



Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Ηλεκτρονικής και Υπολογιστών

Υπολογισμός της Ευκλείδειας Απόστασης δύο Τριγωνικών Πλεγμάτων

Διπλωματική Εργασία
Καρελής Παναγιώτης

Επιβλέπων: Πιτσιάνης Νικόλαος
Αναπληρωτής Καθηγητής Α.Π.Θ.

14 Σεπτεμβρίου 2022

Περίληψη

Σε μια πληθώρα εφαρμογών της Υπολογιστικής Γεωμετρίας (Μηχανική με τη Βοήθεια Υπολογιστών (CAE), Προσομοιώσεις με Υπολογιστές, Ρομποτική, Γραφική με Υπολογιστές κ.α.) τα αντικείμενα του χώρου αναπαρίστανται συνήθως από πολυγωνικά πλέγματα. Κοινό πρόβλημα για όλους τους παραπάνω τομείς αποτελεί η εύρεση της απόστασης που διαχωρίζει δύο αντικείμενα και η ανίχνευση σύγκρουσης μεταξύ τους. Στην παρούσα εργασία, προτείνουμε αποδοτικούς αλγορίθμους που υπολογίζουν την Ευκλείδεια απόσταση δύο αντικειμένων του τρισδιάστατου χώρου και τους υλοποιούμε για την περίπτωση των τριγωνικών πλεγμάτων. Για τους αλγορίθμους αυτούς σχεδιάζουμε μια δενδρική δομή δεδομένων που ανήκει στην κατηγορία των Ιεραρχιών Οριοθετικών Όγκων (BVH). Η διαδικασία κατασκευής της παραπάνω δομής είναι παρόμοια με αυτή του KD-Tree, με τη διαφορά ότι η δομή μας διαχειρίζεται χωρικά δεδομένα και κάνει χρήση Οριοθετικών Πλαισίων Ευθυγραμμισμένων με τους Άξονες (AABB). Επιπλέον, περιγράφουμε έναν τρόπο διάσχισης της δομής ώστε να υποστηρίξει ερωτήματα κοντινότερου γείτονα για χωρικά δεδομένα. Η διάσχιση της δενδρικής δομής σχεδιάζεται ως μια κατευθυνόμενη αναζήτηση κατά βάθος (DFS), που στοχεύει στη σμίκρυνση του χώρου αναζήτησης μέσω κλαδέματος του δένδρου κατά την οπισθοδρόμηση. Ακόμη, στην υλοποίηση μας παραλληλοποιούμε τη διαδικασία κατασκευής του δένδρου όπως και τη διαδικασία αναζήτησης της ελάχιστης απόστασης κάνοντας χρήση πολλαπλών νημάτων επεξεργασίας. Τέλος, μετράμε και αναλύουμε την επίδοση των αλγορίθμων μας σε μια σειρά από περιπτώσεις ελέγχου που κατασκευάσαμε.

Λέξεις-κλειδιά:

Υπολογιστική Γεωμετρία, Πολυγωνικά Πλέγματα, Ευκλείδεια Απόσταση, Ιεραρχίες Οριοθετικών Όγκων

Abstract

In a plethora of fields in Computational Geometry (Computer Aided Engineering, Computer Simulations, Robotics, Computer Graphics etc.) objects in space are represented as polygonal meshes. A common problem, for all the above, is the computation of separation distance and collision detection of two objects. In this thesis, we propose efficient algorithms that compute the Euclidean distance of two objects in 3D space and we implement them for the case of triangle meshes. For these algorithms we design a tree data structure that belongs to the family of Bounding Volume Hierarchies (BVH). The construction procedure of this data structure is similar to the one used by the KD-Tree, but it differs, as our data structure manages spatial data and also uses Axis-Aligned Bounding Boxes (AABB). In addition, we describe a traversal scheme of the data structure in order to answer nearest neighbor queries for spatial data. The traversal of the tree structure is implemented as a directed depth first search (DFS), aiming to reduce the searching space by pruning the tree during backtracking. Furthermore, we parallelize the construction of the data structure as well as the procedure of finding the Euclidean distance, using multithreading. Finally, we measure and analyze the efficiency of our algorithms on a series of test cases we created.

Keywords:

Computational Geometry, Polygonal Meshes, Euclidean Distance, Bounding Volumes Hierarchies

Ευχαριστίες

Άδειο

Υπολογισμός της Ευκλείδειας Απόστασης δύο Τριγωνικών Πλεγμάτων

Παναγιώτης Καρελής
karelisp@ece.auth.gr

14 Σεπτεμβρίου 2022

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	3
1.1	Κίνητρο	3
1.2	Περιγραφή του Προβλήματος	4
1.3	Στόχοι της Διπλωματικής Εργασίας	4
1.4	Διάρθρωση της Διπλωματικής Εργασίας	5
2	Θεωρητικό Υπόβαθρο	6
2.1	Τριγωνικά Πλέγματα	6
2.2	Ευρετήρια για Χωρικά Δεδομένα Spatial Indexing	6
2.3	Οριοθετικοί Όγκοι	6
2.3.1	Οριοθετικά Πλαίσια Ευθυγραμμισμένα με τους Άξονες	6
2.4	Ιεραρχίες Οριοθετικών Όγκων	6
2.5	Το Πρόβλημα Εύρεσης του Κοντινότερου Γείτονα	6
3	Σχετική Βιβλιογραφία	7
3.1	Εύρεση Κοντινότερου Σημείου σε ένα Σύνολο Σημείων	7
3.2	Ανίχνευση Σύγκρουσης και Υπολογισμός Απόστασης Πολυγώνων	7
3.3	Απόσταση Σημείου από Πολυγωνικό Πλέγμα	7
3.4	Απόσταση Αντικειμένων που Περιγράφονται από NURBS	7
3.5	Απόσταση Δύο Πολυγωνικών Πλεγμάτων	7
4	Μεθοδολογία	8
4.1	Υπολογισμοί Απόστασης Στοιχειωδών Γεωμετρικών Αντικειμένων	8
4.1.1	Ευκλείδεια Απόσταση δύο Τριγώνων	8
4.1.2	Ευκλείδεια Απόσταση δύο AABB	8
4.2	Αλγόριθμοι Εξαντλητικής Αναζήτησης	8
4.3	Ορισμός Μετρικής Κόστους Αναζήτησης	8
4.4	Σχεδιασμός μιας BVH Δομής Δεδομένων, το spatial KD-Tree	8
4.4.1	Κατασκευή του sKD-Tree	8
4.4.2	Ερωτήματα Κοντινότερου Γείτονα στο sKD-Tree	8
4.5	Αλγόριθμοι που χρησιμοποιούν τη δομή sKD-Tree	8
4.6	Βελτιστοποίηση των Αλγορίθμων για Πραγματικά Συστήματα Υπολογιστών	8
4.6.1	Παραλληλοποίηση με χρήση Πολλαπλών Νημάτων (Multi-threading)	8
4.6.2	Χρήση Κουβάδων στα Φύλλα του sKD-Tree (Buckets)	8
5	Πειράματα και Αποτελέσματα	9
5.1	Σύγκριση Σχετικού Κόστους των Πράξεων μεταξύ Στοιχειωδών Γεωμετρικών Οντοτήτων	9

5.2	Κατασκευή Δεδομένων Ελέγχου	9
5.3	Εκτίμηση της Μειτρικής Κόστους Αναζήτησης	9
5.4	Χρόνοι Κατασκευής του sKD-Tree	9
5.4.1	Σειριακή Κατασκευή	9
5.4.2	Παράλληλη Κατασκευή	9
5.5	Συνολικός Χρόνος Εκτέλεσης - Σύγκριση Αλγορίθμων	9
5.5.1	Δύο Αεροπλάνα	9
5.5.2	Scooby με Stanford Bunny	9
5.5.3	Δύο Ομοαξονικοί Κύλινδροι	9
5.5.4	Δύο Αεροπλάνα με Ανομοιόμορφο Πλέγμα	9
6	Συμπεράσματα και Μελλοντική Εργασία	10
6.1	Σχολιασμός των Αποτελεσμάτων από τα Πειράματα	10
6.2	Μελλοντική Εργασία	10
A'	Ακρωνύμια και συντομογραφίες	11

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Κίνητρο

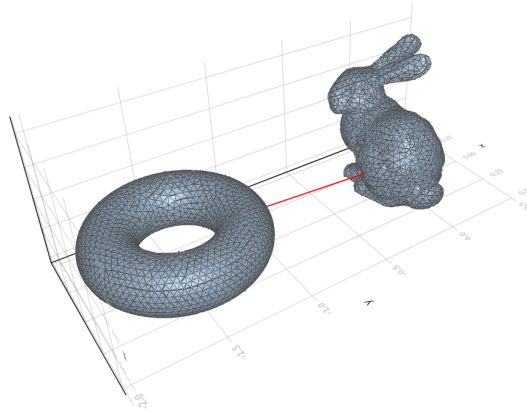
Ο υπολογισμός της απόστασης που διαχωρίζει δύο αντικείμενα στο χώρο αποτελεί θεμελιώδες πρόβλημα στον τομέα της Υπολογιστικής Γεωμετρίας. Στη ρομποτική, στη σχεδίαση και μηχανική με τη βοήθεια υπολογιστών (CAD και CAE), στις προσομοιώσεις με υπολογιστές και στη γραφική υπολογιστών είναι σημαντικό να γνωρίζουμε εάν δύο αντικείμενα, που περιγράφονται από μαθηματικά μοντέλα στον τρισδιάστατο χώρο, τέμνονται/συγκρούονται ή βρίσκονται σε κοντινή απόσταση. Για την παρούσα διπλωματική εργασία, εξετάζουμε την περίπτωση όπου τα αντικείμενα του χώρου περιγράφονται από τριγωνικά πλέγματα (βλ. 2.1).

Στη ρομποτική, για παράδειγμα, η επίλυση του παραπάνω προβλήματος είναι απαιτητή για τον σχεδιασμό διαδρομής με την παρουσία εμποδίων (path-planning problem) [2], [3], [4], [5]. Επιπλέον, σε εφαρμογές CAD-CAE στις οποίες σχεδιάζονται περίπλοκες κατασκευές που αποτελούνται από μεγάλο αριθμό εξαρτημάτων, ο εντοπισμός σύγκρουσης μεταξύ των εξαρτημάτων είναι απαραίτητος τόσο για τις αναλύσεις και δοκιμές των προϊόντων όσο και για την παραγωγή τους [1]. Στη γραφική με υπολογιστές και συγκεκριμένα κατά την κίνηση των αντικειμένων σε μια εικονική σκηνή, όπως στα βιντεοπαιχνίδια και στα κινούμενα σχέδια, είναι πιθανό τα αντικείμενα να διεισδύσουν το ένα στο άλλο. Αυτή η κατάσταση δεν είναι επιθυμητή όταν με τα γραφικά επιδιώκεται η αναπαράσταση ενός ρεαλιστικού κόσμου [7]. Τέλος, το πρόβλημα υπολογισμού της απόστασης που διαχωρίζει δύο αντικείμενα στο χώρο συναντάται και στον τομέα της υπολογιστικής φυσικής για εφαρμογές ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων (FEA) και προσομοιώσεων [6].

Η ραγδαία ανάπτυξη όλων των παραπάνω τομέων τα τελευταία χρόνια και η απαίτηση λεπτομερέστερης περιγραφής των αντικειμένων του τρισδιάστατου χώρου, κάνουν επιτακτική την ανάγκη για μελέτη και σχεδιασμό αλγορίθμων ικανών να διαχειριστούν μεγάλους όγκους δεδομένων εισόδου. Σε αυτή τη διπλωματική εργασία προτείνουμε αποδοτικούς αλγορίθμους για τον υπολογισμό της απόστασης δύο πλεγμάτων στον τρισδιάστατο χώρο.

1.2 Περιγραφή του Προβλήματος

Δοθέντων δύο αντικείμενων στον χώρο, τα οποία περιγράφονται από τριγωνικά πλέγματα, το πιο φυσικό μέγεθος για την περιγραφή της εγγύτητας μεταξύ τους είναι η Ευκλείδεια απόσταση. Δηλαδή, το μήκος του μικρότερου ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τα δύο αντικείμενα. Σε περίπτωση που τα αντικείμενα συγκρούονται η απόσταση τους είναι μηδέν.



Σχήμα 1.1: Ευκλείδεια Απόσταση δύο Τριγωνικών Πλεγμάτων - Το κόκκινο ευθύγραμμο τμήμα αναπαριστά την Ευκλείδεια απόσταση ενός Τόρου και του Stanford Bunny.

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο ορίζεται και η Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ δύο τριγώνων στον τρισδιάστατο χώρο. Σχεδιάζοντας μια τέτοια ρουτίνα (βλ. 4.1.1) τότε μπορούμε να δώσουμε έναν εναλλακτικό ορισμό του προβλήματος και ταυτόχρονα έναν αλγόριθμο που το επιλύει:

Ορισμός 1 Έστω δύο αντικείμενα του τρισδιάστατου χώρου που περιγράφονται από τριγωνικά πλέγματα. Επιπλέον, έστω τα σύνολα X, Y που αποτελούνται από τα τρίγωνα των δύο πλεγμάτων, αντίστοιχα, και $tria_dist(x, y)$ η ρουτίνα που υπολογίζει την Ευκλείδεια απόσταση δύο τριγώνων x, y . Η Ευκλείδεια απόσταση d των δύο τριγωνικών πλεγμάτων είναι

$$d = \min_{x \in X, y \in Y} tria_dist(x, y)$$

Ο τετριμμένος αλγόριθμος, που βασίζεται στον ορισμό, υπολογίζει την απόσταση κάθε πιθανού ζεύγους τριγώνων και επιλέγει την ελάχιστη. Τέτοιοι αλγόριθμοι εξαντλητικής αναζήτησης περιγράφονται στο 4.2, όμως είναι αδύνατο να χρησιμοποιηθούν σε πραγματικές εφαρμογές. Ο λόγος είναι η μεγάλη υπολογιστική τους πολυπλοκότητα της τάξης $O(N \cdot M)$ (όπου N, M το πλήθος των τριγώνων των συνόλων X, Y αντίστοιχα).

1.3 Στόχοι της Διπλωματικής Εργασίας

Η συνεισφορά της διπλωματικής εργασίας είναι η ακόλουθη:

- Σχεδιάζουμε μια δενδρική δομή δεδομένων που ανήκει στην οικογένεια των Ιεραρχικών Οριοθετικών Όγκων (BVH). Η δομή αυτή χρησιμοποιείται ως χωρικό ευρετήριο (spatial indexing).
- Προτείνουμε έναν τρόπο διάσχισης της παραπάνω δομής ώστε να υποστηρίζονται ερωτήματα κοντινότερου γείτονα για χωρικά δεδομένα. Στόχος είναι να ελεγχθεί μόνο ένα μικρό υποσύνολο του χώρου αναζήτησης. Αυτό επιτυγχάνεται με το κλάδεμα (pruning) του δένδρου κατά την αναζήτηση.
- Προτείνουμε δύο αλγορίθμους που επιλύουν το πρόβλημα υπολογισμού της Ευκλείδειας απόστασης δύο πλεγμάτων. Οι αλγόριθμοι είναι γενικοί και μπορούν να εφαρμοστούν σε πλέγματα που αποτελούνται από διαφόρων ειδών πολύτοπα (ν-γωνα και πολύεδρα) υπό προϋποθέσεις. Στην εργασία αυτή μελετώνται τα τριγωνικά πλέγματα.
- Υλοποιούμε τους αλγορίθμους για συστήματα υψηλής απόδοσης που υποστηρίζουν πολλαπλά νήματα (multithreading). Παραλληλοποιούμε τις διαδικασίες κατασκευής του δένδρου και αναζήτησης της ελάχιστης απόστασης.
- Μετράμε και αναλύουμε την επίδοση των αλγορίθμων μας σε μια σειρά από περιπτώσεις ελέγχου που κατασκευάσαμε.

1.4 Διάρθρωση της Διπλωματικής Εργασίας

Στο **Κεφάλαιο 1** έγινε μια εισαγωγή στο πρόβλημα υπολογισμού της απόστασης δύο πλεγμάτων και παρουσιάστηκαν τα κίνητρα που οδήγησαν στην υλοποίηση των αλγορίθμων που θα παρουσιαστούν.

Στο **Κεφάλαιο 2** παρουσιάζεται το θεωρητικό υπόβαθρο που απαιτείται από τον αναγνώστη ώστε να κατανοήσει πλήρως το πρόβλημα και την προτεινόμενη λύση.

Στο **Κεφάλαιο 3** αναφέρεται η σχετική βιβλιογραφία, δηλαδή πώς αντιμετώπισαν άλλοι ερευνητές το ίδιο ή παρόμοια προβλήματα. Παρουσιάζονται επίσης ομοιότητες και διαφορές των υπολοίπων προσεγγίσεων σε σχέση με τη δική μας.

Στο **Κεφάλαιο 4** αναλύεται η μεθοδολογία που προτείνουμε και παρουσιάζεται η υλοποίηση των αλγορίθμων μας.

Στο **Κεφάλαιο 5** παρατίθενται τα αποτελέσματα από τα πειράματα που εκτελέσαμε. Οι μετρήσεις των πειραμάτων περιλαμβάνουν την εκτίμηση της μετρικής κόστους που ορίζεται στην ενότητα 4.3 καθώς και τους χρόνους εκτέλεσης των αλγορίθμων.

Στο **Κεφάλαιο 6** σχολιάζονται τα αποτελέσματα και παρουσιάζονται σκέψεις για μελλοντική επέκταση και βελτίωση των ιδεών της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Κεφάλαιο 2

Θεωρητικό Υπόβαθρο

2.1 Τριγωνικά Πλέγματα

2.2 Ευρετήρια για Χωρικά Δεδομένα Spatial Indexing

2.3 Οριοθετικοί Όγκοι

2.3.1 Οριοθετικά Πλαίσια Ευθυγραμμισμένα με τους Άξονες

2.4 Ιεραρχίες Οριοθετικών Όγκων

2.5 Το Πρόβλημα Εύρεσης του Κοντινότερου Γείτονα

Κεφάλαιο 3

Σχετική Βιβλιογραφία

- 3.1 Εύρεση Κοντινότερου Σημείου σε ένα Σύνολο Σημείων**
- 3.2 Ανίχνευση Σύγκρουσης και Υπολογισμός Απόστασης Πολυγώνων**
- 3.3 Απόσταση Σημείου από Πολυγωνικό Πλέγμα**
- 3.4 Απόσταση Αντικειμένων που Περιγράφονται από NURBS**
- 3.5 Απόσταση Δύο Πολυγωνικών Πλεγμάτων**

Κεφάλαιο 4

Μεθοδολογία

4.1 Υπολογισμοί Απόστασης Στοιχειωδών Γεωμετρικών Αντικειμένων

4.1.1 Ευκλείδεια Απόσταση δύο Τριγώνων

Ευκλείδεια Απόσταση δύο Ευθυγράμμων Τμημάτων

Ευκλείδεια Απόσταση Σημείου και Τριγώνου

4.1.2 Ευκλείδεια Απόσταση δύο AABB

4.2 Αλγόριθμοι Εξαντλητικής Αναζήτησης

4.3 Ορισμός Μετρικής Κόστους Αναζήτησης

4.4 Σχεδιασμός μιας BVH Δομής Δεδομένων, το spatial KD-Tree

4.4.1 Κατασκευή του sKD-Tree

4.4.2 Ερωτήματα Κοντινότερου Γείτονα στο sKD-Tree

4.5 Αλγόριθμοι που χρησιμοποιούν τη δομή sKD-Tree

4.6 Βελτιστοποίηση των Αλγορίθμων για Πραγματικά Συστήματα Υπολογιστών

4.6.1 Παραλληλοποίηση με χρήση Πολλαπλών Νημάτων (Multithreading)

4.6.2 Χρήση Κουβάδων στα Φύλλα του sKD-Tree (Buckets)

Κεφάλαιο 5

Πειράματα και Αποτελέσματα

5.1 Σύγκριση Σχετικού Κόστους των Πράξεων μεταξύ Στοιχειωδών Γεωμετρικών Οντοτήτων

5.2 Κατασκευή Δεδομένων Ελέγχου

5.3 Εκτίμηση της Μετρικής Κόστους Αναζήτησης

5.4 Χρόνοι Κατασκευής του sKD-Tree

5.4.1 Σειριακή Κατασκευή

5.4.2 Παράλληλη Κατασκευή

5.5 Συνολικός Χρόνος Εκτέλεσης - Σύγκριση Αλγορίθμων

5.5.1 Δύο Αεροπλάνα

5.5.2 Scooby με Stanford Bunny

5.5.3 Δύο Ομοαξονικοί Κύλινδροι

5.5.4 Δύο Αεροπλάνα με Ανομοιόμορφο Πλέγμα

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα και Μελλοντική Εργασία

6.1 Σχολιασμός των Αποτελεσμάτων από τα Πειράματα

6.2 Μελλοντική Εργασία

Παράρτημα Α΄

Ακρωνύμια και συντομογραφίες

AABB Axis-Aligned Bounding Box

BVH Bounding Volume Hierarchy

CAE Computer Aided Engineering

DFS Depth First Search

FEA Finite Element Analysis

Bibliography

- [1] J. W. Boyse. Interference detection among solids and surfaces. *Communications of the ACM*, 22(1):3–9, 1979.
- [2] R. A. Brooks and T. Lozano-Perez. A subdivision algorithm in configuration space for findpath with rotation. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, (2):224–233, 1985.
- [3] S. Cameron. A study of the clash detection problem in robotics. In *Proceedings. 1985 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 2, pages 488–493. IEEE, 1985.
- [4] J. Canny. Collision detection for moving polyhedra. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, (2):200–209, 1986.
- [5] R. Culley and K. Kempf. A collision detection algorithm based on velocity and distance bounds. In *Proceedings. 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 3, pages 1064–1069. IEEE, 1986.
- [6] A. Khamayseh and G. Hansen. Use of the spatial kd-tree in computational physics applications. *Commun Comput Phys*, 2(3):545–576, 2007.
- [7] M. Moore and J. Wilhelms. Collision detection and response for computer animation. In *Proceedings of the 15th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 289–298, 1988.