2020. 1. 15（置換の符号）

$\mathrm{sgn}(\sigma)$ を、互換の個数で定義すると、

σ の、互換の積による表し方によらず互換の偶奇は一定であるか?

という点が示されず残る。

$\longrightarrow$ sgn を異なる方法で定め、符号が置換によって定まることを示す。

Def（符号）.

$$\varepsilon(\sigma) := \prod_{1 \leq k < l \leq n} \frac{x_{\sigma(k)} - x_{\sigma(l)}}{x_k - x_l}$$

$\sigma = (1\ 2\ 3)$ なら、$\sigma = (1\ 2)(1\ 3)$ などと書け、

$\sigma(1) = 2,\ \sigma(2) = 3,\ \sigma(3) = 1$ なので、

$$\varepsilon(\sigma) = \frac{\cancel{x_2 - x_3}}{\cancel{x_1 - x_2}} \times \frac{{}^{-1}\cancel{x_3 - x_1}}{\cancel{x_2 - x_3}} \times \frac{{}^{-1}\cancel{x_2 - x_1}}{\cancel{x_1 - x_3}} = +1$$

かりに、$\sigma = \underbrace{\sigma_1 \cdots \sigma_N}_{\text{それぞれ互換とする}}$ と書けるとして、$\varepsilon(\sigma) = (-1)^N$ となってほしい。

互換の個数.

そのためには、

(i) $\varepsilon(i, j) = -1$ つまり互換の符号が -1 であること.

(ii) $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$ ただし σ と τ は置換

が示されなければならない。

(i) $\varepsilon(i, j) = -1$ の証明.

$i < j$ としても一般性は失われない。

(ア) $k \neq i,\ l \neq j$

(イ) $k = i$ （ウ) $l = j$

(エ) $k = j$. （オ) $l = i$ がありうる.

(ア) $(i,j)(k)=k$, $(i,j)(l)=l$ より、$\varepsilon(i,j)=1$.

(イ)、$k=i$ のとき、$k<l$ なので、$j+1\leqq l\leqq n$.

$x_k - x_l$ としてありうるのは

$x_i - x_{j+1}$, $x_i - x_{j+2}$, …, $x_i - x_j$, …, $x_i - x_n$

(ウ) $l=j$ のとき、$1\leqq k\leqq j-1$ よって

$x_k - x_l$ は

$x_1 - x_j$, …, $x_i - x_j$, …, $x_{j-1} - x_j$

(エ) $k=j$ のとき、$j+1\leqq l\leqq n$ なので

$x_k - x_l$ は

$x_j - x_{j+1}$, …, $x_j - x_n$

(オ) $l=i$ のとき、$1\leqq k\leqq i-1$. よって

$x_k - x_l$ は

$x_1 - x_i$, …, $x_{i-1} - x_i$

被っている部分を除いて、$\varepsilon(i,j)$ の分母は (ア)〜(オ)で書ける。

$$(x_i - x_j)\times\prod_{j+1\leqq l\leqq n}(x_i - x_l)\times\prod_{\substack{1\leqq k\leqq j-1}}(x_k - x_j)\times\prod_{j+1\leqq l\leqq n}(x_j - x_l)\times\prod_{1\leqq k\leqq i-1}(x_k - x_i)$$

$\boxed{k\neq i}$ $\boxed{j-2}$

$$=(-1)^{i-1}\prod_{\substack{1\leqq k\leqq n\\ k\neq i\\ k\neq j}}(x_k - x_i)\times(-1)^{j-2}\prod_{\substack{1\leqq l\leqq n\\ l\neq j\\ l\neq i}}(x_j - x_l)\times(x_i - x_j)\ \cdots(*)$$

これを (i,j) により置換すると、

同一　同一

$$\xmapsto{(i,j)}(-1)^{i-1}\prod_{\substack{1\leqq k\leqq n\\ k\neq i\ k\neq j}}(x_k - x_j)\times(-1)^{j-2}\prod_{\substack{1\leqq l\leqq n\\ l\neq i\\ l\neq j}}(x_i - x_l)\times\underbrace{(x_j - x_i)}$$

範は同じ

(*)と本質的に異なるのはここだけ

$$=(-1)\times(*)$$

従って

$$\varepsilon(i,j) = \prod_{1 \leq k < l \leq n} \frac{x_{(i,j)(k)} - x_{(i,j)(l)}}{x_k - x_l} = -1$$

$\square$.

いま、$\varepsilon(i,j) = -1$ が示された。

つぎに $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\,\varepsilon(\tau)$ を示すが、とりあえずここまで。