UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

EXAMEN: Tarea 1

PROFESORA: Karina G. Buendía y José Dosal

MATERIA: Conjuntos y lógica

NOMBRE DEL ALUMNE:

Ejercicio 1 Demuestra que el conjunto de todos los x tales que $x \in A$ y $x \notin B$ existe y que es único.

Solución 1 Por el axioma de comprensión tenemos que $P(x) := x \notin B$. Para cualquier conjunto A hay un conjunto B, tal que si $x \in B \Leftrightarrow x \in A$ y $P(x)$. Construimos el conjunto $C = \{x \in A | x \notin B\}$. Supongamos que existe un $C' = \{x \in A | x \notin B\}$. Por el axioma de extensión, debemos mostrar que $C \subseteq C'$ y $C' \subseteq C$. Sea $x \in C$ si y solo si $x \in A$ y $x \notin B$ pero esta propiedad es la que cumplen los elementos de C'. Por lo tanto $C = C'$.

Ejercicio 2 Demuestre que para cualquier conjunto X hay algún $a \notin X$.

Solución 2 La prueba es por contradicción. Supongamos que existe, para todo a elemento $a \in X$ (lo contiene todo). Por el axioma de comprensión, tenemos un subconjunto de X, digamos $A = \{a | P(x)\}$ donde $P(x) := x \notin x$ Este conjunto es igual al de la paradoja de Russel. Cuando nos preguntamos si $A \in A$ nos lleva a una contradicción. Por lo que suponer que existe tal conjunto no puede suceder.

Ejercicio 3 Demuestre que $A \subseteq \{A\}$ si y solo si $A = \emptyset$.

Solución 3 Para la implicación $A = \emptyset$, entonces $A \subseteq \{A\}$. Es trivial. Para la dirección contraria tenemos que demostrarlo por contradicción. Supongamos que $A \subseteq \{A\}$ y $A \neq \emptyset$, entonces existe $x \in A$ tal que $X \neq A$. Como $\{A\}$ tiene como único elemento el conjunto A y $X \neq A$, entonces como $x \in A$ y $x \notin \{A\}$. Por lo tanto $A \nsubseteq \{A\}$.

Ejercicio 4 Demuestre que si $A \subseteq B$, entonces $P(A) \subseteq P(B)$

Solución 4 Sea $X \in P(A)$, entonces $X \subseteq A$ y por hipótesis $A \subseteq B$ tenemos que $X \subseteq B$. Por lo tanto, $X \in P(B)$.

Ejercicio 5 Demuestre que $A \subseteq C$ si y solo si $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$

Solución 5 Para la demostras la idea tenemos que demostral la doble contención. Primero demostramos que $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C$. Sea $x \in A \cup (B \cap C)$, entonces $x \in A$ o $x \in (B \cap C)$. Caso (1) supongamos que $x \in A$ y por hipótesis $A \subseteq C$, por lo que $x \in C$. Ademmás, como $x \in A$, entonces $X \in A \cup B$. Por lo tanto $x \in (A \cup B) \cap C$. La otra contención se demuestra de manera similar. Para el regreso. Sea $x \in A$, entonces $x \in A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$. Así, $x \in (A \cup B)$ y $x \in C$.

Ejercicio 6 Si E es un conjunto que contiene a $A \cup B$, entonces:

a) $E \backslash (E \backslash A) = A$

b) $E \backslash \emptyset = E, E \backslash E = \emptyset$.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

EXAMEN: Tarea 1

PROFESORA: Karina G. Buendía y José Dosal

MATERIA: Conjuntos y lógica

NOMBRE DEL ALUMNE:

Solución 6

a) Demostramos la doble contención. Por demostrar que $E\backslash(E\backslash A) \subseteq A$. Sea $x \in E\backslash(E\backslash A)$, entonces $x \in E$ y $x \notin (E\backslash A)$. Lo anterior nos dice que $x \in E$ y $x \notin E$ o $x \in A$. Por tanto $x \in A$. Para el regreso tenemos que demostrar que $x \in E\backslash(E\backslash A)$. Sea $x \in A$, entonces $x \notin E$ o $x \in A$. Así $x \notin E\backslash A$. Además, $A \subset A \cup B \subset E$ por hipótesis, entonces $x \in E$. Por lo tanto $x \in E\backslash(E\backslash A)$.

b)

1. Por demostrar que $E\backslash\emptyset = E$. Primero demostraremos que $E\backslash\emptyset \subseteq E$, entonces $x \in E$ y $x \notin \emptyset$. Por lo tanto $x \in E$. Tenemos que demostrar que $E \subseteq E\backslash\emptyset$, pero esta contención es trivial.
2. Por demostrar que $E\backslash E = \emptyset$. Sea $x \in E\backslash E$, $x \in E$ y $x \notin E$. No hay elementos que cumplan lo anterior. Por lo tanto es vacio.

Ejercicio 7 Para todo conjunto A, B y C se cumple lo siguiente:

a) $A \triangle \emptyset = A$

b) $A \triangle A = \emptyset$

c) Si $A \triangle B = A \triangle C$, entonces $B = C$

Ejercicio 8 Sea F una familia de conjuntos. Pruebe que $\bigcup F = \emptyset$ si y solo si $F = \emptyset$ o $A \in F$ implica $A = \emptyset$.

Ejercicio 9 Demuestre que la unión y la intersección generalizada satisface la siguiente forma de asociación:

a) $\bigcup\{A_\alpha | \alpha \in \bigcup I\} = \bigcup_{I \in I}(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)$

b) $\bigcap\{A_\alpha | \alpha \in \bigcap I\} = \bigcap_{I \in I}(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha)$

Ejercicio 10 Demuestra lo siguiente:

a) $\bigcup_\alpha$ distribuye sobre $\cap$ y $\bigcup_\alpha$ distribuye sobre $\cup$,

$$[\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha] \cup [\bigcap_{\beta \in J} B_\beta] = \bigcap\{A_\alpha \cup B_\beta | (\alpha, \beta) \in I \times J\}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

EXAMEN: Tarea 1

PROFESORA: Karina G. Buendía y José Dosal

MATERIA: Conjuntos y lógica

NOMBRE DEL ALUMNE:

b) Si el complemento es tomado respecto a X, entonces

$$X \setminus \bigcap \{A_\alpha | \alpha \in I\} = \bigcup \{X \setminus A_\alpha | \alpha \in I\}$$

c) $\bigcup_\alpha$ y $\bigcap_\alpha$ distribuyen sobre el producto cartesiano

$$[\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha] \times [\bigcap_{\beta \in J} B_\beta] = \bigcap \{A_\alpha \times B_\beta | (\alpha, \beta) \in I \times J\}$$