2020.1.16 (階数) 長谷川 pp.140〜

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+\lambda a & b \\ c+\lambda c & d \end{pmatrix}$$ $\lambda = -1$ とすれば $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ とできる

§8.4 行列の階数

これから示すが、任意の $A \in M_{mn}(k)$ に対し、はき出し法によって以下の形が一意に得られる。

$$\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}^{r} & O \\ O & \begin{matrix} 0 & \\ & \ddots \end{matrix} \end{pmatrix} \quad \cdots (*)$$

この r を A の階数 (rank) といい、$\mathrm{rank}\, A = r$ と書く。
また $(*)$ を A の階数標準形という。

まずは、あらゆる行列に対し標準形が得られることを示す。

定理.

任意の $A \in M_{mn}(k)$ に対し階数標準形が存在する。

(証明).

1) A の $(1,1)$ 成分が 0 でなければ 2) へ。
0 のときは他の、1列目が 0 でない行列を C_{1j} により持ってくる。

2).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

を得る。これに $D(a_{11}^{-1})$ を掛けると a_{11} は 1 になり、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

が得られる。

3) A' に対して同様の変形を行う。すると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A'' & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

が得られる。これを繰り返して、右下の行列が O になったところで終了すればよい。 $\square$.

※ どんな手順で標準形を作っても同じ行列になる。
このことは 9.4 で示される。

(例). $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の階数を求める。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot E_{23}(-1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot E_{41}(-1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\cdot E_{33}(-1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(\frac{1}{2})\cdot} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{D_1(\frac{1}{2})\cdot} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot E_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{D_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ したがってランクは