UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

EXAMEN: Tarea 3

PROFESORA: Karina García Buendía y José Dosal

MATERIA: Conjuntos y lógica

NOMBRE DEL ALUMNE:

1 | Ejercicios de lógica

Ejercicio 1 Demuestra que si $\Gamma \vdash \alpha$ entonces existe un subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$ tal que $\Delta \vdash \alpha$.

Solución 1 Si $\Gamma \vdash \alpha$ entonces existe una sucesión finita de fórmulas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ que satisfacen las condiciones de la definición **??**. Consideramos $\Delta = \Gamma \cap \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Notamos que Δ es un conjunto finito y que $\Delta \vdash \alpha$. Lo último es porque la misma lista finita $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ es una deducción de α a partir de Δ.

Ejercicio 2 Demuestra que la cerradura deductiva es un operador de cerradura, es decir,

a) $\Gamma \subseteq \overline{\Gamma}$,

b) si $\Delta \subseteq \Gamma$ entonces $\overline{\Delta} \subseteq \overline{\Gamma}$,

c) $\overline{\overline{\Gamma}} = \overline{\Gamma}$

Ejercicio 3 Considera el alfabeto $\mathcal{A} = \{a, b, \circ\}$, la definición de fórmula dada por $\Phi = \{\alpha \in \operatorname{Exp}(\mathcal{A}) \mid \alpha \text{ empieza con } a\}$ y la regla de inferencia

$$R : \frac{A, B}{A \circ B}.$$

Con esto definimos el lenguaje $\mathcal{L} = (\mathcal{A}, \Phi)$ y al sistema formal $\mathrm{SF} = (\mathcal{L}, \{R\})$. Sea $T = \{\alpha | \alpha \text{ no tiene ocurrencias de } \circ\}$.

a) Demuestra que T es correcta y no completa respecto a "no tener b después de cada $\circ$".

b) Muestra que T es completa y no correcta respecto a "tener aa después de cada $\circ$".

Ejercicio 4 Considera el sistema formal dado por lo siguiente: el alfabeto es $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$, el conjunto de fórmulas es $\Phi = \{\alpha \in \operatorname{Exp}(\mathcal{A}) \mid \alpha \text{ empieza con } a\}$ con las reglas de inferencia siguientes

$$R_1 : \frac{axb}{axbc} \quad R_2 : \frac{ax}{axx} \quad R_3 : \frac{axbbby}{axcy} \quad R_4 : \frac{axccy}{axy},$$

donde x y y representan sucesiones finitas de símbolos de $\mathcal{A}$. Considera $\Gamma = \{ab\}$ y demuestra lo siguiente:

a) $\Gamma \vdash abcc$,

b) $\Gamma \vdash acbbc$,

c) ¿es posible obtener $\Gamma \vdash ac$?

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

EXAMEN: Tarea 3

PROFESORA: Karina García Buendía y José Dosal

MATERIA: Conjuntos y lógica

NOMBRE DEL ALUMNE: ____________________

Ejercicio 5 Demuestra que $\{\neg,\ \wedge\}$ es un conjunto mínimo de conectivos, es decir, que el resto de conectivos se pueden definir en términos de ellos dos. También muestra que $\{\neg,\ \iff\}$ y $\{\vee,\ \wedge\}$ no son conjuntos mínimos de conectivos, es decir, hay al menos un conectivo que no se puede definir usando sólo los conectivos de cada conjunto.

Ejercicio 6 Usa el teorema de las "primas" para demostrar que de la deducción $\{\alpha,\ \neg\beta\} \vdash (\neg\alpha \to \beta)$, con $\gamma \equiv (\neg\alpha \to \beta)$, se puede demostrar que $\{\alpha',\ \beta'\} \vdash \gamma'$.

Ejercicio 7 Decimos que una teoría T es consistente si existe una fórmula α tal que $T \nvdash \alpha$. Demuestra que el cálculo de proposiciones es consistente.

Ejercicio 8 Realiza las siguientes deducciones en el cálculo de proposiciones.

a) $\vdash \neg\neg\beta \to \beta$

b) $\vdash \beta \to \neg\neg\beta$

c)

Solución 8 a)

No.	Fórmula	Justificación
1	$\neg\neg\beta$	Premisa por el TD)
2	$\neg\beta \to \neg\beta$	Teorema ($\vdash P \to P$)
3	$(\neg\beta \to \neg\beta) \to ((\neg\beta \to \beta) \to \beta)$	Axioma 3
4	$(\neg\beta \to \beta) \to \beta$	MP (2, 3)
5	$\neg\neg\beta \to (\neg\beta \to \neg\neg\beta)$	Axioma 1)
6	$\neg\beta \to \neg\neg\beta$	MP (1, 5)
7	β	A partir de (4) y (6), implica $\neg\beta \to \beta$ (ej. γ). (Axioma A3)
8	$\neg\neg\beta \to \beta$	TD (1-7)