Primer taller de Métodos matemáticos

Karen Sarat Anaya Verdugo*
Miguel Fernando Becerra Rodríguez**
Universidad Industrial de Santander
Bucaramanga, Santander

9 de noviembre de 2021

1. Sección 1.5.7

Punto 2

Considere que:

- $\mathbf{r} = \mathrm{x}\ \mathbf{i} + \mathrm{y}\ \mathbf{j} + \mathrm{z}\ \mathbf{k} = x^i \mathbf{i}_i$
- $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}(\mathrm{x,y,z}) = a^i(x,y,z)\mathbf{i}_i$ y $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{r}) = \mathbf{b}(\mathrm{x,y,z}) = b^i(x,y,z)\mathbf{i}_i$
- $\phi = \phi(\mathbf{r}) = \phi(\mathrm{x,y,z})$ y $\psi = \psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathrm{x,y,z})$

Utilizando la notación de índices, demuestre las siguientes identidades vectoriales:

a) $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$
Solución:

$$\begin{aligned}
\nabla(\phi\psi) &= \partial^i(\phi\psi)\mathbf{i}_i \\
&= (\partial^i\phi)\psi\mathbf{i}_i + (\partial^i\psi)\phi\mathbf{i}_i \\
&= \psi\underbrace{(\partial^i\phi)\mathbf{i}_i}_{\nabla\phi} + \phi\underbrace{(\partial^i\psi)\mathbf{i}_i}_{\nabla\psi} \\
\nabla(\phi\psi) &= \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi
\end{aligned}$$

*Código: 2200813
**Código: 2201888

d) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a})$
Solución:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) &= \partial^i (\nabla \times \mathbf{a})_i \\ &= \partial^i \varepsilon_{ijk} \partial^j a^k \\ &= \varepsilon_{ijk} \partial^i \partial^j a^k \\ &= 0\end{aligned}$$

El término se vuelvo cero debido a que ε_{ijk} es antisimétrico respecto a los indices i, j, mientras que $\partial^i \partial^j$ es simétrico. Esto quiere decir que para un arreglo i, j, ε_{ijk} tendrá un valor, y para el arreglo j, i, el valor que tomará va a ser el negativo, mientras que las deltas de kronecker no van a variar.

¿Qué puede decir de $\nabla \times (\nabla \cdot \mathbf{a})$?

Observe que al realizar el producto punto vamos a obtener como resultado un número, además, el producto vectorial es una operación entre dos vectores, no entre un vector y un número.

f) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}$
Solución:

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) &= \varepsilon^{ijk} \partial_j (\nabla \times \mathbf{a})_k \mathbf{i}_i \\ &= \varepsilon^{ijk} \partial_j \varepsilon_{knm} \partial^n a^m \mathbf{i}_i \\ &= \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{knm} \partial_j \partial^n a^m \mathbf{i}_i \\ &= \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{nmk} \partial_j \partial^n a^m \mathbf{i}_i \\ &= \varepsilon^{nmk} \varepsilon^{ijk} \partial_j \partial^n a^m \mathbf{i}_i \\ &= (\delta^i_n \delta^j_m - \delta^j_n \delta^i_m) \partial_j \partial^n a^m \mathbf{i}_i \\ &= \delta^i_n \delta^j_m \partial_j \partial^n a^m \mathbf{i}_i - \delta^j_n \delta^i_m \partial_j \partial^n a^m \mathbf{i}_i \\ &= \delta^i_n \partial^n \delta^j_m a^m \partial_j \mathbf{i}_i - \delta^j_n \partial^n \delta^i_m a^m \partial_j \mathbf{i}_i \\ &= \partial^i \underbrace{\partial_j a^j}_{(\nabla \cdot \mathbf{a})} \mathbf{i}_i - \underbrace{\partial^j \partial_j}_{(\nabla \cdot \nabla)} a^i \mathbf{i}_i \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}\end{aligned}$$

Punto 13

Dado el campo de fuerza:

$$\mathbf{F} = -\frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$$

Calcule el trabajo hecho en contra de este campo de fuerza al moverse al rededor de un circulo de radio uno y en el plano xy.

a) desde 0 a π en sentido contrario a la agujas del reloj.
b) desde 0 a $-\pi$ en sentido de las agujas del reloj.
Solución:
El trabajo se define como:

$$W = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(x(t), y(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt$$

Donde $t \in [a, b]$, y donde la curva va a ser un cirulo de radio uno, es decir $\mathbf{r}(t) = cos(t)\mathbf{i} + sen(t)\mathbf{j}$. Utilizando Maxima, se realizó un código que permitió hallar el trabajo para ambas situaciones.

2. Sección 1.6.6

Punto 2

a) Demuestre que:

$$\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha$$

Solución:
Utilizando la formula de De Moivre:

$$(cos(\theta) + isin(\theta))^n = cos(n\theta) + isin(n\theta)$$

Reemplazando n con 3, obtenemos:

$$\cos 3\alpha + i \sin 3\alpha = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^3$$

Expandiendo, obtenemos:

$$= \cos^3 \alpha + i3 \cos^2 \alpha \sin \alpha + i^2 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha + i^3 \sin^3 \alpha$$

Despejando:

$$\begin{aligned}
\cos 3\alpha &= \cos^3 \alpha + i3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha - i \sin^3 \alpha - i \sin 3\alpha \\
&= \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha + i3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - i \sin^3 \alpha - i2 \sin \alpha \cos^2 \alpha - i \cos^2 \alpha \sin \alpha + i \sin^3 \alpha \\
&= \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha + i3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - i3 \cos^2 \alpha \sin \alpha \\
\cos 3\alpha &= \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha
\end{aligned}$$

b) Demostrar que:

$$\sin 3\alpha = 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha$$

Solución:

Utilizando de nuevo la formula de De Moivre, con $n = 3$ obtenemos:

$$\cos 3\alpha + i \sin 3\alpha = \cos^3 \alpha + i3 \cos^2 \alpha \sin \alpha + i^2 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha + i^3 \sin^3 \alpha$$

Utilizando la expresión que demostramos anteriormente:

$$i \sin 3\alpha = i3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - i \sin^3 \alpha$$

$$\sin 3\alpha = 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha$$

Punto 5

Encuentre las raíces de los siguientes números complejos.

Antes de empezar, debemos tener en cuenta que la ecuación para hallar las raíces de números complejos es la siguiente:

$$Z^{\frac{1}{n}} = [r^{\frac{1}{n}} e^{i\theta \frac{1}{n}}] = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right]$$

Con $\mathbf{k} : 0, 1, 2, ..., n - 1$

Sabiendo esto podemos empezar al calcular dichas raíces.

a) $(2i)^{\frac{1}{2}}$

$$x = (2i)^{\frac{1}{2}} = \left[cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2}\right)\right]$$

Con $k = 0, 1 \rightarrow x_1 = 1 + i, x_2 = -1 - i$

b) $(1 - \sqrt{3}i)^{\frac{1}{2}}$

$$x = (1 - \sqrt{3}i)^{\frac{1}{2}} = (2)^{\frac{1}{2}} \left[cos\left(\frac{\frac{5\pi}{3} + 2\pi k}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{5\pi}{3} + 2\pi k}{2}\right)\right]$$

Con $k = 0, 1 \rightarrow x_1 = \frac{-\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, x_2 = \frac{-\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

c) $(-1)^{\frac{1}{3}}$

$$x = (-1)^{\frac{1}{3}} = 1 \left[cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 2\pi k}{3}\right)\right]$$

Con $k = 0, 1, 2 \rightarrow x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, x_2 = -1, x_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

d) $(8)^{\frac{1}{6}}$

$$x = (8)^{\frac{1}{6}} = (8)^{\frac{1}{6}}\left[cos\left(\frac{0+2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{0+2\pi k}{3}\right)\right]$$

Con $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \rightarrow x_1 = 8^{\frac{1}{6}}, x_2 = 4 + 4\sqrt{3}i, x_3 = -4 + 4\sqrt{3}i, x_4 = (-8)^{\frac{1}{6}}, x_5 = -4 - 4\sqrt{3}i, x_6 = 4 - 4\sqrt{3}i$

e) $(-8 - 8\sqrt{3}i)^{\frac{1}{4}}$

$$x = (-8 - 8\sqrt{3}i)^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1}{4}}\left[cos\left(\frac{\frac{5\pi}{3} + 2\pi k}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{5\pi}{4} + 2\pi k}{2}\right)\right]$$

Con $k = 0, , 1, 2, 3 \rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i, x_2 = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}i, x_3 = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i, x_4 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i.$

Punto 6

Demuestre que:

a) $Log(-ie) = 1 - \frac{\pi}{2}i$
Solución:

$$\begin{aligned} Log(-ie) &= Log(-i) + Log(e) \\ &= Log(e^{i(-\frac{\pi}{2}+2\pi n)}) + 1 \\ &= i(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n) + 1 \end{aligned}$$

Para n=0, obtenemos:

$$Log(-ie) = 1 - \frac{\pi}{2}i$$

b) $Log(1 - i) = \frac{1}{2}ln(2) - \frac{\pi}{4}i$

Solución:

$$\begin{aligned}Log(1-i) &= Log(\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4}+2\pi n)})\\ &= Log(\sqrt{2}) + Log(e^{i(-\frac{\pi}{4}+2\pi n)})\end{aligned}$$

Para n=0, obtenemos:

$$Log(1-i) = \frac{1}{2}ln(2) - \frac{\pi}{4}i$$

c) $Log(e) = 1 + 2n\pi i$
Solución:

$$\begin{aligned}Log(e) &= Log(ee^{i2\pi n})\\ &= Log(e) + Log(e^{i2\pi n})\\ &= 1 + 2n\pi i\end{aligned}$$

d) $Log(i) = (2n + \frac{1}{2})\pi i$
solución:

$$\begin{aligned}Log(i) &= Log(e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi n)})\\ &= i(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)\\ &= (\frac{1}{2} + 2n)\pi i\end{aligned}$$