Tensores y autovalores

Karen Sarat Anaya Verdugo *
Miguel Fernando Becerra Rodriguez †
Métodos matemáticos para físicos
Universidad industrial de Santander

13 de febrero de 2022

Índice

Resumen

Con la física y las matemáticas se pueden resolver problemas de la cotidianidad, tales como los que se abordan en el siguiente informe.El primero consiste en un sistemas, en donde los momentos de orden cero, uno y dos representa para el caso de la distribución de masas la masa total, el vector de centro de masa, y el tensor de momento de inercia respectivamente. Para el caso 2D se encontró un tensor de tamaño 2x2, mientras que para el caso 3D uno de 3x3.

*Código: 2200813
†Código: 2201888

Cada uno de estos tensores tiene sus propios autovalores y autovectores, los cuales nos indican los principales ejes de referencia de la distribución de masas. El segundo, abarca los porcentajes de PIB en Colombia invertidos en distintos sectores, se halló la matriz de covarianza y correlación, las cuales representan el cambio y la relación entre el PIB de dos sectores, respectivamente. Se hallaron también los autovectores y autovalores de la matriz de covarianza, los cuales representan la dispersión de los datos.

1. Introducción

En la cotidianidad, existen una gran cantidad de problemas que pueden ser resueltos aplicando conceptos y herramientas que proporciona la física junto con las matemáticas. Entre ellos están, los sistemas de n partículas, tales como el sistema conformado por la Tierra y la Luna o problemas de otras disciplinas, como economía y un claro ejemplo de estos es el análisis del Producto Interno Bruto (PIB) de los países.

Por un lado, se tiene un sistema físico de n partículas cualquiera, del cual se quiere conocer su momento de inercia. El momento de inercia I corresponde a una medida de la inercia rotacional de un cuerpo. Cuando un cuerpo está girando alrededor de uno de los ejes principales de inercia, la inercia rotacional puede ser representada como una magnitud vectorial llamada momento de inercia. Sin embargo, en el caso más general posible la inercia rotacional debe representarse por medio de un conjunto de momentos de inercia y componentes que forman el llamado tensor de inercia [1]. En este informe lo que se busca es hallar ese tensor de inercia para un sistema de n partículas a partir de una serie de datos que nos dan información sobre las masas y sus posiciones.

Por otro lado, el Banco Mundial mantiene una estadística de los datos económicos de casi todos los países. En especial del PIB (Producto Interno Bruto), el cual es una magnitud macroeconómica que expresa el valor monetario de la producción de bienes y servicios de demanda final de un país o región durante un período determinado, normalmente de un año o trimestrales [2]. Este valor cambia a través de los años dependiendo de mucho factores, por lo que para abordar este problema, lo que se busca es calcular la matriz de covariancia del porcentaje del producto interno bruto (PIB) que se ha empleado en Colombia en los últimos 15 años en los sectores de defensa, salud, educación, ciencia y tecnología. Entonces, con estos dos problemas lo que se precisa es interpretar más allá de las matemáticas el significa y los resultados que arrojan los tensores, de inercia para el primer caso y la matriz de covarianza para el segundo. Además de eso, se tienen unas preguntas y puntos específicos que se pretenden resolver a lo largo del informe.
Para el problema de las masas:
Encontrar los tres primeros momentos para esta distribución de masas: Momento de orden cero, la masa total del sistema, momento de orden uno el centro de masa del sistema, momento de orden dos, el tensor momento de inercia del sistema. Luego, responder las siguientes preguntas:

- ¿Los vectores base del sistema cartesiano constituyen una base propia para esta distribución de masa? Esto es: ¿Los vectores cartesianos son autovectores del tensor momento de inercia?

- ¿Cuáles son los ejes principales de inercia para esta distribución de masas? Esto es aquellos vectores propios del tensor de inercia, que forma una base ortogonal respecto a la cual la distribución de las masas se organiza de forma mas simple.
- ¿Cuál es la matriz de transformación de la base cartesiana a la base de autovectores conformada por los ejes principales?

Para el problema del PIB:

- ¿Cuál es la matriz de covariancia y la matriz de correlación entre estos parámetros?
- ¿Cuáles son los autovalores y autovectores de la matriz de covariancia? ¿Cuál es el significado de los autovalores y autovectores de esta matriz?
- ¿Cuál es la matriz de transformación que nos lleva de la matriz en la base original a la representación de la matriz en la base de autovalores y autovectores?

Para poder resolver provechosamente las incógnitas que plantea el problema, el siguiente informe se divide en 4 secciones que pretenden explicar cómo y qué se obtuvo de la resolución. En la Sección 2 discutimos la metodología empleada, mientras que en la Sección 3 se presentan los resultados. Finalizamos el artículo con las conclusiones en la Sección 4.

2. Metodología

Para la solución del trabajo se utilizó Python. Para la primera parte del problema, se convirtieron todos los datos (Masas, posición en x, en y, y en z) en arrays, para de esta manera poder manipularlos fácilmente utilizando las diversas funciones de la biblioteca Numpy. Lo primero que se pedía era hallar el momento de orden cero para ésta distribución de masas, es decir, hallar su masa total.

Posteriormente, se debía hallar el momento de orden uno y dos de la distribución, es decir, el centro de masa del sistema y el tensor momento de inercia.

Para ésta ultima, es decir, para el tensor momento de inercia, se hallaron los vectores y valores propios utilizando la función de Numpy np.linalg.eig(), para después, con estos datos, comprobar que los vectores cartesianos no son autovectores del tensor momento de inercia y finalmente hallar la matriz de cambio de coordenadas de la base cartesiana a la base de autovectores.

Lo anterior se pedía para dos casos, el primero era el caso 2D, es decir, la distribución de masas se encontraba en el plano xy; y para el caso 3D. Para primer caso se proyectaron las posiciones de todas las masas en el plano xy, es decir, su componente en la dirección z se tomó como 0.

Para la resolución del segundo inciso del problema, se reorganizaron los datos de tal manera que los valores de los cuatro parámetros (Salud, educación, ciencia y tecnología, defensa) estuvieran en un mismo archivo xlsx de excel con el fin de tener un mejor manejo de los mismos, ya que en el código se comportan como un dataframe.

Posteriormente, se convirtió dicho dataframe en un array, con una función de Numpy, quedando una matriz 15×4. Todo lo anterior se hizo porque más adelante se usaron más funciones de numpy que son más manejables para el autor con arrays que con dataframes. Luego, se halló la matriz de covarianza del array, esta matriz indica el nivel en el que dos variables varían juntas y se graficó dicha matriz en un mapa de calor para tener mejor visualización de los resultados.

Después, se halló la matriz de correlación, la cual devuelve los coeficientes de correlación producto-momento de Pearson. Y al igual que en el paso anterior, se hizo un mapa de calor para la visualización de los datos.

Se calcularon también los autovalores y autovectores de la matriz de covarianza hallada previamente, al ser una matriz cuadrada.

2.1. Tablas

Las siguientes tablas presentan los valores de los autovectores y autovalores obtenidos para el tensor de momento de incercia para el caso 2D y 3D

Tabla 1: Autovectores y autovalores del tensor momento de inercia caso 2D.

Autovalor	**Autovector Asociado**
-3876681983.14	$\begin{pmatrix} -0{,}707117 \\ -0{,}707096 \end{pmatrix}$
3884098216.14	$\begin{pmatrix} 0{,}707096 \\ -0{,}707117 \end{pmatrix}$

Tabla 2: Autovectores y autovalores del tensor momento de inercia caso 3D.

Autovalor	**Autovector Asociado**
-3881495456.48	$\begin{pmatrix} -0{,}706974 \\ -0{,}706978 \\ -0{,}019220 \end{pmatrix}$
3880720056.21	$\begin{pmatrix} -0{,}707105 \\ 0{,}707108 \\ -0{,}000251 \end{pmatrix}$
3365342.26	$\begin{pmatrix} -0{,}013768 \\ -0{,}013412 \\ 0{,}999815 \end{pmatrix}$

La siguiente tabla presenta los valores de los autovectores y autovalores obtenidos para la matriz de covarianza del porcentaje del PBI.

Tabla 3: Autovectores y autovalores de la matriz de covarianza de los porcentajes del PIB.

Autovalor	**Autovector Asociado**
0.388	$\begin{pmatrix} 0{,}91 \\ 0{,}39 \\ 0{,}063 \\ -0{,}09 \end{pmatrix}$
0.07	$\begin{pmatrix} 0{,}12 \\ -0{,}50 \\ 0{,}046 \\ -0{,}87 \end{pmatrix}$
0.04	$\begin{pmatrix} 0{,}38 \\ -0{,}77 \\ -0{,}057 \\ 0{,}50 \end{pmatrix}$
0.0006	$\begin{pmatrix} -0{,}04 \\ -0{,}05 \\ 0{,}99 \\ 0{,}07 \end{pmatrix}$

2.2. Figuras

A continuación, se muestran los mapas de calor que representan a las matrices de covarianza y correlación respectivamente.

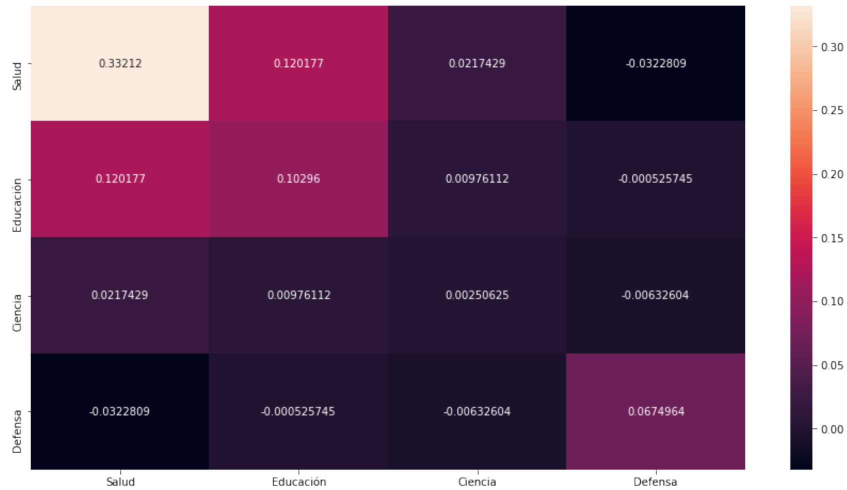

Figura 1: Matriz de covarianza del procentaje de PIB en Colombia durante los últimos 15 años. Donde cada componente de la matriz corresponde a las covarianzas entre los diferentes PIB y su diagonal a las varianzas entre los mismos sectores.

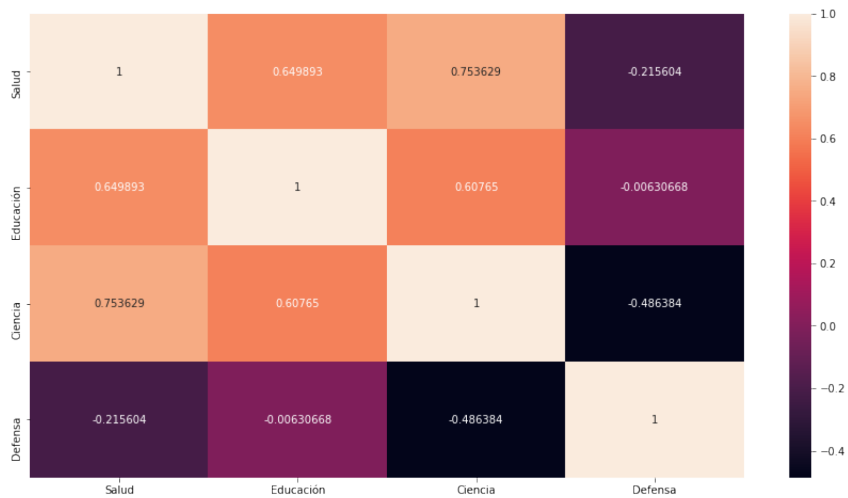

Figura 2: Matriz de correlación del procentaje de PBI en Colombia durante los últimos 15 años. Sus componentes indican el valor del coeficiente de correlación entre dos variables.

3. El experimento y los resultados

3.1. Primera Parte

El momento de orden cero, es decir, la masa total de toda la distribución se halló de la siguiente forma:

$$\mu(0) = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

Encontrando que la masa total de la distribución era de 4627 unidades de masa. Este valor va a ser igual ya sea para la primera parte en la que se considera solamente la distribución en el plano xy, o la segunda parte en la que se consideran las 3 componentes.

Posteriormente, el vector centro de masa del sistema, hace referencia a un momento de orden uno, y se calculó con la siguiente expresión:

$$\mu(1) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i x_i^j$$

Donde M es la masa total de la distribución, que se halló con el momento de orden cero. Observe que x tiene dos indices, i y j, el primero hace referencia a la posición de la masa i-esima, y la segunda nos indica la componente de la masa, la cual varía de 1 a 2 en el caso 2D (componentes x y y), obteniendo un vector de dos componentes; y de 1 a 3 en el caso 3D (componentes x, y y z), con un vector de tres componentes. Los vectores del centro de masa para el caso 2D y 3D se muestran a continuación:

$$\mathbb{A}^j = \begin{pmatrix} 825{,}815 \\ 776{,}919 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}^j = \begin{pmatrix} 825{,}815 \\ 776{,}919 \\ 15{,}503 \end{pmatrix}$$

Por último, el momento de orden dos, es decir, el tensor momento de inercia de la distribución de masa, se halló con la siguiente expresión:

$$\mu(2) = I_l^k = \sum_{i=1}^{N} m_{(i)} \left(\delta_l^k \left(x_{(i)}^m x_{(i)m} \right) - x_{(i)}^k x_{(i)m} \right)$$

Observe que la expresión tiene dos índices libres, k y l, por lo que se puede representar por medio de una matriz. El índice i, así como se mencionó anteriormente, hace referencia a la i-esima masa. Para el primer caso, se va a obtener una matriz de 2x2, mientras que para el caso 3D, la matriz será de 3x3, ambas cuadradas. Los tensores momentos de inercia obtenidos para ambos casos, 2D y 3D respectivamente, se muestran a continuación.

$$\mathbb{I}^k_l = \begin{pmatrix} 3595212 & -3880390098 \\ -3880390098 & 3821021 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{I}^k_l = \begin{pmatrix} 335108 & -3880390098 & -52096980 \\ -3880390098 & 324317 & -53477559 \\ -52096980 & -53477559 & 1930517 \end{pmatrix}$$

Ambas matrices son cuadradas como se mencionó anteriormente, y además de eso, con matrices simétricas. Las componentes en la diagonal de este tensor, nos indican los momentos de inercia según los tres ejes seleccionados, en este caso, x,y y z, mientras que las otra componentes (1 componente en el caso 2D y 3 componentes en 3D), hacen referencia a los producto de inercia, cuyo significado es un grado de asimetría de la distribución de masa en el plano formado por las componentes, por ejemplo, en el caso de la componente (1,3) del tensor del caso 3D, hace referencia al plano xz.

Ahora, De manera general, llamaremos a $|\psi\rangle$ un autovector de la matriz $\mathbb{A}$ si se cumple que:

$$\mathbb{A}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle,$$

Para este caso λ (que normalmente será un número complejo) es el autovalor correspondiente al autovector $|\psi\rangle$. La ecuación anterior es conocida en la literatura como la ecuación de autovalores y se cumple para algunos valores particulares de los autovalores λy, obviamente esto conduce a algunos vectores $|\psi\rangle$, los autovectores.

Los autovectores y autovalores obtenidos para ambos casos, se encuentran en la sección (2.1). Para el caso del tensor de inercia, los vectores propios indican los ejes principiales de inercia de la distribución, es decir los ejes respecto a la cual la distribución de las masas se organiza de forma mas simple.

Por último, si queremos obtener la representación de la matriz, en este caso, el tensor de momento de inercia en la base de los autovectores, es necesario realizar la siguiente operación, $D = S^{-1}AS$, donde S es la matriz con los autovectores normalizados en la columna, y S^{-1} es su inversa. Realizando estos cálculos, se puede verificar que la matriz va a tener en sus diagonales los autovalores, y por fuera de la diagonal va a ser cero. A continuación los tensores momentos de inercia en la base de sus autovectores para el caso 2D y 3D.

$$\langle \psi^i \mid I \mid \psi_j \rangle = \begin{pmatrix} -3876681983{,}14 & 0 \\ 0 & 3884098216{,}14 \\ & \end{pmatrix}$$

$$\langle \psi^i \mid I \mid \psi_j \rangle = \begin{pmatrix} 3881495456{,}48 & 0 & 0 \\ 0 & 3880720056{,}21 & 0 \\ 0 & 0 & 3365342{,}26 \end{pmatrix}$$

3.2. Segunda Parte

Se calculó la matriz de covarianza **(1)** entre los datos, usando la función de numpy, np.cov(). La covarianza es un valor que representa el grado de covarianza con respecto a la media de dos variables aleatorias. Este dato es básico para determinar si existe dependencia entre dos variables. Para entender mejor como funciona la función aplicada y la matriz covarianza se supone lo siguiente: Se tienen m variables aleatorias a la que se le hacen n mediciones y se organizan en un vector de m componentes donde cada una representa esas m variables.Entonces, la matriz de covarianza de peso=1 puede ser representada como:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^1-\bar{x}^1\right)^2 & \cdots & \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^1-\bar{x}^1\right)\left(x_{ki}-\bar{x}_k\right) & \cdots & \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^1-\bar{x}^1\right)\left(x_{mi}-\bar{x}_m\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^k-\bar{x}^k\right)\left(x_{1i}-\bar{x}_1\right) & \cdots & \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^k-\bar{x}^k\right)_i^2 & \vdots & \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^k-\bar{x}^k\right)\left(x_{mi}-\bar{x}^m\right) \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^m-\bar{x}^m\right)\left(x_{1i}-\bar{x}_1\right) & \cdots & \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^m-\bar{x}^m\right)\left(x_{ki}-\bar{x}_k\right) & \cdots & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^m-\bar{x}^m\right)_i^2 \end{pmatrix}$$

Donde

- $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^j-\bar{x}^j\right)^2$ representa la variancia de la j-esima componente del vector de variables aleatorias.
- $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^j-\bar{x}^j\right)\left(x_{ki}-\bar{x}_k\right)$ representa la covariancia entre la variable j-esima y la variable k esima componentes del vector de variables aleatorias. Es decir, como los cambios en una dimensión están (linealmente) asociados a cambios en otra dimensión del vector de variables aleatorias.
- Y finalamente $\bar{x}^j \equiv \bar{x}_j = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^j \equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ij}$ representa la media de la variable j-esima

Una vez obtenida la matriz de covarianza **(1)**, para interpretar sus resultados hay que tener en cuenta las siguientes cosas:

- Un valor positivo de covarianza significa que dos variables tienden a aumentar o disminuir juntas.
- Un valor negativo de covarianza representa proporcionalidad inversa, es decir que a medida que aumenta una variable, una segunda variable tiende a disminuir[3].

Para este caso en particular por ejemplo, las varianzas entre el PIB de cada sector fueron:

Tabla 4: Varianza entre cada sector con respecto a sí mismo. Indica la dispersión de cada dato con respecto a la media arimética.

Sector	**Varianza**
Salud	0.332
Educación	0.102
Ciencia	0.002
Defensa	0.067

Estos resultados significan que la variación del PIB de los sectores salud, ciencia, educación y defensa a través de los años fue poca, ya que los resultados obtenidos son casi cercanos a cero y una menor varianza indica una menor dispersión entre los datos.

Por otro lado, para el caso de las covarianzas:

Tabla 5: Covarianza entre el PIB de los sectores. Esta indica los cambios entre los datos de ambas variables con respecto a la media.

Sectores	**Covarianza**
Educación y salud	0.120
Ciencia y salud	0.021
Defensa y salud	-0.0322
Defensa y educación	-0.0005
Educación y ciencia	0.009
Defensa y ciencia	-0.0067

Como se mencionó anteriormente, estos resultados indican el cambio entre el PIB de dos sectores. En el caso de, por ejemplo, el sector defensa y salud, su covarianza es negativa lo que significa que sus PIB uno tiende a disminuir con el paso de los años mientras que el otro aumenta, lo que significa que en cierto tiempo se invirtió más en la defensa que en la salud, o viceversa, se invirtió más en la salud que en la defensa.

Posteriormente se halló la matriz de correlación **(2)** con la función np.corrcoef().Esta matriz representa las correlaciones entre dos variables. Cada fila y columna representan una varible y sus componentes corresponden al valor del coeficiente de correlación. Dicho coeficiente es un valor que indica la fuerza de la relación entre dos variables. Exiten diferentes tipos de coeficientes de correlación, pero el más común es el coeficiente de Pearson ().

$$\rho(X,Y) = \frac{E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

El valor de ρ se encuentra entre -1 y +1. Los valores cercanos a +1 significa la presencia de una fuerte relación positiva entre X e Y, mientras que los cercanos a -1 indican una fuerte relación negativa entre X e Y. Por otra parte, los valores cercanos a cero significan que no existe ninguna relación entre X e Y[4].

Según los resultados de la matriz de correlación, tales coeficientes para los PIB son los siguientes:

Tabla 6: Correlación entre los PIBs de los sectores.

Sectores	**Coeficiente de correlación.**
Educación y salud	0.64
Ciencia y salud	0.75
Defensa y salud	-0.21
Defensa y educación	-0.006
Educación y ciencia	0.60
Defensa y ciencia	-0.48

Estos resultados nos dicen que por ejemplo la relación entre los PIB del sector salud y educación, indica una fuerte correlación positiva, es decir, si el valor de una de las variables aumenta, el valor de la otra variable aumenta también, al igual que entre los PIB de ciencia y salud, o educación y ciencia. Para el caso de defensa y educación, su coeficiente de correlación indica la ausencia de cualquier correlación entre ambas, y por lo tanto sus PIB son independientes entre sí.
Luego de tener ambas matrices, se calcularon los autovalores y autovectores de la matriz de covarianza usando la función np.linalg.eig, que permite hallar los autovalores y autovectores de una matriz cuadrada.

Los valores obtenidos para los autovalores autovectores se pueden ver claramente en (**3**).
Los autovectores y los autovalores para el caso de la matriz de covarianza representa la dispersión de los datos. Por ejemplo, el valor mayor entre los autovectores corresponde al autovector que indica dónde hay mayor dispersión entre los datos.

4. Conclusiones y Recomendaciones

Para este trabajo se nos presentaron dos tipos de datos, el primero era datos de una distribución de masas, con datos de masas y posiciones (con componentes x, y y z), además de los datos del % del Producto Interno Bruto del país destinado a diferentes sectores: Educación, salud, ciencia y defensa miliar.

Se nos presentó los momentos de orden cero, uno y dos de una función, y como para el momento de orden cero representa el valor total de la variable del sistema, el momento de orden uno representa al promedio pesado de la variable, y por último el momento de orden dos, el cual es una matriz de covarianza de la variable.

Para el primer caso, para la distribución de masas, se pidió hallar los diferentes momentos, los cuáles para este caso tienen un signficiado específico. El momento de orden cero representa la masa total de la distribución, el momento de orden uno represent el vector de centro de masa y el momento de orden dos representa el tensor de momento de incercia del sistema.

Para el segundo caso, para los datos del PBI, se pedía hallar el momento de orden dos, es decir la matriz de covarianza y además la matriz de correlación, los cuáles, similar al caso de las distribuciones, tienen sus significado para este ejercicio en particular.

Finalmente, se usaron los conceptos de autovectores y autovaleres para cada uno de los casos, para la distribución de masas y el PBI. Los autovectores asociados a las matrices de momento de inceria, y de la matriz de correlación para el PBI, tienen un significado propio para cada caso, siendo que los vectores propios del primero indican los ejes principales de inercia, y para el segundo caso, indican la dispersion de los datos para cada uno de los sectores.

5. Referencias

[1] Colaboradores de Wikipedia. Momento de inercia, Noviembre 2021.
[2] Colaboradores de Wikipedia. Producto interno bruto, Enero 2022.
[3] Cómo crear una matriz de covarianza en Python STATOLOGOS®, 05 2021.
[4] Mokhtar Ebrahim. Matriz De Correlacion De Python, Agosto 2020.