2019.12.29-30 線型写像の行列表示と基底変換.

$$\begin{tikzcd}
k^n \arrow[rrr, "R(f)"] & & & k^m \arrow[dd, "\psi'\circ\psi^{-1}"] \\
& V \arrow[ul, "\varphi"', "\sim"] \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "\varphi'", "\sim"'] & W \arrow[ur, "\psi", "\sim"'] \arrow[dr, "\psi'", "\sim"'] & \\
k^n \arrow[uu, "\varphi\circ\varphi'^{-1}"] \arrow[rrr, "R'(f)"'] & & & k^m
\end{tikzcd}$$

線型写像と対応する行列は、baseのとり方によって変わる。

(上図の $R(f)$, $R'(f)$ は φ, φ', ψ, ψ' : 同型写像によって変わる。).

では、$R(f)$ と $R'(f)$ はどのように関係するか?
言いかえると、baseによって行列はどのように変わるのか?
以下、$R'(f)$ を行列で表すことにより、これを調べる。

まず上の図により、

$$R'(f) = \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\in$} \\ M_{nn}(k)}}{\psi'\circ\psi^{-1}} \circ R(f) \circ \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\in$} \\ M_{mm}(f).}}{\varphi\circ\varphi'^{-1}}$$

($R'(f)$ は $R(f)$ を左右から2つの行列で挟んだ形).

と表せる。従って以下では

$\{v_1, \dots, v_n\}$ が φ できまる V の base

$\{w_1, \dots, w_m\}$ が ψ できまる W の base.

$\{v'_1, \dots, v'_n\}$ が φ' できまる V の base

$\{w'_1, \dots, w'_m\}$ が ψ' できまる W の base

とし、

$\varphi\circ\varphi'^{-1}$ と $R(f)$ と $\psi'\circ\psi^{-1}$ をそれぞれ行列で表す。

そのために、それぞれが $(e_1, \dots, e_n)$ をどうとばすか見る。

$\varphi \circ \varphi'^{-1}$

$(\varphi \circ \varphi'^{-1})(e_i)$

$= \varphi(\varphi'^{-1}(e_i))$

$= \varphi(v'_i) \quad (\because \varphi'^{-1} : e_i \mapsto v'_i).$

φのdomainはv_iだから、v'_iをv_iで表したい。

$\{v_i\}_{i=1}^n$はVのbaseだから. $\forall i \in [1, n]$について$a_{ij} \in k$とすると

$v'_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i$ 　jについて並べて

$$(v'_1, \ldots, v'_n) = (v_1, \ldots, v_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

従って

$$\varphi(v'_1, \ldots, v'_n) = \varphi\left((v_1, \ldots, v_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\right)$$

$$= (\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \underline{(\varphi \circ \varphi'^{-1})}(e_1, \ldots, e_n) = (e_1, \ldots, e_n) \underline{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}$$

同一視.

$\psi' \circ \psi^{-1}$

$\forall w_i' \in W$ について $w_j' = \sum_{i=1}^{m} b_{ij} w_i$ とすると、$\varphi \circ \varphi'^{-1}$ と同様にして

$$\psi' \circ \psi^{-1}(e_1, \dots, e_m) = (e_1, \dots, e_m)\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix}.$$

同一視.

$R(f)$ $(= \psi \circ f \circ \varphi^{-1})$.

準備

$f(v_j) \in W$ より、基底 w_i によって

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} f_{ij} w_i \quad \text{但し } f_{ij} \in k$$

と表せる。j について並べて

$$(f(v_1), \dots, f(v_n)) = (w_1, \dots, w_m)\begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{m1} & \cdots & f_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
&\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(e_1, \dots, e_n) \\
&= \psi \circ f(v_1, \dots, v_n). \\
&= \psi(f(v_1), \dots, f(v_n)). \\
&= \psi\left((w_1, \dots, w_m)\begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{m1} & \cdots & f_{mn} \end{pmatrix}\right). \\
&= (\psi(w_1), \dots, \psi(w_m))\begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{m1} & \cdots & f_{mn} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= (e_1, \ldots, e_m) \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{m1} & \cdots & f_{mn} \end{pmatrix}.$$

従って

$$R(f)(e_1, \ldots, e_n)$$

$$= \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(e_1, \ldots, e_n)$$

$$= (e_1, \ldots, e_m) \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{m1} & \cdots & f_{mn} \end{pmatrix}.$$

同一視.

ここまでで

$$(\varphi \circ \psi'^{-1})(e_1, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\psi' \circ \psi^{-1}(e_1, \dots, e_m) = (e_1, \dots, e_m)\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix}$$

$$R(f)(e_1, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_m)\begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{m1} & \cdots & f_{mn} \end{pmatrix}$$

と分かった。これらを用いて、$R'(f) : k^n \to k^m$: map は

$$R'(f)(e_1, \dots, e_n)$$

$$= \psi' \circ \psi^{-1} \circ R(f) \circ \varphi \circ \psi'^{-1} (e_1, \dots, e_n).$$

$$= \psi' \circ \psi^{-1} \circ R(f)\left((e_1, \dots, e_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\right).$$

$$= \psi' \circ \psi^{-1}\left(R(f)(e_1), \dots, R(f)(e_n)\right)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \psi' \circ \psi^{-1}\left((e_1, \dots, e_m)\begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nm} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\right).$$

$$= \left(\psi' \circ \psi^{-1}(e_1), \dots, \psi' \circ \psi^{-1}(e_m)\right) \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$= (e_1, \dots, e_m) \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

よって

$$R'(f) = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad \square$$