



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

EXAMEN: Tarea 3

PROFESORA: Karina García Buendía y José Dosal

MATERIA: Conjuntos y lógica

NOMBRE DEL ALUMNE: _____

1 | Ejercicios de lógica

Ejercicio 1 Demuestra que si $\Gamma \vdash \alpha$ entonces existe un subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$ tal que $\Delta \vdash \alpha$.

Solución 1 Si $\Gamma \vdash \alpha$ entonces existe una sucesión finita de fórmulas $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ que satisfacen las condiciones de la definición ???. Consideramos $\Delta = \Gamma \cap \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Notamos que Δ es un conjunto finito y que $\Delta \vdash \alpha$. Lo último es porque la misma lista finita $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ es una deducción de α a partir de Δ .

Ejercicio 2 Demuestra que la cerradura deductiva es un operador de cerradura, es decir,

- a) $\Gamma \subseteq \bar{\Gamma}$,
- b) si $\Delta \subseteq \Gamma$ entonces $\bar{\Delta} \subseteq \bar{\Gamma}$,
- c) $\bar{\bar{\Gamma}} = \bar{\Gamma}$

Ejercicio 3 Considera el alfabeto $\mathcal{A} = \{a, b, \circ\}$, la definición de fórmula dada por $\Phi = \{\alpha \in \text{Exp}(\mathcal{A}) \mid \alpha \text{ empieza con } a\}$ y la regla de inferencia

$$R : \frac{A, B}{A \circ B}.$$

Con esto definimos el lenguaje $\mathcal{L} = (\mathcal{A}, \Phi)$ y al sistema formal $\text{SF} = (\mathcal{L}, \{R\})$. Sea $T = \{\alpha \mid \alpha \text{ no tiene ocurrencias de } \circ\}$.

- a) Demuestra que T es correcta y no completa respecto a “no tener b después de cada \circ ”.
- b) Muestra que T es completa y no correcta respecto a “tener aa después de cada \circ ”.

Ejercicio 4 Considera el sistema formal dado por lo siguiente: el alfabeto es $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$, el conjunto de fórmulas es $\Phi = \{\alpha \in \text{Exp}(\mathcal{A}) \mid \alpha \text{ empieza con } a\}$ con las reglas de inferencia siguientes

$$R_1 : \frac{axb}{axbc} \quad R_2 : \frac{ax}{axx} \quad R_3 : \frac{axbbby}{axcy} \quad R_4 : \frac{axccy}{axy},$$

donde x y y representan sucesiones finitas de símbolos de \mathcal{A} . Considera $\Gamma = \{ab\}$ y demuestra lo siguiente:

- a) $\Gamma \vdash abcc$,
- b) $\Gamma \vdash acbbc$,
- c) ¿es posible obtener $\Gamma \vdash ac$?



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

EXAMEN: Tarea 3

PROFESORA: Karina García Buendía y José Dosal

MATERIA: Conjuntos y lógica

NOMBRE DEL ALUMNE: _____

Ejercicio 5 Demuestra que $\{\neg, \wedge\}$ es un conjunto mínimo de conectivos, es decir, que el resto de conectivos se pueden definir en términos de ellos dos. También muestra que $\{\neg, \iff\}$ y $\{\vee, \wedge\}$ no son conjuntos mínimos de conectivos, es decir, hay al menos un conectivo que no se puede definir usando sólo los conectivos de cada conjunto.

Ejercicio 6 Demuestra que para cada fórmula α y β se sigue:

1. $\vdash \neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
2. $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$

Ejercicio 7 Usa el teorema de las “primas” para demostrar que de la deducción $\{\alpha, \neg\beta\} \vdash (\neg\alpha \rightarrow \beta)$, con $\gamma \equiv (\neg\alpha \rightarrow \beta)$, se puede demostrar que $\{\alpha', \beta'\} \vdash \gamma'$.

Ejercicio 8 Decimos que una teoría T es consistente si existe una fórmula α tal que $T \not\vdash \alpha$. Demuestra que el cálculo de proposiciones es consistente.