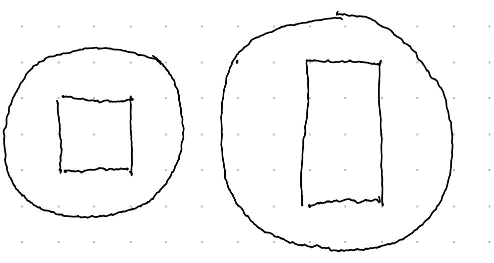
Urysohnlemma und Tietze-Erweiterungssatz

14.06.2023

Hausdorffraum: Ein top. Raum heißt hausdorffsch, wenn für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ disjunkte offene Umgebungen U_x und V_y existieren.

Normaler top. Raum (T4): Sei X ein top. Raum, so heißt X normal, falls es zu je zwei abg. Teilmengen A_1, A_2 mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ Umgebungen U_{A_1} und U_{A_2} gibt, so dass $U_{A_1} \cap U_{A_2} = \emptyset$.



Trennungsaxiom T4.

Lemma von Urysohn: Ein Hausdorffraum $(X, \mathcal{O})$ ist genau dann normal, wenn zu je zwei disjunkten, abgeschlossenen Mengen $A_1, A_2 \subseteq X$ eine stetige Abb. $f: X \to [0,1]$ mit $f(x) = 0$ für alle $x \in A_1$ und $f(x) = 1$ für alle $x \in A_2$ existiert. Eine solche Abbildung heißt Urysohn-Funktion.

Beweis:

„$\Leftarrow$": Ist $(X, \mathcal{O})$ ein Hausdorffraum und $f: X \to [0,1]$ eine Urysohn-Funktion für zwei disjunkte, abgeschlossene Mengen $A_1, A_2 \subseteq X$, so kann man die disjunkten Mengen $O_1 = f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ und $O_2 = f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ betrachten. Dann sind O_1, O_2 offen als Urbilder der in $[0,1]$ offenen Mengen $[0, \frac{1}{2})$ und $(\frac{1}{2}, 1]$ unter der stetigen Abb. f, und es gilt $A_i \subseteq O_i$. Also ist $(X, \mathcal{O})$ normal.

> **Lemma:** Seien $A_1, A_2 \subseteq X$ und $f: Y \to X$ stetig. Dann sind $f^{-1}(A_1) \cap f^{-1}(A_2) = \emptyset$ disjunkt.
>
> **Beweis:** Annahme: Es gibt ein $y \in Y$, so dass $y \in f^{-1}(A_1)$ und $y \in f^{-1}(A_2)$. Damit wäre $f(y) \in A_1$ und $f(y) \in A_2$. ↯

„$\Rightarrow$": Sei $(X, \mathcal{O})$ ein normaler top. Raum und $A_1, A_2 \subseteq X$ disjunkt und abgeschlossen. Ist $A_1 = \emptyset$ ($A_2 = \emptyset$), so kann man $f \equiv 1$ ($f \equiv 0$) als Urysohn-Funktion wählen. Sind $\emptyset \neq A_1, A_2$, so konstruiert man eine Urysohn-Funktion mit der Menge $D \subseteq [0,1]$ der dyadischen Zahlen:

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \subseteq [0,1] \quad \text{mit } D_n = \{ k \cdot 2^{-n} \mid k = 0, 1, 2, 3, \ldots, 2^n \} \subseteq [0,1].$$

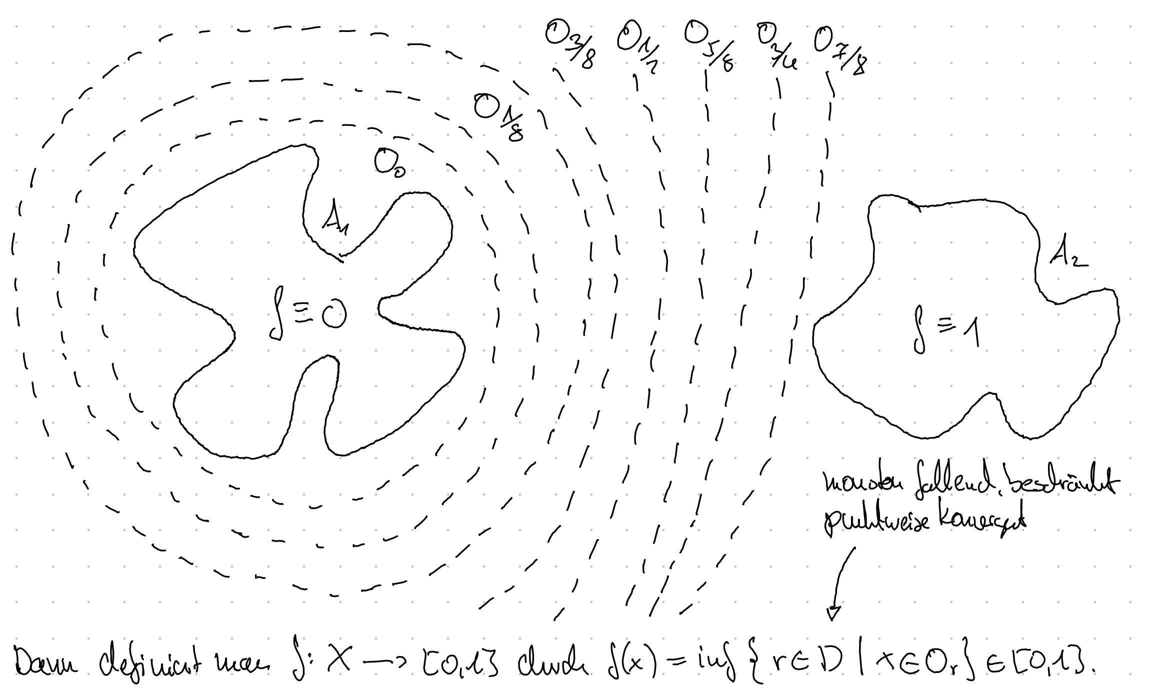
Die Idee ist es nun, jedem Element $r \in D$ eine offene Menge $O_r \subseteq X$ zuzuordnen, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) $A_1 \subseteq O_r$ für alle $r \in D$

(2) $A_2 \subseteq O_1 := X$ und $A_2 \cap \overline{O}_r = \emptyset$ für alle $r \in D \setminus \{1\}$

(3) $\overline{O}_s \subseteq O_r$ für alle $s < r \in D$

Die offenen Mengen O_r sollen als Niveaumengen dienen, auf denen die Abbildung $f: X \to [0,1]$ den Wert r annimmt. Um so tatsächlich eine stetige Abbildung zu erhalten ist es zentral, auch die Kontrolle über die Abschlüsse der Mengen O_r zu behalten, da dort sonst Sprungstellen der Abb. f entstehen können, die ihre Stetigkeit zerstören. Aus diesem Grund fordert man in (3), dass nicht nur $O_s \subseteq O_r$ für $s \leq r$ gilt, sondern auch $\overline{O}_s \subseteq O_r$.



Dann definiert man $f: X \to [0,1]$ durch $f(x) = \inf\{ r \in D \mid x \in O_r \} \in [0,1]$. f ist wegen $O_1 = X$ definiert, aus (1) folgt $f(x) = 0$ für alle $x \in A_1$ und aus (2) folgt $f(x) = 1$ für $x \in A_2$. Was fehlt uns?

(a) $O_r \subseteq X$ existieren,

(b) f ist stetig.

Zu (a): Wir konstruieren die Mengen O_r induktiv mit Hilfe von T_4.

Da A_1, A_2 abgeschlossen und disjunkt sind, ist $X \setminus A_2$ eine offene Umgebung von A_1. Nach T_4 existiert eine offene Menge O_0 mit

$$A_1 \subseteq O_0 \subseteq \overline{O_0} \subseteq X \setminus A_2 \qquad // \text{ Zulässige Kette}$$

Dann sind (1)-(3) für O_0 und $O_1 := X$ erfüllt.

Seien nun für alle $s \in D_{n-1}$ offene Mengen $O_s \subseteq X$ konstruiert, die (1)-(3) erfüllen, und sei $r \in D_n \setminus D_{n-1}$. Dann gilt $r_\pm := r \pm 2^{-n} \in D_{n-1}$

Fall $r_+ = 1$: Dann ist $X \setminus A_2$ eine offene Umgebung von $\overline{O}_{r_-}$, und wir finden mit T4 eine offene Menge O_r mit

$$\overline{O}_{r_-} \subseteq O_r \subseteq \overline{O}_r \subseteq X \setminus A_2.$$

Fall $r_+ < 1$: Dann sind beide Mengen $O_{r_\pm}$ offen mit $A_1 \subseteq O_{r_-} \subseteq \overline{O}_{r_-} \subseteq O_{r_+} \subseteq X \setminus A_2$, und wir finden mit T_4 eine offene Menge O_r mit

$$\overline{O}_{r_-} \subseteq O_r \subseteq \overline{O}_r \subseteq O_{r_+}.$$

Da die Mengen $(O_s)_{s \in D_{n-1}}$ (1)-(3) erfüllen, folgt aus der Konstruktion der Mengen O_r für $r \in D_n \setminus D_{n-1}$, dass auch $(O_r)_{r \in D_n}$ (1)-(3) erfüllen.

Zu (b): Um zu zeigen, dass f stetig ist, definieren wir die monoton fallende und beschränkte Funktionenfolge $f_n(x) = k2^{-n}$ für $x \in \overline{O}_k \setminus \overline{O}_{k-1}$. Das erstaunliche ist, dass $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ stetig ist, obwohl keine der f_n dies sein muss.

Es gilt

$$|f_n(x) - f_{n+1}(x)| \leq 2^{-(n+1)}$$

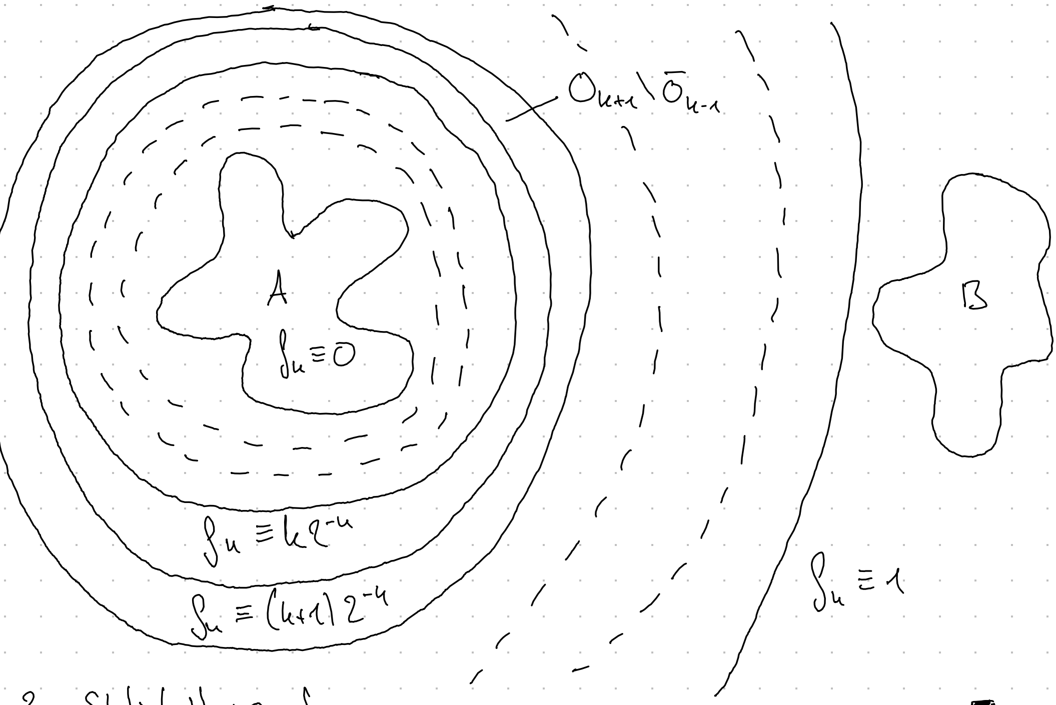
und es gilt für alle $x, y \in O_{k+1} \setminus \overline{O}_{k-1}$

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq 2^{-n}.$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} + 2^{-n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} = 3 \cdot 2^{-n}. \end{aligned}$$

Wählt man also ein n, welches $\varepsilon > 3 \cdot 2^{-n}$ erfüllt, so kann x in der offenen Umgebung $O_{k+1} \setminus \overline{O}_{k-1}$ variiert werden, ohne Schwankungen größer als ε zu erhalten.



Zur Stetigkeit von f.

Mit Hilfe des Lemmas von Urysohn kann man nun für jede stetige reellwertige Funktion auf einer abgeschlossenen Teilmenge eines normalen top. Raumes eine stetige Fortsetzung auf den ganzen Raum konstruieren. Dazu konstruiert man mit Hilfe von Urysohn-Funktionen eine Folge von auf dem ganzen Raum definierten Treppenfunktionen, die die Funktion auf dem Teilraum approximieren und eine gleichmäßig konvergente Reihe bilden.

Fortsetzungssatz von Tietze

Sei $(X, \mathcal{O})$ ein normaler top. Raum, $A \subseteq X$ abg. und $f: A \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine stetige Abbildung $F: X \to \mathbb{R}$ mit $F|_A = f$.

Beweis:

(1.) Wir nehmen zunächst an, dass $f: A \to \mathbb{R}$ stetig ist mit $f(A) \subseteq [-1,1]$ und konstruieren eine stetige Abb. $F: X \to [-1,1]$ mit $F|_A = f$, indem wir $f: A \to [-1,1]$ durch eine Reihe approximieren.

Dazu konstruieren wir eine Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ stetiger Abbildungen

$$F_n: X \to \left[-\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{3}\right)^n, \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{3}\right)^n\right] \text{ mit } \left|f(a) - \sum_{k=1}^{n} F_k(a)\right| \leq \left(\tfrac{2}{3}\right)^n \ \forall a\in A, n\in\mathbb{N}_0$$

mit $F_0 \equiv 0$. Da $\sup_{x\in X} |F_n(x) - F_m(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{\min(m,n)}$, konvergiert $F = \sum_{k=0}^{\infty} F_k$ gleichmäßig mit

- $|F(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |F_k(x)| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 1$ für $x \in X$ und
- $F(a) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} F_k(a) = f(a)$ für $a \in A$.

Zur Konstruktion der Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ setzen wir $F_0 \equiv 0$. Wir nehmen an, dass die Abbildungen $F_0, F_1, \ldots, F_n$ bereits konstruiert sind. Für die Konstruktion von F_{n+1} betrachten wir die disjunkten Mengen

$$A_1^n := \left\{a \in A \,\middle|\, f(a) - \sum_{k=1}^{n} F_k(a) \in \left[\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{2}{3}\right)^n, \left(\tfrac{2}{3}\right)^n\right]\right\},$$

$$A_2^n := \left\{a \in A \,\middle|\, f(a) - \sum_{k=1}^{n} F_k(a) \in \left[-\left(\tfrac{2}{3}\right)^n, -\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{2}{3}\right)^n\right]\right\},$$

die wegen der Stetigkeit von f und $F_k|_A$ abgeschlossen in A und wegen der Abgeschlossenheit von A auch abgeschlossen in X sind.

Nach dem <u>Lemma v. Urysohn</u> gibt es eine Urysohn-Funktion $h_n: X \to [0,1]$ mit $h_n|_{A_1^n} \equiv 0$ und $h_n|_{A_2^n} \equiv 1$, und wir setzen

$$F_{n+1}: X \to \left[-\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{n+1}, \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right], \quad x \mapsto \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n+1}\left(\tfrac{1}{2} - h_n\right).$$

Dann ist F_{n+1} offensichtlich stetig mit

$F_{n+1}(a) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ für $a \in A_1^n$ und $F_{n+1}(a) = -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ für $a \in A_2^n$.

Außerdem gilt $\left|f(a) - \sum_{k=1}^{n+1} F_k(a)\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$, denn für $a \in A_1^n \cup A_2^n$ erhält man aus der Induktionsannahme und der Definition von F_{n+1}

$$\left|f(a) - \sum_{k=0}^{n+1} F_k(a)\right| = \left|f(a) - \sum_{k=0}^{n} F_k(a) - \frac{2^n}{3^{n+1}}\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2^n}{3^{n+1}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \quad \forall a \in A_1^n$$

$$\left|f(a) - \sum_{k=0}^{n+1} F_k(a)\right| = \left|f(a) - \sum_{k=0}^{n} F_k(a) + \frac{2^n}{3^{n+1}}\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2^n}{3^{n+1}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \quad \forall a \in A_2^n$$

Für $a \in A \setminus (A_1^n \cup A_2^n)$ gilt $f(a) - \sum_{k=0}^{n} F_k(a) \in \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n, \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$ per Induktionsannahme und per Definition von A_1^n, A_2^n. Daraus folgt:

$$\left|f(a) - \sum_{k=0}^{n+1} F_k(a)\right| \leq \left|f(a) - \sum_{k=0}^{n} F_k(a)\right| + |F_{n+1}(a)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.$$

Damit ist die Aussage für stetige Abb. $f: A \to \mathbb{R}$ mit $f(A) \subset [-1,1]$ bewiesen.

2. Sei nun $f: A \to \mathbb{R}$ beliebig.

Dann gibt es einen Homöomorphismus $\phi: \mathbb{R} \to (-1,1)$.

Anwendung von 1. auf die stetige Abb. $f' = \phi \circ f: A \to \mathbb{R}$ mit $f'(A) \subseteq (-1,1)$

Liefert eine stetige Abb. $F': X \to \mathbb{R}$ mit $F'|_A = f'$ und $F'(X) \subseteq [-1,1]$.

Um mit ϕ^{-1} verketten zu können, muss man den Bildbereich auf $(-1,1)$ einschränken.

Durch Multiplikation von F' mit einer Urysohn-Funktion $h: X \to [0,1]$ für die abg.

und wegen $F'(A) = f(A) \subseteq (-1,1)$ disjunkten Mengen $A_1 = F'^{-1}(\{\pm 1\})$ und $A_2 = A$

erhält man eine stetige Abb. $F'' = h \circ F': X \to \mathbb{R}$ mit $F''|_A = f'$ und $F''(X) \subseteq (-1,1)$.

Dann ist $F = \phi^{-1} \circ F'': X \to \mathbb{R}$ die gesuchte stetige Abb. mit $F|_A = f$. ∎