2020.1.17（一般の連立方程式の解のパターン）　長谷川 pp.143〜

任意の $A \in M_{mn}(k)$ に対し、行変形だけによって次の形に変形できる

$$A \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c|cc|c} 1 & & & & O & \\ & \ddots & A' & & & A'' \\ & 1 & & 1 & & \\ O & & & & \ddots & \\ & & & & 1 & \end{array}\right] \quad \text{(階段形)}$$

これを踏まえて、つぎの連立方程式を考える。

$$Ax = y$$

行変形を表す P により、A が階段形になるとすると、

$$PAx = Py$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\left[\begin{array}{cc|c|cc|c} 1 & & & & & \\ & \ddots\ 1 & A' & & & A'' \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots\ 1 & \end{array}\right]}_{C\text{ としよう。}} x = \begin{bmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y'_m \end{bmatrix}$$

C の列のうち $j_1 \cdots j_r$ が基本ベクトルであるとする。

並べかえを表す行列 Q により、

$$CQ = \left[\begin{array}{cc|c} \overbrace{\begin{matrix}1 & & O\\ & \ddots & \\ O & & 1\end{matrix}}^{r} & & a_1 \cdots a_{n-r} \\ \hline O & & O \end{array}\right]$$

$Q^{-1}x = {}^t[x_{j_1} \cdots x_{j_r}, x'_1 \cdots x'_{n-r}]$　となるとする。

このとき、

$$CQQ^{-1}x = \overbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & O & \\ & \ddots & a_1 \cdots a_{n-r} \\ O & 1 & \\ \hline O & & O \end{array}\right]}^{n} \begin{bmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_r} \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_{n-r} \end{bmatrix} = \left.\begin{bmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_r \\ y'_{r+1} \\ \vdots \\ y'_m \end{bmatrix}\right\} m$$

これにより、$Ax=y$ が解をもつのは $y'_{r+1}=\cdots=y'_m=0$ のときである。

従って、拡大係数行列はつぎのようになるから、

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & & a_1 \cdots a_{n-r} & \begin{matrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_r \end{matrix} \\ \hline 0 & & 0 & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right]$$

このことから、$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A|y]$ が分かる。

以上より、次の定理が従う。

定理.

(i) $Ax=y$ が解をもつ

$\iff y'_{r+1}=\cdots=y'_m=0$

$\iff \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A|y]$.

(ii) (i) が成り立つとき、その解は

$$\begin{bmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_r \end{bmatrix} - x'_1 a'_1 - \cdots - x'_{n-r} a_{n-r}$$

$(x'_1, \cdots, x'_{n-r}$ は任意$)$

$\square$.