

שאלה 1

ד"ר סדר מהפקולטה למתמטיקה התלהב מהרעיון של רצפים ב-SML ושכנע את צוות הקורס להוסיף שאלה עליהם לתרגיל בית של פרולוג. ד"ר סדר חוקר סדרות אינסופיות בנות מניה והוא צריך עזרתכם במחקר שלו.

סעיף א'

לפני שנגיע לדרישות של ד"ר סדר, נגדיר טיפוס חדש אשר מכליל את הרצפים שראינו בכיתה והופך אותם לרצפים **דו-מימדיים**:

```
datatype 'a DSeq =  
DNil | DCons of 'a * (unit -> 'a DSeq) * (unit -> 'a DSeq);
```

לעומת הרצף הרגיל, הרצף הדו-מימדי מורכב משתי פונקציות:

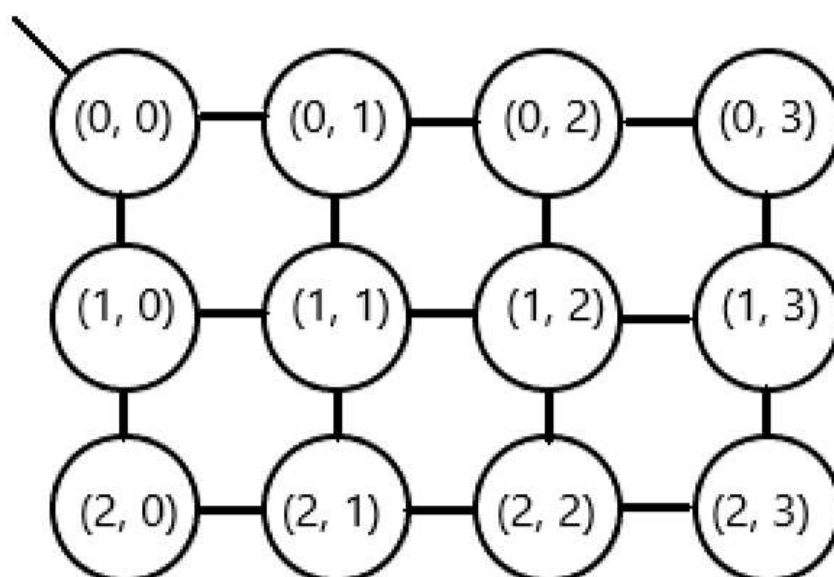
- הפונקציה הראשונה מחזירה את האיבר הבא ברצף כאשר מתקדמים לפי ציר ה-X.
- הפונקציה השנייה מחזירה את האיבר הבא ברצף כאשר מתקדמים לפי ציר ה-Y.

ניקח כדוגמה את הרצף הדו-מימדי הבא:

```
fun coords (3, _) = DNil  
  | coords (_, 4) = DNil  
  | coords (x, y) =  
    DCons(  
      (x, y),  
      fn () => coords (x + 1, y),  
      fn () => coords (x, y + 1)  
    );
```

```
val s = coords (0, 0);
```

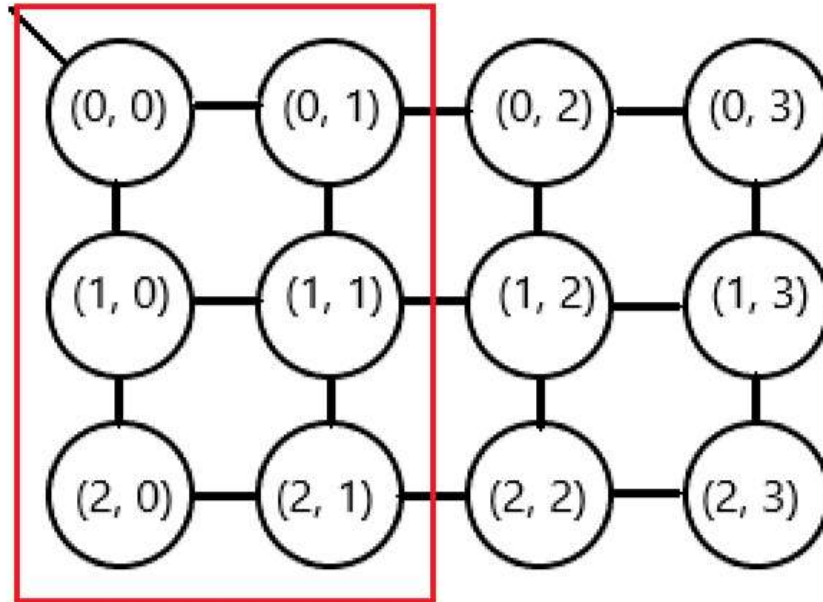
אשר מייצג את ה-grid הבא:



על מנת להיות מסוגלים להסתכל על רצפים דו-ממדיים, ממשו את הפונקציה הבאה:

```
val toMatrix = fn : 'a DSeq -> int * int -> 'a list list
```

הפונקציה מקבלת שני פרמטרים רצף וזוג של שני מספרים (x, y) ומחזירה רשימה דו-ממדית אשר מייצג את החתך של הרצף הנתון בגובה x ואורך y . למשל, עבור הרצף s הנ"ל החתך $(3, 2)$ מצוין במסגרת אדומה:



על כן, נקבל את הפלט הבא של הפונקציה `toMatrix`:

```
- toMatrix s (3, 2);  
val it = [  
  [(0, 0), (0, 1)],  
  [(1, 0), (1, 1)],  
  [(2, 0), (2, 1)]]: (int * int) list list;
```

הערות:

- ייתכנו רצפים אינסופיים.
- ניתן להניח כי כל קצף דו-ממדי הוא בצורת מלבן וכל איבר במקום (i, j) לא תלוי בדרך שבה הגעתם אליו.
- אם אין מספיק איברים ברצף, יש להחזיר את כל מה שיש.
- מסופק לכם קובץ הגדרות `q1_def.sml`. העתיקו את התוכן שלו לפתרון שלכם על מנת להשתמש בכל ההגדרות הנדרשות.

סעיף ב'

כעת ד"ר סדר רוצה להראות כי מספרים רציונלים חיוביים הם בני מניה. על כן, הוא מבקש מכם להגדיר רצף דו-מימדי אשר מכיל את כל המספרים הרציונליים החיוביים לפי [השיטה המפורסמת](#):

	→ Numerator						
Denominator ↓	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{7}{1}$...
	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{7}{2}$...
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{7}{3}$...
	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{4}$...
	⋮						

ממשו את הפונקציה הבאה:

```
val Q = fn: unit -> (int * int) DSeq;
```

אשר מחזירה רצף דו-מימדי המתאים ל-grid הנ"ל, כאשר כל איבר הוא זוג מהצורה (i, j) כאשר i הוא מונה ו- j מכנה.

דוגמה:

```
- toMatrix (Q ()) (3, 4);
```

```
val it = [
```

```
  [(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)],
```

```
  [(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2)],
```

```
  [(1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3)]: (int * int) list list;
```

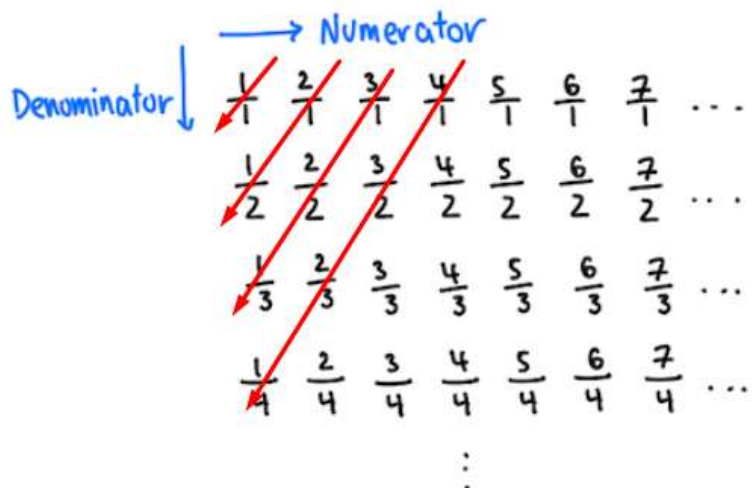
סעיף ג'

השלב האחרון בהוכחה של ד"ר סדר הוא להראות כי ניתן לסדר את הרצף הדו-מימדי הנ"ל לרצף רגיל.

ממשו את הפונקציה הבאה:

```
val diags = fn: 'a DSeq -> 'a Seq;
```

אשר הופכת רצף דו-מימדי לרצף רגיל לפי שיטת האלכסונים:



כלומר:

```
- take (diags (Q ())) 10;  
val it = [(1, 1), (2, 1), (1, 2), (3, 1), (2, 2), (1, 3),  
          (4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4)]: (int * int) list;
```

הערות:

- הפונקציה צריכה לטפל גם ברצפים דו-מימדיים אינסופיים וגם בסופיים.
- על הפונקציה להיות יעילה ולא לשערך אף איבר של הרצף פעמיים ולא לשערך אותם לפני הצורך.

• רמז.

על מנת לבדוק את עצמכם, מסופק לכם רצף דו-מימדי אשר מדפיס כל פעם את האיבר בעת שערוכו. דוגמה:

```
- diags p;  
val it = Cons ((0,0),fn) : (int * int) Seq  
- next it;  
exec: (1, 0)  
val it = Cons ((1,0),fn) : (int * int) Seq  
- next it;  
exec: (0, 1)  
val it = Cons ((0,1),fn) : (int * int) Seq  
- next it;  
exec: (2, 0)  
val it = Cons ((2,0),fn) : (int * int) Seq
```

שאלה 2

בשאלה זו נממש מספר פרדיקטים ב-Prolog שיאפשרו לנו לעבוד עם מספרים שלמים.

1. הגדירו את הפרדיקט `pythagorean/3` המתקיים אם הפרמטרים הם [שלשה](#)

[פיתגורית](#).

ניתן להניח ששלושת הפרמטרים הינם קשורים (bound), כלומר בעלי ערך קונקרטי בזמן הפעלת הפרדיקט.

לדוגמה:

```
?- pythagorean(3, 4, 5).
```

```
true.
```

```
?- pythagorean(3, 3, 5).
```

```
false.
```

2. הגדירו את הפרדיקט `prime/1` המתקיים כאשר הפרמטר הוא מספר ראשוני (בעל שני מחלקים בדיוק).

ניתן להניח שהפרמטר קשור.

לדוגמה:

```
?- prime(4).
```

```
false.
```

```
?- prime(17).
```

```
true.
```

3. לפי [השערת גולדבך](#), כל מספר זוגי גדול מ-2 הוא סכום של שני מספרים ראשוניים.

הגדירו את הפרדיקט `goldbach/3` המתקיים עם שני הפרמטרים הראשונים הינם מספרים ראשוניים, והשלישי הוא מספר זוגי השווה לסכומם.

ניתן להניח שהפרמטר השלישי (בלבד) קשור.

לדוגמה:

```
?- goldbach(X, Y, 20).
```

```
X = 3, Y = 17 ;
```

```
X = 7, Y = 13 ;
```

```
X = 13, Y = 7 ;
```

```
X = 17, Y = 3.
```