UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

EXAMEN: Tarea 3

PROFESORA: Karina García Buendía y José Dosal

MATERIA: Conjuntos y lógica

NOMBRE DEL ALUMNE:

1 | Ejercicios de lógica

Ejercicio 1 Demuestra que si $\Gamma \vdash \alpha$ entonces existe un subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$ tal que $\Delta \vdash \alpha$.

Ejercicio 2 Demuestra que la cerradura deductiva es un operador de cerradura, es decir,

a) $\Gamma \subseteq \overline{\Gamma}$,

b) si $\Delta \subseteq \Gamma$ entonces $\overline{\Delta} \subseteq \overline{\Gamma}$,

c) $\overline{\overline{\Gamma}} = \overline{\Gamma}$

Ejercicio 3 Considera el alfabeto $\mathcal{A} = \{a, b, \circ\}$, la definición de fórmula dada por $\Phi = \{\alpha \in \mathrm{Exp}(\mathcal{A}) \mid \alpha \text{ empieza con } a\}$ y la regla de inferencia

$$R : \frac{A, B}{A \circ B}.$$

Con esto definimos el lenguaje $\mathcal{L} = (\mathcal{A}, \Phi)$ y al sistema formal $\mathrm{SF} = (\mathcal{L}, \{R\})$. Sea $T = \{\alpha | \alpha \text{ no tiene ocurrencias de } \circ\}$.

a) Demuestra que T es correcta y no completa respecto a "no tener b después de cada $\circ$".

b) Muestra que T es completa y no correcta respecto a "tener aa después de cada $\circ$".

Ejercicio 4 Considera el sistema formal dado por lo siguiente: el alfabeto es $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$, el conjunto de fórmulas es $\Phi = \{\alpha \in \mathrm{Exp}(\mathcal{A}) \mid \alpha \text{ empieza con } a\}$ con las reglas de inferencia siguientes

$$R_1 : \frac{axb}{axbc} \quad R_2 : \frac{ax}{axx} \quad R_3 : \frac{axbbby}{axcy} \quad R_4 : \frac{axccy}{axy},$$

donde x y y representan sucesiones finitas de símbolos de $\mathcal{A}$. Considera $\Gamma = \{ab\}$ y demuestra lo siguiente:

a) $\Gamma \vdash abcc$,

b) $\Gamma \vdash acbbc$,

c) ¿es posible obtener $\Gamma \vdash ac$?

Ejercicio 5 Demuestra que $\{\neg, \wedge\}$ es un conjunto mínimo de conectivos, es decir, que el resto de conectivos se pueden definir en términos de ellos dos. También muestra que $\{\neg, \iff\}$ y $\{\vee, \wedge\}$ no son conjuntos mínimos de conectivos, es decir, hay al menos un conectivo que no se puede definir usando sólo los conectivos de cada conjunto.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

EXAMEN: Tarea 3

PROFESORA: Karina García Buendía y José Dosal

MATERIA: Conjuntos y lógica

NOMBRE DEL ALUMNE: ____________________

Ejercicio 6 Usa el teorema de las "primas" para demostrar que de la deducción $\{\alpha,\ \neg\beta\} \vdash (\neg\alpha \to \beta)$, con $\gamma \equiv (\neg\alpha \to \beta)$, se puede demostrar que $\{\alpha',\ \beta'\} \vdash \gamma'$.

Ejercicio 7 Decimos que una teoría T es consistente si existe una fórmula α tal que $T \nvdash \alpha$. Demuestra que el cálculo de proposiciones es consistente.

Ejercicio 8 Realiza las siguientes deducciones en el cálculo de proposiciones.

a) $\vdash \neg\neg\beta \to \beta$

b) $\vdash \beta \to \neg\neg\beta$

c) $\vdash \beta \to (\neg\gamma \to \neg(\beta \to \gamma))$

d) $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$

e) $\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma\} \vdash \alpha \to \gamma$

2 | Ejercicios de conjuntos

Ejercicio 9 Demuestra las siguientes propiedades de los números naturales.

a) Para todo $m, n, p \in \mathbb{N}$,
$$m < n \Leftrightarrow m + p < n + p$$
.

b) Para todo $m, n \in \mathbb{N}$,
$$m + n = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ y } n = 0$$
.

Ejercicio 10 Sea g una función en $A \times \mathbb{N}$ y sea $a \in A$. Entonces hay una única función f tal que:

a) $f(0) = a$,

b) $f(S(n)) = g(f(n), n)$ para todo n tal que $S(n) \in \operatorname{dom} f$,

c) o bien $\operatorname{dom} f = \mathbb{N}$, o $\operatorname{dom} f = S(k)$ donde k es el elemento máximo de $\{\, k \in \mathbb{N} : g(f(k), k) \notin A \,\}$.