\}$.

Damit sind wir nun bereit, den endgültigen Satz zu formulieren und zu beweisen.

11.14 Satz. Sei \mathcal{S} ein endlicher zusammenhängender Simplicialkomplex, \mathcal{T} ein aufspannender Baum und $v_0 \in V(\mathcal{S})$. Wir wählen eine totale Ordnung auf $V(\mathcal{S})$. Für jedes $u \in V(\mathcal{S})$ wählen wir einen Weg $p_u: I \rightarrow |\mathcal{T}| \subset |\mathcal{S}^{(1)}|$ von v_0 nach u . Außerdem bezeichne $p_{u_0, u_1}: I \rightarrow |\mathcal{S}^{(1)}|$ einen Weg von u_0 nach u_1 in dem Simplex $\{u_0, u_1\}$. Für $\{u_0, u_1\} \in \mathcal{S}$ setzen wir

$$g_{u_0, u_1} := [p_{u_0} * p_{u_0, u_1} * p_{u_1}^{-1}].$$

Dann ist $g_{u_0, u_1} = e$ für $\{u_0, u_1\} \in \mathcal{T}$, die Gruppe $\pi_1(|\mathcal{S}^{(1)}|, v_0)$ wird frei von den g_{u_0, u_1} mit $\{u_0, u_1\} \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{T}$, $u_0 < u_1$ erzeugt, und die Abbildung

$$\pi_1(|\mathcal{S}^{(1)}|, v_0) \xrightarrow{j\#} \pi_1(|\mathcal{S}|, v_0)$$

ist ein Epimorphismus, dessen Kern der kleinste Normalteiler ist, der

$$\left\{ g_{u_0, u_1} g_{u_1, u_2} g_{u_0, u_2}^{-1} : \{u_0, u_1, u_2\} \in \mathcal{S}, u_0 < u_1 < u_2 \right\}$$

enthält.

Beweis. Wir führen einen Induktionsbeweis über die Zahl der Simplizes von Dimension 2 und höher, also über $|\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}^{(1)}|$, für den Fall, dass diese endlich ist. Der allgemeine Fall folgt wieder mit Hilfe von Proposition 11 daraus.

Den Induktionsanfang liefert Proposition 11.12.

Für den Induktionsschritt wählen wir ein inklusionsmaximales Simplex $\sigma \in \mathcal{S}$. Dann ist $\mathcal{S}' := \mathcal{S} \setminus \{\sigma\}$ ein Unterkomplex, und wir haben einleitend gesehen, dass $|\mathcal{S}| \approx |\mathcal{S}'| \cup_{f_\sigma} \Delta^\sigma$. Es sei $|\sigma| = k + 1$. Ist $k > 2$, so induziert nach Proposition 9.11 die Inklusion einen Isomorphismus $\pi_1(|\mathcal{S}'|) \rightarrow \pi_1(|\mathcal{S}|)$. Wir betrachten daher den Fall $k = 2$. Wir setzen $\sigma = \{u_0, u_1, u_2\}$ mit $u_0 < u_1 < u_2$ und betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(|\mathcal{S}'|, u_0) & \longrightarrow & \pi_1(|\mathcal{S}|, u_0) \\ h_{p_{u_0}} \downarrow \cong & & h_{p_{u_0}} \downarrow \cong \\ \pi_1(|\mathcal{S}'|, v_0) & \xrightarrow{i\#} & \pi_1(|\mathcal{S}|, v_0). \end{array}$$

Nach Proposition 9.12 ist der obere Homomorphismus ein Epimorphismus, dessen Kern der kleinste Normalteiler ist, der $[p_{u_0,u_1} * p_{u_1,u_2} * p_{u_2,u_0}]$ enthält. Der untere Homomorphismus $i_{\#}$ ist daher ein Epimorphismus, dessen Kern der kleinste Normalteiler ist, der das Element

$$\begin{aligned} h_{p_{u_0}}([p_{u_0,u_1} * p_{u_1,u_2} * p_{u_2,u_0}]) &= [p_{u_0} * p_{u_0,u_1} * p_{u_1,u_2} * p_{u_2,u_0} * p_{u_0}^{-}] = \\ &= [p_{u_0} * p_{u_0,u_1} * p_{u_1}^{-} * p_{u_1} * p_{u_1,u_2} * p_{u_2}^{-} * p_{u_2} * p_{u_2,u_0} * p_{u_0}^{-}] = \\ &= [p_{u_0} * p_{u_0,u_1} * p_{u_1}^{-}] * [p_{u_1} * p_{u_1,u_2} * p_{u_2}^{-}] * [p_{u_2} * p_{u_2,u_0} * p_{u_0}^{-}] = \\ &= j'_{\#}(g_{u_0,u_1} g_{u_1,u_2} g_{u_0,u_2}^{-1}) \end{aligned}$$

enthält, wobei j' die Inklusion $|\mathcal{S}^{(1)}| \rightarrow |\mathcal{S}'|$ ist. Ist $j'_{\#}$ ein Epimorphismus, so ist $j_{\#} = (i \circ j')_{\#} = i_{\#} \circ j'_{\#}$ ein Epimorphismus, dessen Kern der kleinste Normalteiler ist, der $\ker j'_{\#} \cup \{g_{u_0,u_1} g_{u_1,u_2} g_{u_0,u_2}^{-1}\}$ enthält. Zusammen mit der Induktionsvoraussetzung folgt die Behauptung. \square

Abschnitt 12

Die Homologiegruppen eines Simplizialkomplexes

Wir werden nun die Homologiegruppen $H_i(\mathcal{S})$, $i \geq 0$ eines Simplizialkomplexes \mathcal{S} definieren.

Es lohnt sich, einen Moment einen Vergleich mit der Fundamentalgruppe anzustellen. Diese hatten wir für einen Raum (mit Basispunkt) definiert, ohne Bezug auf eine Triangulierung zu nehmen oder auch nur Triangulierbarkeit vorauszusetzen. Im letzten Abschnitt haben wir dann gezeigt, dass sich die Fundamentalgruppe mit Hilfe einer Triangulierung des Raumes bestimmen lässt. Ähnlich kann man Homologiegruppen eines beliebigen Raumes definieren, beispielsweise die *singulären Homologiegruppen* und dann später zeigen, wie sie sich für einen triangulierten Raum aus der Triangulierung berechnen lassen.

Wir werden hier stattdessen den klassischen Weg beschreiten und die *simplizialen Homologiegruppen* eines abstrakten Simplizialkomplexes definieren. Ihre Nützlichkeit entfaltet diese Theorie dann, nachdem man gezeigt hat, dass Simplizialkomplexe mit homöomorphen Realisierungen (in der Tat genügt Homotopieäquivalenz) isomorphe Homologiegruppen haben. Bevor wir dieses Resultat zumindest für endliche Simplizialkomplexe beweisen, werden wir die Spezialfälle $H_0(\mathcal{S})$ und $H_1(\mathcal{S})$ behandeln. Für diese Gruppen werden wir Beschreibungen mit Hilfe der Zusammenhangskomponenten von $|\mathcal{S}|$ beziehungsweise der Fundamentalgruppe von $|\mathcal{S}|$ erhalten.

Definition der Homologiegruppen

Im folgenden sei R ein kommutativer Ring mit 1. Viele der zu definierenden Objekte werden R -Moduln sein. Dabei werden wir hauptsächlich an den Fällen $R = \mathbb{Z}$ und $R = k$, wobei k ein Körper ist, interessiert sein. \mathbb{Z} -Moduln sind nichts weiter als abelsche Gruppen, k -Moduln sind k -Vektorräume. An Körpern werden uns hauptsächlich die Fälle $k = \mathbb{Q}$ und $k = \mathbb{Z}_2$ interessieren.

12.1 Definition. Sei \mathcal{S} ein abstrakter Simplizialkomplex und $k \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten zunächst den freien R -Modul mit Basis

$$\Sigma_k(\mathcal{S}) := \{(v_0, \dots, v_k) : \{v_0, \dots, v_k\} \in \mathcal{S}, |\{v_0, \dots, v_k\}| = k + 1\},$$

das heißt den Modul

$$\bigoplus_{(v_0, \dots, v_k) \in \Sigma_k(\mathcal{S})} R,$$

wobei wir $1 \in R$ aus dem zu (v_0, \dots, v_k) gehörigen Summanden mit (v_0, \dots, v_k) identifizieren. Wir nehmen nun den Quotienten nach dem von allen Elementen der Form $(v_0, \dots, v_k) - \operatorname{sgn} \pi \cdot (v_{\pi(0)}, \dots, v_{\pi(k)})$, wobei $\pi \in S(\{0, \dots, k\})$ eine Permutation ist, erzeugten Untermodul:

$$\tilde{C}_k(\mathcal{S}) := \bigoplus_{(v_0, \dots, v_k) \in \Sigma_k(\mathcal{S})} R /_{(v_0, \dots, v_k) - \operatorname{sgn} \pi \cdot (v_{\pi(0)}, \dots, v_{\pi(k)})}.$$

Wir nennen $\tilde{C}_k(\mathcal{S})$ den *k-ten reduzierten orientierten Kettenmodul* von \mathcal{S} . Und Elemente daraus *k-Ketten* (mit Koeffizienten in R). Wir bezeichnen die Klasse von (v_0, \dots, v_k) in $C_k(\mathcal{S})$ mit $\langle v_0, \dots, v_k \rangle$.

Wir setzen außerdem $C_k(\mathcal{S}) := \tilde{C}_k(\mathcal{S})$ für $k \neq -1$ und $C_{-1}(\mathcal{S}) := 0$. Dies sind die *unreduzierten Kettenmoduln*.

12.2 Bemerkung. Es ist also $\langle v_0, \dots, v_k \rangle = \operatorname{sgn} \pi \cdot \langle v_{\pi(0)}, \dots, v_{\pi(k)} \rangle$.

12.3 Lemma. Für $k \in \{-1, 0\}$ ist $\tilde{C}_k(\mathcal{S})$ ein freier R -Modul mit Basis $\Sigma_k(\mathcal{S})$.

Für $k > 0$ und $\sigma \in \mathcal{S}$ ein *k-Simplex* ist $\{\langle v_0, \dots, v_k \rangle : \{v_0, \dots, v_k\} = \sigma\}$ eine 2-elementige Menge. Die Wahl eines Elementes nennen wir eine *Orientierung* von σ . Haben wir für jeden *k-Simplex* eine solche Orientierung gewählt, so bilden diese eine Basis von $C_k(\mathcal{S})$. \square

12.4 Definition und Proposition. Für einen abstrakten Simplicialkomplex \mathcal{S} und $k \geq 0$ ist durch

$$\begin{aligned} \partial_k : \tilde{C}_k(\mathcal{S}) &\rightarrow \tilde{C}_{k-1}(\mathcal{S}) \\ \langle v_0, \dots, v_k \rangle &\mapsto \sum_{i=0}^k (-1)^i \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k \rangle \end{aligned}$$

eine R -lineare Abbildung definiert. Dabei stehe $\langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k \rangle$ für $\langle v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k \rangle$, der Hut also für das Weglassen eines Eintrages.

Außerdem definieren wir $\partial_k = 0$ für $k < 0$.

Ebenso definieren wir Abbildungen $\partial_k : C_k(\mathcal{S}) \rightarrow C_{k-1}(\mathcal{S})$, nur dass hier auch $\partial_0 = 0$.

Beweis. Setzen wir $d(v_0, \dots, v_k) := \sum_{i=0}^k (-1)^i \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k \rangle$. Wir haben zu zeigen, dass $d(v_{\pi(0)}, \dots, v_{\pi(k)}) = \operatorname{sign} \pi \cdot d(\langle v_0, \dots, v_k \rangle)$ für eine beliebige Permutation π . Da die symmetrische Gruppe von Transpositionen benachbarter Elemente erzeugt wird, genügt es, dies für eine solche nachzurechnen.

Nun ist für $0 \leq r < k$

$$\begin{aligned}
d(v_0, \dots, v_{r-1}, v_{r+1}, v_r, v_{r+2}, \dots, v_k) &= \\
&= \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{r-1}, v_{r+1}, v_r, v_{r+2}, \dots, v_k \rangle \\
&\quad + (-1)^r \langle v_0, \dots, \hat{v}_{r+1}, \dots, v_k \rangle + (-1)^{r+1} \langle v_0, \dots, \hat{v}_r, \dots, v_k \rangle \\
&\quad + \sum_{i=r+2}^k (-1)^i \langle v_0, \dots, v_{r-1}, v_{r+1}, v_r, v_{r+2}, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k \rangle \\
&= \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^{i+1} \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k \rangle \\
&\quad + (-1)^r \langle v_0, \dots, \hat{v}_{r+1}, \dots, v_k \rangle + (-1)^{r+1} \langle v_0, \dots, \hat{v}_r, \dots, v_k \rangle \\
&\quad + \sum_{i=r+2}^k (-1)^{i+1} \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k \rangle \\
&= - \sum_{i=0}^k \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k \rangle \\
&= -d(v_0, \dots, v_k)
\end{aligned}$$

wie gewünscht. \square

12.5 Proposition. Für die soeben definierten Abbildungen gilt $\mathfrak{d}_k \circ \mathfrak{d}_{k+1} = 0$.

Beweis. Die trivialen Fälle beiseite lassend berechnen wir

$$\begin{aligned}
\mathfrak{d}_k(\mathfrak{d}_{k+1} \langle v_0, \dots, v_{k+1} \rangle) &= \mathfrak{d}_k \left(\sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+1} \rangle \right) = \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \left(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \langle v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+1} \rangle + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=i+1}^{k+1} (-1)^{j-1} \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_{k+1} \rangle \right) \\
&= \sum_{0 \leq j < i \leq k+1} (-1)^{i+j} \langle v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+1} \rangle + \\
&\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j-1} \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_{k+1} \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

wie behauptet. \square

12.6 Definition. Es sei R ein Ring. Ein R -Kettenkomplex $D = (D_*, \mathfrak{d}_*)$ ist eine Familie $(D_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ von R -Moduln zusammen mit R -linearen Abbildungen

$\mathfrak{d}_k: D_k \rightarrow D_{k-1}$, so dass $\mathfrak{d}_k \circ \mathfrak{d}_{k+1} = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Die Abbildungen \mathfrak{d}_k nennen wir *Randabbildungen*.

12.7 Definition. Es sei D ein R -Kettenkomplex. Wir definieren

$$Z_k(D) = \ker(\mathfrak{d}_k: D_k \rightarrow D_{k-1}),$$

den Modul der k -Zykel und

$$B_k(D) = \operatorname{im}(\mathfrak{d}_{k+1}: D_{k+1} \rightarrow D_k),$$

den Modul der k -Ränder. Da $\mathfrak{d}_k \circ \mathfrak{d}_{k+1} = 0$, ist $B_k(D) \subset Z_k(D)$, und wir definieren

$$H_k(D) = Z_k(D)/B_k(D),$$

den k -ten *Homologiemodul* von D .

12.8 Definition. Für einen abstrakten Simplicialkomplex \mathcal{S} setzen wir $H_k(\mathcal{S}) := H_k(C_*(\mathcal{S}))$ und $\tilde{H}_k(\mathcal{S}) := H_k(\tilde{C}_*(\mathcal{S}))$. Wollen wir betonen, über welchem Ring R wir arbeiten, so schreiben wir $H_k(\mathcal{S}; R)$ beziehungsweise $\tilde{H}_k(\mathcal{S}; R)$.

Wir halten schon einmal folgendes fest, auf das wir später zurückkommen.

12.9 Proposition. *Es sei \mathcal{S} ein abstrakter Simplicialkomplex. Es ist $H_k(\mathcal{S}) \cong \tilde{H}_k(\mathcal{S})$ für $k > 0$, und ist $V(\mathcal{S}) \neq \emptyset$, so ist $\tilde{H}_{-1}(\mathcal{S}) = 0$ und $H_0(\mathcal{S}) \cong R \oplus \tilde{H}_0(\mathcal{S})$.*

Beweis. Zur Übung. □

Die Homologie eines Simplexes

Wir wollen für $n \geq -1$ mit Δ^n auch den abstrakten Simplicialkomplex $\mathcal{P}(\{0, \dots, n\})$ bezeichnen und setzen $\mathfrak{d}\Delta^n := \Delta^n \setminus \{0, \dots, n\}$. Wie bereits bemerkt ist $|\Delta^n| \approx \Delta^n \approx \mathbb{D}^n$ und $|\mathfrak{d}\Delta^n| \approx \mathfrak{d}\Delta^n \approx \mathbb{S}^{n-1}$.

Da Δ^n für $n \geq 0$ zusammenziehbar ist und die $\tilde{H}_r(\{\emptyset, \{0\}\}) = \tilde{H}_r(\Delta^0) = 0$ für alle r (Nachrechnen!), erwarten wir $\tilde{H}_r(\Delta^n) = 0$ für alle r . Dies ist unser erstes Resultat.

12.10 Proposition. *Sei \mathcal{S} ein Simplicialkomplex und sei $v \in V(\mathcal{S})$, so dass $\sigma \cup \{v\} \in \mathcal{S}$ für alle $\sigma \in \mathcal{S}$. (Wir sagen, \mathcal{S} sei ein Kegel mit Spitze v .) Dann ist $\tilde{H}_r(\mathcal{S}) = 0$ für alle r .*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass jeder r -Zykel Rand einer $(r+1)$ -Kette ist. Dazu definieren wir für alle $r \geq -1$ eine lineare Abbildung

$$K_r: \tilde{C}_r(\mathcal{S}) \rightarrow \tilde{C}_{r+1},$$

$$\langle u_0, \dots, u_r \rangle \mapsto \begin{cases} \langle v, u_0, \dots, u_r \rangle, & v \notin \{u_0, \dots, u_r\}, \\ 0, & v \in \{u_0, \dots, u_r\}. \end{cases}$$

Diese ist wohldefiniert, da die Definition mit Permutationen verträglich ist.

Wir setzen außerdem $K_r = 0$ für $r < -1$.

Dann gilt für alle $r \in \mathbb{Z}$, dass

$$\partial_{r+1} K_r + K_{r-1} \partial_r = \text{id}_{\tilde{C}_r(\mathcal{S})}.$$

In der Tat haben wir für $r \geq 0$ und $v \notin \{u_0, \dots, u_r\}$

$$\begin{aligned} \partial K \langle u_0, \dots, u_r \rangle &= \partial \langle v, u_0, \dots, u_r \rangle \\ &= \langle u_0, \dots, u_r \rangle + \sum_{i=0}^r (-1)^{i+1} \langle v, u_0, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_r \rangle \\ &= \langle u_0, \dots, u_r \rangle - K \partial \langle u_0, \dots, u_r \rangle. \end{aligned}$$

und für $v = u_j$

$$\begin{aligned} K \partial \langle u_0, \dots, u_r \rangle &= K \partial \langle u_0, \dots, u_{j-1}, v, u_{j+1}, \dots, u_r \rangle \\ &= (-1)^j K \langle u_0, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_r \rangle \\ &= (-1)^j \langle v, u_0, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_r \rangle \\ &= \langle u_0, \dots, u_{j-1}, v, u_{j+1}, \dots, u_r \rangle \\ &= \langle u_0, \dots, u_r \rangle - \partial K \langle u_0, \dots, u_r \rangle \end{aligned}$$

und schließlich für $r = -1$

$$\partial K \langle \rangle = \partial \langle v \rangle = \langle \rangle = \langle \rangle - K \partial \langle \rangle.$$

Man mache sich klar, dass obige Rechnung auch für $r = 0$ korrekt war, und wo sie für $C(\mathcal{S})$ an Stelle von $\tilde{C}(\mathcal{S})$ falsch gewesen wäre, beziehungsweise, was dort das Ergebnis gewesen wäre.

Ist also $[c] \in \tilde{H}_r(\mathcal{S})$, das heißt $c \in \tilde{C}_r(\mathcal{S})$ und $\partial c = 0$, so ist $c = \partial_{r+1}(K_r(c)) + K_{r-1}(\partial_r(c)) = \partial_{r+1}(K_r(c))$ ein Rand, also $[c] = 0$. \square

12.11 Korollar. $\tilde{H}_r(\Delta^n) = 0$ für $n \geq 0$, $r \in \mathbb{Z}$. \square

12.12 Proposition. Für $n \geq 0$ ist

$$\tilde{H}_k(\partial \Delta^n) \cong \begin{cases} 0, & k \neq n-1, \\ R, & k = n-1, \end{cases}$$

wobei $\tilde{H}_{n-1}(\partial \Delta^n)$ von $[\partial_n \langle 0, \dots, n \rangle]$ erzeugt wird.

Beweis. Für $k < n - 1$ ist $\tilde{H}_k(\mathfrak{d}\Delta^n) = \tilde{H}_k(\Delta^n) = 0$, für $k > n - 1$ ist $\tilde{C}_k(\mathfrak{d}\Delta^n) = 0$, also $\tilde{H}_k(\mathfrak{d}\Delta^n) = 0$.

Da $\tilde{C}_{n+1}(\Delta^n) = 0$, ist $\tilde{H}_n(\Delta^n) = \ker \mathfrak{d}_n^{\tilde{C}(\Delta^n)}$. Da $\tilde{H}_n(\Delta^n) = 0$, ist also $\mathfrak{d}_n^{\tilde{C}(\Delta^n)}$ injektiv. Da $\tilde{H}_{n-1}(\Delta^n) = 0$, ist $\ker \mathfrak{d}_{n-1}^{\tilde{C}(\Delta^n)} = \text{im } \mathfrak{d}_n^{\tilde{C}(\Delta^n)}$.

Da $\tilde{C}_n(\mathfrak{d}\Delta^n) = 0$, ist $\tilde{H}_{n-1}(\mathfrak{d}\Delta^n) = \ker \mathfrak{d}_{n-1}^{\tilde{C}(\mathfrak{d}\Delta^n)}$. Nun ist $\ker \mathfrak{d}_{n-1}^{\tilde{C}(\mathfrak{d}\Delta^n)} = \ker \mathfrak{d}_{n-1}^{\tilde{C}(\Delta^n)}$, also nach dem vorhergehenden $\mathfrak{d}_n: \tilde{C}_n(\Delta^n) \rightarrow \tilde{Z}_{n-1}(\mathfrak{d}\Delta^n) = \tilde{H}_{n-1}(\mathfrak{d}\Delta^n)$ ein Isomorphismus. \square

Abschnitt 13

Kettenabbildungen und Kettenhomotopien

Simpliziale Abbildungen und Kettenabbildungen

Bei der Betrachtung der Fundamentalgruppe war es wesentlich, dass eine stetige Abbildung zwischen Räumen einen Gruppenhomomorphismus zwischen den Fundamentalgruppen induziert. Da wir Homologie für Simplicialkomplexe definiert haben, betrachten wir eine geeignete Klasse von Abbildungen zwischen ihnen.

13.1 Definition. Es seien \mathcal{S}, \mathcal{T} abstrakte Simplicialkomplexe. Eine *simpliziale Abbildung* $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ ist eine Funktion $f: V(\mathcal{S}) \rightarrow V(\mathcal{T})$ mit $f[\sigma] \in \mathcal{T}$ für alle $\sigma \in \mathcal{S}$.

Wir bemerken, dass die Identität auf $V(\mathcal{S})$ eine simpliziale Abbildung ist, die wir $\text{id}_{\mathcal{S}}$ nennen werden, und dass die Komposition zweier simplizialer Abbildungen wieder eine simpliziale Abbildung ist.

Kettenabbildungen

Wir werden beschreiben, wie eine simpliziale Abbildung lineare Abbildungen zwischen den Homologiegruppen induziert. In einem Zwischenschritt werden wir eine Abbildung zwischen den simplizialen Kettenkomplexen definieren. Die entsprechende Art von Abbildungen definieren wir nun

13.2 Definition. Es seien C, D zwei R -Kettenkomplexe. Eine *Kettenabbildung* $f: C \rightarrow D$ ist ein System von R -linearen Abbildungen $(f_i: C_i \rightarrow D_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, so dass

$$\begin{array}{ccc} C_i & \xrightarrow{f_i} & D_i \\ \downarrow d & & \downarrow d \\ C_{i-1} & \xrightarrow{f_{i-1}} & D_{i-1} \end{array}$$

für alle $i \in \mathbb{Z}$ kommutiert.

13.3 Definition und Proposition. Ist $f: C \rightarrow D$ eine Kettenabbildung, so definiert

$$\begin{aligned} H_i(f): H_i(C) &\rightarrow H_i(D) \\ [c] &\mapsto [f_i(c)] \end{aligned}$$

für alle $i \in \mathbb{Z}$ eine R -lineare Abbildung.

Beweis. Wir müssen nur sicherstellen, dass die Abbildung wohldefiniert ist. Sei $c \in C_i$ ein Zykel, also $\partial c = 0$. Dann ist $\partial_i(f_i c) = f_{i-1}(\partial_i c) = f_{i-1}(0) = 0$, also ist $f_i(c)$ ein Zykel und repräsentiert ein Element von $H_i(D)$.

Sei $c' \in C_i$ ein weiterer Zykel, $[c'] = [c]$. Dann existiert ein $d \in C_{i+1}$, so dass $c' = c + \partial_{i+1} d$. Es ist dann $f_i(c') = f_i(c) + f_i(\partial_{i+1} d) = f_i(c) + \partial_{i+1}(f_{i+1}(d))$, also $[f_i(c')] = [f_i(c)]$. \square

13.4 Definition und Proposition. Es sei $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ eine simpliziale Abbildung. Dann definiert

$$\begin{aligned} \tilde{C}_k(f): \tilde{C}_k(\mathcal{S}) &\rightarrow \tilde{C}_k(\mathcal{T}) \\ \langle u_0, \dots, u_k \rangle &\mapsto \begin{cases} \langle f(u_0), \dots, f(u_k) \rangle, & |\{f(u_0), \dots, f(u_k)\}| = k+1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

eine Kettenabbildung $\tilde{C}(f): \tilde{C}(\mathcal{S}) \rightarrow \tilde{C}(\mathcal{T})$ und damit lineare Abbildungen $\tilde{H}(f) := H_k(\tilde{C}(f)): \tilde{H}_k(\mathcal{S}) \rightarrow \tilde{H}_k(\mathcal{T})$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Ebenso definieren wir $C(f): C(\mathcal{S}) \rightarrow C(\mathcal{T})$, $H(f): H(\mathcal{S}) \rightarrow H(\mathcal{T})$.

Beweis. Wir wollen nachrechnen, dass $\tilde{C}(f)$ eine Kettenabbildung ist. Wir haben für $|\{f(u_0), \dots, f(u_k)\}| = k+1$, dass

$$\begin{aligned} f_{k-1}(\partial_k \langle u_0, \dots, u_k \rangle) &= f_{k-1} \left(\sum_i (-1)^i \langle u_0, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_k \rangle \right) \\ &= \sum_i (-1)^i \langle f(u_0), \dots, \widehat{f(u_i)}, \dots, f(u_k) \rangle \\ &= \partial_k (f_k(\langle u_0, \dots, u_k \rangle)). \end{aligned}$$

Ist $|\{f(u_0), \dots, f(u_k)\}| < k$, so ist offensichtlich

$$f_{k-1}(\partial_k \langle u_0, \dots, u_k \rangle) = 0 = \partial_k (f_k \langle u_0, \dots, u_k \rangle).$$

Ist $|\{f(u_0), \dots, f(u_k)\}| = k$, so gibt es $j < j'$ mit $f(u_j) = f(u_{j'}) = v$, und für diese erhalten wir

$$\begin{aligned} f_{k-1}(\partial_k \langle u_0, \dots, u_k \rangle) &= \\ &= f_{k-1} \left((-1)^j \langle u_0, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_k \rangle + (-1)^{j'} \langle u_0, \dots, \hat{u}_{j'}, \dots, u_k \rangle \right) \\ &= (-1)^j \langle f(u_0), \dots, f(u_{j-1}), f(u_{j+1}), \dots, f(u_{j'-1}), v, f(u_{j'+1}), \dots, f(u_k) \rangle \\ &\quad + (-1)^{j'} \langle f(u_0), \dots, f(u_{j-1}), v, f(u_{j+1}), \dots, f(u_{j'-1}), f(u_{j'+1}), \dots, f(u_k) \rangle \\ &= 0 = \partial_{k-1} (f_k \langle u_0, \dots, u_k \rangle), \end{aligned}$$

da die beiden Summanden durch $j' - j - 1$ Transpositionen ineinander überführt werden, und $(-1)^h(-1)^{j'-j-1} = -(-1)^{j'}$, so dass sie sich wegheben. \square

Kettenhomotopien

Wir betrachten nun das algebraische Analogon zur Homotopie zwischen stetigen Abbildungen. Wir beginnen mit Kettenabbildungen, die in diesem Sinne homotop zur Nullabbildung sind.

13.5 Proposition. *Es seien C, D Kettenkomplexe und $(K_r)_{r \in \mathbb{Z}}$ eine Familie linearer Abbildungen $K_r: C_r \rightarrow D_{r+1}$. Wir setzen $f_r := \partial_{r+1}K_r + K_{r-1}\partial_r$. Dann ist $f: C \rightarrow D$ eine Kettenabbildung und $H_r(f) = 0$ für alle r .*

Beweis. Um zu sehen, dass f eine Kettenabbildung ist, berechnen wir

$$\begin{aligned} f_{r-1}\partial_r &= (\partial_r K_{r-1} + K_{r-2}\partial_{r-1})\partial_r = \partial_r K_{r-1}\partial_r + K_{r-2}0 = \partial_r K_{r-1}\partial_r, \\ \partial_r f_r &= \partial_r(\partial_{r+1}K_r + K_{r-1}\partial_r) = 0K_r + \partial_r K_{r-1}\partial_r = \partial_r K_{r-1}\partial_r. \end{aligned}$$

Sei nun $[c] \in H_r(C)$. Dann ist

$$H_r(f)([c]) = [f_r(c)] = [\partial_{r+1}K_r c + K_{r-1}\partial_r c] = [\partial_{r+1}K_r c] = 0,$$

da $\partial c = 0$ und jeder Rand eine triviale Homologieklass repräsentiert. \square

13.6 Beispiel. Bei der Berechnung der reduzierten Homologie eines Kegels \mathcal{S} in Proposition 12.10 haben wir Abbildungen $K_r: \tilde{C}_r(\mathcal{S}) \rightarrow \tilde{C}_{r+1}$ produziert, so dass $\text{id}_{\tilde{C}(\mathcal{S})} = \partial K + K\partial$. Es folgte, dass $\text{id}_{\tilde{H}_r(\mathcal{S})} = H_r(\text{id}_{\tilde{C}(\mathcal{S})}) = 0$, also $\tilde{H}_r(\mathcal{S}) = 0$.

Kettenabbildungen von C nach D bilden einen R -Modul. Wir haben gerade einen Untermodul von Kettenabbildungen betrachtet, die wir als äquivalent zur Nullabbildung betrachten wollen. Damit ist nun klar, wann wir zwei Kettenabbildungen als äquivalent betrachten werden.

13.7 Definition. Es seien $f, g: C \rightarrow D$ Kettenabbildungen. Dann ist $f \simeq g$ genau dann, wenn Abbildungen $K_r: C_r \rightarrow D_{r+1}$ existieren, so dass $\partial K + K\partial = g - f$. In diesem Fall heiße K eine *Kettenhomotopie von f nach g* und f und g heißen *kettenhomotop*.

Kettenkomplexe C, D heißen *kettenhomotopieäquivalent*, $C \simeq D$, wenn Kettenabbildungen $f: C \rightarrow D, g: D \rightarrow C$ mit $f \circ g \simeq \text{id}_D, g \circ f \simeq \text{id}_C$ existieren. In diesem Fall heißt f eine *Kettenhomotopieäquivalenz*.

13.8 Proposition. *Kettenhomotopie und Kettenhomotopieäquivalenz sind Äquivalenzrelationen. Ist $f: C \rightarrow D$ eine Kettenhomotopieäquivalenz, so ist $H_r(f): H_r(C) \rightarrow H_r(D)$ für alle r ein Isomorphismus.*

Beweis. Zur Transitivität der Kettenhomotopie bemerken wir, dass, wenn K eine Kettenhomotopie von f nach g ist und K' eine von g nach h , ihre Summe $K + K'$ eine Kettenhomotopie von f nach h ist.

Um zu sehen, dass Kettenhomotopieäquivalenz transitiv ist, zeigen wir, dass für homotope Kettenabbildungen $f, f': C \rightarrow D$ und $h, h': D \rightarrow E$ auch $h \circ f \simeq h' \circ f'$ gilt. Dazu sei $f' - f = \partial K + K\partial$ und $h' - h = \partial K' + K'\partial$. Wir setzen $K'' = hK + K'f'$. Dann ist

$$\begin{aligned} \partial K'' + K''\partial &= \partial hK + \partial K'f' + hK\partial + K'f'\partial \\ &= h\partial K + hK\partial + \partial K'f' + K'\partial f' \\ &= h(\partial K + K\partial) + (\partial K' + K'\partial)f' \\ &= h(f' - f) + (h' - h)f' = h'f' - hf. \end{aligned}$$

Der Rest folgt dann rein formal wie für Homotopieäquivalenz von Räumen.

Schließlich sei $f \simeq g: C \rightarrow D$. Wir haben in Proposition 13.5 gesehen, dass dann $H_r(g - f) = 0$. Nun ist H_r aber additiv, also ist $H_r(g) - H_r(f) = H_r(g - f) = 0$. \square

13.9 Beispiel. Wir betrachten das Beispiel eines Kegels noch einmal von einem anderen Standpunkt aus. Es sei \mathcal{S} ein Kegel mit Spitze v . Wir definieren K wie zuvor aber auf dem nicht reduzierten Kettenkomplex, also $K_r: C_r(\mathcal{S}) \rightarrow C_{r+1}(\mathcal{S})$. Dann gilt $\partial_{r+1}K_r + K_{r-1}\partial_r = 0$ für $r > 0$ und $(\partial_1 K_0 + K_{-1}\partial_0)\langle u \rangle = \partial_1(K_0\langle u \rangle) = \langle u \rangle - \langle v \rangle$.

Definieren wir nun simpliziale Abbildungen

$$\begin{array}{ll} f: \mathcal{S} \rightarrow \Delta^0 & g: \Delta^0 \rightarrow \mathcal{S} \\ u \mapsto 0 & 0 \mapsto v \end{array}$$

(man beachte, dass 0 den einzigen 0 -Simplex von Δ^0 bezeichnet), so ist zunächst einmal $f \circ g = \text{id}_{\Delta^0}$, also $H(f) \circ H(g) = \text{id}_{H(\Delta^0)}$. Weiter ist nun aber $\text{id}_{C(\mathcal{S})} - C(g \circ f) = \partial K + K\partial$, also $\text{id}_{C(\mathcal{S})} \simeq C(g \circ f)$ und damit auch $H(g) \circ H(f) = \text{id}_{H(\mathcal{S})}$. Damit ist $H_r(f)$ für alle r ein Isomorphismus, also

$$H_r(\mathcal{S}) \cong H_r(\Delta^0) \cong \begin{cases} 0, & k \neq 0, \\ R, & k = 0. \end{cases}$$

Bäume sind azyklisch

Wir wollen nun zeigen, dass ein Baum auch die Homologie eines Punktes hat. Es sei \mathcal{T} ein Baum und $v_0 \in V(\mathcal{T})$.

Ähnlich wie beim Beweis des Satzes, dass Bäume zusammenziehbar sind, wählen wir für jedes $u \in V(\mathcal{T})$ einen Weg von v_0 nach u , dieses Mal in Form von einer 1-Kette: Es gibt eindeutig bestimmte $n \geq 0$ und $w_i \in V(\mathcal{T})$,

$0 \leq i \leq n$, mit $v_0 = w_0$, $u = w_n$, $\{w_r, w_{r+1}\} \in \mathcal{T}$ und $w_r \neq w_{r'}$ für $0 \leq r < r' \leq n$. Mit diesen setzen wir

$$K(\langle u \rangle) := \sum_{0 \leq r < n} \langle w_r, w_{r+1} \rangle$$

und setzen dies zu einer linearen Abbildung $K: \tilde{C}_0(\mathcal{T}) \rightarrow \tilde{C}_1(\mathcal{T})$ fort. Zunächst stellen wir

$$\mathfrak{d}(K(\langle u \rangle)) = \sum_{0 \leq r < n} (-\langle w_r \rangle + \langle w_{r+1} \rangle) = -\langle w_0 \rangle + \langle w_n \rangle = -\langle v_0 \rangle + \langle u \rangle$$

fest. Außerdem ist für einen 1-Simplex $\{u_0, u_1\} \in \mathcal{T}$ entweder $K\langle u_1 \rangle = K\langle u_0 \rangle + \langle u_0, u_1 \rangle$ oder $K\langle u_0 \rangle = K\langle u_1 \rangle + \langle u_1, u_0 \rangle$. Beide Gleichungen sind aber wegen $[u_1, u_0] = -[u_0, u_1]$ äquivalent, und aufgrund der Linearität folgt

$$c = K(\mathfrak{d}c) \quad \text{für alle } c \in \tilde{C}_1(\mathcal{T}).$$

Definieren wir weiter

$$\begin{aligned} K: \tilde{C}_{-1}(\mathcal{T}) &\rightarrow \tilde{C}_0(\mathcal{T}) & K: \tilde{C}_r(\mathcal{T}) &\rightarrow \tilde{C}_{r+1}(\mathcal{T}), \quad r \notin \{-1, 0\} \\ K\langle \rangle &= \langle v_0 \rangle & Kc &= 0, \end{aligned}$$

so haben wir also

$$\mathfrak{d}K + K\mathfrak{d} = \text{id}_{\tilde{C}(\mathcal{T})}$$

und damit:

13.10 Proposition. *Ist \mathcal{T} ein (nicht leerer) Baum, so ist $\tilde{H}_r(\mathcal{T}) = 0$ für alle $r \in \mathbb{Z}$. \square*

Abschnitt 14

Exakte Sequenzen und H_1

Exakte Sequenzen

14.1 Definition. Eine Sequenz von R -Moduln und R -linearen Abbildungen

$$\cdots \rightarrow A_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \rightarrow \cdots ,$$

die endlich oder unendlich sein kann, ist *exakt bei dem Modul A_i* , wenn $\ker f_i = \operatorname{im} f_{i-1}$. Sie ist *exakt*, wenn sie bei allen Moduln exakt ist, bei denen das definiert ist. Eine *kurze exakte Sequenz* ist eine exakte Sequenz der Form

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0.$$

Dass diese Sequenz exakt ist, bedeutet, dass f injektiv ist, g surjektiv und dass $\ker g = \operatorname{im} f$.

14.2 Definition. Eine Sequenz von R -Kettenkomplexen und R -Kettenabbildungen

$$\cdots \rightarrow A^{i-1} \xrightarrow{f^{i-1}} A^i \xrightarrow{f^i} A^{i+1} \rightarrow \cdots ,$$

heißt *exakt*, wenn für jedes $k \in \mathbb{Z}$ die Sequenz

$$\cdots \rightarrow A_k^{i-1} \xrightarrow{f_k^{i-1}} A_k^i \xrightarrow{f_k^i} A_k^{i+1} \rightarrow \cdots ,$$

von R -Moduln und R -linearen Abbildungen exakt ist.

14.3 Lemma. Sei

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Dann ist

$$H_k(A) \xrightarrow{H_k(f)} H_k(B) \xrightarrow{H_k(g)} H_k(C)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ exakt.

Beweis. Da $\text{im } f \subset \ker g$ ist $g \circ f = 0$, also $H_k(g) \circ H_k(f) = H_k(g \circ f) = H_k(0) = 0$, also $\text{im } H_k(f) \subset \ker H_k(g)$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & B_{k+1} & \xrightarrow{g_{k+1}} & C_{k+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \mathfrak{d} & & \downarrow \mathfrak{d} & & \\
 A_k & \xrightarrow{f_k} & B_k & \xrightarrow{g_k} & C_k & & \\
 \downarrow \mathfrak{d} & & \downarrow \mathfrak{d} & & & & \\
 0 \longrightarrow & A_{k-1} & \xrightarrow{f_{k-1}} & B_{k-1} & & &
 \end{array}$$

Sei $\beta \in \ker H_k(g)$. Es ist $\beta = [b]$, $b \in B_k$, $\mathfrak{d}b = 0$. Da $0 = H_k(g)([b]) = [g_k(b)]$, existiert ein $c \in C_{k+1}$ mit $\mathfrak{d}c = g_k(b)$. Da g_{k+1} surjektiv ist, existiert ein $d \in B_{k+1}$ mit $g_{k+1}(d) = c$. Es ist also $g_k(b - \mathfrak{d}d) = g_k(b) - g_k(\mathfrak{d}d) = g_k(b) - \mathfrak{d}(g_{k+1}(d)) = g_k(b) - \mathfrak{d}c = 0$. Da $\ker g_k \subset \text{im } f_k$, existiert ein $a \in A_k$ mit $f_k(a) = (b - \mathfrak{d}d)$. Es ist $f_{k-1}(\mathfrak{d}a) = \mathfrak{d}(f_k(a)) = \mathfrak{d}(b - \mathfrak{d}d) = \mathfrak{d}b = 0$, und da f_{k-1} injektiv ist, ist $\mathfrak{d}a = 0$. Also ist $[a] \in H_k(A)$ und $H_k(f)([a]) = [f_k(a)] = [b - \mathfrak{d}d] = [b] = \beta$. Das zeigt $\ker H_k(g) \subset \text{im } H_k(f)$. \square

14.4 Bemerkung. Beweise durch *Diagrammjagd* wie dieser mögen zunächst abschreckend wirken, sind aber mit etwas Übung meist einfach. Man versuche, den Beweis alleine zu reproduzieren, um sich davon zu überzeugen.

Bei dem letzten Beweis scheinen wir weniger herausbekommen zu haben als wir hineingesteckt haben. Wir brauchten, dass g surjektiv und f injektiv ist, und haben doch nur die Exaktheit der Homologiesequenz in der Mitte erhalten. In der Tat muss beispielsweise $H_k(g)$ nicht surjektiv sein. Ist $[c] \in H_k(C)$, so existiert zwar ein $b \in B_k$ mit $g_k(b) = c$, aber dies muss kein Zykel sein. Wir wissen nur, dass $g_{k-1}(\mathfrak{d}b) = \mathfrak{d}(g_k(b)) = \mathfrak{d}c = 0$. Statt $\mathfrak{d}b = 0$ wissen wir also nur $\mathfrak{d}b \in \text{im } f_{k-1}$. Dies führt zu folgender Definition.

14.5 Definition und Proposition. Sei

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Dann definiert

$$\mathfrak{d}_*([g_k(b)]) = [a] \quad \text{mit } a \in A_{k-1} \text{ und } f_{k-1}(a) = \mathfrak{d}b$$

eine lineare Abbildung

$$\mathfrak{d}_*: H_k(C) \rightarrow H_{k-1}(A).$$

Beweis. In der Bemerkung vor der Definition haben wir bereits gesehen, dass solche a und b immer existieren. Sobald wir gezeigt haben, dass \mathfrak{d}_* wohldefiniert ist, folgt aus der Linearität von g_k , \mathfrak{d} und f_{k-1} die von \mathfrak{d}_* . Wir zeigen also die Wohldefiniertheit.

Zunächst einmal ist zu zeigen, dass a ein Zykel ist. Es ist aber $f_{k-2}(\mathfrak{d}a) = \mathfrak{d}f_{k-1}(a) = \mathfrak{d}\mathfrak{d}b = 0$ und f_{k-2} ist injektiv.

Weiter zeigen wir, dass $[a]$ von der Wahl von a und b unabhängig ist. Es seien also zusätzlich a' , b' gegeben und $f_{k-1}(a') = \mathfrak{d}b'$, $g_k(b') = g_k(b)$. Dann ist $b - b' \in \ker g_k = \operatorname{im} f_k$. Es sei $d \in A_k$ mit $f_k(d) = b - b'$. Dann ist $f_{k-1}(\mathfrak{d}d) = \mathfrak{d}f_k(d) = \mathfrak{d}(b - b') = f_{k-1}(a - a')$ und, da f_{k-1} injektiv ist, $\mathfrak{d}d = a - a'$, also $[a] = [a']$. \square

14.6 Proposition (kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen liefert lange exakte Sequenz in Homologie). *Sei*

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Dann ist die Sequenz

$$H_k(A) \xrightarrow{H_k(f)} H_k(B) \xrightarrow{H_k(g)} H_k(C) \xrightarrow{\mathfrak{d}_*} H_{k-1}(A) \xrightarrow{H_{k-1}(f)} H_{k-1}(B)$$

exakt.

Beweis. Es bleibt die Exaktheit bei $H_k(C)$ und $H_{k-1}(A)$ nachzuprüfen.

Wir beginnen mit der Exaktheit bei $H_k(C)$. Sei $[b] \in H_k(B)$. Dann ist $H_k(g)([b]) = [g_k(b)]$ und $\mathfrak{d}b = 0 = f_{k-1}(0)$, also $\mathfrak{d}_*(H_k(g)([b])) = [0] = 0$. Sei nun $\gamma \in H_k(C)$, $\mathfrak{d}_*(\gamma) = 0$. Dann gibt es ein $d \in A_k$ und ein $b \in B_k$, so dass $\gamma = [g_k(b)]$, $\mathfrak{d}b = f_{k-1}(\mathfrak{d}d)$. Es ist dann $\mathfrak{d}(b - f_k(d)) = \mathfrak{d}b - f_{k-1}(\mathfrak{d}d) = 0$, also repräsentiert $b - f_k(d)$ ein Element $[b - f_k(d)] \in H_k(B)$ und es ist $H_k(g)([b - f_k(d)]) = [g_k(b) - g_k(f_k(d))] = [g_k(b)] = \gamma$.

Nun zur Exaktheit bei $H_{k-1}(A)$. Ist $\alpha \in \operatorname{im} \mathfrak{d}_*$, so ist $\alpha = [a]$ mit $f_{k-1}(a) = \mathfrak{d}b$ für ein $b \in B_k$. Es ist also $H_{k-1}(f)(\alpha) = [f_{k-1}(a)] = [\mathfrak{d}b] = 0$. Sei andererseits $\alpha = [a]$, $H_{k-1}(f)(\alpha) = 0$. Dann existiert ein $b \in B_k$ mit $\mathfrak{d}b = f_{k-1}(a)$. Da $\mathfrak{d}g_k(b) = g_{k-1}(\mathfrak{d}b) = g_{k-1}(f_{k-1}(a)) = 0$, repräsentiert $g_k(b)$ ein Element von $H_k(C)$, und es ist $\mathfrak{d}_*[g_k(b)] = [a] = \alpha$. \square

Wieder vergewissere man sich, dass es einfacher ist, den Beweis selbst zu führen als ihn nachzuvollziehen.

Relative Homologie

14.7 Definition und Proposition. *Es sei (B, \mathfrak{d}^B) ein Kettenkomplex. Ist $A_k \subset B_k$ für alle k ein Untermodul und $\mathfrak{d}_k^B[A_k] \subset A_{k-1}$ für alle k , so ist (A, \mathfrak{d}^A) mit $\mathfrak{d}_k^A := \mathfrak{d}_k^B|_{A_k} : A_k \rightarrow A_{k-1}$ ein Kettenkomplex. Wir nennen A einen Unterkomplex von B .*

In dieser Situation ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_k^{B/A} : B_k/A_k &\rightarrow B_{k-1}/A_{k-1} \\ [b] &\mapsto [\mathfrak{d}_k^B(b)] \end{aligned}$$

wohldefiniert, $(B/A, \mathfrak{d}^{B/A})$ ein weiterer Kettenkomplex und

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow B/A \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. \square

14.8 Definition (Homologie eines Paares). Ist \mathcal{K} ein abstrakter Simplicialkomplex und $\mathcal{L} \neq \emptyset$ ein Unterkomplex von \mathcal{K} , so ist $C(\mathcal{L})$ ein Unterkomplex von $C(\mathcal{K})$ und wir setzen $C(\mathcal{K}, \mathcal{L}) := C(\mathcal{K})/C(\mathcal{L})$ und $H(\mathcal{K}, \mathcal{L}) := H(C(\mathcal{K}, \mathcal{L}))$.

Wir haben also:

14.9 Proposition (Lange exakte Sequenz eines Paares). Ist \mathcal{K} ein abstrakter Simplicialkomplex und $\mathcal{L} \neq \emptyset$ ein Unterkomplex von \mathcal{K} und $i: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{K}$ die Inklusionsabbildung (eine simpliciale Abbildung), so sind

$$H_k(\mathcal{L}) \xrightarrow{H_k(i)} H_k(\mathcal{K}) \rightarrow H_k(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \xrightarrow{\mathfrak{d}_*} H_{k-1}(\mathcal{L}) \xrightarrow{H_{k-1}(i)} H_{k-1}(\mathcal{K})$$

und

$$\tilde{H}_k(\mathcal{L}) \xrightarrow{\tilde{H}_k(i)} \tilde{H}_k(\mathcal{K}) \rightarrow H_k(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \xrightarrow{\mathfrak{d}_*} \tilde{H}_{k-1}(\mathcal{L}) \xrightarrow{\tilde{H}_{k-1}(i)} \tilde{H}_{k-1}(\mathcal{K})$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ exakt.

Beweis. Nach Definition von $C(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ haben wir eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \rightarrow C(\mathcal{L}) \rightarrow C(\mathcal{K}) \rightarrow C(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \rightarrow 0,$$

woraus mit Proposition 14.5 die erste lange exakte Sequenz folgt. Für die zweite bemerken wir, dass $\tilde{C}_i(\mathcal{K})/\tilde{C}_i(\mathcal{L}) = C_i(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ für $i \neq -1$ und, da $\tilde{C}_{-1}(\mathcal{L}) \rightarrow \tilde{C}_{-1}(\mathcal{K})$ ein Isomorphismus ist, auch

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{C}_0(\mathcal{L}) & \xrightarrow{\tilde{C}_0(i)} & \tilde{C}_0(\mathcal{K}) & \longrightarrow & C_0(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \\ \downarrow \mathfrak{d} & & \downarrow \mathfrak{d} & & \downarrow \\ \tilde{C}_{-1}(\mathcal{L}) & \xrightarrow{\tilde{C}_{-1}(i)} & \tilde{C}_{-1}(\mathcal{K}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

kommutativ mit kurzen exakten Reihen ist, also auch

$$0 \rightarrow \tilde{C}(\mathcal{L}) \rightarrow \tilde{C}(\mathcal{K}) \rightarrow C(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \rightarrow 0,$$

eine kurze exakte Sequenz ist. \square

14.10 Beispiel ($H(\mathfrak{d}\Delta^n)$). Bei der Berechnung von $\tilde{H}(\mathfrak{d}\Delta^n)$ haben wir die Kettenkomplexe $\tilde{C}(\mathfrak{d}\Delta^n)$ und $\tilde{C}(\Delta^n)$ verglichen und $\tilde{H}_k(\Delta^n) = 0$ benutzt. Wir können dies nun mit Hilfe der langen exakten Sequenz des Paares $(\Delta^n, \mathfrak{d}\Delta^n)$ erneut formulieren. Dazu betrachten wir

$$0 = \tilde{H}_{k+1}(\Delta^n) \xrightarrow{q_*} H_{k+1}(\Delta^n, \mathfrak{d}\Delta^n) \xrightarrow{\mathfrak{d}_*} \tilde{H}_k(\mathfrak{d}\Delta^n) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_k(\Delta^n) = 0.$$

Es ist $\text{im } \mathfrak{d}_* = \ker i_*$, und da $i_* = 0$, ist \mathfrak{d}_* surjektiv. Es ist $\ker \mathfrak{d}_* = \text{im } q_*$, und da $q_* = 0$, ist \mathfrak{d}_* injektiv. Es ist also

$$H_{k+1}(\Delta^n, \mathfrak{d}\Delta^n) \xrightarrow[\cong]{\mathfrak{d}_*} \tilde{H}_k(\mathfrak{d}\Delta^n)$$

ein Isomorphismus.

Nun ist aber

$$C_k(\Delta^n, \mathfrak{d}\Delta^n) = C_k(\Delta^n)/C_k(\mathfrak{d}\Delta^n) \cong \begin{cases} R, & k = n \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

Damit erhalten wir

$$\tilde{H}_k(\mathfrak{d}\Delta^n) \cong H_{k+1}(\Delta^n, \mathfrak{d}\Delta^n) \cong \begin{cases} R, & k+1 = n, \\ 0, & k+1 \neq n \end{cases}$$

wie zuvor. Da $C_n(\Delta^n, \mathfrak{d}\Delta^n)$ von $\langle 0, \dots, n \rangle$ erzeugt wird und

$$\mathfrak{d}_*([\langle 0, \dots, n \rangle]) = [\mathfrak{d}\langle 0, \dots, n \rangle] \in \tilde{H}_{n-1}(\mathfrak{d}\Delta^n),$$

erhalten wir auch wieder, dass $\mathfrak{d}\langle 0, \dots, n \rangle$ den Erzeuger von $\tilde{H}_{n-1}(\mathfrak{d}\Delta^n)$ repräsentiert.

H₁

Wir wollen nun für einen Simplicialkomplex \mathcal{S} die erste Homologiegruppe $H_1(\mathcal{S})$ beschreiben und mit $\pi_1(|\mathcal{S}|)$ vergleichen.

Es sei $|\mathcal{S}|$ zusammenhängend und nicht leer. Wir wählen einen aufspannenden Baum \mathcal{T} von $\mathcal{S}^{(1)}$. Da $\tilde{H}_k(\mathcal{T}) = 0$ für alle k folgt unter Benutzung der langen exakten Sequenz des Paares $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$

$$0 = \tilde{H}_k(\mathcal{T}) \rightarrow \tilde{H}_k(\mathcal{S}) \rightarrow H_k(\mathcal{S}, \mathcal{T}) \rightarrow \tilde{H}_{k-1}(\mathcal{T}) = 0,$$

dass die Abbildung $\tilde{H}_k(\mathcal{S}) \rightarrow H_k(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ für alle k ein Isomorphismus ist. Da $\mathcal{S}^{(0)} = \mathcal{T}^{(0)}$, ist $C_0(\mathcal{S}, \mathcal{T}) = 0$, und wir sehen sofort:

14.11 Proposition. *Ist \mathcal{S} ein Simplicialkomplex und $|\mathcal{S}|$ nicht-leer und zusammenhängend, so ist $\tilde{H}_0(\mathcal{S}) = 0$.* \square

Aus $C_0(\mathcal{S}, \mathcal{T}) = 0$ folgt auch sofort $Z_1(\mathcal{S}, \mathcal{T}) = C_1(\mathcal{S}, \mathcal{T})$. Dieser Modul hat eine Basis, die in Bijektion zu den Kanten von \mathcal{S} , die nicht in \mathcal{T} liegen, steht. Andererseits ist $C_2(\mathcal{S}, \mathcal{T}) = C_2(\mathcal{S})$, da \mathcal{T} eindimensional ist. Damit haben wir folgendes, wobei wir die Notation so wählen, dass sie parallel zu Satz 11.14 ist.

14.12 Proposition. *Es sei \mathcal{S} ein Simplicialkomplex, \mathcal{T} ein aufspannender Baum von $\mathcal{S}^{(1)}$. Auf $V(\mathcal{S})$ sei eine totale Ordnung gewählt. Für $u_0, u_1 \in V(\mathcal{S})$, $u_0 \neq u_1$ setzen wir $h_{u_0, u_1} := [\langle u_0, u_1 \rangle] \in C_1(\mathcal{S}, \mathcal{T})$. Dann ist $h_{u_0, u_1} = 0$ für $\{u_0, u_1\} \in \mathcal{T}$, das System*

$$(h_{u_0, u_1})_{\substack{\{u_0, u_1\} \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{T} \\ u_0 < u_1}}$$

eine Basis von $Z_1(\mathcal{S}, \mathcal{T})$, und

$$\{h_{u_0, u_1} + h_{u_1, u_2} - h_{u_0, u_2} : \{u_0, u_1, u_2\} \in \mathcal{S}, u_0 < u_1 < u_2\}$$

ein Erzeugendensystem von $B_1(\mathcal{S}, \mathcal{T})$. □

Dies ist völlig analog zu Satz 11.14, nur, für $R = \mathbb{Z}$, mit abelschen Gruppen an Stelle von Gruppen. Daher ist $H_1(\mathcal{S})$ die Abelsisierung von $\pi_1(\mathcal{S})$.

14.13 Satz (Der kleine Hurewicz). *Es sei \mathcal{S} ein abstrakter Simplicialkomplex und $|\mathcal{S}|$ zusammenhängend und nicht-leer. Dann ist $H_1(\mathcal{S}; \mathbb{Z})$ isomorph zur Abelsisierung von $\pi_1(|\mathcal{S}|, v_0)$,*

$$H_1(\mathcal{S}; \mathbb{Z}) \cong \pi_1(|\mathcal{S}|) / [\pi_1(|\mathcal{S}|), \pi_1(|\mathcal{S}|)].$$

Beweis. Wir erinnern uns, dass $\pi_1(|\mathcal{S}^{(1)}|)$ frei von einem System $(g_{u_0, u_1})_{\{u_0, u_1\} \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{T}, u_0 < u_1}$ erzeugt wird. Es gibt daher einen Gruppenhomomorphismus $\pi_1(|\mathcal{S}^{(1)}|) \rightarrow Z_1(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ mit $g_{u_0, u_1} \mapsto h_{u_0, u_1}$. Weiter wissen wir, dass die von der Inklusion induzierte Abbildung $j_*: \pi_1(|\mathcal{S}^{(1)}|) \rightarrow \pi_1(|\mathcal{S}|)$ surjektiv ist und ihr Kern der kleinste Normalteiler ist, der die Elemente $g_{u_0, u_1} g_{u_1, u_2} g_{u_0, u_2}^{-1}$, $u_0 < u_1 < u_2$, $\{u_0, u_1, u_2\} \in \mathcal{S}$ enthält. Ein solches Element wird auf $h_{u_0, u_1} + h_{u_1, u_2} - h_{u_0, u_2} \in B_1(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ abgebildet. Daher induziert die Abbildung einen Gruppenhomomorphismus $\pi_1(|\mathcal{S}|) \rightarrow Z_1(\mathcal{S}, \mathcal{T})/B_1(\mathcal{S}, \mathcal{T}) = H_1(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ und, da $H_1(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ abelsch ist, einen Gruppenhomomorphismus

$$\pi_1(|\mathcal{S}|) / [\pi_1(|\mathcal{S}|), \pi_1(|\mathcal{S}|)] \rightarrow H_1(\mathcal{S}, \mathcal{T}).$$

Andererseits existiert, da $(h_{u_0, u_1})_{\{u_0, u_1\} \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{T}, u_0 < u_1}$ eine Basis von $Z_1(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ ist und $\pi_1(|\mathcal{S}|) / [\pi_1(|\mathcal{S}|), \pi_1(|\mathcal{S}|)]$ eine abelsche Gruppe ist, ein Gruppenhomomorphismus $Z_1(\mathcal{S}, \mathcal{T}) \rightarrow \pi_1(|\mathcal{S}|) / [\pi_1(|\mathcal{S}|), \pi_1(|\mathcal{S}|)]$ mit $h_{u_0, u_1} \mapsto [j_*(g_{u_0, u_1})]$. Da hierbei die Elemente aus $B_1(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ auf Null abgebildet werden, induziert dieser einen Gruppenhomomorphismus

$$H_1(\mathcal{S}, \mathcal{T}) \rightarrow \pi_1(|\mathcal{S}|) / [\pi_1(|\mathcal{S}|), \pi_1(|\mathcal{S}|)].$$

Nun sind die beiden oben konstruierten Gruppenhomomorphismen offensichtlich invers zueinander. Zusammen mit $H_1(\mathcal{S}, \mathcal{T}) \cong \tilde{H}_1(\mathcal{S}) = H_1(\mathcal{S})$ folgt die Behauptung. \square

Abschnitt 15

Topologische Invarianz der Homologie

Simpliziale Approximation

15.1 Definition. Es sei \mathcal{K} ein Simplizialkomplex und $v \in V(\mathcal{K})$. Wir nennen den Unterkomplex

$$\overline{\text{st}} v := \{\sigma : \text{Es existiert } \tau \in \mathcal{K} \text{ mit } v \in \tau \supset \sigma\}$$

den *abgeschlossenen Stern von v* , den Unterkomplex

$$\text{lk } v := \{\sigma \in \overline{\text{st}} v : v \notin \sigma\}$$

den *Link von v* und die Teilmenge

$$\text{st } v := |\overline{\text{st}} v| \setminus |\text{lk } v| \subset |\mathcal{K}|$$

den *offenen Stern von v* .

15.2 Lemma. Es sei \mathcal{K} ein Simplizialkomplex und $u_0, \dots, u_r \in V(\mathcal{K})$. Dann gilt

$$\bigcap_{k=0}^r \text{st } u_k \neq \emptyset \iff \{u_0, \dots, u_r\} \in \mathcal{K}.$$

□

15.3 Definition und Proposition. Es seien \mathcal{K}, \mathcal{L} Simplizialkomplexe und $h: |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$ eine stetige Abbildung.

Eine *simpliziale Approximation* von h ist eine Funktion $f: V(\mathcal{K}) \rightarrow V(\mathcal{L})$, so dass

$$h[\text{st } v] \subset \text{st } f(v)$$

für alle $v \in V(\mathcal{K})$.

Eine solche Abbildung f ist *automatisch simplizial*. Mehr noch, ist g eine weitere *simpliziale Approximation* von h , so sind f und g *benachbart* (contiguous), das heißt für alle $\sigma \in \mathcal{K}$ ist $f[\sigma] \cup g[\sigma] \in \mathcal{L}$.

Beweis. Es seien f, g simpliziale Approximationen von h und $\sigma \in \mathcal{K}$. Dann ist

$$\bigcap_{v \in \sigma} \text{st } f(v) \cap \bigcap_{v \in \sigma} \text{st } g(v) \supset \bigcap_{v \in \sigma} h[\text{st } v] \cap \bigcap_{v \in \sigma} h[\text{st } v] \supset h \left[\bigcap_{v \in \sigma} \text{st } v \right] \neq \emptyset,$$

also $f[\sigma] \cup g[\sigma] \in \mathcal{L}$. Dabei haben wir das vorhergehende Lemma verwendet. \square

15.4 Proposition. *Ist \mathcal{K} ein Simplicialkomplex, so ist $\text{id}_{\mathcal{K}}$ eine simpliziale Approximation von $\text{id}_{|\mathcal{K}|}$.* \square

15.5 Proposition. *Sind $\mathcal{K}, \mathcal{L}, \mathcal{M}$ Simplicialkomplexe, $h: |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$, $k: |\mathcal{L}| \rightarrow |\mathcal{M}|$ stetige Abbildungen mit simplizialen Approximationen $f: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ und $g: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$, so ist $g \circ f$ simpliziale Approximation von $k \circ h$.*

Beweis. Sei $v \in V(\mathcal{K})$, dann ist $(k \circ h)[\text{st } v] = k[h[\text{st } v]] \subset k[\text{st } f(v)] \subset \text{st } g(f(v)) = \text{st}(g \circ f)(v)$. \square

15.6 Proposition. *Es seien $f, g: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ zwei benachbarte simpliziale Abbildungen. Dann ist $\tilde{C}(f) \simeq \tilde{C}(g)$ und $C(f) \simeq C(g)$.*

Beweis. Bevor wir die Kettenhomotopie definieren, führen wir ein technisches Hilfsmittel ein. Wir definieren D_k als den freien R -Modul mit Basis $\{(u_0, \dots, u_k): \{u_0, \dots, u_k\} \in \mathcal{L}\}$ und machen diese Moduln durch $\partial(u_0, \dots, u_k) = \sum_i (-1)^i (u_0, \dots, \widehat{u_i}, \dots, u_k)$ zu einem Kettenkomplex. Man prüft nun nach, dass

$$\begin{aligned} \gamma_k: D_k &\rightarrow \tilde{C}_k(\mathcal{L}) \\ (u_0, \dots, u_k) &\rightarrow \begin{cases} \langle u_0, \dots, u_k \rangle, & u_i \neq u_j \text{ für } i \neq j, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

eine Kettenabbildung definiert. Dazu ist nur nachzuprüfen, dass sich für $u_i = u_j$, $i < j$,

$$\begin{aligned} \gamma_{k-1}(\partial \langle u_0, \dots, u_k \rangle) &= \\ &= (-1)^i \gamma_{k-1}(u_0, \dots, \widehat{u_i}, \dots, u_k) + (-1)^j \gamma_{k-1}(u_0, \dots, \widehat{u_j}, \dots, u_k) = 0 \end{aligned}$$

ergibt, da die beiden auftretenden k -Tupel bis auf Reihenfolge gleich sind, und die Permutation, die eines in das andere überführt, Komposition von $j - i - 1$ Transpositionen ist (entsprechend den Einträgen zwischen u_i und u_j) und daher Signum $(-1)^{j-i-1}$ hat. Wir wählen nun eine totale Ordnung auf $V(\mathcal{K})$ und definieren

$$\begin{aligned} K_k: \tilde{C}(\mathcal{K}) &\rightarrow D_{k+1} \\ \langle v_0, \dots, v_k \rangle &\mapsto \sum_{i=0}^k (-1)^i (f(v_0), \dots, f(v_i), g(v_i), \dots, g(v_k)), \end{aligned}$$

$$v_0 < v_1 < \dots < v_k.$$

Eine Rechnung (Übung!) ergibt nun für $v_0 < \dots < v_k$

$$\begin{aligned} K_{k-1}(\mathfrak{d}_k \langle v_0, \dots, v_k \rangle) + \mathfrak{d}_{k+1}(K_k(\langle v_0, \dots, v_k \rangle)) = \\ = -(f(v_0), \dots, f(v_k)) + (g(v_0), \dots, g(v_k)), \end{aligned}$$

also $\gamma K \mathfrak{d} + \mathfrak{d} \gamma K = \gamma \circ (K \mathfrak{d} + \mathfrak{d} K) = -\tilde{C}(f) + \tilde{C}(g)$, also ist $\gamma \circ K$ eine Kettenhomotopie von $\tilde{C}(f)$ nach $\tilde{C}(g)$. Da $K_{-1} = 0$, ergibt dies ebenso eine Kettenhomotopie von $C(f)$ nach $C(g)$. \square

Unterteilungen

15.7 Definition (Baryzentrische Unterteilung). Es sei \mathcal{K} ein abstrakter Simplicialkomplex. Wir definieren einen weiteren Simplicialkomplex

$$\text{sd } \mathcal{K} := \{C \subset \mathcal{K} \setminus \{\emptyset\} : C \text{ endlich, für alle } \tau, \sigma \in C \text{ ist } \sigma \subset \tau \text{ oder } \tau \subset \sigma\},$$

die *baryzentrische Unterteilung* von \mathcal{K} .

Es ist also $V(\text{sd } \mathcal{S}) = \mathcal{S} \setminus \{\emptyset\}$. Wir wollen die Ecken der baryzentrischen Unterteilung mit den Baryzentern (Schwerpunkten) der Simplexe des ursprünglichen Komplexes identifizieren.

15.8 Definition. Für einen Simplicialkomplex \mathcal{S} und $\tau = \{v_0, \dots, v_k\} \in \mathcal{S}$, $|\tau| = k + 1 > 0$, definieren wir das *Baryzentrum*

$$b_\tau := \sum_{j=0}^k \frac{1}{n+1} v \in |\mathcal{S}|$$

von τ .

15.9 Definition und Proposition. Es sei \mathcal{S} ein Simplicialkomplex. Dann definiert

$$\begin{aligned} \beta: |\text{sd } \mathcal{S}| &\rightarrow |\mathcal{S}| \\ \sum_i \lambda_i \tau_i &\mapsto \sum_i \lambda_i b_{\tau_i} \end{aligned}$$

einen Homöomorphismus.

Beweis. Die Abbildung ist so zu verstehen, dass die linke Seite einen Punkt in dem Simplex $\{\tau_i\} \in \text{sd } \mathcal{S}$ mit affinen Koordinaten (λ_i) bezeichnet. Es ist dann $\bigcup_i \tau_i$ ein Simplex von \mathcal{S} und jedes der b_{τ_i} ein Punkt in diesem Simplex. Damit ist auf jedem Simplex von $\text{sd } \mathcal{S}$ eine stetige Abbildung definiert. Da das Weglassen eines Summanden $\lambda_i b_{\tau_i}$ mit $\lambda_i = 0$ die rechte Seite nicht ändert, passen diese Abbildungen zusammen und definieren eine stetige Abbildung $\beta: |\text{sd } \mathcal{S}| \rightarrow |\mathcal{S}|$. Wir zeigen nun, dass diese bijektiv ist.

Wir legen eine totale Ordnung auf $V(\mathcal{S})$ fest. Dann hat jeder Punkt $x \in |\text{sd } \mathcal{S}|$ eine eindeutige Darstellung

$$x = \sum_{i=0}^r \lambda_i \sigma_i$$

$\sigma_i = \{v_0, \dots, v_i\}$, $\lambda_r \neq 0$ und $v_i < v_{i+1}$ falls $\lambda_i = 0$. Für diesen ist dann

$$\beta(x) = \sum_{i=0}^r \lambda_i b_{\sigma_i} = \sum_{i=0}^r \lambda_i \sum_{j=0}^i \frac{1}{1+i} v_j = \sum_{j=0}^r \sum_{i=j}^r \frac{\lambda_i}{i+1} v_j = \sum_{j=0}^r \mu_j v_j$$

mit

$$\mu_j := \sum_{i=j}^r \frac{\lambda_i}{i+1}.$$

Dabei ist dann $\mu_r \neq 0$, $\mu_i \geq \mu_{i+1}$ und $\mu_i = \mu_{i+1} \iff \lambda_i = 0$. Andererseits hat aber jeder Punkt $y \in |\mathcal{S}|$ eine eindeutige Darstellung

$$y = \sum_{i=0}^r \mu_i v_i$$

mit $\mu_0 \geq \mu_1 \geq \dots \geq \mu_r > 0$ und $u_i < u_{i+1}$ falls $\mu_i = \mu_{i+1}$. Da sich aus den μ_i die λ_i vermöge

$$\lambda_r = (r+1)\mu_r, \quad \lambda_j = (j+1)(\mu_j - \mu_{j+1}), \quad 0 \leq j < r.$$

zurückgewinnen lassen, ist β eine Bijektion. Man beachte, dass sich aus dieser Rechnung auch ergibt, dass dann

$$\sum_{i=0}^r \lambda_i = \sum_{i=0}^r \lambda_i \sum_{j=0}^i \frac{1}{1+i} = \sum_{j=0}^r \sum_{i=j}^r \frac{\lambda_i}{i+1} = \sum_{j=0}^r \mu_j.$$

Um zu zeigen, dass β ein Homöomorphismus ist, zeigen wir, dass für eine abgeschlossene Menge $A \subset |\text{sd } \mathcal{S}|$ auch $\beta[A] \subset |\mathcal{S}|$ abgeschlossen ist. Nun ist der für einen Simplex τ aus \mathcal{S} der von $\beta[A]$ mit diesem Simplex $\beta[A] \cap |\tau| = \bigcup_{\sigma} \beta[A \cap |\sigma|]$, wobei σ die Simplizes der baryzentrischen Unterteilung von σ durchläuft. Dies ist eine endliche Vereinigung und jede der Mengen $A \cap |\sigma|$ kompakt, also ist $\beta[A] \cap |\tau|$ als endliche Vereinigung kompakter Mengen kompakt und damit abgeschlossen. Also ist $\beta[A]$ abgeschlossen. \square

15.10 Definition. Für total geordnetes $V(\mathcal{K})$ definieren wir

$$m: V(\text{sd } \mathcal{K}) \rightarrow V(\mathcal{K})$$

$$\tau \mapsto \min \tau.$$

15.11 Proposition. Die Abbildung m ist eine simpliziale Approximation von β .

Beweis. Es sei $\tau \in V(\text{sd } \mathcal{S})$ und $x \in \text{st } \tau$. Das heißt, $x = \sum_{i=0}^k \lambda_i \sigma_i$ mit $\sum_i \lambda_i = 1$, $\lambda_i > 0$ für alle i , $\sigma_i \in V(\text{sd } \mathcal{S})$, $\sigma_0 \subset \cdots \subset \sigma_k$, und es existiert ein j mit $\tau = \sigma_j$. Dann ist

$$\begin{aligned} \beta(x) &= \sum_{i=0}^k \lambda_i b_{\sigma_i} = \sum_{i=0}^k \lambda_i \sum_{v \in \sigma_i} \frac{1}{\#\sigma_i} v = \\ &= \sum_{v \in \sigma_k} \left(\sum_{i: v \in \sigma_i} \frac{\lambda_i}{\#\sigma_i} \right) v \in \text{st } v \quad \text{für alle } v \in \sigma_k, \end{aligned}$$

insbesondere $\beta(x) \in \text{st}(m(\tau))$. \square

15.12 Notation. Ist $\{u_0, \dots, u_k\}$ ein k -Simplex in \mathcal{K} und $\{v, u_0, \dots, u_k\} \in \mathcal{K}$, so setzen wir

$$v * \langle u_0, \dots, u_k \rangle := \begin{cases} \langle v, u_0, \dots, u_k \rangle, & v \neq u_i \text{ f.a. } i, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und setzen dies für $c \in \tilde{C}_k(\mathcal{K})$ linear zu $v * c$ fort, sofern alle Summanden definiert sind.

Wie schon früher bemerken wir:

15.13 Lemma. *Mit dieser Notation gilt $\mathfrak{d}(v * c) = c - v * \mathfrak{d}c$.* \square

15.14 Definition und Proposition. *Es sei \mathcal{K} ein abstrakter Simplicialkomplex. Durch $s_{-1}\langle \rangle = \langle \rangle$ und*

$$\begin{aligned} s_k: \tilde{C}_k(\mathcal{S}) &\rightarrow \tilde{C}_k(\text{sd } \mathcal{S}), \\ \tau &\mapsto b_\tau * s_{k-1}(\mathfrak{d}_k \tau), \end{aligned}$$

wird eine Kettenabbildung $s: \tilde{C}(\mathcal{K}) \rightarrow \tilde{C}(\text{sd } \mathcal{K})$ definiert.

Beweis. \square

In dieser Situation stellen wir nun fest:

15.15 Proposition. *Es ist $\tilde{C}(m) \circ s = \text{id}_{\tilde{C}(K)}$.*

Beweis. \square

15.16 Proposition. *Es ist $s \circ \tilde{C}(m) \simeq \text{id}_{\tilde{C}(\text{sd } K)}$ und $s \circ C(m) \simeq \text{id}_{C(\text{sd } K)}$.*

Beweis. \square

Der simpliciale Approximationssatz

15.17 Satz. *Es seien \mathcal{K}, \mathcal{L} Simplicialkomplexe, \mathcal{K} endlich, und $h: |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$ eine stetige Abbildung. Dann existieren ein $k \geq 0$ und eine simpliciale Approximation $f: \text{sd}^k \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ von $h \circ \beta^k$.*

Funktorialität bezüglich stetiger Abbildungen

15.18 Definition. Es seien \mathcal{K}, \mathcal{L} Simplicialkomplexe, \mathcal{K} endlich, und $h: |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$ eine stetige Abbildung. Dann definieren wir

$$H(h): H(\mathcal{K}) \rightarrow H(\mathcal{L})$$

durch

$$H(h) := H(f) \circ H(s^k),$$

wobei $f: \text{sd}^k \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ eine simpliciale Approximation von $h \circ \beta^k$ ist.

15.19 Satz. $H(h)$ ist wohldefiniert, $H(\text{id}) = \text{id}$, $H(k \circ h) = H(k) \circ H(h)$.

Auch für nicht endliches \mathcal{K} .

15.20 Korollar. Ist $h: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ ein Homöomorphismus, so ist $H(h): H(\mathcal{K}) \xrightarrow{\cong} H(\mathcal{L})$ ein Isomorphismus.

Eine erste Anwendung

15.21 Proposition. \mathbb{S}^{n-1} ist kein Retrakt von \mathbb{D}^n .

Beweis. Wir gehen wie bei Proposition 4.1, dem Fall $n = 2$, vor, nur dass wir Homologie an Stelle der Fundamentalgruppe benutzen.

Wir ersetzen das Paar $(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ durch das homöomorphe Paar $(|\Delta^n|, |\partial\Delta^n|)$, das heißt, wir benutzen diese Triangulierung des n -Balls. Sei $i: |\partial\Delta^n| \rightarrow |\Delta^n|$ die Inklusionsabbildung, und $r: |\Delta^n| \rightarrow |\partial\Delta^n|$ eine Retraktionsabbildung, also $r \circ i = \text{id}$. Das heißt, dass das Diagramm von Räumen

$$\begin{array}{ccc} |\partial\Delta^n| & \xrightarrow{i} & |\Delta^n| \\ & \searrow \text{id}_{|\partial\Delta^n|} & \downarrow r \\ & & |\partial\Delta^n| \end{array}$$

kommutiert. Mit Satz 15.19 erhalten wir daraus für $k \in \mathbb{Z}$ das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_k(\partial\Delta^n) & \xrightarrow{\tilde{H}_k(i)} & \tilde{H}_k(\Delta^n) \\ & \searrow \text{id}_{\tilde{H}_k(\partial\Delta^n)} & \downarrow \tilde{H}_k(r) \\ & & \tilde{H}_k(\partial\Delta^n). \end{array}$$

Da $\tilde{H}_k(\mathbb{D}^n) = 0$, ist die Komposition $\tilde{H}_k(r) \circ \tilde{H}_k(i) = \text{id}_{\tilde{H}_k(\partial\Delta^n)}$ trivial. Für $k = n - 1$ ergibt sich ein Widerspruch zu $\tilde{H}_{n-1}(\partial\Delta^n) \cong \mathbb{R}$. \square

15.22 Satz (Brouwerscher Fixpunktsatz). Für $n \geq 0$ hat jede stetige Abbildung $f: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ einen Fixpunkt.

Beweis. Wie für Satz 4.2, den Fall $n = 2$. \square

Abschnitt 16

Homotopieinvarianz, Euler-Charakteristik und mehr

Mehr zu simplizialen Abbildungen

Wir holen zuerst nach, zu beschreiben, wie eine simpliziale Abbildung zwischen Simplizialkomplexen eine stetige Abbildung zwischen den Realisierungen induziert.

16.1 Definition und Proposition. *Es seien \mathcal{S}, \mathcal{T} abstrakte Simplizialkomplexe und $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ eine simpliziale Abbildung. Dann wird eine stetige Abbildung $|f|: |\mathcal{S}| \rightarrow |\mathcal{T}|$ dadurch definiert, dass*

$$\begin{array}{ccc} |\mathcal{S}| & \xrightarrow{|f|} & |\mathcal{T}| \\ \uparrow \chi_{\sigma}^{\mathcal{S}} & & \uparrow \chi_{f[\sigma]}^{\mathcal{T}} \\ \Delta^{\sigma} & \xrightarrow{\sum_{v \in \sigma} \lambda_v e_v \mapsto \sum_{v \in \sigma} \lambda_v e_{f(v)}} & \Delta^{f[\sigma]} \end{array}$$

für alle $\sigma \in \mathcal{S}$ kommutiert.

Dies verallgemeinert die Konstruktion aus Proposition 10.8, wo f eine Inklusionsabbildung war.

Beweis. Die Abbildung ist eindeutig, da $|\mathcal{S}| = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}} \text{im } \chi_{\sigma}$. Sie ist wohldefiniert, da für $\tau \subset \sigma \in \mathcal{S}$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{\sigma} & \xrightarrow{\sum_{v \in \sigma} \lambda_v e_v \mapsto \sum_{v \in \sigma} \lambda_v e_{f(v)}} & \Delta^{f[\sigma]} \xrightarrow{\chi_{f[\sigma]}^{\mathcal{T}}} |\mathcal{T}| \\ \uparrow i_{\tau}^{\sigma} & & \uparrow i_{f[\tau]}^{f[\sigma]} \nearrow \chi_{f[\tau]}^{\mathcal{T}} \\ \Delta^{\tau} & \xrightarrow{\sum_{v \in \tau} \lambda_v e_v \mapsto \sum_{v \in \tau} \lambda_v e_{f(v)}} & \Delta^{f[\tau]} \end{array} \quad (16.1)$$

kommutiert. Sie ist stetig, da alle Kompositionen $|f| \circ \chi_{\sigma}$ für $\sigma \in \mathcal{S}$ stetig sind. \square

16.2 Proposition. *Es seien \mathcal{S} , \mathcal{T} , \mathcal{K} abstrakte Simplizialkomplexe und $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$, $g: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{K}$ simpliziale Abbildungen. Dann gilt:*

(i) *f ist eine simpliziale Approximation von $|f|$.*

(ii) *$|g \circ f| = |g| \circ |f|$.*

□

16.3 Proposition. *Es seien \mathcal{K} , \mathcal{L} abstrakte Simplizialkomplexe, $h: |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$ eine stetige Abbildung, $f: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ eine simpliziale Approximation von h . Dann ist $|f| \simeq g$.*

Beweis. Es sei $x \in |\mathcal{K}|$, x im Inneren des Simplexes $\sigma = \{u_0, \dots, u_k\} \in \mathcal{K}$ und $h(x)$ im Inneren des Simplexes $\tau \in \mathcal{L}$. Es ist $h(x) \in \bigcap_i \text{st } f(u_i)$, also ist $f[\sigma] \subset \tau$. Damit ist $|f|(x) \in |\tau|$, und

$$H: |\mathcal{K}| \times I \rightarrow |\mathcal{L}|$$

$$(x, t) \mapsto (1 - t) \cdot |f|(x) + t \cdot h(x)$$

wohldefiniert. Ist σ ein Simplex von \mathcal{K} und τ ein beliebiger Simplex von \mathcal{L} , so ist H offenbar auf der abgeschlossenen Menge $(|\sigma| \cap h^{-1}[|\tau|]) \times I$ stetig. Da das Bild von σ unter h nur endliche viele solcher τ trifft, ist H auf $|\sigma| \times I$ stetig. Damit ist H stetig und Homotopie von $|f|$ nach h . □

Dies können wir nutzen, um folgendes zu zeigen. Man beachte, dass wir den Fall $n = 1$ bereits früher bewiesen haben, er besagt, dass \mathbb{S}^m für $m > 1$ einfach zusammenhängend ist.

16.4 Proposition. *Ist $h: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^m$ stetig und $0 \leq n < m$, so ist h homotop zu einer konstanten Abbildung.*

Beweis. Wir identifizieren h mit einer Abbildung $|\mathfrak{d}\Delta^{n+1}| \rightarrow |\mathfrak{d}\Delta^{m+1}|$. Aus dem simplizialen Approximationssatz wissen wir, dass ein $k \geq 0$ und eine simpliziale Approximation f von $h \circ \beta^k: |\text{sd}^k \mathfrak{d}\Delta^{n+1}| \rightarrow |\mathfrak{d}\Delta^{m+1}|$ existieren. Nun kann ein Punkt im Inneren eines m -Simplexes von $\mathfrak{d}\Delta^{m+1}$ von $|f|$ nicht getroffen werden. Da aber das Komplement eines Punktes in einer Sphäre zusammenziehbar ist, $|f|$ homotop zu einer konstanten Abbildung, also ebenso die Abbildung $h \circ \beta^k$ und damit auch h , da β^k ein Homöomorphismus ist. □

Homotopieinvarianz

Wir wollen die Homotopieinvarianz der Homologiegruppen zeigen. Da eine Homotopie zwischen zwei Abbildungen von $|\mathcal{S}|$ in einen anderen Raum eine Abbildung von $|\mathcal{S}| \times I$ in diesen Raum ist, wollen wir zunächst $|\mathcal{S}| \times I$ triangulieren. Wir könnten allgemeiner Produkte von Simplizialkomplexen betrachten, aber wir belassen es bei diesem Spezialfall.

16.5 Definition und Proposition. Es sei \mathcal{S} ein Simplicialkomplex. Auf $V(\mathcal{S})$ sei eine totale Ordnung gewählt. Wir definieren

$$\begin{aligned} \mathcal{S} \times \Delta^1 := \{ \emptyset \} \cup ((\mathcal{S} \setminus \{ \emptyset \}) \times \{0, 1\}) \cup \\ \cup \{ \{ (v_0, 0), \dots, (v_i, 0), (v_i, 1), \dots, (v_k, 1) \} : \\ 0 \leq i \leq k, v_0 < v_1 < \dots, v_k, \{v_0, \dots, v_k\} \in \mathcal{S} \}. \end{aligned}$$

Dann ist $\mathcal{S} \times \Delta^1$ ein Simplicialkomplex mit $V(\mathcal{S} \times \Delta^1) = V(\mathcal{S}) \times \{0, 1\}$. Für $p \in \{0, 1\}$ ist

$$\begin{aligned} i_p: \mathcal{S} &\rightarrow \mathcal{S} \times \Delta^1 \\ v &\mapsto (v, p) \end{aligned}$$

eine simpliciale Abbildung, und es existiert ein Homöomorphismus $|\mathcal{S} \times \Delta^1| \approx |\mathcal{S}| \times I$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} |\mathcal{S}| & & & & \\ & \searrow^{x \mapsto (x, 1)} & & & \\ & & |\mathcal{S} \times \Delta^1| & \xrightarrow{\approx} & |\mathcal{S}| \times I \\ & \nearrow_{|i_0|} & & \nearrow_{x \mapsto (x, 0)} & \\ |\mathcal{S}| & & & & \end{array}$$

kommutiert.

Beweis.

$$\beta \left(\sum_{j=0}^i \lambda_i(v_j, 0) + \sum_{j=i+1}^{k+1} \lambda_i(v_{j-1}, 1) \right) = \left(\sum_{j=0}^k \mu_j v_j, \rho \right)$$

$$\mu_j = \lambda_j$$

□

Nehmen wir die topologische Invarianz als gegeben hin, so reduziert sich die Homotopieinvarianz auf folgendes Lemma.

16.6 Lemma. Es sei \mathcal{S} ein abstrakter Simplicialkomplex. Dann ist

$$H_k(i_0) = H_k(i_1): H_k(\mathcal{S}) \rightarrow H_k(\mathcal{S} \times \Delta^1)$$

für alle k und eine beliebige totale Ordnung auf $V(\mathcal{S})$.

Beweis. Wir werden zeigen, dass $C(i_0) \simeq C(i_1)$. Dazu definieren wir

$$K_r: C_r(\mathcal{S}) \rightarrow C_{r+1}(\mathcal{S} \times \Delta^1)$$

$$\langle v_0, \dots, v_r \rangle \mapsto \sum_{s=0}^r (-1)^s \langle (v_0, 0), \dots, (v_s, 0), (v_s, 1), \dots, (v_r, 1) \rangle,$$

wobei wir $v_0 < \dots < v_k$ annehmen. Wie zuvor erhalten wir

$$\partial_{r+1} K_r + K_{r-1} \partial_r = C_r(i_1) - C_r(i_0),$$

woraus die Behauptung folgt. \square

16.7 Proposition. *Es seien \mathcal{S}, \mathcal{T} Simplicialkomplexe und $f_0, f_1: |\mathcal{S}| \rightarrow |\mathcal{T}|$ stetige Abbildungen mit $f_0 \simeq f_1$. Dann ist $H_r(f) = H_r(g): H_r(\mathcal{S}) \rightarrow H_r(\mathcal{T})$ für alle r .*

Beweis. Sei $h: |\mathcal{S} \times \Delta^1| \xrightarrow{\sim} |\mathcal{S}| \times I$ der Homöomorphismus von oben und $F: |\mathcal{S}| \times I \rightarrow |\mathcal{T}|$ eine Homotopie von f_0 nach f_1 . Dann ist $f_0 = F \circ h \circ |i_0|$ und $f_1 = F \circ h \circ |i_1|$. Daher ist $H_r(f_0) = H_r(F \circ h) \circ H_r(|i_0|) = H_r(F \circ h) \circ H_r(i_0) = H_r(F \circ h) \circ H_r(i_1) = H_r(F \circ h) \circ H_r(|i_1|) = H_r(f_1)$. \square

16.8 Korollar. *Ist f eine Homotopieäquivalenz, so ist $H(f)$ ein Isomorphismus. Gleiches gilt für $\tilde{H}(f)$.* \square

Damit können wir nun endlich zeigen, dass Sphären verschiedener Dimension nicht homotopieäquivalent sind.

16.9 Proposition. *Es seien $n, m \geq -1$. Ist $\mathbb{S}^n \simeq \mathbb{S}^m$, so ist $n = m$.*

Beweis. Wir wissen, dass $\tilde{H}_k(\mathbb{S}^n) \neq 0 \iff n = k$. Damit folgt $0 \neq \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \cong \tilde{H}_n(\mathbb{S}^m)$ und daraus $n = m$. \square

Daraus können wir folgern, dass die Dimension eines euklidischen Raumes eine Homöomorphieinvariante ist.

16.10 Proposition. *Es seien $n, m \in \mathbb{N}$. Ist $\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^m$, so ist $n = m$.*

Beweis. Es sei $h: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^m$ ein Homöomorphismus. Dann ist $\mathbb{S}^{n-1} \simeq \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \approx \mathbb{R}^m \setminus \{h(0)\} \simeq \mathbb{S}^{m-1}$, also $n - 1 = m - 1$. \square

Die Euler-Charakteristik

Eine Homotopieinvariante von Kettenkomplexen und, aufgrund der topologischen Invarianz der Homologie, von Räumen, die sich aus den Homotopiegruppen ableiten lässt, aber zumindest in Spezialfällen viel älter ist, ist die Euler-Charakteristik.

Um die Algebra zu vereinfachen, nehmen wir an, dass wir über einem Körper $R = k$ arbeiten.

16.11 Proposition. *Es sei C ein Kettenkomplex, so dass $\bigoplus_i C_i$ endlich-dimensional ist. Dann ist*

$$\chi(C) := \sum_i (-1)^i \dim_k C_i = \sum_i (-1)^i \dim_k H_i(C).$$

Beweis. Es ist

$$\dim C_i = \dim \operatorname{im} \mathfrak{d}_i + \dim \ker \mathfrak{d}_i = \dim B_{i-1} + \dim Z_i$$

und

$$\dim H_i(C) = \dim Z_i - \dim B_i,$$

also

$$\begin{aligned} \sum_i (-1)^i \dim C_i &= \sum_i (-1)^i \dim Z_i - \sum_i (-1)^i \dim B_i = \\ &= \sum_i (-1)^i \dim H_i(C). \end{aligned}$$

wie behauptet. □

16.12 Korollar. *Es sei \mathcal{S} ein endlicher Simplizialkomplex und $f_i(\mathcal{S})$ die Zahl der i -Simplizes von \mathcal{S} . Dann ist für einen beliebigen Körper k*

$$\chi(\mathcal{S}) := \sum_{i \geq 0} (-1)^i f_i(\mathcal{S}) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim H_i(\mathcal{S}; k)$$

und

$$\tilde{\chi}(\mathcal{S}) := \sum_{i \geq -1} (-1)^i f_i(\mathcal{S}) = \sum_{i \geq -1} (-1)^i \dim \tilde{H}_i(\mathcal{S}; k).$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} \dim C_i(\mathcal{S}) &= \begin{cases} f_i(\mathcal{S}), & i \geq 0, \\ 0, & i < 0, \end{cases} \\ \dim \tilde{C}_i(\mathcal{S}) &= \begin{cases} f_i(\mathcal{S}), & i \geq -1, \\ 0, & i < -1, \end{cases} \end{aligned}$$

und die Behauptung folgt aus der vorhergehenden Proposition. □

Insbesondere haben wir also, dass $\chi(\mathcal{S})$ eine Homotopieinvariante ist: Ist $|\mathcal{S}| \simeq |\mathcal{T}|$, so ist $\chi(\mathcal{S}) = \chi(\mathcal{T})$.

Abschnitt 17

Der Satz vom Igel und mehr

Der Satz vom Igel und verwandte Sätze

Wie schon vorher im eindimensionalen Fall mit Hilfe der Fundamentalgruppe können wir nun mit Hilfe der Homologietheorie den Grad einer Abbildung von einer Sphäre in sich definieren.

17.1 Definition. Es sei $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ eine stetige Abbildung. Da $\tilde{H}_n(\mathbb{S}^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ existiert eine eindeutig bestimmte Zahl $\deg f \in \mathbb{Z}$, so dass der Homomorphismus $\tilde{H}_n(f): \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \rightarrow \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n)$ gleich der Multiplikation mit $\deg f$ ist. Wir nennen diese Zahl den *Grad von f* .

17.2 Proposition. *Es gilt:*

- (i) $\deg \text{id}_{\mathbb{S}^n} = 1$.
- (ii) $\deg(g \circ f) = \deg g \cdot \deg f$.
- (iii) Ist $f \simeq g$, so ist $\deg f = \deg g$.

□

17.3 Proposition. *Es sei $s: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ Spiegelung an einer Hyperebene durch $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$. Dann ist $\deg s = -1$.*

Beweis. Sei $f: \Delta^{n+1} \rightarrow \Delta^{n+1}$ die simpliziale Abbildung $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(i) = i$ für $i > 1$. Es gibt einen Homöomorphismus $h: \mathbb{S}^n \rightarrow |\partial \Delta^{n+1}|$, so dass $h \circ s = |f| \circ h$. Nun ist $\tilde{H}_n(\partial \Delta^{n+1})$ von $a := [\partial \langle 0, \dots, n+1 \rangle]$ erzeugt und

$$\begin{aligned} f_*(a) &= f_*([\partial \langle 0, \dots, n+1 \rangle]) = [\partial \langle f(0), f(1), f(2), \dots, f(n+1) \rangle] = \\ &= [\partial \langle 1, 0, 2, \dots, n+1 \rangle] = [\partial \langle -\langle 0, 1, 2, \dots, n+1 \rangle \rangle] = -a. \end{aligned}$$

Also ist $f_*: \tilde{H}_n(\partial \Delta^{n+1}) \rightarrow \tilde{H}_n(\partial \Delta^{n+1})$ gleich der Multiplikation mit -1 , und damit auch $s_*: \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \rightarrow \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n)$. □

17.4 Proposition. *Es sei $a_n: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ die Antipodenabbildung $a_n(x) = -x$. Dann ist $\deg a_n = (-1)^{n+1}$.*

Beweis. Die Abbildung $(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (-x_1, \dots, -x_{n+1})$ ist Komposition der $n+1$ Spiegelungen $(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_n)$. \square

17.5 Proposition. *Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_n: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ die Antipodenabbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

$$(0) \quad \chi(\mathbb{S}^n) = 0.$$

(i) n ist ungerade.

$$(ii) \quad a_n \simeq \text{id}_{\mathbb{S}^n}.$$

(iii) *Es existiert eine Abbildung $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$, so dass $f \simeq \text{id}_{\mathbb{S}^n}$ und $f(x) \neq x$ für alle x .*

(iv) *Es existiert ein nirgends verschwindendes stetiges Tangentialvektorfeld auf \mathbb{S}^n , also eine stetige Abbildung $v: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\langle x, v(x) \rangle = 0$ und $v(x) \neq 0$ für alle x .*

17.6 Bemerkung. Die Relevanz von (0) wird nur klar, wenn man Verallgemeinerungen einer dieser Aussagen kennt.

Die Implikation $\neg(i) \implies \neg(iv)$, insbesondere der Spezialfall $n = 2$, ist als Satz vom Igel bekannt und besagt, dass ein solcher sich nicht wirbelfrei kämmen lässt.

Beweis. „(0) \iff (i)“ Es ist $\chi(\mathbb{S}^n) = (-1)^0 + (-1)^n$.

„(ii) \implies (i)“ Ist $a_n \simeq \text{id}$, so ist $(-1)^{n+1} = \deg a_n = \deg \text{id} = 1$.

„(i) \implies (iv)“ Für ungerades n definiert

$$v(x_1, \dots, x_{n+1}) := (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \dots, x_{n+1}, -x_n)$$

ein nirgends verschwindendes Tangentialvektorfeld auf \mathbb{S}^n .

Bevor wir die noch ausstehenden Implikationen angehen, bemerken wir, dass zwei Abbildungen $f, g: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ mit $f(x) \neq -g(x)$ für alle x via

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^n \times I &\rightarrow \mathbb{S}^n \\ (x, t) &\mapsto \frac{(1-t)f(x) + tg(x)}{\|(1-t)f(x) + tg(x)\|} \end{aligned}$$

stets homotop sind.

„(iv) \implies (iii)“ Ist v ein nirgends verschwindendes Tangentialvektorfeld, so ist $f(x) := \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$ fixpunktfrei, und da x und $v(x)$ linear unabhängig sind, ist nach der Bemerkung $f \simeq \text{id}_{\mathbb{S}^n}$.

„(iii) \implies (ii)“ Ist $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ fixpunktfrei, so ist also $f(x) \neq x = -a_n(x)$ für alle x , also nach der Bemerkung $f \simeq a_n$. Ist $f \simeq \text{id}$, so folgt $\text{id} \simeq a_n$. \square

In der Tat haben wir gezeigt, dass bis auf Homotopie die Antipodenabbildung die einzige fixpunktfreie Abbildung auf einer Sphäre ist:

17.7 Proposition. *Ist $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ fixpunktfrei, so ist $f \simeq a_n$, also $\deg f = (-1)^{n+1}$.* \square

Die Homologie des Produkts eines Raumes mit einer Sphäre

Wir zeigen nun, wie sich für einen triangulierbaren Raum X die Homologiegruppen des Produkts von X mit einer Sphäre aus denen von X ergeben. Dies tun wir einerseits, um mehr Beispiele für Homologiegruppen von Räumen zu haben, andererseits, um typische Argumente kennenzulernen. Außerdem erhalten wir damit, indem wir den Fall eines einpunktigen Raumes X betrachten, eine weitere Art, die Homologie von Sphären zu bestimmen, die nicht von einer konkreten Triangulierung der Sphäre abhängt.

Wir schicken ein paar allgemeine Aussagen voraus.

17.8 Lemma. *Sind $p: L \rightarrow M$, $i: M \rightarrow L$ lineare Abbildungen zwischen R -Moduln und $p \circ i = \text{id}_M$, so ist $L \cong M \oplus \ker p$ via der Isomorphismen*

$$\begin{aligned} L &\cong M \oplus \ker p \\ l &\mapsto p(l) \oplus l - i(p(l)) \\ i(m) + n &\leftarrow m \oplus n, \end{aligned}$$

und weiterhin ist $\text{coker } i := L / \text{im } i \cong (M \oplus \ker p) / M \cong \ker p$. \square

Daraus erhält man die folgende Fassung, die in der homologischen Algebra wichtig ist.

17.9 Proposition. *Es sei*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

eine kurze exakte Sequenz von R -Moduln. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (i) *Es existiert eine lineare Abbildung $s: C \rightarrow B$, so dass $g \circ s = \text{id}_C$.*
- (ii) *Es existiert eine lineare Abbildung $s': B \rightarrow A$, so dass $s' \circ f = \text{id}_A$.*
- (iii) *Es existiert ein Isomorphismus $B \cong A \oplus C$, so dass das Diagramm*

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow \cong & & \downarrow \text{id} \\ A & \xrightarrow{a \mapsto a \oplus 0} & A \oplus C & \xrightarrow{a \oplus c \mapsto c} & C \end{array}$$

kommutiert.

In diesem Fall sagt man, die Sequenz zerfalle.

Beweis. Zur Übung. □

17.10 Proposition (Ausschneidung). *Es sei \mathcal{S} ein abstrakter Simplicialkomplex und \mathcal{K}, \mathcal{L} Unterkomplexe. Dann gibt es einen von der Inklusion induzierten Isomorphismus*

$$H(\mathcal{K}, \mathcal{K} \cap \mathcal{L}) \xrightarrow{\cong} H(\mathcal{K} \cup \mathcal{L}, \mathcal{L}).$$

Beweis. Fassen wir $C(\mathcal{K})$ und $C(\mathcal{L})$ als Unterkettenkomplexe von $C(\mathcal{K} \cup \mathcal{L})$ auf und $C(\mathcal{K} \cap \mathcal{L})$ als Unterkomplex aller, so ist $C(\mathcal{K} \cup \mathcal{L}) = C(\mathcal{K}) + C(\mathcal{L})$, $C(\mathcal{K} \cap \mathcal{L}) = C(\mathcal{K}) \cap C(\mathcal{L})$ und daher

$$\begin{aligned} C_k(\mathcal{K}, \mathcal{K} \cap \mathcal{L}) &= C_k(\mathcal{K}) / (C_k(\mathcal{K}) \cap C_k(\mathcal{L})) \cong \\ &\cong (C_k(\mathcal{K}) + C_k(\mathcal{L})) / C_k(\mathcal{L}) = C_k(\mathcal{K} \cup \mathcal{L}, \mathcal{L}), \end{aligned}$$

was man auch leicht anhand der Basen sieht, da $(\mathcal{K} \cup \mathcal{L}) \setminus \mathcal{L} = \mathcal{K} \setminus (\mathcal{K} \cap \mathcal{L})$. Diese Isomorphismen bilden einen Isomorphismus von Kettenkomplexen und dieser einen Isomorphismus in Homologie. □

Nun zu dem versprochenen Ergebnis.

17.11 Proposition. *Es sei X ein triangulierbarer Raum und $n \geq 0$. Dann gilt $H_k(X \times \mathbb{S}^n) \cong H_k(X) \oplus H_{k-n}(X)$ für alle k .*

Beweis. Wir wollen zunächst die Aussage verfeinern. Wir betrachten die Abbildungen

$$\begin{array}{ll} p_n: X \times \mathbb{S}^n \rightarrow X & i_n: X \rightarrow X \times \mathbb{S}^n \\ (x, y) \mapsto x & x \mapsto (x, y_n) \end{array}$$

für ein festes $y_n \in \mathbb{S}^n$. Da $p_n \circ i_n = \text{id}_X$, ist $H_k(p_n) \circ H_k(i_n) = \text{id}_{H_k(X)}$. Wir wissen daher, dass $H_k(i_n)$ injektiv ist, $H_k(p_n)$ surjektiv, und nach Lemma 17.8, dass

$$\text{coker} \left(H_k(X) \xrightarrow{H_k(i_n)} H_k(X \times \mathbb{S}^n) \right) \cong \ker \left(H_k(X \times \mathbb{S}^n) \xrightarrow{H_k(p_n)} H_k(X) \right)$$

und

$$H_k(X \times \mathbb{S}^n) \cong H_k(X) \oplus \ker H_k(p_n).$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$\ker H_k(p_n) \cong H_{k-n}(X),$$

was wir durch vollständige Induktion über n tun wollen. Dafür nehmen wir an, dass wir $X \times \mathbb{S}^n$ so trianguliert haben, dass $X \times \mathbb{D}_+^n$ und $X \times \mathbb{D}_-^n$

Unterkomplexe sind, wobei \mathbb{D}_+^n und \mathbb{D}_-^n die obere und untere Hemisphäre bezeichnen, insbesondere ist also $\mathbb{D}_+^n \cap \mathbb{D}_-^n = \mathbb{S}^{n-1}$.

Für $n \geq 0$ ist die lange exakte Sequenz des Paares $(X \times \mathbb{S}^n, X \times \mathbb{D}_-^n)$

$$\begin{array}{ccccccc} H_k(X \times \mathbb{D}_-^n) & \xrightarrow{H_k(j)} & H_k(X \times \mathbb{S}^n) & \longrightarrow & H_k(X \times \mathbb{S}^n, X \times \mathbb{D}_-^n) & \xrightarrow[0]{\partial_*} & H_{k-1}(X \times \mathbb{D}_-^n) \xrightarrow{H_{k-1}(j)} \\ \uparrow \cong \nearrow H_k(r) & & & & & & \uparrow \cong \nearrow H_{k-1}(r) \\ H_k(X) & & & & & & H_{k-1}(X) \end{array}$$

Dabei sei j die Inklusionsabbildung und $r(x) = (x, y_n)$ (wir nehmen $y_n \in \mathbb{D}_-^n$ an). Da $j \circ r = i_n$, kommutiert das Dreieck, und da r eine Homotopieäquivalenz ist, ist $H_k(r)$ ein Isomorphismus. Da $H_{k-1}(i_n)$ und damit $H_{k-1}(j)$ injektiv ist, ist $\partial_* = 0$. Außerdem ist $\text{im } H_k(i_n) = \text{im } H_k(j)$ und damit

$$H_k(X \times \mathbb{S}^n, X \times \mathbb{D}_-^n) \cong \text{coker } H_k(j) = \text{coker } H_k(i_n) \cong \ker H_k(p_n).$$

Zusammen mit einem Ausschneidungsisomorphismus haben wir also

$$\ker H_k(p_n) \cong H_k(X \times \mathbb{D}_+^n, X \times \mathbb{S}^{n-1}) \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

Der Fall $n = 0$ hiervon liefert bereits den Induktionsanfang, denn $\mathbb{S}^{-1} = \emptyset$ und $H(X) \cong H(X \times \mathbb{D}^0, \emptyset)$.

Für $n > 0$ ist die lange exakte Sequenz des Paares $(X \times \mathbb{D}_+^n, X \times \mathbb{S}^{n-1})$

$$\begin{array}{ccccccc} \xrightarrow{0} & H_k(X \times \mathbb{D}_+^n, X \times \mathbb{S}^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{k-1}(X \times \mathbb{S}^{n-1}) & \xrightarrow{H_{k-1}(j)} & H_{k-1}(X \times \mathbb{D}_+^n) & \xrightarrow{0} \\ & & & \searrow H_{k-1}(p_{n-1}) & & \downarrow \cong \downarrow H_{k-1}(q) & \\ & & & & & H_{k-1}(X) & \end{array}$$

Dabei ist q die Projektionsabbildung und $H(q)$ ein Isomorphismus, da q eine Homotopieäquivalenz ist (\mathbb{D}_+^n ist zusammenziehbar). Die Abbildung j ist eine Inklusionsabbildung und $q \circ j = p_{n-1}$, weshalb das Diagramm kommutiert. Da $H(p_{n-1})$ surjektiv ist, ist auch $H(j)$ surjektiv, was die Nullen im Diagramm rechtfertigt. Damit ist

$$\ker H_{k-1}(p_{n-1}) = \ker H_{k-1}(j) \cong H_k(X \times \mathbb{D}_+^n, X \times \mathbb{S}^{n-1}).$$

Zusammen mit dem vorherigen und der Induktionsannahme $\ker H_k(p_{n-1}) \cong H_{k-n-1}(X)$ für alle k erhalten wir also

$$\ker H_k(p_n) \cong \ker H_{k-1}(p_{n-1}) \cong H_{(k-1)-(n-1)}(X) = H_{k-n}(X)$$

wie gewünscht. □

Abschnitt 18

Zelluläre Homologie und der Satz von Borsuk und Ulam

Zelluläre Homologie

Einfache Beispiele zur Berechnung von Homologiegruppen

Die Projektive Ebene

Der Torus und die Kleinsche Flasche

Der zelluläre Komplex

18.1 Definition. Es sei \mathcal{K} ein Kettenkomplex. Eine *zelluläre Filtrierung* von \mathcal{K} ist eine aufsteigende Folge von Unterkomplexen $\mathcal{K}_{-1} \subset \mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_1 \subset \dots$, so dass $\mathcal{K}_{-1} = \{\emptyset\}$, $\bigcup_i \mathcal{K}_i = \mathcal{K}$ und $H_k(\mathcal{K}_n, \mathcal{K}_{n-1}) = 0$ für alle $k \neq n \geq 0$.

Im folgenden sei eine solche zelluläre Zerlegung gegeben. Wir wollen sie benutzen, um $H(\mathcal{K})$ einfacher berechnen zu können.

18.2 Proposition. $H_k(\mathcal{K}_n) \cong H_k(\mathcal{K}_{n+1})$ für $k \notin \{n, n+1\}$.

18.3 Proposition. $H_k(\mathcal{K}_n) = 0$ für $k > n$ und $H_k(\mathcal{K}_n) \cong H_k(\mathcal{K})$ für $n > k$.

Unser Ziel ist also, $H_n(X_{n+1})$ und dazu zunächst $H_n(X_n)$ zu bestimmen.

18.4 Definition. Wir definieren $D_n := H_n(\mathcal{K}_n, \mathcal{K}_{n+1})$ und $\mathfrak{d}_n: D_n \rightarrow D_{n-1}$ als die Komposition $H_n(\mathcal{K}_n, \mathcal{K}_{n-1}) \xrightarrow{\mathfrak{d}_*} H_{n-1}(\mathcal{K}_{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(\mathcal{K}_{n-1}, \mathcal{K}_{n-2})$.

18.5 Proposition. Der zelluläre Komplex ist ein Kettenkomplex und $H_n(D) \cong H_n(\mathcal{K})$.

Die Homologie von projektiven Räumen

Der Satz von Borsuk-Ulam

Wir werden an antipodenerhaltenden Abbildungen zwischen Sphären interessiert sein, also an Abbildungen $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^m$ mit $f(-x) = -f(x)$ für alle x , was wir auch als $f \circ a_n = a_m \circ f$ schreiben können. Eine solche Abbildung induziert eine Abbildung $f: \mathbb{RP}^n \rightarrow \mathbb{RP}^m$. Wir wollen diese Untersuchung aber allgemeiner anstellen.

Die \mathbb{Z}_2 -Homologiesequenz einer zweifachen Überlagerung

Wir wollen einen Raum X zusammen mit einer fixpunktfreien Involution a betrachten, also einer stetigen Abbildung $c: X \rightarrow X$, so dass $a(x) \neq x$ für alle x und $a^2 = \text{id}_X$. Wir machen einige weitere technische Voraussetzungen. Der Raum X habe eine Triangulierung \mathcal{X} , so dass a simplizial ist. Die Fixpunktfreiheit garantiert dann auch $a[\sigma] \cap \sigma \neq \emptyset$ für alle $\sigma \in \mathcal{X}$ (sonst wäre das Baryzentrum $b_{a[\sigma] \cap \sigma}$ ein Fixpunkt von a). Wir wollen die stärkere Eigenschaft $\overline{\text{st}} v \cap \overline{\text{st}} a(v)$ für alle $v \in V(\mathcal{X})$ annehmen. Diese können wir wenn nötig durch Übergang zur baryzentrischen Unterteilung von \mathcal{X} erzwingen.

Der Satz von Borsuk-Ulam