Presentado por: Miguel Fernando Becerra, Karen Sarat Anaya Verdugo.

Taller Evaluado Espacios Lineales

Sección 2.1.6

3) Considere un triángulo equilátero que se muestra en la figura 2.1. ¿Se pueden identificar operaciones de rotación alrededor de un eje perpendicular a la figura que pasa por su baricentro $\star$ y, reflexiones respecto a planos X_a, X_b, X_c que dejan invariante la figura del triángulo. Adicionalmente, se puede definir la operación concatenación de rotaciones y reflexiones que dejan igualmente invariante al triángulo, tal y como mostramos en la mencionada figura.

a) Construya la tabla de multiplicación para G_Δ, vale decir $G_\Delta = \left\{I, \{R_i\}, \{\bar{R}_j\}, \{X_k\}\right\}$ y la operación es concatenación tal y como mostramos en la figura 2.1. Donde I es la operación identidad, $\{R_i\}$ es un conjunto de rotaciones en sentido horario, mientras que $\{\bar{R}_j\}$ es un conjunto de rotaciones en el sentido antihorario, y $\{X_k\}$ el conjunto de las reflexiones que dejan invariante el triángulo.

Concatenación	$\boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{R_i}$	$\boldsymbol{\bar{R}_j}$	$\boldsymbol{X_a}$	$\boldsymbol{X_b}$	$\boldsymbol{X_c}$
$\boldsymbol{I}$	I	R_i	$\bar{R}_j$	X_a	X_b	X_c
$\boldsymbol{R_i}$	R_i	$\bar{R}_j$	I	X_c	X_a	X_b
$\boldsymbol{\bar{R}_j}$	$\bar{R}_j$	I	R_i	X_b	X_c	X_a
$\boldsymbol{X_a}$	X_a	X_b	X_c	I	R_i	$\bar{R}_j$
$\boldsymbol{X_b}$	X_b	X_c	X_a	$\bar{R}_j$	I	R_i
$\boldsymbol{X_c}$	X_c	X_a	X_b	R_i	$\bar{R}_j$	I

b) Demuestre que el conjunto de estas operaciones forma un grupo G_Δ.

Para demostrar que es un grupo, tenemos que demostrar las cinco propiedades.

1. **Cerrada.**
   Respecto a la operación concatenación, el resultado entre cualquier elemento con otro elemento del grupo debe dar un elemento que esté en el mismo grupo.
   Esto lo podemos comprobar en el inciso anterior, en donde la tabla de multiplicación nos dio para todas las operaciones entre los elementos de G_Δ otro elemento de G_Δ.
2. **Asociativa.**
   El orden en el que se ejecuten las operaciones no altera el resultado.
   Efectivamente, si

$$(\boldsymbol{I} \square \boldsymbol{R_i}) \square \boldsymbol{R_i} = \bar{R}_j$$
$$\boldsymbol{I} \square (\boldsymbol{R_i} \square \boldsymbol{R_i}) = \bar{R}_j$$

3. **Elemento neutro**
   Existe un elemento neutro tal que, operado por otro elemento del mismo grupo, nos de ese mismo elemento.

Nuevamente, teniendo en cuenta el inciso anterior, en la tabla de multiplicación podemos ver que $\boldsymbol{I}$, la operación identidad, cumple con este requisito, ya que al ser la misma, no se aplica ninguna rotación, ni ninguna reflexión, por lo tanto, tendremos el triángulo del principio.

4. **Elemento inverso**
   Todo elemento del grupo debe tener un elemento inverso que también esté en el mismo grupo tal que al operarlos nos de como resultado el elemento neutro.
   Esto se comprueba mirando la tabla, podemos notar que $\boldsymbol{R_i}$ y $\boldsymbol{\bar{R}_j}$ son inversos entre sí ya que al concatenarlos tenemos la operación identidad. Para el caso de las reflexiones, el elemento inverso es ellas mismas, por ejemplo, para la reflexión X_a su inversa es X_a y así para X_by X_c.
5. **Conmutatividad.**
   Es conmutativa respecto a la operación concatenación, sin importar el orden de operación el resultado debe ser el mismo.
   Esta propiedad, según nuestra tabla, podemos comprobar que no se cumple, sin embargo, aquí sólo estaríamos comprobando que G_Δ no es un grupo Abeliano, pero como si cumple las 4 anteriores, significa que sí es un grupo.

c) Identifique cada una de las$\boldsymbol{R_i}$ y $\boldsymbol{\bar{R}_j}$, y muestre, además, que forman un subgrupo cíclico de orden 3. De igual modo identifique las reflexiones y muestre que, cada una de las reflexiones y la identidad, X_k forman también un subgrupo cíclico, pero de orden 2.

Subgrupo Ri, Rj, I

Para que sea un subgrupo cíclico, debe haber un elemento que genere todo el subgrupo. En este caso, podemos decir que nuestro elemento generador será Rj, ya que, al operarlo con los elementos del subgrupo, tendrá cada uno de los elementos de este.

Adicional a ello, podemos decir que es de orden 3, porque el subgrupo cuenta con tres elementos.

Concatenación	**I**	$\boldsymbol{R_i}$	$\boldsymbol{\bar{R}_j}$
I	I	R_i	$\bar{R}_j$
$\boldsymbol{R_i}$	R_i	$\bar{R}_j$	I
$\boldsymbol{\bar{R}_j}$	$\bar{R}_j$	I	R_i

Subgrupo I, Xi

Para este caso, también debemos tener un elemento generador para que sea un subgrupo cíclico, el cuál será las reflexiones Xi. Recordemos que al principio dividimos esa Xi en tres (Xa, Xb, Xc), cualquiera de esas tres puede servimos como nuestro elemento generador, ya que al operar por ejemplo Xb por Xb nos da la operación identidad, y al operar la identidad por Xb, nos da Xb. Así para las otras dos, por lo que podemos generalizarlo para Xi.

El orden del subgrupo de dos porque contiene en él sólo dos elementos.

Conca.	**I**	$\boldsymbol{X_b}$
I	I	X_b
$\boldsymbol{X_b}$	X_b	I

d) Muestre que forman grupo bajo la multiplicación de matrices y que ese grupo es isomorfo a G_Δ

Para mostrar que $\boldsymbol{G_\Delta}$ es isomorfo con $\boldsymbol{M}$**,** recordemos primero la definición de isomorfismo, que se da cuando dos grupos tienen aspectos en común en sus estructuras algebraicas, propiedades y subgrupos. Entonces, si $\boldsymbol{G_\Delta} = \{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{R_i}, \boldsymbol{\overline{R}_j}, \boldsymbol{X_a}, \boldsymbol{X_b}, \boldsymbol{X_c}\}$ y $\boldsymbol{M} = \{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E},\}$**,** podemos decir que sus elementos con equivalente.

Por lo que, comparando sus tablas de multiplicación.

Conca.	**I**	**Ri**	**Rj**	**Xa**	**Xb**	**Xc**
I	I	Ri	Rj	Xa	Xb	Xc
Ri	Ri	Rj	I	Xc	Xa	Xb
Rj	Rj	I	Ri	Xb	Xc	Xa
Xa	Xa	Xb	Xc	I	Ri	Rj
Xb	Xb	Xc	Xa	Rj	I	Ri
Xc	Xc	Xa	Xb	Ri	Rj	I

$\Longleftrightarrow$

Multiplicación matricial	**I**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
I	I	A	B	C	D	E
A	A	B	I	E	C	D
B	B	I	A	D	E	C
C	C	D	E	I	A	B
D	D	E	C	B	I	A
E	E	C	D	A	B	I

Note que por ejemplo si tomamos un elemento de cada grupo, por ejemplo, **Xc** y **E**, si multiplicamos cada uno por su inversa, nos da el elemento neutro del grupo, que en ambos casos sería la identidad **I**.

$$X_c \square X_C = I \quad \text{y} \quad E \times E = I.$$

d) Considere el conjunto de permutaciones de 3 objetos y la operación composición de permutaciones que discutimos como ejemplo en la sección 2.3 ¿Es ese grupo isomorfo a ***G***4? Justifique su respuesta.

Si comparamos sus respectivas tablas de multiplicación tal cual como están, podríamos pensar que por su organización a simple vista que no son isomorfos:

Conca.	**I**	**Ri**	**Rj**	**Xa**	**Xb**	**Xc**
I	I	Ri	Rj	Xa	Xb	Xc
Ri	Ri	Rj	I	Xc	Xa	Xb
Rj	Rj	I	Ri	Xb	Xc	Xa
Xa	Xa	Xb	Xc	I	Ri	Rj
Xb	Xb	Xc	Xa	Rj	I	Ri
Xc	Xc	Xa	Xb	Ri	Rj	I

$\not\Leftrightarrow$

Permutación	**p0**	**p1**	**p2**	**p3**	**p4**	**p5**
p0	p0	p1	p2	p3	p4	p5
p1	p1	p0	p5	p4	p3	p2
p2	p2	p4	p0	p5	p1	p3
p3	p3	p5	p4	p0	p2	p1
p4	p4	p2	p3	p1	p5	p0
p5	p5	p3	p1	p2	p0	p4

Sin embargo, ambos grupos comparten las mismas propiedades y los mismos subgrupos, lo cual, según la definición de isomorfismo es necesario para que sean isomorfos. Por lo tanto, podemos simplemente reorganizar sus componentes de Pi de tal manera que ambas tablas queden iguales, sin alterar las operaciones, así:

Concatenación	I	Ri	Rj	Xa	Xb	Xc
I	I	Ri	Rj	Xa	Xb	Xc
Ri	Ri	Rj	I	Xc	Xa	Xb
Rj	Rj	I	Ri	Xb	Xc	Xa
Xa	Xa	Xb	Xc	I	Ri	Rj
Xb	Xb	Xc	Xa	Rj	I	Ri
Xc	Xc	Xa	Xb	Ri	Rj	I

$\Longleftrightarrow$

Permutación	p0	p4	p5	p1	p3	p2
p0	p0	p4	p5	p1	p3	p2
p4	p4	p5	p0	p2	p1	p3
p5	p5	p0	p4	p3	p2	p1
p1	p1	p3	p2	p0	p4	p5
p3	p3	p2	p1	p5	p0	p4
p2	p2	p1	p3	p4	p5	p0

10. Sea P_n el conjunto de todos los polinomios de grado n, en x, con coeficientes reales:

a) Demostrar que P_n es un espacio vectorial respecto a la suma de polinomios y a la multiplicación de polinomios por un número (número real).

Polinomios de grado n.

$$|P_n\rangle \rightleftarrows P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

Para la Suma:

① Cerrada $\longrightarrow$ $|v_k\rangle = |v_i\rangle \oplus |v_j\rangle \in V \ \forall \ |v_i\rangle, |v_j\rangle \in V$

$a_i, b_i \in \mathbb{R}$

$$P(x) \oplus q(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1}) + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_{n-1} x^{n-1})$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i) x^i$$

$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + (a_2 + b_2) x^2 + \dots + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1}$$

Como $a_i + b_i$ son números reales entonces se cumple la primera propiedad.

② Conmutativa. $\longrightarrow$ $|v_i\rangle \oplus |v_j\rangle = |v_j\rangle \oplus |v_i\rangle \ \forall \ |v_i\rangle, |v_j\rangle \in V$.

$$P(x) \oplus q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} (b_i + a_i) x^i$$

$$q(x) \oplus P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i) x^i$$

Entonces, como a_i y b_i son numero reales.

$$a_i + b_i = b_i + a_i$$

$a_i + b_i = b_i + a_i$

④ Asociativa. $\longrightarrow (|V_i\rangle \oplus |V_j\rangle) \oplus |V_k\rangle = |V_i\rangle \oplus (|V_j\rangle + |V_k\rangle)\ \forall$
$|V_i\rangle, |V_j\rangle, |V_k\rangle \in V.$

$$(P(x) \oplus q(x)) \oplus v(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i) x^i + \sum_{i=0}^{n-1} (c_i) x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i + c_i) x^i$$

$$P(x) \oplus (q(x) \oplus v(x)) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i x^i) + \left(\sum_{i=0}^{n-1} (b_i + c_i) x^i\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i + c_i) x^i$$

④ Elemento Neutro $\longrightarrow |0\rangle \oplus |V_i\rangle = |V_i\rangle \oplus |0\rangle = |V_i\rangle\ \forall |V_i\rangle \in V$

$|0\rangle \oplus |P_n\rangle = |P_n\rangle$

$$|0\rangle = 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} 0x^i$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} 0x^i \in \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} (0 + a_i) x^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i.$$

⑤ Elemento Inverso. $\rightarrow \exists\ |-V_i\rangle / |V_i\rangle \oplus |-V_i\rangle = |0\rangle\ \forall\ |V_i\rangle \in V.$

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a^i x^i$$

$$-P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (-a_i x^i)$$

$$P(x) + (-P(x)) = \sum_{i=0}^{n-1} a^i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} -a_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} (\cancel{a_i - a_i})^{0} x^i$$

$= |0\rangle.$

Para la multiplicación.

① Cerrada $\longrightarrow$ $\alpha|V_i\rangle \in V \ \forall \alpha \in K$ (reales) y cualquier $|V_i\rangle \in V$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$

$\alpha P(x) = \alpha\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha a_i x^i$

Por lo que $\alpha P(x) \in |P_n\rangle$

② $(\alpha)(|V_i\rangle \oplus |V_j\rangle) = \alpha|V_i\rangle \oplus \alpha|V_j\rangle \ \forall |V_i\rangle, |V_j\rangle \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}^{(K)}$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha(P(x) \oplus q(x)) = \alpha\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i\right)$$

$$= \alpha\left(\sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i) x^i\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha(a_i + b_i) x^i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha a_i + \alpha b_i) x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha a_i x^i) \oplus \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha b_i x^i)$$

$$= \alpha P(x) \oplus \alpha q(x)$$

como son números reales sí se cumple.

$\{\alpha a_i + \alpha b_i \in \{|P_n\rangle$.

$\alpha(P(x) \oplus q(x))$

③ $(\alpha + \beta)|V_i\rangle = \alpha|V_i\rangle + \beta|V_i\rangle \ \forall |V_i\rangle \in V$ y $\alpha, \beta \in K$.

$$(\alpha + \beta) P(x) = (\alpha + \beta) \sum_{i=0}^{n-1} a_i x_i$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha + \beta) a_i x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha a_i + \beta a_i) x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} \beta a_i x^i$$

Esto es lo mismo que tener $\alpha P(x) + \beta P(x)$.

④ $\alpha(\beta|V_i\rangle) = (\alpha\beta)|V_i\rangle \ \forall\ |V_i\rangle \in V$ y $\alpha, \beta, \in K$

$$\alpha(\beta P(x)) = \alpha\left(\beta \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i\right)$$

$$= \alpha\left(\sum_{i=0}^{n-1} \beta a_i x^i\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha\beta) a_i x^i$$

es lo mismo dico.

$$= (\alpha\beta) P(x).$$

⑤ $1|V_i\rangle = |V_i\rangle \ \forall\ |V_i\rangle \in V$ y $1 \in K$.

$$1 \cdot (P(x)) = 1 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} 1 \cdot a_i x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = P(x).$$

b) Si los coeficientes a_i son enteros ¿P_n será un espacio vectorial? ¿Por qué?

Para la multiplicación:

① Cerrada.

$\alpha|V_i\rangle \in V \ \forall\ \alpha \in K$ y cualquier $|V_i\rangle \in V$.

$\alpha \in \mathbb{R} \quad a_i \in \mathbb{Z}$

$$\alpha P(x) = \alpha\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i\right)$$

$$\alpha P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha a_i x^i$$

$$\alpha P(x) \notin P_n$$

P_n no es un espacio vectorial porque no cumple con la propiedad de cerradura en la multiplicación por un escalar.
α al ser un número real y a_i un entero, su producto no garantiza otro entero como resultado, porque α también puede ser un número racional. Por lo tanto, una de las condiciones para que P_n fuera un espacio vectorial es que su multiplicación por un escalar real perteneciera a el conjunto, pero nuestro conjunto son todos los polinomios de grado n con coeficientes enteros, y como vimos al principio, esto no siempre se va a cumplir.

c) ¿Cuál de los siguientes subconjuntos de Pn es un subespacio vectorial?

1. El polinomio cero y todos los polinomios de grado $n-2$

- El elemento Neutro.

$S = \{ (|0\rangle, |P_{n-2}\rangle) \}$

$|0\rangle$ es el elemento neutro de P_n.

- Si $|s_1\rangle, |s_2\rangle \in S$, entonces $|s_1\rangle \oplus |s_2\rangle \in S$.

$|0\rangle, |P(x)\rangle \in S$

$$|0\rangle \oplus P(x) = \sum_{i=0}^{n-2} 0x^i \oplus \sum_{i=0}^{n-2} a_i x^i$$
$$= \sum_{i=0}^{n-2} a_i x^i = P(x) \in S$$

- Si $|s\rangle \in S$ y α es un elemento del campo K, entonces $\alpha|s\rangle \in S$.

$P(x) \in S$ $\qquad \alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha P(x) = \alpha \sum_{i=0}^{n-2} a_i x^i$$
$$= \sum_{i=0}^{n-2} \alpha a_i x^i \in S \quad \text{Porque}$$

2. El polinomio cero y todos los polinomios de grado par.

$S = \{ |0\rangle, |P_{2n}\rangle \}$

- El elemento neutro.

$|0\rangle \in S$ y es el elemento neutro de P_n

- Si $|s_1\rangle, |s_2\rangle \in S$, entonces $|s_1\rangle \oplus |s_2\rangle \in S$.

$|0\rangle, |P_{2n}\rangle \in S$

$$0 \oplus P(x) = \sum_{i=0}^{2n} 0x^i \oplus \sum_{i=0}^{2n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{2n} a_i x^i = P(x) \in S.$$

• Si $|s\rangle \in S$ y α es un elemento de K, entonces $\alpha|s\rangle \in S$.

$|P_{2n}\rangle \in S \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha P(x) = \alpha \sum_{i=0}^{2n} a_i x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{2n} \alpha a_i x^i \in S$$

Porque, P_{2n} son todos los polinomios de grado par con coeficientes reales. Al α y a_i pertenecer a los reales, su multiplicación nos dará un número real, cumpliendose así la condición para que $\alpha P(x) \in S$.

3. Todos los polinomios que tienen a x como un factor (grado $n>1$)

$S = \{|P_{n>1}\rangle\}$

• Elemento Neutro.

El elemento Neutro de P_n es el polinomio $|0\rangle$, el cual es de grado 0, como S sólo contiene a los polinomios de grado $n>1$, entonces

$$|0\rangle \notin S$$

Por lo tanto no es un espacio vectorial.

4. Todos los polinomios que tienen a $x-1$ como un factor.

$S = \{|P(x-1)\rangle\}$

$$P(x-1) = \sum_{i=0}^{n} a_i (x-1)^i$$

• Elemento Neutro.

Cuando $i=0$

$$P(x-1) = a_0 (x-1)^0 = 0$$

Por lo tanto, el elemento neutro de P_n hace parte de S.

• Si $|s_1\rangle, |s_2\rangle \in S$, entonces $|s_1\rangle \oplus |s_2\rangle \in S$.

$P(x-1), q(x-1) \in S$

$$P(x-1) \oplus q(x-1) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x-1)^i + \sum_{i=0}^{n} b_i(x-1)^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)(x-1)^i \quad \in S$$

Porque a s pertenecen todos los polinomios que tienen $x-1$ como factor

• Si $|s\rangle \in S$ y α es un elemento de K, entonces $\alpha|s\rangle \in S$

$P(x-1) \in S \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha P(x-1) = \alpha \sum_{i=0}^{n} a_i(x-1)^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \alpha a_i (x-1)^i \quad \in S$$

Porque cumple con ser un polinomio con $x-1$ como factor.

Sección 2.2.4

6. Con la información expuesta en el libro guía, responda las siguientes preguntas:

a) Compruebe si los cuaterniones, $|a\rangle$, forman un espacio vectorial respecto a esa operación suma y esa multiplicación por escalares, análoga a la de los vectores en R3 en coordenada cartesianas.

1) Sea V conjunto de cuaterniones. Para que sea espacio vectorial tiene que cumplir las 10 propiedades.

- Sea $|a\rangle = a^\alpha |q_\alpha\rangle$, $|b\rangle = b^\alpha |q_\alpha\rangle \in V$

$$|a\rangle + |b\rangle = (a^\alpha + b^\alpha)|q_\alpha\rangle = c^\alpha |q_\alpha\rangle = |c\rangle \in V$$

cerrado ✓

- $|a\rangle, |b\rangle \in V$

$$|a\rangle + |b\rangle = (a^\alpha + b^\alpha)|q_\alpha\rangle = (b^\alpha + a^\alpha)|q_\alpha\rangle = |b\rangle + |a\rangle$$

conmutativa ✓

- $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle \in V$

$$|a\rangle + (|b\rangle + |c\rangle) = a^\alpha |q_\alpha\rangle + (b^\alpha + c^\alpha)|q_\alpha\rangle = (a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha)|q_\alpha\rangle$$
$$= ((a^\alpha + b^\alpha) + c^\alpha)|q_\alpha\rangle$$
$$= (a^\alpha + b^\alpha)|q_\alpha\rangle + c^\alpha |q_\alpha\rangle$$
$$= (|a\rangle + |b\rangle) + |c\rangle$$

asociativa ✓

- $|0\rangle \in V$

Sea $|a\rangle \in V$

$$|a\rangle + |0\rangle = a^\alpha |q_\alpha\rangle + 0 = 0 + a^\alpha |q_\alpha\rangle = a^\alpha |q_\alpha\rangle = |a\rangle$$

elemento neutro ✓

- Sea $|a\rangle \in V$

$\exists\ |-a\rangle$ tal que

$$|a\rangle + |-a\rangle = (a^\alpha - a^\alpha)|q_\alpha\rangle = |0\rangle$$ ✓

- Sea $\alpha \in$ a un campo K

$$\alpha|a\rangle = \alpha(a^i |q_i\rangle) = (\alpha a^i |q_i\rangle) = c^i |q_i\rangle = |c\rangle \in V$$

$$\alpha a^i = c^i$$

cerrado ✓

- $\alpha(\beta|a\rangle) = \alpha(\beta a^i)|q_i\rangle = (\alpha\beta a^i)|q_i\rangle = (\alpha\beta)a^i|q_i\rangle$
$$= (\alpha\beta)|a\rangle$$ ✓

- $(\alpha+\beta)|a\rangle = (\alpha+\beta)a^i|q_i\rangle = \alpha a^i|q_i\rangle + \beta a^i|q_i\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|a\rangle$ ✓

- $\alpha(|a\rangle + |b\rangle) = \alpha(a^i|q_i\rangle + b^i|q_i\rangle) = \alpha a^i|q_i\rangle + \alpha b^i|q_i\rangle = \alpha|a\rangle + \alpha|b\rangle$ ✓

b) Dados dos cuaterniones cualesquiera $|b\rangle \equiv (b^0, b)$ y $|r\rangle \equiv (r^0, r)$, y su tabla de multiplicación, muestre que el producto entre esos cuaterniones $|b\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle$ podrá representarse como:

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle \longleftrightarrow (d^0, \mathbf{d}) = (b^0 r^0 - \mathbf{b}\cdot\mathbf{r},\ r^0\mathbf{b} + b^0\mathbf{r} + \mathbf{b}\times\mathbf{r})$$

Donde $\cdot$ y $\times$ corresponden con los productos escalares y vectoriales tridimensionales de siempre.

b) $|b\rangle = (b^0, \vec{b}) = b^0 + b^1 q_1 + b^2 q_2 + b^3 q_3$

$|r\rangle = (r^0, \vec{r}) = r^0 + r^1 q_1 + r^2 q_2 + r^3 q_3$

$|b\rangle \odot |r\rangle = (b^0 + b^1 q_1 + b^2 q_2 + b^3 q_3) \odot (r^0 + r^1 q_1 + r^2 q_2 + r^3 q_3)$

$= b^0 r^0 + b^0 r^1 q_1 + b^0 r^2 q_2 + b^0 r^3 q_3 + b^1 q_1 r^0 + b^1 q_1 r^1 q_1 +$
$b^1 q_1 r^2 q_2 + b^1 q_1 r^3 q_3 + b^2 q_2 r^0 + b^2 q_2 r^1 q_1 + b^2 q_2 r^2 q_2 +$
$b^2 q_2 r^3 q_3 + b^3 q_3 r^0 + b^3 q_3 r^1 q_1 + b^3 q_3 r^2 q_2 + b^3 q_3 r^3 q_3$

$= (b^0 r^0 \overbrace{- b^1 r^1 - b^2 r^2 - b^3 r^3}^{-\vec{b}\cdot\vec{r}}) + (b^0 r^1 + b^1 r^0 + b^2 r^3 - b^3 r^2) q_1$
$+ (b^0 r^2 - b^1 r^3 + b^2 r^0 + b^3 r^1) q_2 + (b^0 r^3 + b^1 r^2 - b^2 r^1 + b^3 r^0) q_3$

- $r^0 \vec{b} = r^0 b^1 q_1 + r^0 b^2 q_2 + r^0 b^3 q_3$
- $b^0 \vec{r} = b^0 r^1 q_1 + b^0 r^2 q_2 + b^0 r^3 q_3$
- $r^0 \vec{b} + b^0 \vec{r} = (b^0 r^1 + b^1 r^0) q_1 + (b^0 r^2 + b^2 r^0) q_2 + (b^0 r^3 + b^3 r^0) q_3$
- $\vec{b} \times \vec{r} = (b^2 r^3 - b^3 r^2) q_1 + (b^3 r^1 - b^1 r_3) q_2 + (b^1 r^2 - b^2 r^1) q_3$

$\longrightarrow$ $b^0 \vec{r} + r^0 \vec{b} + \vec{b} \times \vec{r} = (b^0 r^1 + b^1 r^0 + b^2 r^3 - b^3 r^2) q_1 +$
$(b^0 r^2 - b^1 r_3 + b^2 r^0 + b^3 r^1) q_2 + (b^0 r^3 + b^1 r^2 - b^2 r^1 + b^3 r^0) q_3$

Por ende

$|b\rangle \odot |r\rangle = (b^0 r^0 - \vec{b}\cdot\vec{r},\ b^0 \vec{r} + r^0 \vec{b} + \vec{b} \times \vec{r})$

c) Ahora con índices: dados $|b\rangle \equiv b^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle$ y $|r\rangle \equiv r^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle$ compruebe si el producto $|b\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle$puede ser siempre escrito de la forma:

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle = a\,|q_0\rangle + S^{(\alpha j)}\delta^0_\alpha\,|q_j\rangle + A^{[jk]i} b_j r_k\,|q_i\rangle$$

Donde a representa un número, $S^{(\alpha j)}\delta^0_\alpha$ (recuerde que los índices latinos toman los valores $j;\ k;\ l\ = 1{,}2{,}3$, mientras $\alpha = 0{,}1{,}2{,}3$) donde $S^{(ij)}$indica $S^{ij} = S^{ij}$, que la cantidad S^{ij} es simétrica, y por lo tanto ($S^{(\alpha j)}\delta^0_\alpha$+$S^{(\alpha j)}\delta^0_\alpha$) $|q_i\rangle$.

Mientras $A^{(jk)i}$ representa un conjunto de objetos antisimétricos en j y k

$$A^{[jk]i} \to A^{jki} = -A^{kji} \to \left(A^{jki}b_j r_k - A^{kji}b_j r_k\right)|q_i\rangle$$

c) $|b\rangle = (b^0, \vec{b}) \longrightarrow \vec{b} = b^i|q_i\rangle$

$|r\rangle = (r^0, \vec{r}) \longrightarrow \vec{r} = r^i|q_i\rangle$ $\qquad |q_0\rangle = 1$

Sabemos que:

$$|b\rangle \odot |r\rangle = b^0 r^0 - \vec{b}\cdot\vec{r} + (r^0\vec{b} + b^0\vec{r} + \vec{b}\times\vec{r})$$

$$= b^0 r^0 - b^i r_i + r^0 b^i|q_i\rangle + b^0 r^i|q_i\rangle + \varepsilon^{ijk} b_j r_k|q_i\rangle$$

$$= b^0 r^0|q_0\rangle - b^i r_i|q_0\rangle + r^0 b^i|q_i\rangle + b^0 r^i|q_i\rangle + \varepsilon^{ijk} b_j r_k|q_i\rangle$$

$$= [b^0 r^0 - b^i r_i]|q_0\rangle + [r^0 b^i + b^0 r^i]|q_i\rangle + \varepsilon^{jki} b_j r_k|q_i\rangle$$

$\rightarrow \varepsilon^{ijk} = \varepsilon^{jki}$

observemos ahora:

$$S^{(\alpha j)}\delta^0_\alpha|q_j\rangle = S^{0j}\delta^0_0|q_j\rangle = S^j|q_j\rangle$$

Será diferente de 0 solo cuando $\alpha = 0$, observe que $S^{\alpha j}$ es simétrica, $S^{\alpha j} = S^{j\alpha}$

- haciendo $S^i = [r^0 b^i + b^0 r^i]$
- observe también que el levi civita es antisimétrico respecto a jk $\quad \varepsilon^{jki} = A^{[jk]i}$
- Por último, haciendo $a = [b^0 r^0 - b^i r_i]$

$$\longrightarrow |b\rangle \odot |r\rangle = a|q_0\rangle + S^{(\alpha j)}\delta^0_\alpha|q_j\rangle + A^{[jk]i} b_j r_k|q_i\rangle$$

d) Identifique las cantidades: $a, S^{(ij)}, A^{(jk)i}$ en términos de las componentes de los cuaterniones. ¿El producto de cuaterniones producto $|d\rangle = |a\rangle \odot |r\rangle$ un vector, pseudovector o ninguna de las anteriores? Explique por qué.

d) $a = [b^0 r^0 - \vec{b} \cdot \vec{r}]$

$S^{ij} = [r^0 b^j + b^0 r^j] \, |q_i\rangle$

$|d\rangle = |a\rangle \odot |r\rangle$ será un cuaternión, puesto que los cuaterniones son cerrados bajo esa operación.

e) Compruebe si las matrices de Pauli y la identidad:

$$\boldsymbol{\sigma_0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Pueden representar la base de los cuaterniones $\{|q_1\rangle, |q_2\rangle, |q_3\rangle, |q_0\rangle\}$ Seguidamente muestre que matrices complejas 2 ×2 del tipo:

$$|b\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix}$$

pueden ser consideradas como cuaterniones, donde $z = x + iy$ y $w = a + ib$ son números complejos.

e). $\sigma_0 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Para ser bases deben ser linealmente independientes, es decir que $\alpha\sigma_0 + \beta\sigma_1 + \gamma\sigma_2 + \varepsilon\sigma_3 = 0_{2\times 2}$ con $\alpha = \beta = \gamma = \varepsilon = 0$

$$\alpha\sigma_0 + \beta\sigma_1 + \gamma\sigma_2 + \varepsilon\sigma_3 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -i\gamma \\ i\gamma & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \varepsilon = 0 \\ \beta - i\gamma = 0 \\ \beta + i\gamma = 0 \\ \alpha - \varepsilon = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{ll} \alpha = -\varepsilon & (1) \\ \beta = i\gamma & (2) \end{array}$$

$$\rightarrow \underset{\text{por (1)}}{\beta + i\gamma =} \; i\gamma + i\gamma = 2i\gamma = 0$$

$$\rightarrow \gamma = 0$$

$$\rightarrow \underset{\text{por (2)}}{\alpha - \varepsilon =} \; -\varepsilon - \varepsilon = -2\varepsilon = 0$$

$$\rightarrow \varepsilon = 0$$

Como $\alpha = \beta = \gamma = \varepsilon = 0$, son linealmente independientes, y pueden representar la base de los cuaterniones.

$$\rightarrow \quad |a\rangle = \begin{bmatrix} a^0 + i a^1 & a^2 + i a^3 \\ -a^2 + i a^3 & a^0 - i a^1 \end{bmatrix}$$

$$|b\rangle = \begin{bmatrix} b^0 + i b^1 & b^2 + i b^3 \\ -b^2 + i b^3 & b^0 - i b^1 \end{bmatrix}$$

$$|a\rangle + |b\rangle = \begin{bmatrix} (a^0 + b^0) + (a^1 + b^1) i & (a^2 + b^2) + (a^3 + b^3) i \\ -(a^2 + b^2) + (a^3 + b^3) i & (a^0 + b^0) - (a^1 + b^1) i \end{bmatrix}$$

$$|c\rangle = |a\rangle + |b\rangle = \begin{bmatrix} c^0 + c^1 i & c^2 + c^3 i \\ -c^2 + c^3 i & c^0 - c^1 i \end{bmatrix}$$

Son isomorfos

f) Muestre que una representación posible para la base de cuaterniones son la matriz identidad y las matrices reales 4 X 4 de la forma:

$$|q_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad |q_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad |q_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

f)

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La tabla de multiplicación de las matrices es:

	A_0	A_1	A_2	A_3
A_0	A_0	A_1	A_2	A_3
A_1	A_1	$-A_0$	$-A_3$	A_2
A_2	A_1	A_3	$-A_0$	$-A_1$
A_3	A_3	$-A_2$	A_1	$-A_0$

	A_0	A_1	A_3	A_2
A_0	A_0	A_1	A_3	A_2
A_1	A_1	$-A_0$	A_2	$-A_3$
A_3	A_2	$-A_2$	$-A_0$	A_1
A_2	A_3	A_3	$-A_1$	$-A_0$

Observando la tabla de multiplicación de los cuaterniones, nos damos de cuenta que son isomorfos.

Por lo que las matrices pueden ser una representación de la base de los cuaterniones.

g) Compruebe si la siguiente es una buena definición de producto interno:

$$\widetilde{\langle a \, | b \rangle} = |a\rangle^{\maltese} \odot |b\rangle$$

g) $\widetilde{\langle a | b \rangle} = |a\rangle^{\maltese} \odot |b\rangle$

no funciona como producto interno porque el producto interno asocia a un par de vectores, un elemento de un campo, y acá lo asocia con otro vector, porque la operación $\odot$ es cerrada.

i) Compruebe si la siguiente es una buena definición de norma para los cuaterniones:

$$n(|b\rangle) = \| |a\rangle \| = \sqrt{\langle a\, |a\rangle} = \sqrt{|a\rangle^{\maltese} \odot |a\rangle}\,.$$

i) $\| |a\rangle \| = \sqrt{\langle a|a\rangle} = \sqrt{|a\rangle^{*} \odot |a\rangle}$

$\rightarrow |a\rangle = (a^0, \vec{a}) \quad , \quad |a\rangle^{*} = (a^0, -\vec{a})$

$\rightarrow |a\rangle^{*} \odot |a\rangle = (a^0 a^0 + \vec{a} \cdot -\vec{a} \,,\, \cancel{a^0 \vec{a}} + \cancel{a^0(-\vec{a})} + \cancel{\vec{a} \times -\vec{a}})$

$= (a^0)^2 + (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 \geq 0$

$\rightarrow \| |a\rangle \| = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

- $\| \beta |a\rangle \|$

$|\beta |a\rangle \| = (\beta a^0, \beta \vec{a}) \rightarrow [\beta |a\rangle]^{*} = (\beta a^0, -\beta \vec{a})$

$|\beta |a\rangle^{*} \odot \beta |a\rangle = \beta^2 a_0^2 + \beta\vec{a} \cdot \beta\vec{a} \,,\, 0$

$\rightarrow |\beta| \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

j) Compruebe si un cuaternión definido por:

$$\overline{|a\rangle} = \frac{|a\rangle^{\maltese}}{\| |a\rangle \|^2}\,,$$

puede ser considerado como el inverso o elemento simétrico de $|a\rangle$, respecto a la multiplicación $\odot$.

j) $\overline{|a\rangle} = \dfrac{|a\rangle^{*}}{\| |a\rangle \|^2}$

$\rightarrow |a\rangle \odot \overline{|a\rangle} = \dfrac{a^0 a^0}{\| |a\rangle \|^2} + \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{a}}{\| |a\rangle \|^2} \,,\, \cancel{\dfrac{a^0 \vec{a}}{\| |a\rangle \|^2}} - \dfrac{a^0 \vec{a}}{\| |a\rangle \|^2} + \vec{a} \times -\vec{a}$

$= \dfrac{1}{\| |a\rangle \|^2} \left[a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \right]$

$= \dfrac{\| |a\rangle \|^2}{\| |a\rangle \|^2}$

$= 1 = |q_0\rangle$

k) Compruebe si los cuaterniones $|a\rangle$ forman un grupo respecto a una operación multiplicación $\odot$.

k) Compruebe si forman un grupo respecto a $\odot$

- Sean $|a\rangle = (a^0, \vec{a})$ y $|b\rangle = (b^0, \vec{b})$ cuaterniones

$$|a\rangle \odot |b\rangle = (a^0 b^0 - \vec{a}\cdot\vec{b},\ b^0\vec{a} + a^0\vec{b} + \vec{a}\times\vec{b})$$

sea $c^0 = a^0 b^0 - \vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{c} = b^0\vec{a} + a^0\vec{b} + \vec{a}\times\vec{b}$

$\rightarrow |a\rangle \odot |b\rangle = |c\rangle = (c^0, \vec{c})$, es cerrada

- $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle$ cuaterniones

$$|a\rangle \odot (|b\rangle \odot |c\rangle) = (a^0, \vec{a}) \odot (b^0 c^0 - \vec{b}\cdot\vec{c},\ c^0\vec{b} + b^0\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c})$$

$$= a^0(b^0c^0 - \vec{b}\cdot\vec{c}) - \vec{a}\cdot(c^0\vec{b} + b^0\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c}),$$

$$(b^0c^0 - \vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a} + a^0(c^0\vec{b} + b^0\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c}) + \vec{a}\times(c^0\vec{b} + b^0\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c})$$

$$= a^0b^0c^0 - a^0(\vec{b}\cdot\vec{c}) - \vec{a}\cdot c^0\vec{b} - \vec{a}\cdot b^0\vec{c} + -\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c},\ b^0c^0\vec{a} + -\vec{b}\cdot\vec{c}\,\vec{a}$$

$$+ a^0c^0\vec{b} + a^0b^0\vec{c} + a^0\vec{b}\times\vec{c} + \vec{a}\times b^0\vec{c} + \vec{a}\times c^0\vec{b} + \vec{a}\times\vec{b}\times\vec{c}$$

$$\rightarrow (|a\rangle \odot |b\rangle)\odot|c\rangle = (a^0b^0 - \vec{a}\cdot\vec{b},\ b^0\vec{a} + a^0\vec{b} + \vec{a}\times\vec{b}) \odot (c^0, \vec{c})$$

$$= c^0(a^0b^0 - \vec{a}\cdot\vec{b}) - \vec{c}\cdot(b^0\vec{a} + a^0\vec{b} + \vec{a}\times\vec{b}),\ c^0(b^0\vec{a} + a^0\vec{b} + \vec{a}\times\vec{b})$$

$$(a^0b^0 - \vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} + \vec{c}\times(b^0\vec{a} + a^0\vec{b} + \vec{a}\times\vec{b})$$

iguales

$$= a^0b^0c^0 - \vec{a}\cdot c^0\vec{b} - \vec{c}\cdot b^0\vec{a} - \vec{c}\cdot\vec{b}\,a^0 + \vec{c}\times\vec{a}\times\vec{b},\ b^0c^0\vec{a} + c^0a^0\vec{b}$$

$$+ c^0\,\vec{a}\times\vec{b} + a^0\vec{c}\,b^0 - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} + \vec{c}\times b^0\vec{a} + \vec{c}\times a^0\vec{b} + \vec{c} + \vec{a}\times\vec{b}$$

Por ende $|a\rangle \odot (|b\rangle \cdot |c\rangle) = (|a\rangle \odot |b\rangle) \odot |c\rangle$

- Elemento neutro $|q_0\rangle = 1$

Elemento inverso $|\bar{a}\rangle = \dfrac{|a\rangle^*}{\| |a\rangle \|^2}$

Se demostró en el inciso J

Por ende si es un grupo.

I) Los vectores en R3 en coordenadas cartesianas, jvi, pueden ser representados como cuaterniones, donde la parte escalar es nula v0 = 0 ! jvi = vj jqji. Compruebe si el siguiente producto conserva la norma:

$$|v'\rangle = \overline{|a\rangle} \odot |v\rangle \odot |a\rangle \ .$$

Estos es: $\||v'\rangle\|^2 = \left(v^{1'}\right)^2 + \left(v^{2'}\right)^2 + \left(v^{3'}\right)^2 \equiv (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 = \||v\rangle\|^2 \ .$

1) $|v\rangle = v^j |q_j\rangle$ $\qquad |\bar{a}\rangle = \dfrac{|a\rangle^*}{a^2}$ $\qquad a^2 = \| |a\rangle \|^2$

$\rightarrow |v'\rangle = |\bar{a}\rangle \odot |v\rangle \odot |a\rangle$

$$\| |v'\rangle \|^2 = |v'\rangle^* \odot |v\rangle = (|\bar{a}\rangle \odot |v\rangle \odot |a\rangle)^* \odot (|\bar{a}\rangle \odot |v\rangle \odot |a\rangle)$$

$$= |a\rangle^* \odot |v\rangle^* \odot \left(\frac{|a\rangle^{**}}{a^2} \odot \frac{|a\rangle^*}{a^2}\right) \odot |v\rangle \odot |a\rangle$$

$\dfrac{1}{a^4}\left(|a\rangle \odot |a\rangle^*\right) = \dfrac{a^2}{a^4} \longrightarrow$

$$= |a\rangle^* \odot |v\rangle^* \odot \left(\frac{|a\rangle}{a^2} \odot \frac{|a\rangle^*}{a^2}\right) \odot |v\rangle \odot |a\rangle$$

$$= |a\rangle^* \odot \underbrace{(|v\rangle^* \odot |v\rangle)}_{\|v\|^2} \odot |a\rangle \cdot \left(\frac{1}{a^2}\right)$$

$$= \| |v\rangle \|^2 \underbrace{(|a\rangle^* \odot |a\rangle)}_{a^2} \cdot \frac{1}{a^2}$$

$$= \| |v\rangle \|^2 \cdot \frac{a^2}{a^2}$$

$$\rightarrow \underbrace{\| |v'\rangle \|^2 = \| |v\rangle \|^2}$$

Sección 2.3.6

5) Considere el espacio vectorial de las matrices complejas 2x2 hermíticas. Tal y como demostraremos en secciones pasadas del libro, una matriz hermítica (o auto-adjunta) será igual a su adjunta. Esto es, una matriz será igual a su traspuesta conjugada $(A^{\dagger})^j_i \rightarrow (A*)^j_i \equiv A^j_i$.

$$A \leftrightarrow \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \end{pmatrix} = A^{\dagger} = \begin{pmatrix} Z_1* & Z_3* \\ Z_2* & Z_4* \end{pmatrix}$$

$$\text{es decir} \quad \begin{cases} z_1^* = z_1 & \text{real} \\ z_4^* = z_4 & \text{real} \\ z_2^* = z_3 & \text{complejos} \end{cases}$$

a) Muestre que las matrices de Pauli forman una base para ese espacio vectorial.

Matrices de Pauli

$$\boldsymbol{\sigma_0} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{i} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma_3} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Para demostrar que son bases, procedemos a probar que el conjunto de matrices es linealmente independiente y adicional a eso, es generador.

Empezamos probando su **independencia lineal**:

$$\alpha\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\beta i \\ \beta i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma+\lambda & \alpha-\beta i \\ \alpha+\beta i & -\gamma+\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $\gamma+\lambda=0$
- $\alpha-\beta i=0$
- $\alpha+\beta i=0$
- $-\gamma+\lambda=0$

Solucionando:

$\lambda=-\gamma$

$-\gamma-\gamma=0$

$\rightarrow \gamma=0$

$\rightarrow \lambda=0$

$\alpha+\beta i=(\beta i)+\beta i=2\beta i=0$

$\rightarrow \beta=0$

$\rightarrow \alpha=0$

Como $\gamma, \lambda, \beta, \alpha$ son 0, entonces las matrices son linealmente independientes.

Continuamos demostrando que es un **conjunto generador**, de tal forma que queremos ver si todo elemento de H (Espacio vectorial de matrices hermiticas) puede verse como combinación lineal de las matrices de Pauli.

$$A = \begin{pmatrix} a & b-ci \\ b+ci & d \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones halladas en el inciso anterior:

- $\alpha + \beta i = b + ci$
- $\alpha - \beta i = b - ci$
- $\gamma + \lambda = a$
- $-\gamma + \lambda = d$

Demostraremos que existen escalares $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ tales que

$\alpha\sigma_0 + \beta\sigma_1 + \gamma\sigma_2 + \lambda\sigma_3 = A$.

Resolviendo el SEL.

$\gamma = a - \lambda$ $\qquad$ $\alpha = b \ \wedge (-\beta = -c \Leftrightarrow \beta = c)$

Reemplazando $\gamma = a - \lambda$ en $-\gamma + \gamma = d$

$a - \lambda - \lambda = d$

$a - d = 2\lambda$

$\frac{1}{2}(a-d) = \lambda$

Ahora,

$\gamma = a - \lambda = a - \frac{1}{2}(a-d) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}(a+d)$

$\gamma = \frac{1}{2}(a+d)$, $\quad \alpha = b$, $\quad \beta = c$, $\quad \lambda = \frac{1}{2}(a-d)$

Como $\gamma, \alpha, \beta, \lambda$ existen, significa que generan a H.

Como $\boldsymbol{\sigma_0}, \boldsymbol{\sigma_1}, \boldsymbol{\sigma_2}, \boldsymbol{\sigma_3}$ son linealmente independientes y son un conjunto generador, significa que es una base para este espacio vectorial H.

b) Compruebe que esa base es ortogonal bajo la definición de producto interno $\langle a|b\rangle \rightleftharpoons Tr(\mathbb{A}^{\dagger}\mathbb{B})$ que introdujimos en los ejercicios de esa misma sección.

Como lo que queremos demostrar es que la base $B = \{\boldsymbol{\sigma_0}, \boldsymbol{\sigma_1}, \boldsymbol{\sigma_2}, \boldsymbol{\sigma_3}\}$ es ortogonal, debemos garantizar que su producto interno $\langle a|b\rangle = 0$, por lo tanto tendríamos que:

Como $\langle a|b\rangle = 0$ para cada par de base $B = \{\boldsymbol{\sigma_0}, \boldsymbol{\sigma_1}, \boldsymbol{\sigma_2}, \boldsymbol{\sigma_3}\}$, demostramos que B es una base ortogonal.

1. $\langle \sigma_0 | \sigma_1 \rangle = Tr(\sigma_0^{+} \sigma_1) = Tr\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\} = Tr\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \underline{0}$

2. $\langle \sigma_1 | \sigma_0 \rangle = Tr\left\{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\} = Tr\left\{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\} = \underline{0}$

Como $\sigma_0 = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = I \quad \sigma_0^{+} = \sigma_0 = I$

3. $\langle \sigma_0 | \sigma_2 \rangle = Tr(\sigma_2) = Tr\left\{\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\right\} = \underline{0}$

4. $\langle \sigma_0 | \sigma_3 \rangle = Tr(\sigma_3) = Tr\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\} = 1-1 = \underline{0}$

5. $\langle \sigma_2 | \sigma_0 \rangle = Tr(\sigma_2 I) = Tr(\sigma_2) = Tr\left\{\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\right\} = \underline{0}$

• $(\sigma_2)^{t} = \sigma_2$

6. $\langle \sigma_3 | \sigma_0 \rangle = Tr(\sigma_3 I) = Tr(\sigma_3) = Tr\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\} = 1-1 = \underline{0}$

7. $\langle \sigma_1 | \sigma_1 \rangle = Tr(\sigma_3 I) = Tr \hookrightarrow \left\{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\} = \underline{0}$

8. $\langle \sigma_2 | \sigma_1 \rangle = Tr\left\{\begin{pmatrix}0&-i\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\} = Tr\left\{\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix}\right\} = i - i = \underline{0}$

9. $\langle \sigma_1 | \sigma_3 \rangle = Tr\left\{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\} = Tr\left\{\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right\} = \underline{0}$

10. $\langle \sigma_3 , \sigma_1 \rangle = Tr\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right] = Tr\left\{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right\} = \underline{0}$

11. $\langle \sigma_2 | \sigma_3 \rangle = Tr\left[\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right] = Tr\left\{\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}\right\} = \underline{0}$

12. $\langle \sigma_3 | \sigma_2 \rangle = Tr\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\right\} = Tr\left\{\begin{pmatrix}0&-i\\-i&0\end{pmatrix}\right\} = \underline{0}$

c) Explore si se pueden construir subespacios vectoriales de matrices reales e imaginarias

1. Matrices unicamente reales.

De la forma: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ Aquí hicimos $C=0$ para que quedaran solo # reales.

$a, b, d \in \mathbb{R}$

A es hermitica pues: $A^t = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$

$A = A^t$

A continuación, demostrararemos que es un subespacio, de tal forma que si $A \in S$ y $B \in S$ $\alpha A + \beta B \in S$.

$A, B \in S$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (Escalares deben ser reales.)

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$

$$\alpha A + \beta B = \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta e & \alpha b + \beta f \\ \alpha b + \beta f & \alpha d + \beta g \end{pmatrix}$$

$$(\alpha A + \beta B)^t = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta e & \alpha b + \beta f \\ \alpha b + \beta f & \alpha d + \beta g \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta e & \alpha b + \beta f \\ \alpha b + \beta f & \alpha d + \beta g \end{pmatrix}$$

$$= \alpha A + \beta B. \in S$$

✓ S subespacio de H.

2. Matrices Imaginarias puras.

De la forma: $A = \begin{pmatrix} 0 & -ci \\ ci & 0 \end{pmatrix}$ a, b y $d = 0$

Queremos demostrar que el subconjunto S_2 es un subespacio de H, para eso:

$A, B \in S_2$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha A \beta B \in S$

$A = \begin{pmatrix} 0 & -ci \\ ci & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & -gi \\ gi & 0 \end{pmatrix}$

$$\alpha A + \beta B = \alpha \begin{pmatrix} 0 & -ci \\ ci & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & -gi \\ gi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(\alpha c - g\beta) i \\ (\alpha c + \beta g) i & 0 \end{pmatrix}$$

puras.

$$(\alpha A+\beta B)^t = \begin{pmatrix} 0 & (\alpha c+\beta d)i \\ -(\alpha c+\beta d)i & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & -(\alpha c+\beta d)i \\ (\alpha c+\beta d)i & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha A + \beta B \in S_2$$

↳ Es una matriz hermítica de entradas completamente imaginarias.

✓ S_2 es un subespacio de H.