Capítulo 1

Proposiciones

La primera parte de la lógica clásica es la lógica proposicional. Sólo haremos una revisión superficial de este tema ya que será estudiado con más detalle y de forma algebraica en la sección 4.5.

1.1. Proposiciones

El lenguaje que describiremos es bastante simple pero, a pesar de no ser suficientemente expresivo para hablar de objetos matemáticos como grupos o espacios vectoriales, será capaz de codificar una versión idealizada de las reglas básicas que rigen el razonamiento matemático.

La idea intuitiva de qué debe ser una proposición es algo que pueda ser juzgado de verdadero o falso. Por ejemplo, "hoy es lunes" es una proposición, pero "buenos días" no lo es. Otros ejemplos de proposiciones son $x \leq y \wedge y \leq z \implies x \leq z$ y $\forall n \in \mathbb{N}(n \text{ es par})$, mientras que $3x^2 - 5x + 2$ o $e^{i\pi}$ no lo son.

Con esta intuición damos la definición de que es un lenguaje proposicional sin decir explícitamente qué es una proposición.

Definición 1.1. Un *lenguaje proposicional* consta de un conjunto $\mathrm{Prop} = \{P, Q, \dots\}$ de *letras proposicionales* y de símbolos lógicos $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\to$ y $\leftrightarrow$ llamados conjunción, disyunción, negación, condicional y bicondicional, respectivamente.

Las letras proposicionales son las proposiciones básicas a partir de las cuales se construye el resto.

Definición 1.2. Una *proposición*, o fórmula proposicional, es una de las siguientes expresiones:

1. Una letra proposicional es una proposición,

2. Si α y β son proposiciones entonces $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\neg\alpha$, $\alpha \to \beta$ y $\alpha \leftrightarrow \beta$ son proposiciones.

En otras palabras, los conectivos lógicos son operaciones con dominio Prop o Prop $\times$ Prop y el conjunto de proposiciones es el resultado de cerrar al conjunto Prop bajo dichas operaciones.

Como la definición 1.2 siempre es igual sin importar el conjunto de letras proposicionales con el que se empiece, entonces la diferencia entre conjuntos de proposiciones está en sus letras proposicionales. Denotaremos con $\mathrm{Prop}_{\mathrm{Prop}}$ al conjunto de proposiciones. Cuando el conjunto de proposiciones esté claro omitiremos el subíndice y haremos una distinción en la notación: las letras proposicionales se denotarán con P, Q, R, ...y una proposición general estará denotada con $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Para nosotros lo más importante será determinar cuando una proposición es verdadera o falsa. Para esto necesitaremos empezar suponiendo el valor de verdad de las letras proposicionales, es decir, supondremos que existe una función $v\colon \mathrm{Prop} \to 2$, donde $2 = \{0, 1\}$ y Prop es un conjunto arbitrario (de cualquier tamaño) de símbolos que consideramos letras proposicionales.

Definición 1.3. Una *evaluación* es una función $v\colon \mathrm{Prop} \to 2$ definida recursivamente de la siguiente manera:

1. $v(\alpha \wedge \beta) = v(\alpha) \cdot v(\beta)$,

2. $v(\alpha \vee \beta) = \text{máx}\{v(\alpha), v(\beta)\}$,

3. $v(\neg\alpha) = 1 - v(\alpha)$,

4. $v(\alpha \to \beta) = \text{máx}\{1 - v(\alpha), v(\beta)\}$,

5. $v(\alpha \leftrightarrow \beta) = \text{máx}\{1 - v(\alpha), v(\beta)\} \cdot \text{máx}\{1 - v(\beta), v(\alpha)\}$.

De la definición es claro que, para cualquier evaluación, tenemos las siguientes relaciones

$$v(\alpha \to \beta) = v(\neg\alpha \vee \beta) \qquad v(\alpha \leftrightarrow \beta) = v(\alpha \to \beta) \cdot v(\beta \to \alpha)$$

La primera sugiere que el símbolo $\to$ puede ser definido con $\neg$ y $\vee$. La segunda, que $\leftrightarrow$ se puede definir con $\wedge$ y $\to$.

Además de estas igualdades aparecen algunas desigualdades, por ejemplo $v(\alpha \wedge \beta) \leq v(\alpha) \leq v(\alpha \vee \beta)$. Estas observaciones sugieren la existencia de relaciones entre proposiciones.

Definición 1.4. Sean $\alpha, \beta \in$ Prop, diremos que β es *consecuencia lógica* de α si $v(\alpha) \leq v(\beta)$ para toda asignación. Cuando esto suceda escribiremos $\alpha \models \beta$. Si $v(\alpha) = v(\beta)$ para toda asignación diremos que α y β son *equivalentes* y escribiremos $\alpha \equiv \beta$.

Addendum 1

Un ejemplo de equivalencia lógica, que además muestra una parte clásica de la lógica que estamos haciendo, es $\alpha \equiv \neg\neg\alpha$:

$$v(\neg\neg\alpha) = 1 - v(\neg\alpha) = 1 - (1 - v(\alpha)) = v(\alpha).$$

Las observaciones de arriba ahora se pueden escribir como $(\alpha \to \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \beta)$ o como $\alpha \wedge \beta \models \alpha$. El conjunto de símbolos lógicos puede ser reducido a $\{\wedge, \vee, \neg\}$ gracias a los comentarios anteriores. Una pregunta es si podemos reducir aún más este conjunto.

Proposición 1.5 (Leyes de DeMorgan)**.** *Sean* $\alpha, \beta \in$ Prop*, entonces*

1. $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$
2. $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$.

Demostración. Sólo veremos la primer equivalencia. Recordemos que una evaluación $v :$ Prop $\to 2$ hace verdadera a $\neg\alpha \vee \neg\beta$ exactamente cuando $v(\neg\alpha) = 1$ o $v(\neg\beta) = 1$ y esto último sucede cuando $v(\alpha) = 0$ o $v(\beta) = 0$. Ahora consideramos las siguientes igualdades

$$v(\neg(\alpha \wedge \beta)) = 1 - v(\alpha \wedge \beta) = 1 - (v(\alpha) \cdot v(\beta))$$

Por lo que $v(\neg(\alpha \wedge \beta)) = 1$ cuando el producto $v(\alpha) \cdot v(\beta)$ es cero, que sucede cuando $v(\alpha) = 0$ o $v(\beta) = 0$. De lo anterior concluimos que $v(\neg(\alpha \wedge \beta)) = v(\neg\alpha \vee \neg\beta)$. $\square$

Como la definición de evaluación es recursiva, entonces, al valuar una proposición sólo se usará el valor de las letras proposicionales que aparecen en ella.

Proposición 1.6. *Sean* $P_1, \ldots, P_n$ *las letras proposicionales que aparecen en* γ*. Si* $v, v' :$ Prop $\to 2$ *son tales que* $v(P_i) = v'(P_i)$ *para toda* $1 \leq i \leq n$*, entonces* $v(\gamma) = v'(\gamma)$.

Demostración. Como las definiciones de proposición y evaluación fueron hechas de manera recursiva, entonces la demostración debe ser por inducción.

Por hipótesis sabemos que si γ es una letra proposicional, entonces $v(\gamma) = v'(\gamma)$. Si $\gamma = \alpha \wedge \beta$ y suponemos que $v(\alpha) = v'(\alpha)$ y $v(\beta) = v'(\beta)$, entonces por el punto 1 de la definición 1.3 se tiene que $v(\gamma) = v'(\gamma)$. El resto de los conectivos se demuestran de forma similar y omitimos los detalles. □

Definición 1.7. Sea α una proposición. La *tabla de verdad* de α tiene como renglones $v(\alpha)$ para toda $v\colon \operatorname{Prop} \to 2$.

Si el conjunto de letras proposicionales Prop es infinito, entonces la tabla de verdad de toda proposición α tendría una cantidad infinita de renglones. Por la proposición 1.6 es suficiente considerar las valuaciones que difieren en alguna letra proposicional que aparece en α, que es un conjunto finito.

Por ejemplo si consideramos la proposición $P \to (P \wedge Q)$, su tabla de verdad es la siguiente

P	Q	P	$\to($	P	$\wedge$	$Q\,)$
1	1	1	**1**	1	$\mathbb{1}$	1
1	0	1	**0**	1	$\mathbb{0}$	0
0	1	0	**1**	0	$\mathbb{0}$	1
0	0	0	**1**	0	$\mathbb{0}$	0

donde primero se obtiene el valor de $P \wedge Q$, que es el valor en "dobles" en la tabla, luego se obtiene el valor de la implicación y por tanto de la proposición como se muestra con los números en negritas en la tabla.

La utilidad de estas tablas es tener un método simple, incluso algorítmico, para determinar que evaluaciones le dan valor 1 o 0 a una proposición dada.

En una tabla de verdad es fácil identificar tres tipos de proposición, la que el resultado tiene una columna de 1, las que tiene una columna de 0 y las que tienen una columna de 1 y 0. Estos tres tipos de proposición reciben nombres espaciales.

Definición 1.8. Una proposición α es una *tautología* si $v(\alpha) = 1$ para toda $v\colon \operatorname{Prop} \to 2$, se llama *contradicción* si $v(\alpha) = 0$ para toda $v\colon \operatorname{Prop} \to 2$ y en otro caso le llamaremos *contingente*.

1.2. Algunos resultados

Ahora veremos los dos resultados más importantes de este capítulo. No haremos su demostración ya que haremos su demostración en álgebras de Boole, ver sección 4.5. Sin embargo, daremos una idea de cómo se demuestran para apreciar la eficiencia del método algebraico.