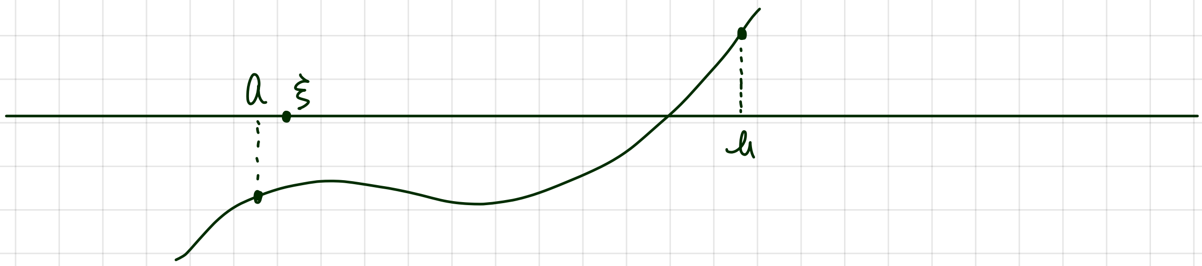
2020.1.1 中間値の定理.

軸をまたぐ関数は軸と交わる。



Thm. $f(x)$: $[a,b]$で連続

かつ $f(a)<0<f(b)$ または $f(a)>0>f(b)$ ならば、あるcがあって

$f(c)=0$ かつ $a<c<b$.

aに十分近いξ、ξの上限cについて考え、$f(c)>0$ あるいは $f(c)<0$ として矛盾を出す。

(証明). $f(a)<0<f(b)$ のとき.

aに十分近いξをとると、

$$x\in[a,\xi) \Rightarrow f(\xi)<0 \qquad \cdots (0).$$

$C=\{\xi \mid (0)\}$ とし、$\sup C = c$ とする。

supの特徴付けより、

$$\forall\delta>0,\ \exists\xi'\in C,\ c-\delta<\xi'<c \qquad \cdots (1)$$

(i) さて、ここで $f(c)>0$ とすると、十分小さいδについては

$\xi_1\in C$ならば (1)より、

$$\forall x\in[c-\delta,c] \Rightarrow f(x)>0 \qquad \cdots (2).$$

が成り立つ。$\xi_1\in[c-\delta,c]$ なので、(1), (2) は矛盾。よって $f(c)>0$でない。
したがって $c<b$.

(ii) $f(c)<0$ とすると、十分小さいδについて

$$\forall x\in[c,c+\delta] \Rightarrow f(x)<0 \qquad \cdots (3)$$

すると、$c<\xi_2$かつ$f(\xi_2)<0$ をみたすξ_2が存在することになるが、
これは $\sup C=c$ に反する。($c<\xi'$かつ$\xi'\in C$なので).

それゆえ、$f(c)<0$でない。

以上から、$a<c<b$ かつ $f(c)=0$ □.