2020. 1. 16（置換の符号 つづき）

・前回の復習

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \le k < l \le n} \frac{x_{\sigma(k)} - x_{\sigma(l)}}{x_k - x_l}$$

と $\varepsilon(\cdot)$ を定義して、これが $\mathrm{sgn}(\sigma)$ になることを示したい。

そのためには、互換 (i, j) に対して $\varepsilon(i, j) = -1$ であることと、

$\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$ を示せばよかった。

前回は $\varepsilon(i, j)$ を示した。

補題. $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$ ただし $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$

（証明） $f(x_1, \dots, x_n)$ を $f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ と置き換えるとき、

後者を σf と書くことにする。

$\prod_{k<l} (x_k - x_l) = D$ とすると、$\varepsilon(\sigma)$ とは $\sigma D / D$ のことで

あるから、

$$\varepsilon(\sigma) = \frac{\sigma D}{D}$$

$$\Leftrightarrow \sigma D = D\varepsilon(\sigma) \qquad \cdots (*)$$

また、

$$\sigma\tau(f) = f(x_{\sigma\tau(1)}, \dots, x_{\sigma\tau(n)})$$

$$= f(x_{\sigma(\tau(1))}, \dots, x_{\sigma(\tau(n))}) = \sigma(\tau(f))$$

したがって、

$\sigma\tau(f) = \sigma(\tau(f))$ が成り立つ。これにより、

$\underline{D\varepsilon(\sigma\tau)}$

$= \sigma\tau D = \sigma(\tau D) = \sigma(D\varepsilon(\tau)) = \underline{D\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)}$. $\square$

$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_N$ （$\sigma_1, \dots, \sigma_N$ は互換）

とすると、

$\varepsilon(\sigma_1) = \varepsilon(\sigma_2) = \cdots = \varepsilon(\sigma_N) = -1.$ （互換の ε は -1）

$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma_1) \cdots \varepsilon(\sigma_N)$ （補題）.

より、$\varepsilon(\sigma) = (-1)^N = \mathrm{sgn}(\sigma).$

$\varepsilon(\cdot)$ の定義は、σ を互換の積で表す その表し方に一切

よらず、$\varepsilon(\cdot) = \mathrm{sgn}(\cdot)$ とあわせて、

$\mathrm{sgn}(\cdot)$ も、互換の積で表したときの表し方と無関係に定まる。