2019.12.30

- 行変形 ($C_{ij}\cdot$, $D_i(\lambda)\cdot$, $E_{ij}(\lambda)\cdot$)

  消去法の手続きの行列表示.

- 列変形 ($\cdot C_{ij}$, $\cdot D_i(\lambda)$, $\cdot E_{ij}(\lambda)$) は?

  $A \in M_{mn}(k)$ とし,

$$Ax = y \quad \text{——— (1)}$$

を考える。つまり, $A$ は係数行列とする。

ここで, $A$ に列変形を施すとどうなるか?

$X \in \{C_{ij}, D_i(\lambda), E_{ij}(\lambda)\}$ とする。

新たな係数行列 $AX$ (列変形された $A$) で, (1) は以下のように表される。

$$AXX^{-1}x = y \quad \text{——— (2)}$$

(2) から, 左辺の変数が $x$ から $X^{-1}x$ に置き換えられていることが分かる。つまり, 列変形は「変数の置き換え」の行列表示と見なすことができる。

---

$2\times2$ で具体的に考える。

$$X = C_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

とすれば

$$C_{1,2}^{-1} = \frac{1}{0-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

なので

$$C_{1,2}^{-1}x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

→ $C_{1,2}$ は $x_1$ と $x_2$ の入れ替え操作

$X = D_2(\lambda)$ のときは

$$D_2(\lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ よって

$$D_2(\lambda)^{-1} x = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$X = E_{12}(\lambda)$ のときは

$$E_{12}(\lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ よって

$$E_{12}(\lambda)^{-1} x = \begin{pmatrix} x_1 - \lambda x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

従って $D_2(\lambda)$ は $x_1$ を $\frac{1}{\lambda} x_1$ に置き換える操作.

$E_{12}(\lambda)$ は $x_1$ を $x_1 - \lambda x_2$ に置き換える操作.