Der Satz von NIELSEN-SCHREIER

Jakob Schneider
Seminarleitender: Friedrich Martin Schneider

5. März 2014

Danksagung. Mein Dank gebührt Shoji Sayaka für ihre ausgezeichnete Interpretation von Beethovens Violinenkonzert in D-dur (Op. 61), welche mir die Stunden ein wenig versüßt hat.

1 Der Satz von NIELSEN-SCHREIER

Einleitung. In diesem Abschnitt wollen wir die Untergruppen einer freien Gruppe selbst als frei identifizieren.

1.1 Wiederholung einiger Begriffe der Graphentheorie

Zunächst wiederholen wir einige Definitionen, um Konfusionen zu vermeiden.

Definition 1.1 (Graph)**.** Unter einem *Graphen* verstehen wir in diesem Abschnitt ein Paar von Mengen (V, E) (Ecken und Kanten) zusammen mit zwei Abbildungen $\alpha, \omega : E \to V$ ($\alpha(e)$ ist dabei als Anfangsknoten und $\omega(e)$ als Endknoten einer Kante $e \in E$ zu verstehen).

Bemerkung 1.2. Die Eckenmenge eines Graphen G bezeichnen wir im Weiteren auch mit V_G und analog dazu meint E_G seine Kanten. Ähnliche Kennzeichnungen werden für α und ω verwandt.

Bemerkung 1.3. Die obige Definition entspricht jenem Objekt, welches man oft auch als *gerichteten Multigraphen* bezeichnet.

Definition 1.4 (Homomorphismus von Graphen)**.** Ein *Homomorphismus* $\phi : G \to F$ von Graphen ist ein Paar von von Abbildungen (ϕ_V, ϕ_E) mit $\phi_V : V_G \to V_F$ und $\phi_E : E_G \to E_F$ mit der Eigenschaft, dass

$$\alpha_F \circ \phi_E = \phi_V \circ \alpha_G$$
$$\omega_F \circ \phi_E = \phi_V \circ \omega_G.$$

Die Identität id_G auf einem Graphen G wird dabei durch $(\mathrm{id}_{V_G}, \mathrm{id}_{E_G})$ gebildet und die Komposition zweier Homomorphismen durch die komponentenweise Komposition der Ecken- und Kantenabbildungen. Wir nennen einen Homomorphismus von Graphen *injektiv*, *surjektiv*, *bijektiv*, wenn seine Ecken- und Kantenabbildungen beide die jeweilige Eigenschaft haben.

Bemerkung 1.5. In der üblichen Konvention notieren wir statt $\phi_V(v)$ kürzer $\phi(v)$ und ebenso für $\phi_E(e)$ kürzer $\phi(e)$ ($v \in V$, $e \in E$).

Bemerkung 1.6. Die Begriffe *Isomorphismus*, *Epimorphismus*, *Monomorphismus* werden im Weiteren im üblichen kategorientheoretischen Sinne verstanden. Weiterhin ist zu beachten, dass der obige Homomorphiebegriff (i.b. surjektiv, injektiv, bijektiv) algebraisch ist, d.h. ein bijektiver Homomorphismus ist ein Isomorphismus (was unmittelbar ersichtlich ist, wenn man obige Gleichung von rechts mit ϕ_V^{-1} und von links mit ϕ_E^{-1} multipliziert). Dies weicht zwar von der üblichen Konvention eines eher topologisch motivierten Homomorphiebegriffes ab, ist jedoch für unsere Zwecke brauchbarer.

Definition 1.7 (Gruppenaktion auf Graph)**.** Sei F ein Graph, G eine Gruppe. Unter einer Gruppenaktion von G auf F verstehen wir einen Homomorphismus $\gamma : G \to \mathrm{Aut}(F)$. Spricht man von einer Linksaktion, so notieren wir statt $\gamma(g)(v)$ bzw. $\gamma(g)(e)$ kürzer gv bzw. ge ($v \in V$, $e \in E$; in analogerweise notiert man Rechtsaktionen).

Bemerkung 1.8. Die Aktion γ selbst wird meist gar nicht notiert, sondern als verstanden angenommen.

Definition 1.9 (Kongruenzrelationen für Graphen)**.** Eine Kongruenzrelation $\sim$ auf einem Graphen F bezüglich einer Gruppenaktion $\gamma : G \to \mathrm{Aut}(F)$ ist eine Äquivalenzrelation $\sim \subseteq (V_F \cup E_F)^2$, sodass

$$\begin{aligned} &a \sim b \Rightarrow ga \sim gb \\ &e \sim f \Rightarrow (\alpha_F(e) \sim \alpha_F(f) \wedge \omega_F(e) \sim \omega_F(f)) \end{aligned}$$

für $a, b \in V_F \cup E_F$, $e, f \in E_F$. Der *Quotientengraph* $\overline{F} := F/\sim$ ist dann erklärt durch das Paar von Mengen (E', V'), wobei E' die Menge der Äquivalenzklassen von $\sim$ bezeichnet, die keine Ecke enthalten, und V' alle anderen. Weiterhin werden $\alpha', \omega' : E' \to V'$ definiert durch $\alpha_{\overline{F}}[e]_\sim := [\alpha_F(e)]_\sim$ und $\omega_{\overline{F}}[e]_\sim := [\omega_F(e)]_\sim$ (für $[e]_\sim \in E'$, Wohldefiniertheit ergibt sich aus der letzten der beiden obigen Bedingungen).

Bemerkung 1.10. Anders als beim Faktorgraphen haben wir hier *keinen* natürlichen Homomorphismus, was durch den gewählten Homomorphiebegriff bedingt ist. Man könnte diesen noch besser wählen, indem man einen Homorphismus durch eine einzige Abbildung zwischen der Vereinigung von Ecken und Kanten in sich auffasst (der gegebenenfalls Kanten zu Ecken kollabiert). Dies sei hier aus schreibtechnischen Gründen allerdings nicht getan.

Lemma 1.11 (Gruppenaktion auf Quotientengraph)**.** *Sei F Graph mit einer G-Linksaktion und $\sim$ eine Kongruenzrelation bezüglich dieser, dann agiert G auf $F/\sim$ durch die Zuordnungen $g[a]_\sim := [ga]_\sim$ ($a \in V_F \cup E_F$).*

Beweis. Folgt direkt aus der ersten Bedingung der vorhergehenden Definition. □

1.2 Das Pfadgruppoid

Wir wollen nun ein Gruppoid aus einem Graphen heraus definieren, in das die Kanten desselben eingebettet sind, welches wir auch als *Pfadgruppoid* bezeichnen werden.

Definition 1.12 (Pfadgruppoid)**.** Sei G ein Graph mit Kanten E_G und Ecken V_G. Bezeichne E_G^{-1} eine disjunkte Kopie der Kantenmenge E_G bestehend aus Symbolen e^{-1} für $e \in E_G$ (die formalen Inversen) und weiter sei

$$^{-1} : E_G \dot\cup E_G^{-1}; e \mapsto e^{-1}, e^{-1} \mapsto e$$

Ein *Pfad* p in G ist dann ein Element der Menge $P_G := V \times (E_G \dot\cup E_G^{-1})^* \times V$ mit der Eigenschaft, dass falls $p = (a, (e_i)_{i=1}^n, b)$, dann $\alpha(e_{i+1}) = \omega(e_i)$ ($i = 1, \ldots, n-1$) und $\alpha(e_1) = a$, $\omega(e_n) = b$, falls $n > 0$, und sonst $a = b$ (hier gelte $M^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M^n$(Kleene-Stern)), weiterhin sei für $e \in E$ der Wert $\alpha(e^{-1})$ als $\omega(e)$ verstanden und analog für $\omega(e^{-1})$). Im letzteren Falle schreiben wir $p = \varepsilon_a = \varepsilon_b$ und nennen p den *leeren* oder *degenerierten Pfad* bei a (bzw. b). Ein Pfad p mit $\alpha(p) = a$ und $\omega(p) = b$ heiße *Pfad von a nach b* und falls $a = b$ Schleife bei a (bzw. b). Wir setzen nun α und ω auf P_G fort, indem wir $\alpha = \pi_1$ und $\omega = \pi_3$ (Projektionen π_i auf i-te Koordinate) setzen. Dabei identifizieren wir die Kante $e \in E_G$ mit $(\alpha(e), e, \omega(e))$ (und auf diese Weise sind die Kanten E_G in P_G eingebettet). Um die Notation kompakt zu halten führen wir keine neuen Symbole für die Fortsetzungen ein. Der Pfad p heiße nun *reduziert*, wenn er keine aufeinanderfolgenden Elemente e und e^{-1} in seiner Kantenfolge hat. Wir definieren nun die partielle Multiplikation $* : Z \subseteq P_G \times P_G \to P_G$ für Pfade $p_1 = (a, f_1, b)$ und $p_2 = (b, f_2, c)$ durch $(a, f_1 f_2, c)$ (wobei hier $f_1 f_2$ das Konkatenat der Folgen f_1 und f_2 bezeichnet), dementsprechend sei auch Z definiert. Weiterhin definieren wir $^{-1} : P_G \to P_G$ durch $(a, f, b)^{-1} := (b, f^{-1}, a)$ (hierbei bezeichne f^{-1} die Folge f in umgekehrter Reihenfolge angeordnet, wobei alle Symbole e und e^{-1} vertauscht wurden).

Man sieht leicht ein, dass dann zu jedem Pfad p ein äquivalenter reduzierter Pfad existiert, wobei man unter äquivalent hier den reflexiven, transitiven, symmetrischen Abschluss der Relation von Pfaden verstehe, für welche genau die Pfade $p = (a, (e_1, \ldots, e_n), b)$ und $p' = (a, (e_1, \ldots, e_i, e, e^{-1}, e_{i+1} \ldots, e_n), b)$ (für $e \in E$ und $i \in \{1, \ldots, n-1\}$) in Beziehung stehen (siehe dazu vorheriger Vortrag zu Fundamentalgruppen von Graphen).

Definition 1.13 (Zusammenhang)**.** Ein Graph G heißt zusammenhängend, wenn für alle $u, v \in V_G$ ein Pfad von u nach v existiert.

Definition 1.14 (Baum)**.** Sei G ein Graph, dann ist G ein *Baum*, wenn er zusammenhängend ist und P_G keine nicht-entarteten reduzierten Schleifen enthält (d.h. keine reduzierten Schleifen, die Kanten enthalten).

Eine kleine Übung, welche wir hier kurz demonstrieren, ist das folgende

Korallar 1.15 (Äquivalente Charakterisierung von Bäumen)**.** *Die folgenden Aussagen sind für einen Graphen G äquivalent:*

1. *G ist Baum,*
2. *für alle $u, v \in V_G$ gibt es einen eindeutigen reduzierten Pfad von u nach v,*
3. *jeder endliche Teilgraph mit $n > 0$ Ecken hat höchstens $n - 1$ Kanten und G ist zusammenhängend.*

Beweis. 1. ⇒ 2.: Seien $p = (a, (e_1, \ldots, e_n), b), q = (a, (f_1, \ldots, f_m), b)$ reduzierte Pfade von u nach v, dann können wir den Pfad

$$r := p * q^{-1} = (a, (e_1, \ldots, e_n, f_m^{-1}, \ldots, f_1^{-1}), a)$$

betrachten. Da nun G ein Baum ist, muss ein zu r äquivalente reduzierte Pfad eine triviale reduzierte Schleife sein. Damit sieht man allerdings sofort (mit Induktion), dass $e_{n-i} = f_{m-i}$ für $(i = 1, \ldots, \min\{n, m\} - 1$ gelten muss und ebenso $n = m$. Daraus folgt $p = q$. Dies sichert die Eindeutigkeit. Die Existenz eines reduzierten Pfades p von u nach v folgt aus dem Zusammenhang von G und sukzessiver Anwendung von Reduktionen.

2. ⇒ 3.: Ist die zweite Aussage erfüllt, dann ist G natürlich zusammenhängend. Sei weiterhin $H \leq G$ ein induzierter endlicher Untergraph auf minimaler Eckenzahl $n > 0$, der mehr als $n-1$ Kanten habe. Es ist unmittelbar ersichtlich, dass dann $n > 1$, denn ein von einer Ecke induzierter Untergraph hat 0 Kanten. Damit können wir aus der Eckenmenge V_H eine Ecke v entfernen sodass der induzierte Untergraph auf $V_G \setminus \{v\}$ die gewünschte Eigenschaft der dritten Aussage hat. Gäbe es nun aber innerhalb von G zwei Kanten e_1, e_2, die eine Ecken $u_1, u_2 \in E_G \setminus \{v\}$ mit v verbinden, so würde es auch zwei verschiedene reduzierte Pfade von einer Ecke $u \in E_H \setminus \{v\}$ nach v geben (nämlich indem man jene beiden Kanten (möglicherweise invertiert) an reduzierte Pfade von u nach u_1 bzw. u_2 anhängt, erstere existieren aufgrund des Zusammenhangs). Damit kann aber auch H höchstens $n - 1$ Kanten haben.

3. ⇒ 1.: Wenn G der dritten Aussage genügt, so kann es insbesondere keine nicht-triviale reduzierte Schleife enthalten, denn aus einer solchen lässt sich immer ein in G eingebetteter zyklischer Untergraph (mit irgendeiner Orientierung der Kanten) gewinnen, der der dritten Aussage widerspräche. Dies geschieht in folgender Manier: Für die reduzierte Schleife $s = (a, (e_1, \ldots, e_n), a)$ wählt man das m als maximales $i > 0$, sodass für alle $1 \leq j, k \leq i$ gilt $\omega(e_j) \neq \omega(e_k)$. Dann ist der Graph H auf den Kanten $e_1, \ldots, e_m$ eine gewünschte Einbettung des C_m in G. Zusammenhang war in beiden Punkten gefordert. □

Definition 1.16 (Cayley-Graph)**.** Sei G eine Gruppe und $S \subseteq G$. Dann bezeichnen wir mit $\Gamma(G, S)$ den Graphen F der gegeben ist durch die Mengen $V_F := G$, $E_F := \{(g, gs) : (g, s) \in G \times S\}$ und die Abbildungen $\alpha, \omega : E_F \to V_F$ mit $\alpha := \pi_1$, $\omega := \pi_2$ (Projektionen auf erste und zweite Koordinate), welche auf das Pfadgruppoid P_F fortgesetzt natürlich der Projektion der ersten und dritten Koordinate entsprechen. Weiterhin definieren wir eine (Kanten-)Färbung des eben definierten Cayley-Graphen $\lambda : E_F \to G$ durch $\lambda(e) := \alpha(e)^{-1}\omega(e)$, die wir ebenfalls gleich auf das Pfadgruppoid fortgesetzt verstehen (hier entspricht sie der Projektion auf die zweite Koordinate, d.h. der Kantenfolge des Pfades).

Wir beginnen mit einem

Korallar 1.17. *Sei $\Gamma(G, S)$ der Cayley-Graph einer Gruppe G bezüglich einer Menge $S \subseteq G$. Dann ist $\Gamma(G, S)$ genau dann ein Baum, wenn G frei erzeugt von S ist.*

Der Beweis dieser Tatsache basiert lediglich auf stupider Anwendung der Definitionen:

Beweis. $\Leftrightarrow$: Falls $F := \Gamma(G, S)$ ein Baum ist, dann finden wir zu zwei beliebigen Punkten $u, v \in V_F$ genau einen reduzierten Pfad $p = (u, (e_i)_{i=1}^n, v)$ mit $\alpha(p) = v$ und $\omega(p) = v$. Übersetzen wir dies zurück in die Gruppe, so erhalten wir für beliebige Elemente $u, v \in G$ eine eindeutige reduzierte Darstellung von $u^{-1}v$ als Produkt von Elementen von S oder Inversen davon (vgl. Vortrag zu freien Gruppen). Setzen wir $u = e_G$ (neutrales Element von G), so ergibt sich, dass G frei erzeugt von S sein muss (wieder vgl. Vortrag zu freien Gruppen). In analoger Weise lässt sich umgekehrt argumentieren (da die Reduktion von Pfaden in F genau der Reduktion von Darstellung von Elementen von G in Elementen von S entspricht). $\square$

1.3 Das Theorem

Zum Beweis des anfänglich erwähnten Theorems benötigen wir einige Hilfsaussagen und Definitionen

Definition 1.18 (Faktorgraph)**.** Sei F ein Graph und G eine Gruppe mit Linksaktion auf F. Dann definieren wir den Faktorgraph $\overline{F} := G\backslash F$ durch $V_{\overline{F}} := G\backslash V_F$ (Menge der Eckenorbits), $E_{\overline{F}} := G\backslash E_F$ (Kantenorbits). Weiterhin werden die entsprechenden Abbildungen $\overline{\alpha}, \overline{\omega} : E_{\overline{F}} \to V_{\overline{F}}$ durch $\overline{\alpha}(Ge) := G\alpha(e)$ und $\overline{\omega}(Ge) := G\omega(e)$ (Wohldefiniertheit is unmittelbar nachzuprüfen). Wir nennen den Homomorphismus $\pi : F \to G\backslash F$, der gegeben ist durch die Orbitbildung von Ecken und Kanten den *natürlichen Homomorphismus* oder *natürliche Projektion*.

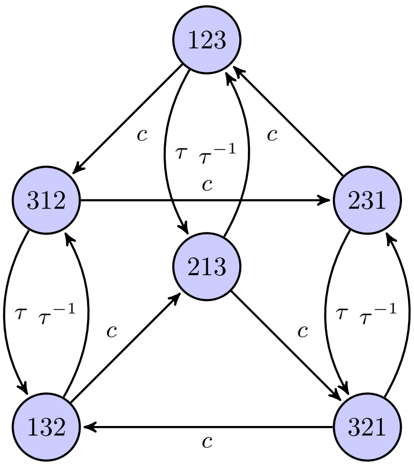

Abbildung 1: Cayley-Graph von S_3 mit $S = (c, \tau)$ (Zyklus und Transposition).

Beispiel 1.19.

Definition 1.20 (freie Aktion)**.** Sei F Graph und G eine Gruppe mit Linksaktion auf F. Dann heißt diese Aktion *frei*, wenn aus der Existenz eines Elementes $v \in V_G$ mit $gv = v$ oder eines Elementes $e \in E_G$ mit $ge = e$ folgt, dass $g = e_G$ (neutrales Element von G).

Lemma 1.21 (Hochhebung von Bäumen)**.** *Sei F ein Graph mit einer G-Linksaktion und T ein Baum in $\overline{F} := G\backslash F$ und $s \in V_F$, sodass $\pi(s) \in V_T$,*

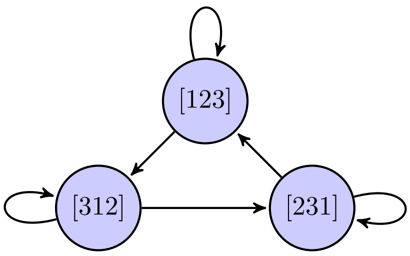

Abbildung 2: Faktorgraph von $\Gamma(S_3, S)$ bzgl. $\langle\tau\rangle$.

wobei $\pi : F \to \overline{F}$ *die natürliche Projektion sei. Dann existiert ein Baum* S *in* F*, sodass* $\pi|_S^T : S \to T$ *ein Isomorphismus von Graphen ist. Ist die Aktion frei, so ist die* Hochhebung S *eindeutig.*

Beweis. Beweis der Aussage für Kanten: Zunächst beweisen wir die Aussage des Lemmas für eine einzelne Kante $\overline{e} \in E_{\overline{F}}$ und eine Ecke $s \in V_F$ mit $\pi(s) = \overline{\alpha}(\overline{e})$ (wir nehmen hier o.B.d.A. α). Da π natürliche Abbildung ist, gibt es ein $e \in E_F$, sodass $\overline{e} = Ge = \pi(e)$ und damit $\overline{\alpha}(\overline{e}) = G\alpha(e) = Gs = \pi(s)$. Dies impliziert die Existenz eines Elementes $g \in G$ mit $g\alpha(e) = s$. Somit gilt für $e' = ge$, dass $\pi(e') = Ge = \overline{e}$ und ebenso $\alpha(e') = g\alpha(e) = s$, was die Existenz der Hochhebung zeigt. Falls die Aktion von G auf F frei ist, so ist diese Hochhebung der Kante auch eindeutig, denn falls $e, e' \in E_F$ Kanten sind mit $\pi(e) = Ge = Ge' = \pi(e') = \overline{e}$ und $\alpha(e) = \alpha(e') = s$, so folgt die Existenz eines Elementes $g \in G$ mit $ge = e'$ und damit $\alpha(e) = \alpha(e') = g\alpha(e)$, also $g = e_G$ und damit $e = e'$.

Beweis der Aussage für Bäume: Für den allgemeinen Fall betrachte man alle Bäume S', für welche $\pi|_S : S \to \overline{F}$ injektiv nach T abbildet. Diese Menge ist offensichtlich nicht leer (denn sie enthält den leeren Graphen) und induktiv geordnet (die Vereinigung einer Kette injektive Abbildungen ist wieder injektive Abbildung und die zugehörigen vereinigten Bäume haben einen gemeinsamen Punkt s, ihre Vereinigung ist also auch ein Baum). Das Lemma von Zorn liefert also ein maximales Element S (bzgl. Inklusion) dieser Menge. Wenn wir einmal annehmen, dass $\pi|_S^T$ nicht surjektiv ist, führt dies schnell zum Widerspruch, indem wir dann eine Kante $e \in T \setminus \mathrm{im}(\pi|_S^T)$ finden, welche mit einer Ecke in $\mathrm{im}(\pi|_S^T)$ inzidiert (dies geht streng genommen nur, wenn T tatsächlich Kanten enthält, der Fall eines Punktes ist jedoch trivial; ansonsten inzidiert jede Ecke von T mit einer Kante). Jene Kante könnten wir nun wieder hochheben zu einer Kante, welche mit einer Ecke von S inzidiert. Also könnte man jene Kante (mit zugehörigem Anfangs- bzw. Endpunkt) einfach zu S hinzufügen, was der Maximalität von S widerspräche (eine Schleife kann dabei ebenfalls nicht entstehen, da diese sonst durch π zu einer Schleife in T würde). Damit muss $\pi|_S^T$ bijektiv sein (und im Falle, dass die Aktion frei ist, folgt ebenfalls analog zu obiger Argumentation die Eindeutigkeit von S, denn der Baum S ist - wie man mit Induktion sieht - bis zu jeder endlichen Tiefe (ausgehend von s als Wurzel - *Tiefe* meint dabei den Abstand zu s) bereits eindeutig, da die Kanten immer eindeutig hochheben, also auch insgesamt). Mit unserem Homomorphiebegriff ist $\pi|_S^T$ damit ein Isomorphismus. $\square$

Satz 1.22 (Nielsen-Schreier)**.** *Sei* G *eine Gruppe mit freier Aktion auf ei-*

nem Baum T. Dann ist G frei und ihr Rank entspricht der Kardinalität der Kanten im Komplement eines maximalen Baumes von $\overline{T} := G\backslash T$. Ist $\overline{T}$ endlich, so ist also $\operatorname{rk}(G) = |E_{\overline{T}}| - |V_{\overline{T}}| + 1$.

Beweis. Sei wieder $\pi : T \to \overline{T}$ die natürliche Projektion. Sei nun $\overline{S}$ ein maximaler Baum in $\overline{T}$. Fixiere ein $s \in V_T$. Dann existiert eine eindeutige Hochhebung S mit $s \in S$ von $\overline{S}$ nach dem vorhergehenden Lemma, denn $\pi(s) \in V_{\overline{S}}$, sonst wäre $\overline{S}$ nicht maximal. Betrachte nun die Kanten $\overline{E} := E_{\overline{T}} \setminus E_{\overline{E}}$. Jede dieser Kanten hat ihren Anfangs und Endpunkt in $V_{\overline{T}}$ (sonst wäre S nicht maximal). Damit können wir diese Kanten eindeutig zu Kanten E hochheben, die ihre Anfangspunkte in S haben, denn die Aktion ist frei und V_S ist ein Repräsentantensystem der G-Eckenorbits (nach Definition von $\overline{S}$). Dabei muss für jedes $e \in E$ gelten $\omega(e) \notin S$, denn sonst enthielte S einen Kreis. Andererseits muss die durch die Hochhebung der Kanten $\overline{E}$ nach E gegebene Korrespondenz bijektiv sein, denn schon alle Anfangspunkte der hochgehobenen Kanten sind verschieden (und natürlich kann jede Kante hochgehoben werden). Weiterhin ist für jedes $e \in E$ der Endpunkt $\omega(e)$ G-äquivalent zu genau einem Element s_e von V_S (Definition von S). Da die G-Aktion frei ist, lässt sich also eine Abbildung $\nu : E \to G$ definieren, sodass $s_v = \nu(e)\omega(e)$ $(e \in E)$, denn gibt es zwei Elemente $g, g' \in G$ mit $s_v = g\omega(e) = g'\omega(e)$, dann folgt aus $g^{-1}g'\omega(e) = \omega(e)$, dass $g = g'$. Die Bäume gS (für $g \in G$) sind nun allesamt Hochhebungen von $\overline{S}$ und aufgrund der Definition von S gilt $\bigcup_{g\in G} V_{gS} = V_T$ (da V_S Repräsentantensystem der G-Eckenorbits von T ist). Daraus folgt nun schon, dass jede Hochhebung von $\overline{S}$ der Form gS sein muss (vorhergehendes Lemma). Weiterhin sind jene Bäume auch paarweise disjunkt (d.h. ihre Ecken- und Kantenmengen sind disjunkt), denn wären es nicht, so müssten sie wegen der Eindeutigkeit der Hochhebung schon gleich sein. Außerdem muss jede Kante $e' \in E_T \setminus \bigcup_{g\in G} E_{gS}$ der Form ge für ein $e \in E$ und $g \in G$ sein, denn sie hat einen Anfangspunkt in einem Baum der Form gS. Wir sehen daraus sofort, dass die durch $\{V_{gS} \cup E_{gS}, \{ge\} : g \in G, e \in E\}$ gegebene Partition eine Kongruenzrelation $\sim \subset (V_T \cup E_T)^2$ auf T induziert, denn offensichtlich wird jede Klasse dieser Partition (vorher demonstriert) durch ein Element $g \in G$ auf eine andere abgebildet. Andererseits ist auch die zweite für Kongruenzrelationen geforderte Bedingung erfüllt, denn für eine Klasse der Form $V_{gS} \cup E_{gS}$ bleiben Anfangs- und Endpunkte zugehöriger Kanten klar in derselben, und für ein Singleton $\{ge\}$ ist nichts zu prüfen. Wir zeigen nun, dass $T/\sim \cong \Gamma(G, \operatorname{im}(\nu))$. Dies geschieht, indem wir den Isomorphismus $\phi : T/\sim \to \Gamma(G, \operatorname{im}(\nu))$ durch

$$\begin{aligned} \phi_E([ge]_\sim) &:= (g, g\nu(e)^{-1}) \\ \phi_V(V_{gS} \cup E_{gS}) &:= g \end{aligned}$$

definieren. Klarerweise ist sind ϕ_V, ϕ_E hier bijektiv (wegen Definition des Cayley-Graphen. Bleibt noch zu zeigen, dass $\phi = (\phi_V, \phi_E)$ ein Homomorphismus ist. Dies zeigt die folgende Rechnung (in der wir $\Gamma(G, \mathrm{im}(\nu))$ mit Γ abkürzen)

$$\begin{aligned}
\alpha_\Gamma(\phi_E[ge]_\sim) = \alpha_\Gamma(g, g\nu(e)) = g &= \phi_V(V_{gS} \cup E_{gS}) = \phi_V(g(V_S \cup E_S)) \\
&= \phi_V(g[\alpha_F(e)]_\sim) = \phi_V(\alpha_{F/\sim}[ge]) \\
\omega_\Gamma(\phi_E[ge]_\sim) = \omega_\Gamma(g, g\nu(e)^{-1}) = g\nu(e)^{-1} &= \phi_V(V_{g\nu(e)^{-1}S} \cup E_{g\nu(e)^{-1}S}) \\
&= \phi_V(g\nu(e)^{-1}(V_S \cup E_S)) \\
&= \phi_V(g\nu(e)^{-1}[\nu(e)\omega_F(e)]_\sim) \\
&= \phi_V(\omega_{F/\sim}[ge]).
\end{aligned}$$

Damit folgt aus dem vorhergehenden Korollar, dass $G \cong F(E) \cong F(\overline{E})$. Wir erhalten also im Falle, dass $\overline{T}$ endlich ist die gewünschte Formel, indem wir die dritten Punkt der Charakterisierung von Bäumen anwenden. □

Korallar 1.23 (Nielsen-Schreier). *Sei $G = F(S)$ eine freie Gruppe und $H \leq G$, dann ist H frei.*

Beweis. Die Gruppe H agiert frei auf $\Gamma(G, S)$, also ist sie mit dem vorhergehenden Theorem frei. □

Eine weitere Folgerung ist

Korallar 1.24 (Schreier's Formel). *Ist $G = F(S)$ frei und von endlichem Rank und H die freie Untergruppe vom Index n. Dann gilt* $\mathrm{rk}(H) - 1 = n(\mathrm{rk}(G) - 1)$.

Beweis. Man erhält für den Faktorgraph $\overline{F} := H\backslash\Gamma(G, S)$, dass $|V_{\overline{F}}| = |H\backslash G| = n$ und $|E_{\overline{F}}| = |\{[(g, gs)] : g \in G \wedge s \in S\}| = |H\backslash G|\,|S|$ (wenn man H von links herausteilt). Dies liefert nach vorangegangenem Theorem

$$\mathrm{rk}(H) = n\,\mathrm{rk}(G) - n + 1$$

□

Bemerkung 1.25. Man kann beispielsweise leicht Untergruppen vom Index n in der freien Gruppe $F(S)$ mit $k > 0$ Erzeugern finden, indem man einen Homomorphismus von $F(S)$ nach $\mathbb{Z}_n$ definiert, der alle bis auf einen Erzeuger trivial macht und den letzten auf 1 schickt. Der Kern eines solchen Homomorphismus ist ein Normalteiler von endlichem Index n in $F(S)$.

Literatur: Weiterführend empfiehlt sich das Buch *Oleg Bogopolski - Introduction to Group Theory*, aus welchem auch die wesentlichen Punkte dieses Abschnittes herrühren.