UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

EXAMEN: Tarea 2 (parte I)

PROFESORA: Karina G. Buendía y José Dosal

MATERIA: Conjuntos y lógica

NOMBRE DEL ALUMNE: ____________________

Ejercicio 1 Sea $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ una función. Demuestra que $F : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to \mathcal{P}(\mathcal{Y})$ y $G : \mathcal{P}(\mathcal{Y}) \to \mathcal{P}(\mathcal{X})$ definidas como: $F(A) = f(A)$ y $G(A) = f^{-1}(A)$, son funciones.

Solución 1 Sean $(A, f(A))$ y $(B, f(B))$ en F. Por demostrar que $f(A) = f(B)$. Supongamos que $f(A) \neq f(B)$, entonces $f(B) \backslash f(A) \neq \emptyset$, es decir, existe $y \in f(B) \backslash f(A)$. Por lo anterior, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$, es decir $y \in f(A)$. Por lo tanto $f(A) = f(B)$

Ejercicio 2 Sean $f : A \to C$ y $g : A \to B$ funciones. Demostrar que existe una función $h : B \to C$ tal que $f = h \circ g$ si y solo si para cada $x,\ y \in A$ $g(x) = g(y)$ implica $f(x) = f(y)$.

Solución 2 **(⇒)** Supongamos que existe una función $h : B \to C$ tal que $f = h \circ g$. Por demostrar que para cualesquiera $x, y \in A$, si $g(x) = g(y)$, entonces $f(x) = f(y)$. Sean $x, y \in A$ tales que $g(x) = g(y)$,

$$f(x) = (h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(g(y)) = (h \circ g)(y) = f(y)$$

Dado que $g(x) = g(y)$ y h es función,

$$h(g(x)) = h(g(y))$$

Por lo tanto $f(x) = f(y)$.

(⇐) Supongamos que para todo $x, y \in A$ tenemos que $g(x) = g(y) \implies f(x) = f(y)$ es cierta. Construyamos una función $h : B \to C$ tal que $f = h \circ g$. Sea h definida para cualquier $b \in B$:

1. Si $b \in \mathrm{Im}(g)$, entonces existe al menos un $a \in A$ tal que $g(a) = b$. Para el cual definimos $h(b) = f(a)$. Si existiera otro elemento $a' \in A$ tal que $g(a') = b$, entonces tendríamos $g(a) = g(a')$. Por hipótesis, esto implica que $f(a) = f(a')$. Por lo tanto, el valor $h(b)$ es único.

2. Si $b \notin \mathrm{Im}(g)$, entonces no existe ningún $a \in A$ tal que $g(a) = b$. Así, $h(b) = c_0$. Escogemos un elemento fijo $c_0 \in C$.

Ejercicio 3 Sean $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$ conjuntos. Para cualquier conjunto C y cualesquiera funciones $f_1 : C \to A$ y $f_2 : C \to B$ existe una única función $f : C \to A \times B$ tal que $f_1 = p_1 \circ f$ y $f_2 = p_2 \circ f$. (Las funciones f_1 y f_2 se denominan funciones coordenadas)

Solución 3 $\forall c \in C$ se tiene que $f_1(c) \in A$ y $f_2(c) \in B$. Definimos a $f(c) = (f_1(c), f_2(c))$. Es claro que es función ya que la pareja $(f_1(c), f_2(c))$ es única. Por demostrar que f cumple las dos propiedades.

1. $\forall c \in C$ se tiene que

$$(p_1 \circ f)(c) = p_1(f(c)) = p_1(f_1(c), f_2(c)) = f_1(c)$$

   Por lo tanto, $p_1 \circ f = f_1$.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

EXAMEN: Tarea 2 (parte I)

PROFESORA: Karina G. Buendía y José Dosal

MATERIA: Conjuntos y lógica

NOMBRE DEL ALUMNE:

2. $\forall c \in C$ se tiene que

$$(p_2 \circ f)(c) = p_2(f(c)) = p_2(f_1(c), f_2(c)) = f_2(c)$$

   Por lo tanto, $p_2 \circ f = f_2$.

Ejercicio 4 Demuestra que si $I \neq \emptyset$ y algún $A_\alpha = \emptyset$ si y solo si $\prod_{\alpha \in I} A_\alpha = \emptyset$.

Ejercicio 5 Sea $I \neq \emptyset$ un conjunto de índices. Considera dos familias indizadas $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ y $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Demuestra lo siguiente:

1. Si $A_\alpha \subseteq B_\alpha$ para cada $\alpha \in I$, entonces

$$\prod_{\alpha \in I} A_\alpha \subseteq \prod_{\alpha \in I} B_\alpha$$

   .

2. El recíproco de (a) se cumple si $\prod_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset$