

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

PARA EL ANÁLISIS DE SUPERVIVENCIA

Karen Viviana Rodríguez Macías
14 de Octubre del 2016

En el presente documento se definen 5 distribuciones que se pueden utilizar para el análisis de supervivencia, ya que tienen soporte en los positivos. Se obtiene su función de distribución, de supervivencia y de riesgo utilizando formulas de equivalencia entre ellas.

1 DISTRIBUCIÓN PARETO

Sea $x \text{ Pareto}(\lambda, \kappa)$ decimos que x se distribuye Pareto con parametros λ y κ . La variable aleatoria Pareto x con parámetros positivos λ y κ tiene la siguiente función de distribución acumulativa :

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{x}\right)^\kappa \quad x > \lambda$$

FUNCIÓN DE DENSIDAD

$$f(x) = \frac{\kappa \lambda^\kappa}{x^{\kappa+1}} \quad x > \lambda$$

Esto es porque dada la función de distribución acumulativa podemos obtener la función de densidad con su derivada, como se muestra a continuación :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\partial F(x)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(1 - \frac{\lambda^\kappa}{x^\kappa} \right) \\ &= (-\lambda^\kappa) \left(\frac{-\kappa x^{\kappa-1}}{x^{2\kappa}} \right) \\ &= (-\lambda^\kappa) \left(\frac{-\kappa}{x^{\kappa+1}} \right) \\ &= \frac{\kappa \lambda^\kappa}{x^{\kappa+1}} \end{aligned}$$

FUNCIÓN DE SUPERVIVENCIA

$$S(x) = \left(\frac{\lambda}{x}\right)^\kappa \quad x > \lambda$$

La función de Supervivencia en el soporte de x se obtiene de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} S(x) &= P(X \geq x) \\ &= 1 - F(x) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{x}\right)^\kappa \\ &= \left(\frac{\lambda}{x}\right)^\kappa \end{aligned}$$

FUNCIÓN DE RIESGO

$$h(x) = \frac{\kappa}{x} \quad x > \lambda$$

La función de riesgo en el soporte de x se obtiene de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{f(x)}{S(x)} \\ &= \frac{\frac{\kappa \lambda^\kappa}{x^{\kappa+1}}}{\left(\frac{\lambda}{x}\right)^\kappa} \\ &= \frac{x^\kappa \kappa \lambda^\kappa}{x^{\kappa+1} \lambda^\kappa} \\ &= \frac{\kappa}{x} \end{aligned}$$

FUNCIÓN DE RIESGO ACUMULATIVA

$$H(x) = -\kappa(\ln \lambda - \ln x) \quad x > \lambda$$

La función de riesgo acumulativa en el soporte de x se obtiene de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} H(x) &= -\ln S(x) \\ &= -\ln \left(\frac{\lambda}{x}\right)^\kappa \\ &= -\kappa(\ln \lambda - \ln x) \end{aligned}$$

2 DISTRIBUCIÓN MUTH

Sea $x \text{ Muth}(\kappa)$ decimos que x se distribuye Muth con parametro κ . La variable aleatoria Muth x con parámetro positivo κ tiene la siguiente función de distribución acumulativa :

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{\left(-\frac{e^{\kappa x}}{\kappa} + \kappa x + \frac{1}{\kappa}\right)} \quad x > 0$$

FUNCIÓN DE DENSIDAD

$$f(x) = (e^{\kappa x} - \kappa) e^{\left(-\frac{e^{\kappa x}}{\kappa} + \kappa x + \frac{1}{\kappa}\right)}$$

Esto es porque dada la función de distribución acumulativa podemos obtener la función de densidad con su derivada, como se muestra a continuación :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\partial F(x)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(1 - e^{\left(-\frac{e^{\kappa x}}{\kappa} + \kappa x + \frac{1}{\kappa}\right)} \right) \\ &= (e^{\kappa x} - \kappa) e^{\left(-\frac{e^{\kappa x}}{\kappa} + \kappa x + \frac{1}{\kappa}\right)} \end{aligned}$$

FUNCIÓN DE SUPERVIVENCIA

$$S(x) = e^{\left(-\frac{e^{\kappa x}}{\kappa} + \kappa x + \frac{1}{\kappa}\right)} \quad x > 0$$

La función de Supervivencia en el soporte de x se obtiene de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} S(x) &= P(X \geq x) \\ &= 1 - F(x) \\ &= 1 - \left(1 - e^{\left(-\frac{e^{\kappa x}}{\kappa} + \kappa x + \frac{1}{\kappa}\right)} \right)^\kappa \\ &= e^{\left(-\frac{e^{\kappa x}}{\kappa} + \kappa x + \frac{1}{\kappa}\right)} \end{aligned}$$

FUNCIÓN DE RIESGO

$$h(x) = e^{\kappa x} - \kappa \quad x > 0$$

La función de riesgo en el soporte de x se obtiene de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{f(x)}{S(x)} \\ &= \frac{(e^{\kappa x} - \kappa) e^{\left(-\frac{e^{\kappa x}}{\kappa} + \kappa x + \frac{1}{\kappa}\right)}}{e^{\left(-\frac{e^{\kappa x}}{\kappa} + \kappa x + \frac{1}{\kappa}\right)}} \\ &= e^{\kappa x} - \kappa \end{aligned}$$

FUNCIÓN DE RIESGO ACUMULATIVA

$$H(x) = \frac{e^{\kappa x}}{\kappa} - \kappa x - \frac{1}{\kappa} \quad x > 0$$

La función de riesgo acumulativa en el soporte de x se obtiene de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} H(x) &= -\ln S(x) \\ &= -\ln \left(e^{\left(-\frac{e^{\kappa x}}{\kappa} + \kappa x + \frac{1}{\kappa}\right)} \right) \\ &= \frac{e^{\kappa x}}{\kappa} - \kappa x - \frac{1}{\kappa} \end{aligned}$$

3 DISTRIBUCIÓN LOMAX

Sea x $Lomax(\lambda, \kappa)$ decimos que x se distribuye Lomax con parametros λ y κ . La variable aleatoria Lomax x con parámetros positivos λ y κ tiene la siguiente función de distribución acumulativa :

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - (1 + \lambda x)^{-\kappa} \quad x > 0$$

FUNCIÓN DE DENSIDAD

$$f(x) = \frac{\lambda \kappa}{(1 + \lambda x)^{k+1}} \quad x > 0$$

Esto es porque dada la función de distribución acumulativa podemos obtener la función de densidad con su derivada, como se muestra a continuación :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\partial F(x)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (1 - (1 + \lambda x)^{-\kappa}) \\ &= \frac{\lambda \kappa}{(1 + \lambda x)^{k+1}} \end{aligned}$$

FUNCIÓN DE SUPERVIVENCIA

$$S(x) = (1 + \lambda x)^{-\kappa} \quad x > 0$$

La función de Supervivencia en el soporte de x se obtiene de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} S(x) &= P(X \geq x) \\ &= 1 - F(x) \\ &= 1 - (1 - (1 + \lambda x)^{-\kappa}) \\ &= (1 + \lambda x)^{-\kappa} \end{aligned}$$

FUNCIÓN DE RIESGO

$$h(x) = \frac{\lambda \kappa}{1 + \lambda x} \quad x > 0$$

La función de riesgo en el soporte de x se obtiene de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{f(x)}{S(x)} \\ &= \frac{\frac{\lambda \kappa}{(1 + \lambda x)^{k+1}}}{(1 + \lambda x)^{-\kappa}} \\ &= \frac{\lambda \kappa}{1 + \lambda x} \end{aligned}$$

FUNCIÓN DE RIESGO ACUMULATIVA

$$H(x) = \kappa \ln(1 + \lambda x) \quad x > 0$$

La función de riesgo acumulativa en el soporte de x se obtiene de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} H(x) &= -\ln S(x) \\ &= -\ln((1 + \lambda x)^{-\kappa}) \\ &= \kappa \ln(1 + \lambda x) \end{aligned}$$

4 DISTRIBUCIÓN RAYLEIGH

Sea x *Rayleigh*(α) decimos que x se distribuye Rayleigh con parametro α . La variable aleatoria Rayleigh x tiene la siguiente función de distribución acumulativa :

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{\alpha}} \quad x > 0$$

FUNCIÓN DE DENSIDAD

$$f(x) = \frac{2xe^{-\frac{x^2}{\alpha}}}{\alpha} \quad x > 0$$

Esto es porque dada la función de distribución acumulativa podemos obtener la función de densidad con su derivada, como se muestra a continuación :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\partial F(x)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(1 - e^{-\frac{x^2}{\alpha}} \right) \\ &= \frac{2xe^{-\frac{x^2}{\alpha}}}{\alpha} \end{aligned}$$

FUNCIÓN DE SUPERVIVENCIA

$$S(x) = e^{-\frac{x^2}{\alpha}} \quad x > 0$$

La función de Supervivencia en el soporte de x se obtiene de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} S(x) &= P(X \geq x) \\ &= 1 - F(x) \\ &= 1 - \left(1 - e^{-\frac{x^2}{\alpha}} \right) \\ &= e^{-\frac{x^2}{\alpha}} \end{aligned}$$

FUNCIÓN DE RIESGO

$$h(x) = \frac{2x}{\alpha} \quad x > 0$$

La función de riesgo en el soporte de x se obtiene de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{f(x)}{S(x)} \\ &= \frac{\frac{2xe^{-\frac{x^2}{\alpha}}}{\alpha}}{e^{-\frac{x^2}{\alpha}}} \\ &= \frac{2x}{\alpha} \end{aligned}$$

FUNCIÓN DE RIESGO ACUMULATIVA

$$H(x) = \frac{x^2}{\alpha} \quad x > 0$$

La función de riesgo acumulativa en el soporte de x se obtiene de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} H(x) &= -\ln S(x) \\ &= -\ln\left(e^{-\frac{x^2}{\alpha}}\right) \\ &= \frac{x^2}{\alpha} \end{aligned}$$

5 DISTRIBUCIÓN PODER (POWER DISTRIBUTION)

Sea $x \text{ Power}(\alpha, \beta)$ decimos que x se distribuye Power con parametros α y β . La variable aleatoria Power x tiene la siguiente función de distribución acumulativa :

$$F(x) = \frac{x^\beta}{\alpha^\beta} \quad 0 < x < \alpha$$

FUNCIÓN DE DENSIDAD

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha^\beta} x^{\beta-1} \quad 0 < x < \alpha$$

Esto es porque dada la función de distribución acumulativa podemos obtener la función de densidad con su derivada, como se muestra a continuación :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\partial F(x)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^\beta}{\alpha^\beta} \right) \\ &= \frac{\beta}{\alpha^\beta} x^{\beta-1} \end{aligned}$$

FUNCIÓN DE SUPERVIVENCIA

$$S(x) = 1 - \frac{x^\beta}{\alpha^\beta} \quad 0 < x < \alpha$$

La función de Supervivencia en el soporte de x se obtiene de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} S(x) &= P(X \geq x) \\ &= 1 - F(x) \\ &= 1 - \left(\frac{x^\beta}{\alpha^\beta} \right) \end{aligned}$$

FUNCIÓN DE RIESGO

$$h(x) = \frac{2x}{\alpha} \quad 0 < x < \alpha$$

La función de riesgo en el soporte de x se obtiene de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{f(x)}{S(x)} \\ &= \frac{\frac{\beta}{\alpha^\beta} x^{\beta-1}}{1 - \frac{x^\beta}{\alpha^\beta}} \\ &= \frac{\beta x^{\beta-1}}{\alpha^\beta - x^\beta} \end{aligned}$$

FUNCIÓN DE RIESGO ACUMULATIVA

$$H(x) = -\ln \left(1 - \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta \right) \quad 0 < x < \alpha$$

La función de riesgo acumulativa en el soporte de x se obtiene de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} H(x) &= -\ln S(x) \\ &= -\ln \left(1 - \left(\frac{x^\beta}{\alpha^\beta} \right) \right) \end{aligned}$$