Zusammenhang und Homöomorphie 30.05.2023

Aufgabe 1:

Wir betrachten eine überabzählbare Menge X mit der koabzählbaren Topologie $\mathcal{O}_{koab} := \{O \subseteq X \mid X \setminus O \text{ abzählbar}\} \cup \{\emptyset\}$. Wir zeigen, dass $(X, \mathcal{O}_{koab})$ zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.

Lösung:

Def: Ein top. Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt zusammenhängend, wenn er keine disjunkte Zerlegung in zwei nicht-leere offene Teilmengen besitzt:

$$X = O_1 \cup O_2 \text{ mit } O_1, O_2 \in \mathcal{O},\ O_1 \cap O_2 = \emptyset \Rightarrow O_1 = \emptyset \text{ oder } O_2 = \emptyset.$$

Def: $(X, \mathcal{O})$ heißt wegzusammenhängend, wenn es zu zwei Punkten $x, x' \in X$ immer einen Weg $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = x'$ gibt.

(1.) $\boxed{(X, \mathcal{O}_{koab}) \text{ ist zusammenhängend.}}$

Wären $O_1, O_2 \subseteq X$ nicht leer, offen und disjunkt mit $X = O_1 \cup O_2$, so wären sowohl $\emptyset \neq O_2 = X \setminus O_1 \neq X$ als auch $\emptyset \neq O_1 = X \setminus O_2 \neq X$ abgeschlossen und damit abzählbar, woraus folgen würde, dass auch $X = O_1 \cup (X \setminus O_1)$ abzählbar wäre als endliche Vereinigung abzählbarer Mengen – ein Widerspruch. Also ist $(X, \mathcal{O}_{koab})$ zusammenhängend.

(2.) $\boxed{(X, \mathcal{O}_{koab}) \text{ ist nicht wegzusammenhängend.}}$

Da X überabzählbar ist, das heißt insbesondere zwei verschiedene Elemente hat, reicht es zu zeigen, dass jeder Weg in $(X, \mathcal{O}_{koab})$ konstant ist.

Wir betrachten $\gamma : [0,1] \to (X, \mathcal{O}_{koab})$, γ stetig.

Sei $O = \{t \in [0,1] \mid \gamma(t) \neq \gamma(0)\}$, dann ist O als Urbild der offenen Menge $X \setminus \{\gamma(0)\}$ unter der stetigen Abb. γ offen.

Wäre $O \neq \emptyset$, so wäre $s = \inf(O) \in [0,1]$, aber $s \notin O$.

Denn wäre $s \in O = \mathring{O}$, so würde ein $\varepsilon > 0$ mit $(s-\varepsilon, s+\varepsilon) \subseteq O$ existieren.

Damit wäre $s' = s - \frac{\varepsilon}{2} \in O$, aber $s' < s$, im Widerspruch zu $s = \inf(O)$.

Damit ist $s \in [0,1] \setminus O$ und $\gamma(s) = \gamma(0)$.

Per Def. des Infimums gäbe es eine Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in O mit $t_n \to s$.

Inf.: $\boxed{b \text{ untere Schranke von } T, \text{ wenn } b \leq x \text{ für alle } x \in T. \text{ Infimum ist größtmögliches } b.}$

Da γ stetig und damit folgenstetig ist, folgt $\gamma(t_n) \to \gamma(s) = \gamma(0)$.

Per Definition des Grenzwerts enthält dann jede Umgebung U von $\gamma(0)$ fast alle Folgenglieder $\gamma(t_n)$.

Dies gilt auch für die Umgebung $U = (X \setminus \{\gamma(t_n) \mid n \in \mathbb{N}_0\}) \cup \{\gamma(0)\}$, die ein abzählbares Komplement hat und damit offen ist mit $\gamma(0) \in U$.

Daraus folgt aber $\gamma(t_n) = \gamma(0)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, also $t_n \in X \setminus O$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, ein Widerspruch. Also gilt $O = \emptyset$ und damit $\gamma(t) = \gamma(0)$ für alle $t \in [0,1]$.

Alternative:

Wir zeigen wiederum, dass jede stetige Abb. $\gamma : [0,1] \to (X, \mathcal{O}_{koab})$ konstant ist. Da $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ abzählbar ist, ist auch $A := \gamma(\mathbb{Q} \cap [0,1])$ abzählbar und somit abgeschlossen in X. Damit ist auch $\gamma^{-1}(A)$ abgeschlossen und zudem ist $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq \gamma^{-1}(A)$. Es gilt $\overline{\mathbb{Q} \cap [0,1]} = [0,1]$, denn $[0,1]$ ist abg. und jd. Umgebung von $x \in [0,1]$ enthält Punkte in $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Daraus folgt $[0,1] = \overline{\mathbb{Q} \cap [0,1]} \subseteq \overline{\gamma^{-1}(A)} = \gamma^{-1}(A)$, also $\gamma^{-1}(A) = [0,1]$.

Falls $|A| > 1$ gibt es Elemente $x, y \in A$ mit $x \neq y$ und die Mengen $A_1 := \{x\}$ und $A_2 := A \setminus \{x\}$ sind nicht leer und disjunkt mit $A = A_1 \cup A_2$. Insbesondere da A abzählbar ist, sind A_1 und A_2 abgeschlossen. Somit $[0,1] = \gamma^{-1}(A) = \gamma^{-1}(A_1) \cup \gamma^{-1}(A_2)$ eine disjunkte Zerlegung in zwei nichtleere abgeschlossene Teilmengen, im Widerspruch dazu, dass $[0,1]$ zusammenhängend ist. Daraus folgt $|A| = 1$ und wegen $\gamma^{-1}(A) = [0,1]$ ist γ konstant.

Aufgabe 2:

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan(x)$.

Dann ist f insbesondere eine stetige Abbildung.

Sei $X = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ das offene Intervall, was ein zusammenhängender topologischer Teilraum von $\mathbb{R}$ ist.

Dann ist $f^{-1}(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2})$ was eine disjunkte Vereinigung von offenen Intervallen ist.

Also ist $f^{-1}(X)$ nicht zusammenhängend.

(b) Betrachte $S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|x-y\|_2 = 1\}$ und $X := \{(x,0) \in \mathbb{R}^2\}$.

Dann ist der Schnitt $S^1 \cap X = \{(-1,0), (1,0)\}$ die Vereinigung zweier Punkte, welche nicht zusammenhängend ist.

(c) Betrachte den top. Raum $(-\infty, \infty) \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$. Der metrische Raum $\mathbb{R}^2$ ist zusammenhängend. Der angegebene Teilraum ist ebenfalls zusammenhängend, aber $\mathbb{R}^2 \setminus (-\infty, \infty) \times \{0\}$ ist als Vereinigung disjunkter offener Mengen nicht zusammenhängend.

Aufgabe 3:

Wir zeigen, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $(X, \mathcal{O})$ ist zusammenhängend.

(ii) Es gibt keine disjunkten, abgeschlossenen Teilmengen $\emptyset \neq A_1, A_2 \subseteq X$ mit $A_1 \cup A_2 = X$.

(iii) $\emptyset$ und X sind die einzigen Teilmengen von X, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind.

Lösung:

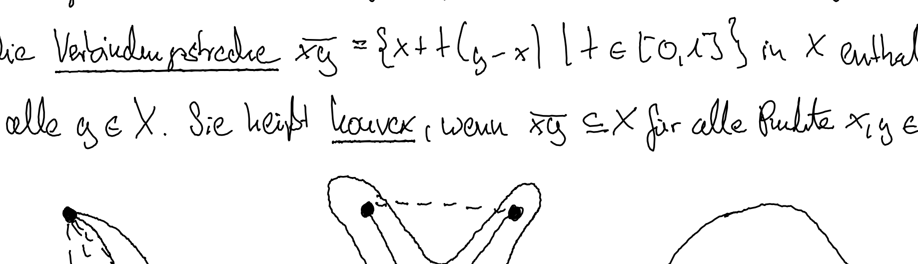
(i) $\Rightarrow$ (ii) Wir nehmen an, dass $(X, \mathcal{O})$ zusammenhängend ist und es eine Vereinigung von nicht leeren Mengen $A_1, A_2 \subseteq X$ gibt, so dass $A_1 \cup A_2 = X$. Sei $U = X \setminus A_1$ und $V = X \setminus A_2$. Dann sind U und V offen als Komplemente abgeschlossener Mengen und insbesondere nicht leer. Der Schnitt beider ergibt dann $U \cap V = (X \setminus A_1) \cap (X \setminus A_2) = X \setminus (A_1 \cup A_2) = \emptyset$. Damit wäre aber $(X, \mathcal{O})$ nicht zusammenhängend, denn nach Voraussetzung gilt $A_1 \neq \emptyset \neq A_2$. ↯

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Angenommen es gäbe eine Teilmenge $\emptyset \neq A \subset X$, so dass A offen und abgeschlossen ist. Dann ist $X \setminus A$ ebenfalls offen und abgeschlossen. Insbesondere gilt $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$ und $A \cup (X \setminus A) = X$ im Widerspruch zu (ii). ↯

(iii) $\Rightarrow$ (i) Angenommen X ist nicht zusammenhängend, dann gibt es zwei offene disjunkte Teilmengen $U, V \subseteq X$, so dass $U \cup V = X$. Da U offen ist und $X \setminus U = V$ gilt, muss V abgeschlossen sein. Ebenso ist $X \setminus V = U$, also ist auch U abgeschlossen. Dies ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass $\emptyset$ und X die einzigen offenen und abgeschlossenen Teilmenge von X sind. ↯

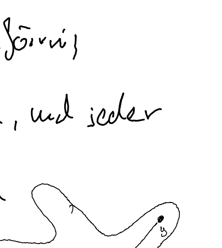
Aufgabe 4:

(1) Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt sternförmig, wenn es einen Punkt $x \in X$ gibt, so dass die Verbindungsstrecke $\overline{xy} = \{x + t(y-x) \mid t \in [0,1]\}$ in X enthalten ist für alle $y \in X$. Sie heißt konvex, wenn $\overline{xy} \subseteq X$ für alle Punkte $x, y \in X$.



nicht sternförmig — sternförmig aber nicht konvex — konvex und damit sternförmig

Jeder sternförmige Teilraum $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist wegzusammenhängend, und jeder konvexe Teilraum $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend



Denn ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig bzgl. $x \in X$, so ist

$$\gamma_{yz} : [0,1] \to X, \quad t \mapsto \begin{cases} y + 2t(x-y), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ x + (2t-1)(z-x), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

stetig mit $\gamma_{yz}(0) = y$ und $\gamma_{yz}(1) = z$ und damit ein Weg von y nach z. Also ist X wegzusammenhängend.

Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, so ist X auch sternförmig und damit wegzusammenhängend. Außerdem enthält dann jede Umgebung U von $x \in X$ eine offene Menge und damit eine Menge $X \cap B_\varepsilon(x)$ für ein $\varepsilon > 0$. Diese ist konvex als Schnitt zweier konvexer Mengen und damit wegzusammenhängende Umgebung von x, die in U enthalten ist.

(2) Jede offene Teilmenge $O \subseteq \mathbb{R}^n$ ist lokal wegzusammenhängend.

Denn jd. Umgebung $U \subseteq O$ von $x \in O$ enthält eine offene Kugel $B_\varepsilon(x) \subseteq O \subseteq \mathbb{R}^n$. Die offene Kugel $B_\varepsilon(x)$ ist konvex und damit eine wegzusammenhängende Umgebung von x.

yeah