Presentado por: Miguel Fernando Becerra, Karen Sarat Anaya Verdugo.

# **Taller Evaluado Espacios Lineales**

### Sección 2.1.6

- 3) Considere un triángulo equilátero que se muestra en la figura 2.1. ¿Se pueden identificar operaciones de rotación alrededor de un eje perpendicular a la figura que pasa por su baricentro  $\star y$ , reflexiones respecto a planos  $X_a, X_b, X_c$  que dejan invariante la figura del triángulo. Adicionalmente, se puede definir la operación concatenación de rotaciones y reflexiones que dejan igualmente invariante al triángulo, tal y como mostramos en la mencionada figura.
- a) Construya la tabla de multiplicación para  $G_{\Delta}$ , vale decir  $G_{\Delta} = \left\{I, \{R_i\}, \{\bar{R}_j\}, \{X_k\}\right\}$  y la operación es concatenación tal y como mostramos en la figura 2.1. Donde I es la operación identidad,  $\{R_i\}$  es un conjunto de rotaciones en sentido horario, mientras que  $\{\bar{R}_j\}$  es un conjunto de rotaciones en el sentido antihorario, y  $\{X_k\}$  el conjunto de las reflexiones que dejan invariante el triángulo.

Concatenación	I	$R_i$	$\overline{R}_j$	$X_a$	$X_b$	$X_c$
I	Ι	$R_i$	$\bar{R}_j$	$X_a$	$X_b$	$X_c$
$R_i$	$R_i$	$\bar{R}_j$	Ι	$X_c$	$X_a$	$X_b$
$\overline{R}_j$	$\bar{R}_j$	Ι	$R_i$	$X_b$	$X_c$	$X_a$
$X_a$	Xa	$X_b$	$X_c$	Ι	$R_i$	$\bar{R}_j$
$X_b$	$X_b$	$X_c$	Xa	$\bar{R}_j$	I	$R_i$
$X_c$	$X_c$	Xa	$X_b$	$R_i$	$\bar{R}_{j}$	I

**b)** Demuestre que el conjunto de estas operaciones forma un grupo  $G_{\Delta}$ .

Para demostrar que es un grupo, tenemos que demostrar las cinco propiedades.

### 1. Cerrada.

Respecto a la operación concatenación, el resultado entre cualquier elemento con otro elemento del grupo debe dar un elemento que esté en el mismo grupo. Esto lo podemos comprobar en el inciso anterior, en donde la tabla de multiplicación nos

dio para todas las operaciones entre los elementos de  $G_{\Delta}$  otro elemento de  $G_{\Delta}$ .

#### 2. Asociativa.

El orden en el que se ejecuten las operaciones no altera el resultado. Efectivamente, si

$$(I \square R_i) \square R_i = \bar{R}_j$$
$$I \square (R_i \square R_i) = \bar{R}_i$$

#### 3. Elemento neutro

Existe un elemento neutro tal que, operado por otro elemento del mismo grupo, nos de ese mismo elemento.

Nuevamente, teniendo en cuenta el inciso anterior, en la tabla de multiplicación podemos ver que *I*, la operación identidad, cumple con este requisito, ya que al ser la misma, no se aplica ninguna rotación, ni ninguna reflexión, por lo tanto, tendremos el triángulo del principio.

## 4. Elemento inverso

Todo elemento del grupo debe tener un elemento inverso que también esté en el mismo grupo tal que al operarlos nos de como resultado el elemento neutro.

Esto se comprueba mirando la tabla, podemos notar que  $R_i$  y  $\overline{R}_j$  son inversos entre sí ya que al concatenarlos tenemos la operación identidad. Para el caso de las reflexiones, el elemento inverso es ellas mismas, por ejemplo, para la reflexión  $X_a$  su inversa es  $X_a$  y así para  $X_b$  y  $X_c$ .

# 5. Conmutatividad.

Es conmutativa respecto a la operación concatenación, sin importar el orden de operación el resultado debe ser el mismo.

Esta propiedad, según nuestra tabla, podemos comprobar que no se cumple, sin embargo, aquí sólo estaríamos comprobando que  $G_{\Delta}$  no es un grupo Abeliano, pero como si cumple las 4 anteriores, significa que sí es un grupo.

c) Identifique cada una de  $las R_i$  y  $\overline{R}_j$ , y muestre, además, que forman un subgrupo cíclico de orden 3. De igual modo identifique las reflexiones y muestre que, cada una de las reflexiones y la identidad,  $X_k$  forman también un subgrupo cíclico, pero de orden 2.

# Subgrupo Ri, Rj, I

Para que sea un subgrupo cíclico, debe haber un elemento que genere todo el subgrupo. En este caso, podemos decir que nuestro elemento generador será Rj, ya que, al operarlo con los elementos del subgrupo, tendrá cada uno de los elementos de este.

Adicional a ello, podemos decir que es de orden 3, porque el subgrupo cuenta con tres elementos.

Concatenación	ı	$R_i$	$\overline{R}_j$
I	1	$R_i$	$\bar{R}_j$
$R_i$	$R_i$	$\bar{R}_j$	ı
$\overline{R}_{j}$	$\bar{R}_j$	1	$R_i$

# Subgrupo I, Xi

Para este caso, también debemos tener un elemento generador para que sea un subgrupo cíclico, el cuál será las reflexiones Xi. Recordemos que al principio dividimos esa Xi en tres (Xa, Xb, Xc), cualquiera de esas tres puede servimos como nuestro elemento generador, ya que al operar por ejemplo Xb por Xb nos da la operación identidad, y al operar la identidad por Xb, nos da Xb. Así para las otras dos, por lo que podemos generalizarlo para Xi.

El orden del subgrupo de dos porque contiene en él sólo dos elementos.

Conca.	ı	$X_b$
I	1	$X_b$
$X_b$	$X_b$	1

d) Muestre que forman grupo bajo la multiplicación de matrices y que ese grupo es isomorfo a  $G_{\Delta}$ 

Para mostrar que  $G_{\Delta}$  es isomorfo con M, recordemos primero la definición de isomorfismo, que se da cuando dos grupos tienen aspectos en común en sus estructuras algebraicas, propiedades y subgrupos. Entonces, si  $G_{\Delta} = \{I, R_i, \overline{R}_j, X_a, X_b, X_c\}$  y  $M = \{I, A, B, C, D, E, \}$ , podemos decir que sus elementos con equivalente.

Por lo que, comparando sus tablas de multiplicación.

Conca.	ı	Ri	Rj	Xa	Xb	Xc
ı	ı	Ri	Rj	Xa	Xb	Хc
Ri	Ri	Rj	ı	Хc	Xa	Xb
Rj	Rj	1	Ri	Xb	Хc	Xa
Xa	Xa	Xb	Хc	I	Ri	Rj
Xb	Xb	Хc	Xa	Rj	ı	Ri
Хc	Хc	Xa	Xb	Ri	Rj	1



Multiplicación matricial	-	A	В	C	D	Е
I	-	Α	В	U	Δ	Ε
Α	Α	В	_	Е	U	D
В	В	_	Α	Δ	Е	C
С	U	Δ	Е	_	Α	В
D	D	Ε	С	В	-	Α
E	Ε	С	D	Α	В	I

Note que por ejemplo si tomamos un elemento de cada grupo, por ejemplo, **Xc** y **E**, si multiplicamos cada uno por su inversa, nos da el elemento neutro del grupo, que en ambos casos sería la identidad **I**.

$$X_c \square X_C = I$$
 y  $E \times E = I$ .

**d)** Considere el conjunto de permutaciones de 3 objetos y la operación composición de permutaciones que discutimos como ejemplo en la sección 2.3 ¿Es ese grupo isomorfo a *G*4? Justifique su respuesta.

Si comparamos sus respectivas tablas de multiplicación tal cual como están, podríamos pensar que por su organización a simple vista que no son isomorfos:

Conca.	1	Ri	Rj	Xa	Xb	Xc
ı	1	Ri	Rj	Xa	Xb	Хc
Ri	Ri	Rj	1	Хc	Xa	Xb
Rj	Rj	ı	Ri	Xb	Xc	Xa
Xa	Xa	Xb	Xc	ı	Ri	Rj
Xb	Xb	Хc	Xa	Rj	ı	Ri
Хc	Xc	Xa	Xb	Ri	Rj	I



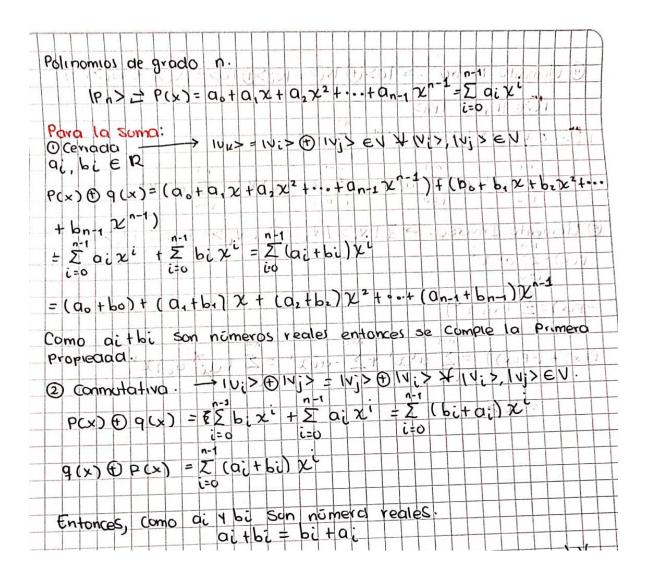
Permutación	p0	<b>p1</b>	p2	р3	p4	р5
p0	p0	p1	p2	р3	р4	p5
<b>p1</b>	p1	р0	p5	р4	р3	p2
p2	p2	р4	р0	p5	p1	р3
р3	р3	p5	p4	р0	p2	p1
р4	p4	p2	р3	p1	р5	p0
р5	р5	р3	p1	p2	p0	p4

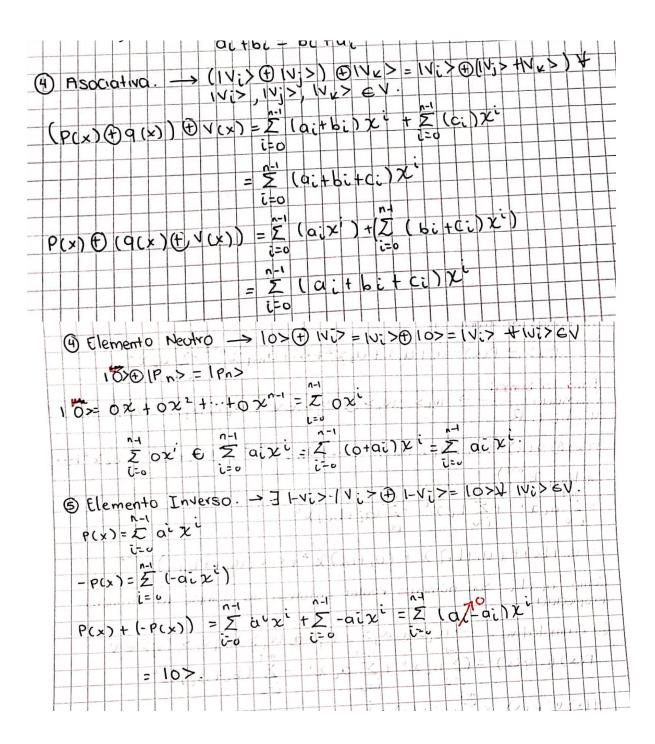
Sin embargo, ambos grupos comparten las mismas propiedades y los mismos subgrupos, lo cual, según la definición de isomorfismo es necesario para que sean isomorfos. Por lo tanto, podemos simplemente reorganizar sus componentes de Pi de tal manera que ambas tablas queden iguales, sin alterar las operaciones, así:

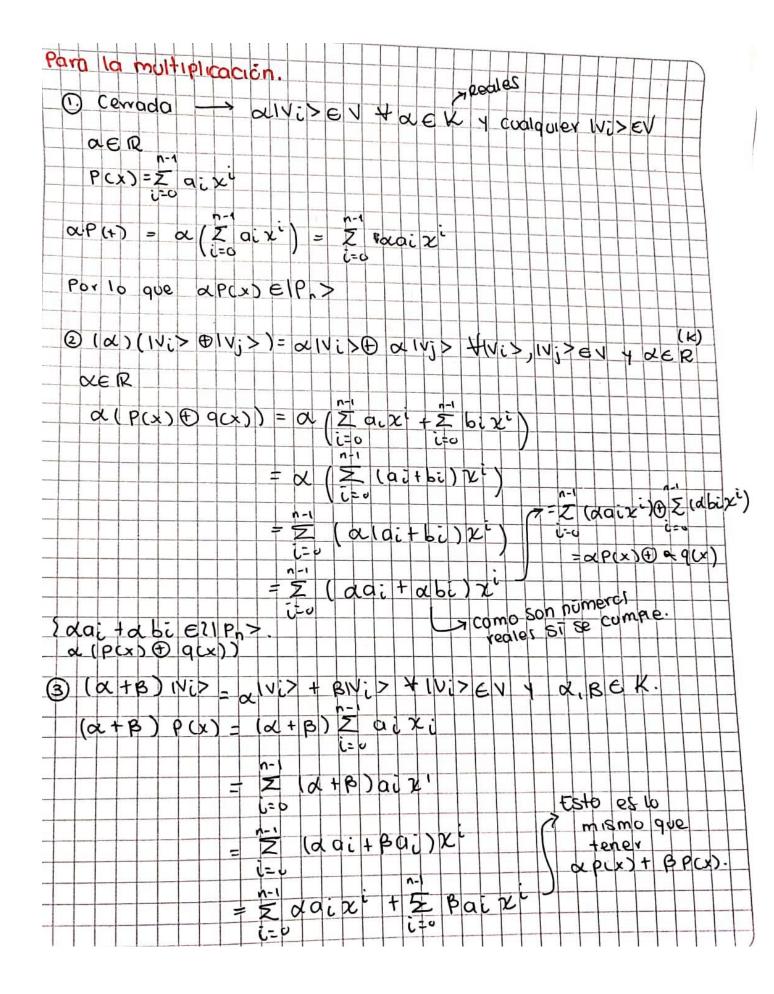
Concatenación	ı	Ri	Rj	Xa	Xb	Хc
1	-	Ri	Rj	Xa	Xb	Хc
Ri	Ri	Rj	-	Xc	Xa	Xb
Rj	Rj	-	Ri	Xb	Xc	Xa
Xa	Xa	Xb	Xc	Ι	Ri	Rj
Xb	Xb	Xc	Xa	Rj	_	Ri
Хc	Хc	Xa	Xb	Ri	Rj	I

Permutación	p0	p4	р5	<b>p1</b>	рЗ	p2
p0	p0	p4	p5	p1	рЗ	p2
p4	p4	p5	p0	p2	p1	р3
p5	р5	p0	p4	р3	p2	p1
<b>p1</b>	p1	р3	p2	p0	p4	p5
р3	рЗ	p2	p1	p5	p0	p4
p2	p2	р1	рЗ	p4	p5	p0

- **10**. Sea  $P_n$  el conjunto de todos los polinomios de grado n, en x, con coeficientes reales:
- a) Demostrar que  $P_n$  es un espacio vectorial respecto a la suma de polinomios y a la multiplicación de polinomios por un número (número real).







**b)** Si los coeficientes  $a_i$  son enteros ¿ $P_n$  será un espacio vectorial? ¿Por qué?

Para la multiplicación:

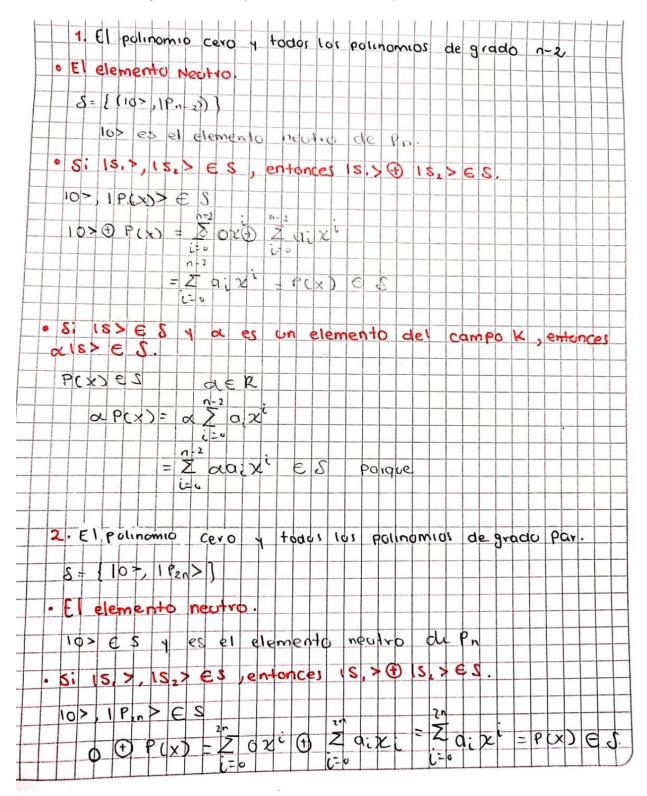
① Cervada.

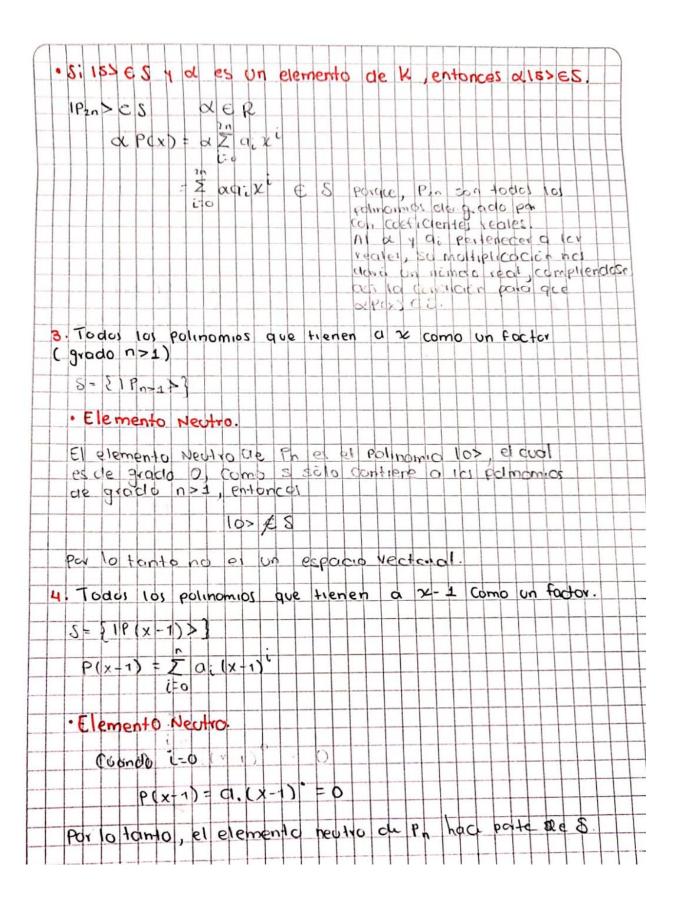
$$\alpha | V_i > \in V \quad \forall \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \gamma \text{ coalquiev} \quad | V_i > \in V.$$
 $\alpha \in \mathbb{R} \quad \text{ai} \in \mathbb{Z}$ 
 $\alpha P(x) = \alpha \left( \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x^i \right)$ 
 $\alpha P(x) \neq P_n$ 

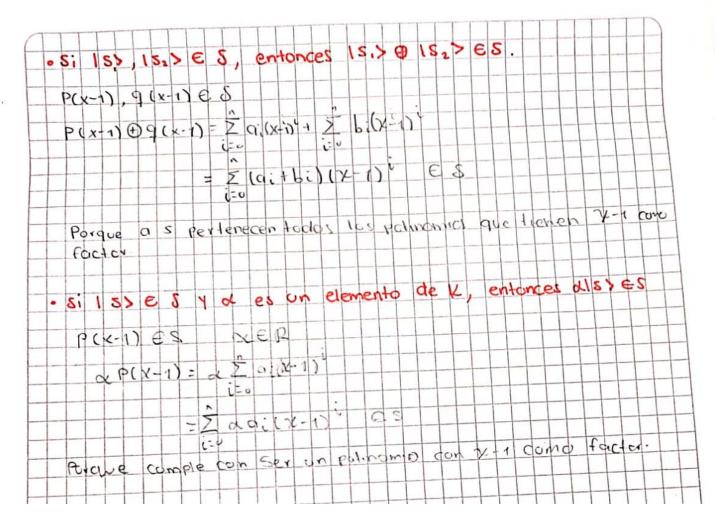
 $P_n$  no es un espacio vectorial porque no cumple con la propiedad de cerradura en la multiplicación por un escalar.

 $\alpha$  al ser un número real y  $a_i$  un entero, su producto no garantiza otro entero como resultado, porque  $\alpha$  también puede ser un número racional. Por lo tanto, una de las condiciones para que  $P_n$  fuera un espacio vectorial es que su multiplicación por un escalar real perteneciera a el conjunto, pero nuestro conjunto son todos los polinomios de grado n con coeficientes enteros, y como vimos al principio, esto no siempre se va a cumplir.

c) ¿Cuál de los siguientes subconjuntos de Pn es un subespacio vectorial?







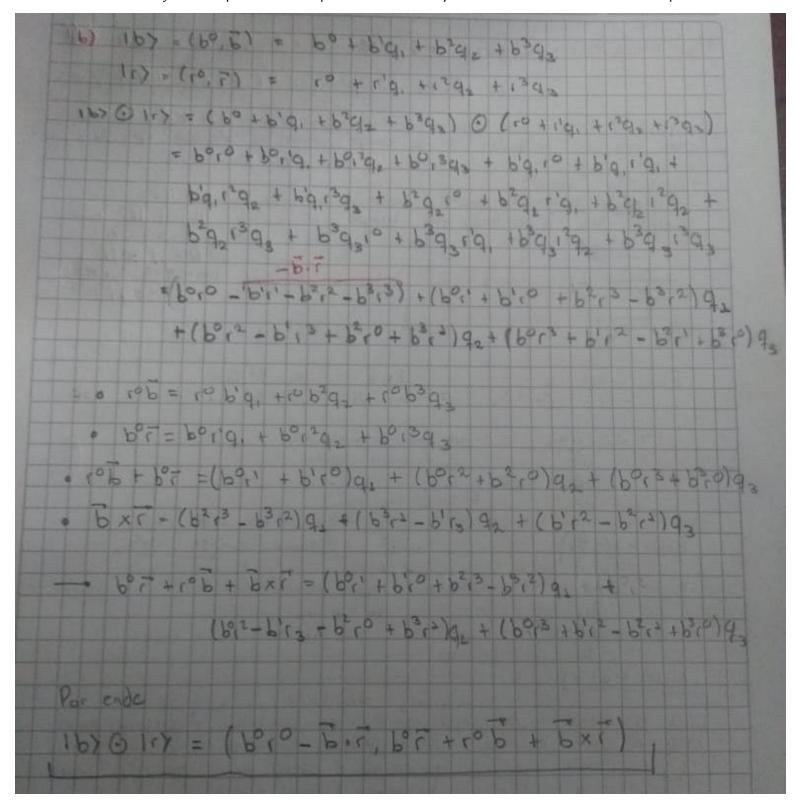
# Sección 2.2.4

- 6. Con la información expuesta en el libro guía, responda las siguientes preguntas:
- a) Compruebe si los cuaterniones,  $|a\rangle$ , forman un espacio vectorial respecto a esa operación suma y esa multiplicación por escalares, análoga a la de los vectores en R3 en coordenada cartesianas.

1) Seo V comunto de alaterniones. Para que ero repado Vectorial there gue exaplic los 20 propriodos. · Sec 10 = ad 192, 16x = 6x 197 6 V 10) +167 = (04+64) 19 x = c4/19 x = 104 & V a 107, 167 EV 100 + 100 = (00 160 1190) = (60 +00)1907 = 167 + 107 commutalings - 102, 162, 1c7 6V 107+(167+167) = 0x 190x+(6x+ca) 1907 = (0x+6x+cx) 1907 ((a)160) +ca)190) (a+6) 9a7 + c (9a) = (107+104) + 107 0 107 E V Sea 1017 EV 107 + 107 = 0 = 0 + 09 1007 = 00 1907 = 197 · Sea lay & V 31-07 tal que 107 + 1-07 = 100 - 00 11907 = 107 V · Sea & G a un ac-pu & 2107 = 2 (a) 9:7 = (20/9) 7 = 6'19 7 = 167 & V da = ct - dplan = x (Ba ) 1917 = (xBa ) 1917 = (xB) a 1917 (0B) 107 V · (0+13)10) = (0+13)0 19) = 00 19) + 1019) = 0107 + 13107 V · x(107+10) = x(a'19) + b'19) = xa'19) + xb'19) = x107+x1bx b) Dados dos cuaterniones cualesquiera  $|b\rangle \equiv (b^0,b)$  y  $|r\rangle \equiv (r^0,r)$ , y su tabla de multiplicación, muestre que el producto entre esos cuaterniones  $|b\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle$  podrá representarse como:

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle \longleftrightarrow (d^0, \mathbf{d}) = (b^0 r^0 - \mathbf{b} \cdot \mathbf{r}, r^0 \mathbf{b} + b^0 \mathbf{r} + \mathbf{b} \times \mathbf{r})$$

Donde  $\cdot y \times$  corresponden con los productos escalares y vectoriales tridimensionales de siempre.



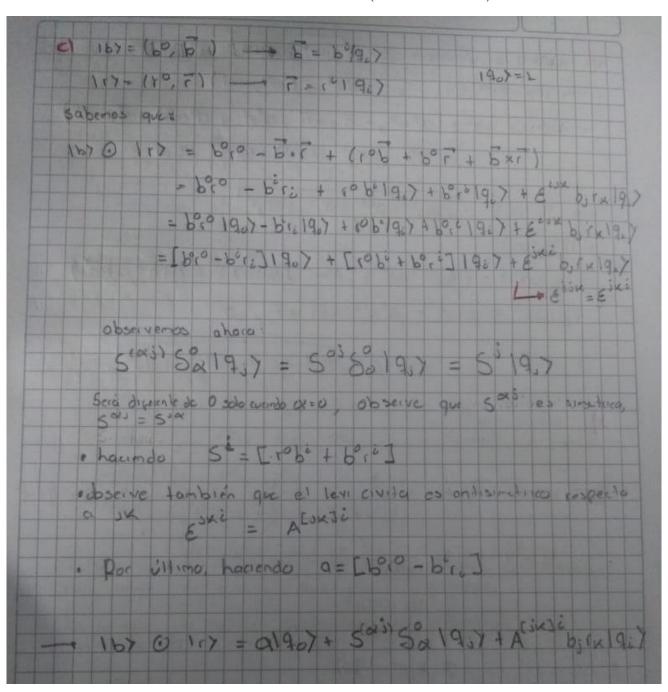
c) Ahora con índices: dados  $|b\rangle \equiv b^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle$  y  $|r\rangle \equiv r^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle$  compruebe si el producto  $|b\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle$  puede ser siempre escrito de la forma:

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle = a |q_0\rangle + S^{(\alpha j)} \delta^0_\alpha |q_j\rangle + A^{[jk]i} b_j r_k |q_i\rangle$$

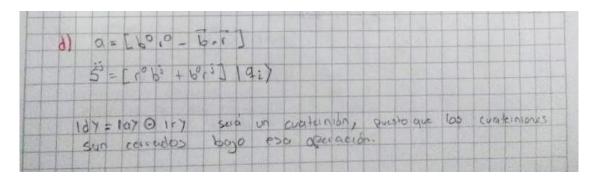
Donde a representa un número,  $S^{(\alpha j)}\delta^0_\alpha$  (recuerde que los índices latinos toman los valores  $j;\ k;\ l=1,2,3$ , mientras  $\alpha=0,1,2,3$ ) donde  $S^{(ij)}$ indica  $S^{ij}=S^{ij}$ , que la cantidad  $S^{ij}$  es simétrica, y por lo tanto  $(S^{(\alpha j)}\delta^0_\alpha+S^{(\alpha j)}\delta^0_\alpha)\ |\ q_i\rangle$ .

Mientras  $A^{(jk)i}$  representa un conjunto de objetos antisimétricos en j y k

$$A^{[jk]i} \rightarrow A^{jki} = -A^{kji} \rightarrow \left(A^{jki}b_jr_k - A^{kji}b_jr_k\right)|q_i\rangle$$



d) Identifique las cantidades:  $a, S^{(ij)}, A^{(jk)i}$  en términos de las componentes de los cuaterniones. ¿El producto de cuaterniones producto  $|d\rangle = |a\rangle \odot |r\rangle$  un vector, pseudovector o ninguna de las anteriores? Explique por qué.



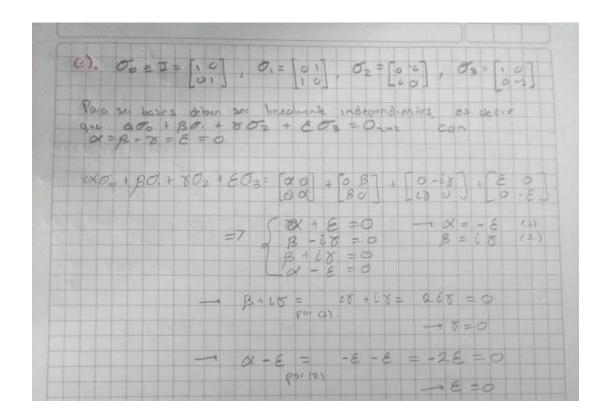
e) Compruebe si las matrices de Pauli y la identidad:

$$\sigma_0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$   $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$   $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 

Pueden representar la base de los cuaterniones  $\{|q_1\rangle, |q_2\rangle, |q_3\rangle, |q_0\rangle\}$  Seguidamente muestre que matrices complejas 2 ×2 del tipo:

$$|b\rangle \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc} z & w \\ -w^* & z^* \end{array}\right)$$

pueden ser consideradas como cuaterniones, donde  $z = x + iy \ y \ w = a + ib$  son números complejos.



Como  $0 = \beta = 8 = 8 = 0$ , son inneprente insigna entre y

pueda represente la bose de los cuatembres.

-1 var =  $\begin{bmatrix} a^{0} + ia^{1} & a^{1} + ia^{3} \\ -o^{1} + io^{3} & a^{0} - ia^{1} \end{bmatrix}$   $107 + 107 = \begin{bmatrix} 6^{0} + ib^{1} & b^{2} + ib^{3} \\ -b^{2} + ib^{3} & b^{0} - ib^{2} \end{bmatrix}$   $107 + 107 = \begin{bmatrix} 6^{0} + ib^{1} & b^{2} + ib^{3} \\ -ia^{1} + b^{2} & b^{2} + ib^{3} \\ -ia^{2} + b^{3} & b^{2} & a^{2} \end{bmatrix}$   $127 + 107 = \begin{bmatrix} 6^{0} + b^{0} \\ -c^{2} + c^{3} & a^{2} \end{bmatrix}$   $127 + 107 = \begin{bmatrix} 6^{0} + b^{0} \\ -c^{2} + c^{3} & a^{2} \end{bmatrix}$   $127 + 107 = \begin{bmatrix} 6^{0} + b^{0} \\ -c^{2} + c^{3} & a^{2} \end{bmatrix}$   $127 + 107 = \begin{bmatrix} 6^{0} + b^{0} \\ -c^{2} + c^{3} & a^{2} \end{bmatrix}$   $127 + 107 = \begin{bmatrix} 6^{0} + b^{0} \\ -c^{2} + c^{3} & a^{2} \end{bmatrix}$   $127 + 107 = \begin{bmatrix} 6^{0} + b^{0} \\ -c^{2} + c^{3} & a^{2} \end{bmatrix}$   $127 + 107 = \begin{bmatrix} 6^{0} + b^{0} \\ -c^{2} + c^{3} & a^{2} \end{bmatrix}$   $127 + 107 = \begin{bmatrix} 6^{0} + b^{0} \\ -c^{2} + c^{3} & a^{2} \end{bmatrix}$   $127 + 107 = \begin{bmatrix} 6^{0} + b^{0} \\ -c^{2} + c^{3} & a^{2} \end{bmatrix}$ 

f) Muestre que una representación posible para la base de cuaterniones son la matriz identidad y las matrices reales 4 X 4 de la forma:

$$|q_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad |q_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad |q_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A									-3					1	0	-3		1			1	01	0	0
Au-			0			0	= 2	0	0	1 2			A2							1				-7
240		0	1	0	1	17.3	1	0	0	0			-	1	0	2 0	4		1	3				0
	10	9	4	1			0	3	0	0	1				0 0	2	- 0	1				7	0	0
		-	- 3		1		0 0					1												
	La	1	ab	6	de	.60	0141	pli	901	00	1	de	103	1	10	1180	2	52	8					
				-	Α.		AL			^		Λ												
		N.			10		M 7		-	12		Az												
			A	0	Ao		A		1	1-		A												
										1														
			A.	1	13 3		-Ao		-	A:		As												
				1																				
			A	2	As		A 3		-1	40		- A	Y											
			A		-		-0																	
1			14	3	As		-Az		1	47		-A	0											
		-																						
	-			7	Au		A			A		A												
	-			-	810		11.1			13		1	2											
		1	5.	,	Au		A.			A		A												
1		T	716		-					13		7												
			A		Als		- M		1	12		-1	3											
		1	33	4	Az		- A2		-	Ac		A	1											
				1								-												
1		1	1/2	1	Az		As		-	A		-/-	0											
100																					-			
08	2 20	Y	an			Di	TED	0	(	36	00	Th		10.10		0	4	10.	2	0	190	10		70
tro	5	00	عمد	13	0	0	cuti	14	91		94		Son		-	50	634	anti						
0											-												+	
	9 30				los		CHIL	ce.	1	(X	KQ.					(0)	150						-16	-

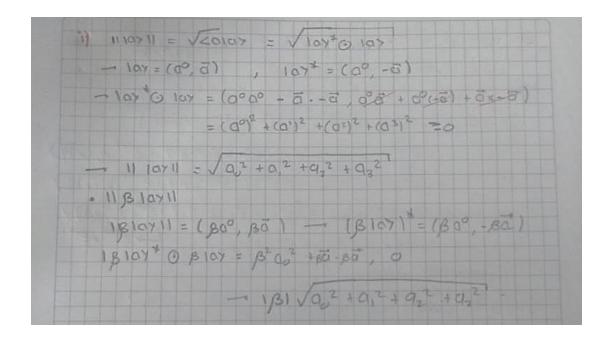
g) Compruebe si la siguiente es una buena definición de producto interno:

$$\widetilde{\langle a \mid b \rangle} = |a\rangle^{\maltese} \odot |b\rangle$$

91	La167 = 107 0 167
	no funciono como producto inteno porque el producto
	interno asocia a un par de Nectorer, un
	clonunto de un campo, y acia la asocia
	con otro vector, parque la operación co

i) Compruebe si la siguiente es una buena definición de norma para los cuaterniones:

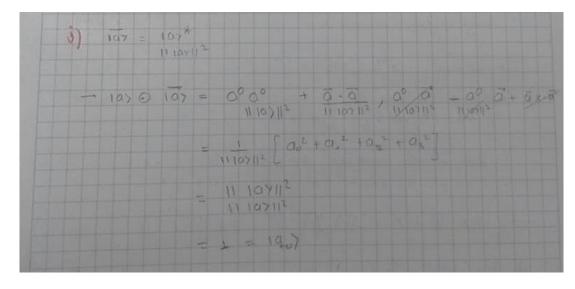
$$n(|b\rangle) = ||a\rangle|| = \sqrt{\langle a | a \rangle} = \sqrt{|a\rangle^{^{\mathbf{F}}} \odot |a\rangle}.$$



j) Compruebe si un cuaternión definido por:

$$\overline{|a\rangle} = \frac{|a\rangle^{\maltese}}{\||a\rangle\|^2},$$

puede ser considerado como el inverso o elemento simétrico de  $|a\rangle$ , respecto a la multiplicación  $\odot$ .



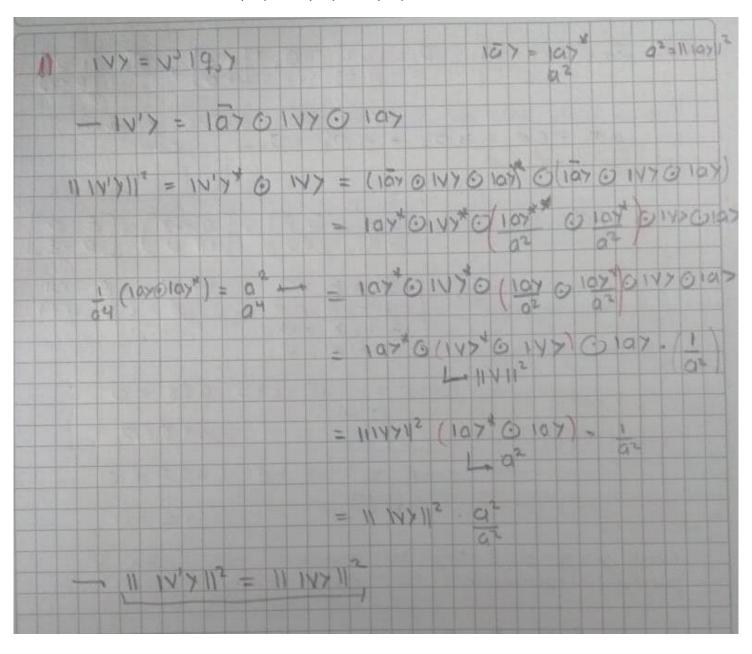
**k)** Compruebe si los cuaterniones  $|a\rangle$  forman un grupo respecto a una operación multiplicación  $\odot$ .

K) Compruebe si furmen un grupo respecte a O
· Sear 10) = (00,00) y 16) = (60, 6) Cuntumients
10>0 1b> = (0°6° - a-6, 6° a + a° 6 + a v 6)
Sea co = 000 - a.b , E = 60 + 0 + 0 x b
- 10x 0 167 = 1c7 = (c0, E) , es carada
o tay, 167, 167 cvalences
10x0(16x01cx) = (0°,0) @ (6°0° - 6.2, 0° 6 + 6°2 + 6×2)
= 0°(6°0° - 6°2) - a((° 6 + 6°2 + 6×2),
(bc°-5.2) a + a° (cb + b° = + b × 2) + a × (cb + bc + bx2
=0°6°0° -0°16.61 - 6.65 - 6.66 + - 6.66 60° 6 + - 6.66
+ 6°C° 6 + 0°6° 2 + 0° 6× 0 + 0× 0 + 0× 0 6 + 0× 0 6 × 0
- (10) (16) (0) = (0)6- a.b, 60 + 00 b + 0x b) ( (0) (0)
= co(a06-0.6) + c. (60 + 86 + ax6 ) , e(60 + a16 + ax6)
(66-06)c=+ Ex(60 + cpb + axb)
1900 = 0°6°0° - 0.05 - 2.80 - 2.60° + 0x0x6, 800 + 086
+ c° axb + 0° 7 6° + (a.b) E + cx 8° a + cx 6° b + c + ax b
Pur ende lay O (16x.1cx) = (1ax(316x) () 1cx
a Glevento neutro 1407 = 1
Elerando Inverso 197 + 107 11 107 112
Se demention en el inerso J
Par enda si es un grupo.

l) Los vectores en R<sub>3</sub> en coordenadas cartesianas, jvi, pueden ser representados como cuaterniones, donde la parte escalar es nula  $v_0 = 0$ ! jvi =  $v_j$  jq<sub>j</sub>i. Compruebe si el siguiente producto conserva la norma:

$$\left|v'\right\rangle = \overline{\left|a\right\rangle} \odot \left|v\right\rangle \odot \left|a\right\rangle .$$

Estos es: 
$$||v'\rangle||^2 = (v^{1'})^2 + (v^{2'})^2 + (v^{3'})^2 \equiv (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 = ||v\rangle||^2$$
.



### Sección 2.3.6

**5)** Considere el espacio vectorial de las matrices complejas 2x2 hermíticas. Tal y como demostraremos en secciones pasadas del libro, una matriz hermítica (o auto-adjunta) será igual a su adjunta. Esto es, una matriz será igual a su traspuesta conjugada  $(A^{\dagger})_i^j \rightarrow (A*)_i^j \equiv A_i^j$ .

$$A \leftrightarrow \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \end{pmatrix} = A^\dagger =$$
 es decir 
$$\begin{cases} z_1^* = z_1 & \text{real} \\ z_4^* = z_4 & \text{real} \\ z_2^* = z_3 & \text{complejos} \end{cases}$$

a) Muestre que las matrices de Pauli forman una base para ese espacio vectorial.

### Matrices de Pauli

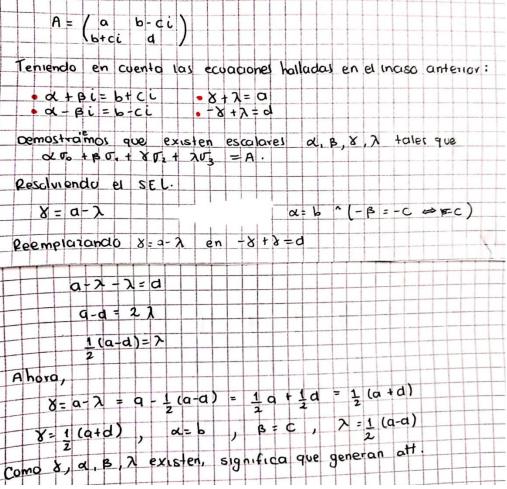
$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para demostrar que son bases, procedemos a probar que el conjunto de matrices es linealmente independiente y adicional a eso, es generador.

# Empezamos probando su independencia lineal:

$$\begin{array}{c} \alpha\left(\begin{array}{c} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right) + \beta\left(\begin{array}{c} 0 & -\dot{l} \\ \dot{l} & 0 \end{array}\right) + \delta\left(\begin{array}{c} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}\right) + \lambda\left(\begin{array}{c} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{pmatrix} 3 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\beta i \\ \beta i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 + \lambda & \alpha - \beta i \\ \alpha + \beta i & -\delta + \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 + \lambda & \alpha - \beta i \\ \alpha + \beta i & -\delta + \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 + \lambda & \alpha - \beta i \\ \alpha + \beta i & -\delta + \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 + \lambda & \alpha - \beta i \\ \alpha + \beta i & -\delta + \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 + \lambda & \alpha - \beta i \\ \alpha + \beta i & -\delta + \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 + \lambda & \alpha - \beta i \\ \alpha + \beta i & -\delta + \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 &$$

Continuamos demostrando que es un **conjunto generador**, de tal forma que queremos ver si todo elemento de H (Espacio vectorial de matrices hermiticas) puede verse como combinación lineal de las matrices de Pauli.

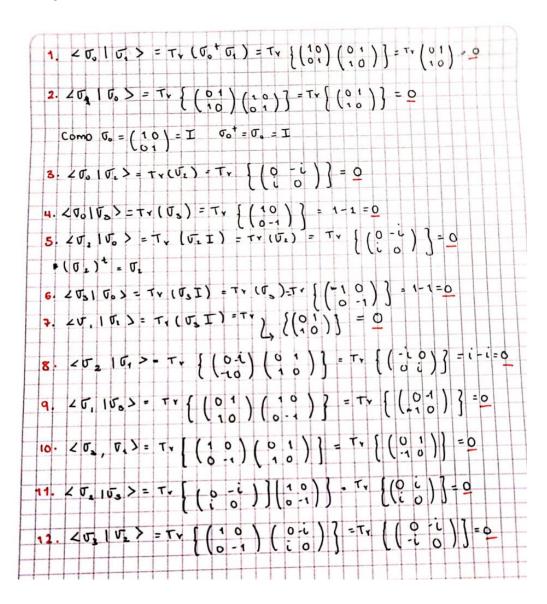


Como  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  son linealmente independientes y son un conjunto generador, significa que es una base para este espacio vectorial H.

b) Compruebe que esa base es ortogonal bajo la definición de producto interno  $\langle a|b\rangle \rightleftharpoons Tr(\mathbb{A}^{\dagger}\mathbb{B})$  que introdujimos en los ejercicios de esa misma sección.

Como lo que queremos demostrar es que la base  $B = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$  es ortogonal, debemos garantizar que su producto interno  $\langle a|b\rangle = 0$ , por lo tanto tendríamos que:

Como  $\langle a|b\rangle=0$  para cada par de base  $B=\{\boldsymbol{\sigma_0},\boldsymbol{\sigma_1},\boldsymbol{\sigma_2},\boldsymbol{\sigma_3}\}$ , demostramos que B es una base ortogonal.



c) Explore si se pueden construir subespacios vectoriales de matrices reales e imaginarias

