Beweisstunde vom 12.07.2023

Quotientenräume

Satz: Für jd. top. Raum $(X, \mathcal{O})$ und jd. Indexmenge I gilt

$$X^I := \prod_{i \in I} X = \mathrm{Abb}(I, X).$$

Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von Abb. $f_n : I \to X$ konvergiert genau dann gegen $f : I \to X$ in $\prod_{i \in I} X$, wenn sie punktweise konvergiert.

Beweis: Wir betrachten den top. Raum $(\overline{\mathbb{N}}_0, \mathcal{O}_{\overline{\mathbb{N}}_0})$.

Satz: Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ top. Räume. Dann gilt

1. Die folgende Menge ist eine Topologie auf $\overline{\mathbb{N}}_0 = \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$
$$\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{N}}_0} = \mathcal{P}(\mathbb{N}_0) \cup \{O \subseteq \overline{\mathbb{N}}_0 \mid \infty \in O, n \in O \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}_0\}.$$
2. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in X konvergiert genau dann gegen $x \in X$, wenn die Abb. $x^* : \overline{\mathbb{N}}_0 \to X$ mit $x^*(n) = x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x^*(\infty) = x$ stetig ist.
3. Eine Abb. $f : X \to Y$ ist folgenstetig in $x \in X$ genau dann, wenn die Abb. $f \circ x^* : \overline{\mathbb{N}}_0 \to Y$ stetig ist für alle stetigen Abb. $x^* : \overline{\mathbb{N}}_0 \to X$ mit $x^*(\infty) = x$.

Beweis: 1. $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{N}}_0}$ ist eine Topologie auf $\overline{\mathbb{N}}_0$ folgt durch nachrechnen von T1–T3.

2. $x^* : \overline{\mathbb{N}}_0 \to X$ ist stetig in $n \in \mathbb{N}_0$ $\iff$ $\forall U \in \mathcal{O}_{\overline{\mathbb{N}}_0} : x_n \in U \Rightarrow n \in x^{*-1}(U)$.
Da $\{n\} \in \mathcal{O}_{\overline{\mathbb{N}}_0}$ mit $n \in \{n\} \subseteq x^{*-1}(U)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, ist diese Bedingung für jd. Abb. $x^* : \overline{\mathbb{N}}_0 \to X$ erfüllt. Die Abb. $x^* : \overline{\mathbb{N}}_0 \to X$ ist genau dann stetig in ∞, wenn für jd. Umgebung U von x das Urbild $x^{*-1}(U)$ eine Umgebung von ∞ ist, also wenn $n \in x^{*-1}(U)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $x_n \in U$ für fast alle $n \in \mathbb{N}_0$, also wenn die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegen x konvergiert. $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N : a_n \in U_\varepsilon(a)$.

3. Eine Abb. $f : X \to Y$ ist folgenstetig in x, wenn für jd. gegen $x \in X$ konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegen $f(x)$ konvergiert. Ersteres ist nach 2. äquivalent zur Stetigkeit von $x^* : \overline{\mathbb{N}}_0 \to X$ und Letzteres zur Stetigkeit der Abb. $f \circ x^* : \overline{\mathbb{N}}_0 \to Y$ mit $f \circ x^*(n) = f(x_n)$ und $f \circ x^*(\infty) = f(x)$ ∎

$\Rightarrow$ Funktionenfolgen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, die bzgl. der Produkttop. gegen $f : I \to X$ konvergieren, entsprechen stetigen Abb. $f^* : \overline{\mathbb{N}}_0 \to X$ mit

$$f^*(n) = \begin{cases} f_n & n \in \mathbb{N}_0, \\ f & n = \infty. \end{cases}$$

Eine punktweise gegen $f : I \to X$ konvergente Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ entspricht einer Familie $(f_i^*)_{i \in I}$ von stetigen Abb. $f_i^* : \overline{\mathbb{N}}_0 \to X$ mit

$$f_i^*(n) = \begin{cases} f_n(i) & n \in \mathbb{N}_0 \\ f(i) & n = \infty \end{cases}$$

Die Projektionsabb. $\pi_i : \prod_{i \in I} X \to X$, $f \mapsto f(i)$ entsprechen der Auswertung einer Abb. in Elementen $i \in I$.

Ist also $f^* : \overline{\mathbb{N}}_0 \to X^I$ stetig, so sind auch die Abb. $f_i^* = \pi_i \circ f^* : \overline{\mathbb{N}}_0 \to X$ stetig als Verkettung stetiger Abb., und damit ist jd. bzgl. der Produkttopologie konvergente Funktionenfolge auch punktweise konvergent.

Umgekehrt definiert jd. punktweise gegen f konvergente Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Familie $(f_i^*)_{i \in I}$ stetiger Abb. $f_i^* : \overline{\mathbb{N}}_0 \to X$.

Nach der universellen Eigenschaft der Produkttopologie existiert genau eine stetige Abb. $f^* : \overline{\mathbb{N}}_0 \to X^I$, für die alle Diagramme

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathbb{N}}_0 \arrow[r, "f^*"] \arrow[dr, "f_i^*"'] & X^I \arrow[d, "\pi_i"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\
 & X
\end{tikzcd}$$

kommutieren.

$\Rightarrow$ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert bzgl. der Produkttop. gegen $f : I \to X$. ∎

Beispiel: Betrachte für $I=[0,1)$ den top. Raum $\{0,1\}^I = \mathrm{Abb}(I,\{0,1\}) = \prod_{i\in I}\{0,1\}$ mit der durch die diskrete Top. auf $\{0,1\}$ induzierten Produkttop. Es lässt sich mit dem Satz von Tychonoff zeigen, dass der Raum kompakt ist.

$\mathrm{Abb}(I,\{0,1\})$ ist nicht folgenkompakt. (Jede Folge hat eine konvergente Teilfolge)

Beweis: Betrachte die eindeutig bestimmte 2-adische Darstellung von Elementen $x\in I=[0,1)$

$$x=\sum_{n=1}^{\infty} x_n 2^{-n} \quad \text{mit } x_n\in\{0,1\},\ n\in\mathbb{N} \text{ und es gilt nicht } x_n=1 \text{ für fast alle } n\in\mathbb{N}.$$

Nach dem vorherigen Satz konvergiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{Abb}(I,\{0,1\})$ genau dann, wenn die Abb. $f_{n_k}: I\to\{0,1\}$ auf I punktweise konvergieren. Zu jed. Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gibt es aber immer einen Punkt, in dem die Teilfolge nicht konvergiert, nämlich

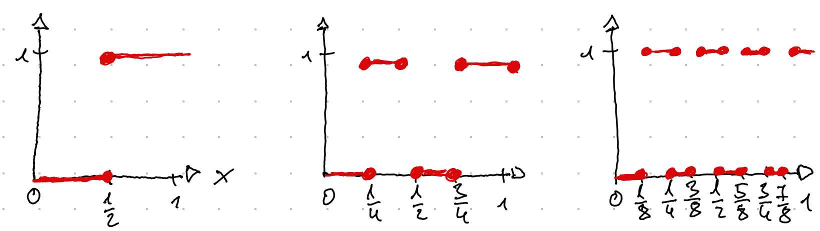
$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(1+(-1)^k\right)2^{-n_k} \Rightarrow f_{n_k}(x)=\frac{1}{2}\left(1+(-1)^k\right)=\begin{cases}1, & k \text{ gerade}\\ 0, & k \text{ ungerade.}\end{cases}$$

$\Rightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat keine konvergente Teilfolge

$\Rightarrow \mathrm{Abb}(I,\{0,1\})$ ist nicht folgenkompakt ■

Notiz: Für metrische Räume ist Kompaktheit $\Leftrightarrow$ Folgenkompaktheit.

$(X,\mathcal{O})$ ist hausdorffsch und damit kompakt.



Abbildungsraum $\mathrm{Abb}([0,1),\{0,1\})$ ist kompakt. Aber nicht folgenkompakt.

$$\prod_{i\in I} X_i \mathrel{\hat=} \{f\in\mathrm{Abb}(I,\textstyle\coprod_{i\in I} X_i) \mid \forall i\in I: f(i)\in X_i\}.$$

$$B_{\prod_{i\in I} X_i} := \{U\subseteq \prod_{i\in I} X_i \mid \exists U_1\in\mathcal{O}_1,\dots,U_n\in\mathcal{O}_n: U=pr_1^{-1}(U_1)\cap\dots\cap pr_n^{-1}(U_n)\}$$

ist Basis der Produkttopologie, falls I endlich ist.

Satz: Kompakte Hausdorffräume sind normal.

Beweis: Sei $(X, \mathcal{O})$ kompakt und hausdorffsch.

z.z. T4 ist erfüllt: Für alle disjunkte abg. $A, B \subseteq X$ ex. disjunkte offene $O_A, O_B \subseteq X$ mit $A \subseteq O_A$ und $B \subseteq O_B$.

Sind $A, B \subseteq X$ abg. und $(X, \mathcal{O}_X)$ kompakt, so sind auch A, B kompakt.

Beweis: Ist $(O_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $(A, \mathcal{O}_{A \subseteq X})$, so gibt es per Definition der Teilraumtopologie offene Mengen $U_i \in \mathcal{O}_X$ mit $O_i = A \cap U_i$. Ist $A \subseteq X$ abg., so ist $X \setminus A$ offen und damit bildet die Familie $(U_i)_{i \in I}$ zusammen mit $X \setminus A$ eine offene Überdeckung von X. Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ kompakt, so besitzt sie eine endliche Teilüberdeckung. Also gibt es eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $X \subseteq (X \setminus A) \cup (\bigcup_{i \in J} U_i)$, und die Familie $(O_i)_{i \in J} = (U_i \cap A)_{i \in J}$ ist dann eine endliche Teilüberdeckung von A.

Also ist A kompakt. ■

Da $(X, \mathcal{O}_X)$ hausdorffsch ist, gibt es zu Punkten $a \in A$ und $b \in B$ disjunkte offene Mengen $O_{ab}^A, O_{ab}^B \in \mathcal{O}_X$ mit $a \in O_{ab}^A$ und $b \in O_{ab}^B$. Für jd. Punkt $a \in A$ ist dann die Familie $(O_{ab}^B \cap B)_{b \in B}$ eine offene Überdeckung von B, die wegen der Kompaktheit von B eine endliche Teilüberdeckung $(O_{ab_i}^B \cap B)_{i \in I}$ besitzt, mit $|I| < \infty$.

Dann sind $O_a = \bigcap_{i \in I} O_{ab_i}^A$ und $O_{aB} = \bigcup_{i \in I} O_{ab_i}^B$ offen und disjunkt mit $a \in O_a$ und $B \subseteq O_{aB}$. Die Familie $(O_a \cap A)_{a \in A}$ ist dann eine offene Überdeckung der kompakten Teilmenge $A \subseteq X$, und damit existiert eine endliche Teilüberdeckung $(O_{a_j} \cap A)_{j \in J}$ mit $|J| < \infty$.

Dann sind die Mengen $O_A = \bigcup_{j \in J} O_{a_j}$ und $O_B = \bigcap_{j \in J} O_{a_j B}$ offen und disjunkt mit $A \subseteq O_A$ und $B \subseteq O_B$. ■