2019.12.31 次元の定義の well-defined 性.

Def (次元) V : kベクトル空間とする.
$\{v_1, \dots, v_d\}$ が V の基底であるとき, d を V の次元といい, $\dim V = d$ と書く。

この定義には (現段階では) 複数の基底
例えば $\{v_1, \dots, v_d\}$, $\{v'_1, \dots, v'_{d'}\}$ があるとき, 必ず $d = d'$ とはならないのではないか, という疑問の余地がある。
以下で 次元が well-defined であることを示す。

証明 ある V : k-vec sp に対し 2つの基底
$\{v_1, \dots, v_d\}$, $\{v'_1, \dots, v'_{d'}\}$ があるとする。
すると,

ミス

$$v_j = \sum_{i=1}^{d'} a_{ij} v'_i, \quad v'_i = \sum_{k=1}^{d} b_{ki} v_k$$ と一意に表せる。

従って

$$v_j = \sum_{i=1}^{d'} a_{ij} \sum_{k=1}^{d} b_{ki} v_k = \sum_{i=1}^{d'} \sum_{k=1}^{d} a_{ij} b_{ki} v_k$$

また, 明らかに以下が成立する

$$v_j = 0 v_1 + 0 v_2 + \cdots + 1 v_j + \cdots + 0 v_d$$

基底変換をうまくやらないとこのあとの議論ができない.

$$v_i = \sum_{j=1}^{d'} a_{ij} v'_j \quad v'_j = \sum_{k=1}^{d} b_{jk} v_k$$ と表せるので.

$$v_i = \sum_{j=1}^{d'} \sum_{k=1}^{d} a_{ij} b_{jk} v_k \cdots (1)$$ また以下のようにも表せる。

$$v_i = 0 v_1 + 0 v_2 + \cdots + 1 v_i + \cdots + 0 v_d \cdots (2)$$

従って、(1)は k について展開して以下のように書ける。

$$v_j = \underbrace{\sum_{j=1}^{d'} a_{ij} b_{j1}}_{=0} v_1 + \cdots + \underbrace{\sum_{j=1}^{d'} a_{ij} b_{ji}}_{=1} v_i + \cdots + \underbrace{\sum_{j=1}^{d'} a_{ij} b_{id}}_{=0} v_d$$

つまり以下が成立する。

$$\sum_{j=1}^{d'} a_{ij} b_{jk} = \delta_{i,k} \quad \cdots (3)$$

$$v'_j = \sum_{k=1}^{d} b_{jk} v_k \qquad v_k = \sum_{l=1}^{d'} a_{kl} v'_l$$ と表せ、これにより、

$$v'_j = \sum_{k=1}^{d} \sum_{l=1}^{d'} b_{jk} a_{kl} v'_l$$ 同様の議論により、

$$\sum_{k=1}^{d} b_{jk} a_{kl} = \delta_{j,l} \quad \cdots (4).$$

$i \in [1, d]$, $j \in [1, d']$ として、$A = (a_{ij})$ $B = (b_{ji})$ とすれば

(3), (4) は
$$AB = E$$
$$BA = E$$

と表せる。

(i) $d > d'$ のとき、

B は、はき出し方によって次のように変形できる。

$$B \longrightarrow PBQ = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & O \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ O & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$d > d'$ より、d 列はすべて 0 である。それゆえ

$$PBQ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbb{0}$$

行変形Pは正則なので、左からPを掛けて

$$BQ\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\mathbb{0}$$

左からAを掛けて

$$(AB)Q\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\mathbb{0} \iff Q\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\mathbb{0}$$

Qも正則なので、$\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\mathbb{0}$

これは矛盾であるから、 $d<d'$ は成り立たない。

(ii) $d'>d$ のとき、

$$A \longrightarrow PAQ=\begin{pmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & O & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & O & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}.$$

$d'>d$ より、d' 列はすべて0。従って

$$PAQ\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\mathbb{0}$$

(i)と同様にして矛盾。

よって $d'>d$ は成り立たない。

(i), (ii) より $d=d'$。以上により、基底のとり方によらず V の次元は1通りに定まるので、次元は well-defined である $\square$.