UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

EXAMEN: Tarea 2 (parte I y II)

PROFESORA: Karina G. Buendía y José Dosal

MATERIA: Conjuntos y lógica

NOMBRE DEL ALUMNE: ____________________

Ejercicio 1 Sea $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ una función. Demuestra que $F : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to \mathcal{P}(\mathcal{Y})$ y $G : \mathcal{P}(\mathcal{Y}) \to \mathcal{P}(\mathcal{X})$ definidas como: $F(A) = f(A)$ y $G(A) = f^{-1}(A)$, son funciones.

Ejercicio 2 Sean $f : A \to C$ y $g : A \to B$ funciones. Demostrar que existe una función $h : B \to C$ tal que $f = h \circ g$ si y solo si para cada $x,\ y \in A$ $g(x) = g(y)$ implica $f(x) = f(y)$.

Ejercicio 3 Sean $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$ conjuntos. Para cualquier conjunto C y cualesquiera funciones $f_1 : C \to A$ y $f_2 : C \to B$ existe una única función $f : C \to A \times B$ tal que $f_1 = p_1 \circ f$ y $f_2 = p_2 \circ f$. (Las funciones f_1 y f_2 se denominan funciones coordenadas)

Ejercicio 4 Demuestra que si $I \neq \emptyset$ y algún $A_\alpha = \emptyset$ si y solo si $\prod_{\alpha \in I} A_\alpha = \emptyset$.

Ejercicio 5 Sea $I \neq \emptyset$ un conjunto de índices. Considera dos familias indizadas $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ y $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Demuestra lo siguiente:

1. Si $A_\alpha \subseteq B_\alpha$ para cada $\alpha \in I$, entonces
$$\prod_{\alpha \in I} A_\alpha \subseteq \prod_{\alpha \in I} B_\alpha$$
.

2. El recíproco de (a) se cumple si $\prod_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset$

Ejercicio 6 Sea la relación E en $\mathcal{R}^2$ definida por $E = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) |\ y_1 - x_1^2 = y_2 - x_2^2\}$. Demuestre que E es de equivalencia y describa las clases de equivalencia.

Ejercicio 7 Sea R una relación reflexiva y transitiva. Defina $\approx$ en A por $a \approx b$ si y sólo si $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$.

(a) Muestre que $\approx$ es una relación de equivalencia en A.

(b) Si $\preceq$ se define por $[a] \preceq [b]$ si y sólo si $(a, b) \in R$; muestre que $(A/\approx, \preceq)$ es un conjunto ordenado.

Ejercicio 8 Sea R un orden en A. Pruebe que R^{-1} es también un orden en A (denominado dual de R) y para $B \subseteq A$ se cumple que

(a) a es el mínimo elemento de B en R^{-1} si y sólo si a es el máximo elemento de B en R.

(b) Similarmente para minimal y maximal, y supremo e ínfimo.

Ejercicio 9 Muestre que h es un isomorfismo entre $(A, \leq)$ y $(B, \preceq)$ si y sólo si h y h^{-1} preservan el orden.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

EXAMEN: Tarea 2 (parte I y II)

PROFESORA: Karina G. Buendía y José Dosal

MATERIA: Conjuntos y lógica

NOMBRE DEL ALUMNE: ________________

Ejercicio 10 Sea A ordenado por $\leq$, y $B \subseteq A$. Demuestra lo siguiente:

(a) B tiene a lo más un elemento mínimo.

(b) El elemento mínimo de B (si existe) es también minimal.

(c) Si B es una cadena, entonces todo elemento minimal de B es también un mínimo.