**Satz 2.2.6** (Lemma von Urysohn)

Hausdorffraum $(X, \mathcal{O})$ ist normal $\Longleftrightarrow \forall A_1, A_2 \subseteq X$ abg., $A_1 \cap A_2 = \emptyset$: $\exists f: X \to [0,1]$ stetig mit

$$f(x) := \begin{cases} 0 & , x \in A_1 \\ 1 & , x \in A_2 \end{cases}$$

$f$ heißt Urysohn-Funktion.

Beweis: „$\Leftarrow$":

$(X, \mathcal{O})$ Hausdorffraum $\quad \forall x, y \in X,\ x \neq y\ \exists U_x, U_y \in \mathcal{O}: x \in U_x,\ y \in U_y,\ U_x \cap U_y = \emptyset$

$f: X \to [0,1]$ Urysohn-Funktion auf $A_1, A_2 \subseteq X$ abg. $\quad f$ stetig

Teilraumtop. bzgl. Standardtop. von $\mathbb{R}$

Betrachte $O_1 = f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$, $O_2 = f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ $\quad \mathcal{O}_{[0,1] \subseteq \mathbb{R}}$, $[0, \frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cap [0,1]$ offen

$\Rightarrow A_i \subseteq O_i$

Das ist T4, $\mathbb{R}$ ist Hausdorff.

$\Rightarrow (X, \mathcal{O})$ ist normal $\quad \forall A_1, A_2 \subseteq X$ abg. $\exists U_1, U_2 \in \mathcal{O}: A_1 \subseteq U_1,\ A_2 \subseteq U_2,\ U_1 \cap U_2 = \emptyset$

$T_2$ und $T_4$

„$\Rightarrow$" $(X, \mathcal{O})$ normaler Raum

$A_1, A_2 \subseteq X$ abg., $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

Ist $A_1 = \emptyset$ ($A_2 = \emptyset$) wähle $f \equiv 1$ ($f \equiv 0$) als Urysohn-Funktion

Sei $A_1, A_2 \neq \emptyset$.

Dyadische Zahlen

$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} D_n \subseteq [0,1]$, $\quad D_n = \{ \frac{k}{2^n} \mid k = 0, 1, 2, 3, \ldots, 2^n \} \subseteq [0,1]$

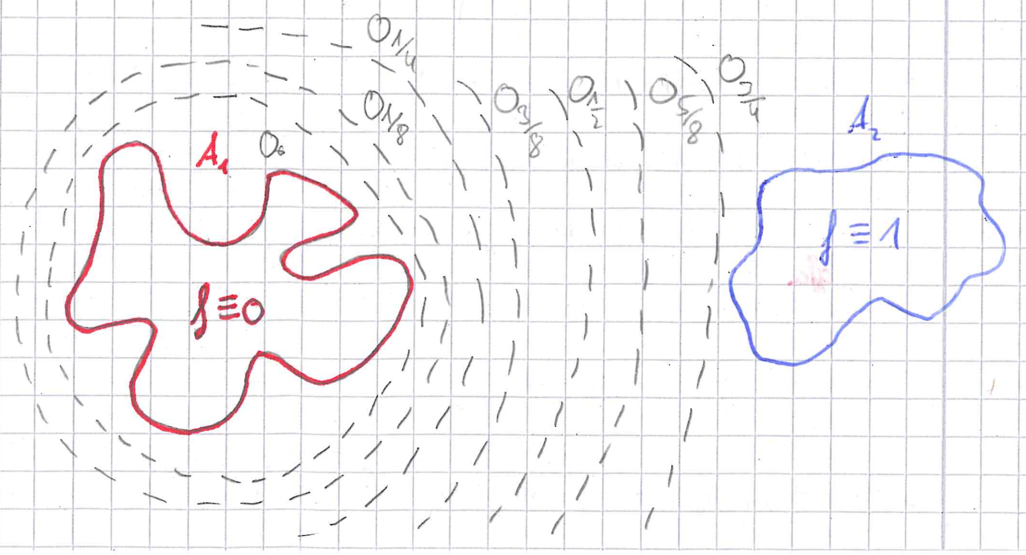
$\to$ „Niveaumengen" auf denen $f: X \to [0,1]$ den Wert $r$ annimmt.

Idee: Zuordnung von $O_r \in \mathcal{O}_X$ zu $r \in D$ s.d.

(i) $A_1 \subseteq O_r$ für alle $r \in D$ $\quad \Rightarrow \forall x \in A_1: f(x) = 0$

(ii) $A_2 \subseteq O_1 := X$ und $A_2 \cap \overline{O_r} = \emptyset$ für alle $r \in D \setminus \{1\}$ $\quad \Rightarrow \forall x \in A_2: f(x) = 1$

(iii) $\overline{O_s} \subseteq O_r$ für alle $s < r \in D$ Kontrolle über Abschlüsse um Sprungstellen zu vermeiden die Stetigkeit zerstören, deshalb nicht nur $O_s \subseteq O_r$ für $s \leq r$



Definiere $f: X \to [0,1]$, $f(x) = \inf\{ r \in D \mid x \in O_r \} \in [0,1]$.

$f$ ist definiert, da $O_1 = X$

$f(x) = 0 \quad \forall x \in A_1$ (i)

$f(x) = 1 \quad \forall x \in A_2$ (ii)

a) Existieren solche $O_r$?

b) Ist $f$ stetig?

a): Konstruktion von $O_r$ induktiv mittels $T_4$. $\forall A_1, A_2 \subseteq X : \exists U_1, U_2 \in \mathcal{O}_X : A_1 \subseteq U_1, A_2 \subseteq U_2, U_1 \cap U_2 =$

$A_1, A_2$ abg. $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$\Rightarrow X \setminus A_2$ offene Umgebung von $A_1$

$\overset{T4}{\Rightarrow} \exists O_0 \in \mathcal{O}_X : A_1 \subseteq O_0 \subseteq \overline{O_0} \subseteq X \setminus A_2$

Lemma: $T4 \Leftrightarrow \forall A \subseteq X$ abg., $O \subseteq X$ offen: $A \subseteq O$ $\exists U \subseteq X : A \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq O$

Beweis: Sei $X$ T4-Raum, $A \subseteq X$ abg., $O \subseteq X$ offen, mit $A \subseteq O$

"$\Rightarrow$":

$\Rightarrow X \setminus A$ offen

$B := X \setminus O$, $B$ abg. und $A \cap B = \emptyset$

Da $X$ T4-Raum $\exists U, V \subseteq X$ offen s.d.

$$A \subseteq U, \quad B \subseteq V \quad \text{und} \quad U \cap V = \emptyset$$

$\Rightarrow U \subseteq \overset{\text{abg.}}{X \setminus V} \subseteq \overset{\text{offen}}{X \setminus B} = O$

$\Rightarrow A \subseteq \overset{\text{offen}}{U} \subseteq \overline{U} \subseteq O$

"$\Leftarrow$": Seien $A_1, A_2 \subseteq X$ abg. $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

Sei $O = X \setminus A_2$ offen.

$\Rightarrow A_1 \subseteq O$

$\Rightarrow \exists U \in \mathcal{O}_X : A_1 \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq O = X \setminus A_2$

$\Rightarrow U \cap A_2 = \emptyset$ da $U \subseteq X \setminus A_2$

Sei $V = X \setminus \overline{U}$ offen $\Rightarrow \overline{U} \cap A_2 = \emptyset$ da $\overline{U} \subseteq X \setminus A_2$

$\Rightarrow A_2 \subseteq \overset{\text{offen}}{V} = X \setminus \overline{U}$

$\Rightarrow U \cap V = U \cap (X \setminus \overline{U}) = \emptyset$ ∎

$\Rightarrow$ (i)-(iii) für $O_0$ und $O_1 := X$ erfüllt

Seien für alle $s \in D_{n-1}$ offene $O_s \subseteq X$ konstruiert, mit (i) - (iii)

Sei $r \in D_n \setminus D_{n-1}$ $\quad D_n \setminus D_{n-1}$

$\Rightarrow r_\pm := r \pm \frac{1}{2^n} = \frac{k}{2^n} \pm \frac{1}{2^n} = \frac{k \pm 1}{2^n}$ $\quad$ gerade Fall tritt nicht auf.

$$\begin{cases} = \frac{2l}{2^n} \pm \frac{1}{2^n} = \frac{l}{2^{n-1}} \pm \frac{1}{2^n} \Rightarrow k \in D_{n-1} \text{ ↯} & \text{für } k = 2l,\ l \in \mathbb{N} \\ = \frac{2l+1 \pm 1}{2^n} \begin{cases} = \frac{2l+2}{2^n} = \frac{l+1}{2^{n-1}} \in D_{n-1} \\ = \frac{l}{2^{n-1}} \in D_{n-1} \end{cases} & \text{für } k = 2l+1,\ l \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Für $r_+ = 1$ ist $\overline{O}_{r_-} \subseteq X \setminus A_2$ offene Umgebung

$\overset{T_4}{\Rightarrow} \overline{O}_{r_-} \subseteq O_r \subseteq \overline{O}_r \subseteq X \setminus A_2$

Für $r_+ < 1$ sind $O_{r_\pm}$ offen

$\overset{T_4}{\Rightarrow} A_1 \subseteq O_{r_-} \subseteq \overline{O}_{r_-} \subseteq O_{r_+} \subseteq X \setminus A_2$

$\overset{T_4}{\Rightarrow} A_1 \subseteq O_{r_-} \subseteq \overline{O}_{r_-} \subseteq O_r \subseteq \overline{O}_r \subseteq O_{r_+} \subseteq X \setminus A_2$

$\Rightarrow (O_s)_{s \in D_{n-1}}$ erfüllen (i) - (iii)

$\Rightarrow \forall r \in D_n \setminus D_{n-1} : (O_r)_{r \in D_n}$ erfüllen (i) - (iii)

**b)** z.z. $f : X \to [0,1]$ stetig

$f(x) > s \Rightarrow x \in X \setminus \overline{O}_s$ und $f(x) < r \Rightarrow x \in O_r$ $\quad \forall r, s \in D$

$f(x) = \inf \{ r \in D \mid x \in O_r \} > s$

$\Rightarrow \exists r \in D : s < r < f(x)$

$\overset{(iii)}{\Rightarrow} x \in X \setminus O_r \subseteq X \setminus \overline{O}_s$

$f(x) < r$

$\Rightarrow \exists s \in D \quad f(x) < s < r$

$\overset{(iii)}{\Rightarrow} x \in O_s \subseteq O_r$

<u>Lemma</u>: $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \left( D_n = \{ \frac{k}{2^n} \mid k = 0, 1, 2, 3, \ldots, 2^n \} \right)$ ist dicht in $[0,1]$.

<u>Beweis</u>: $x \in [0,1]$, $\varepsilon > 0$, $\frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0 : \frac{1}{2^n} < \varepsilon$

$\Rightarrow \exists k \in \{1, \ldots, n\} : \left| x - \frac{k}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall x \in [0,1], \varepsilon > 0 : \exists n \in \mathbb{N}_0 : \exists d = \frac{2^n}{n} \in D_n : |x - d| < \varepsilon$ ∎

$\mathcal{M} = \{[0,a) \mid a \in (0,1]\} \cup \{(a,1] \mid a \in (0,1]\}$ ist Subbasis der Standard topologie

Bsp. 1.27 zeigt $\{[0,a), (a,1] \mid a \in (0,1)\}$ eine Subbasis von $\mathcal{O}_{[0,1]}$ ist.

L.13.4 $\Rightarrow$ Es bleibt zu zeigen, dass $f^{-1}([0,a))$ und $f^{-1}((a,1])$ offen sind.

Sei $x \in f^{-1}((a,1])$

$\Rightarrow \exists r \in D: a < r < f(x)$

$\Rightarrow x \in X \setminus \overline{O}_r = U_x$

$\Rightarrow \forall y \in U_x: f(y) \geq r > a \Rightarrow U_x \subseteq f^{-1}((a,1])$

$\Rightarrow \forall x \in f^{-1}((a,1]) \; \exists U_x \subseteq f^{-1}((a,1])$

$\Rightarrow f^{-1}((a,1]) = \bigcup_{x \in f^{-1}((a,1])} U_x \Rightarrow f^{-1}((a,1])$ ist als abz. Vereinigung offener Menge offen.

Sei $x \in f^{-1}([0,a))$

$\Rightarrow \exists r \in D: f(x) < r < a$

$\Rightarrow x \in O_r := U_x$ offen

$\Rightarrow \forall y \in U_x: f(y) \leq r < a$

$\Rightarrow U_x \subseteq f^{-1}([0,a))$

$\Rightarrow \forall x \in f^{-1}([0,a)) \; \exists U_x \subseteq f^{-1}([0,a))$ offen

$\Rightarrow f^{-1}([0,a)) = \bigcup_{x \in f^{-1}([0,a))} U_x$ abz. Vereinigung offener Menge ∎

Man kann nun für jede stetige Funktion auf einer abg. Teilmenge eines normalen topologischen Raums eine stetige Fortsetzung auf den ganzen Raum konstruieren. Konstruktion mit Hilfe von Urysohn-Funktionen eine Folge von auf dem ganzen Raum definierten Treppenfunktionen, welche die Funktion auf dem Teilraum annähern und eine gleichmäßig konvergente Reihe bilden.

Satz 2.2.7: (Fortsetzungssatz von Tietze)

Sei $(X, \mathcal{O})$ normal, $A \subseteq X$ abg. und $f: A \to \mathbb{R}$ stetig.

$\exists\, F: X \to \mathbb{R},\ F|_A = f$ stetig.

Beweis:

(1) Annahme $f: A \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(A) \subseteq [-1,1]$

Konstruktion von $F: X \to [-1,1]$, $F|_A = f$ durch Approximation von $f: A \to [-1,1]$ durch eine Reihe

Konstruiere Folge stetiger Abb.:

$F_n: X \to \underbrace{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n, \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}_{\frac{1}{2}\left[-\left(\frac{2}{3}\right)^n, \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}$ mit $\left|f(a) - \sum_{k=1}^{n}{}' F_k(a)\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \forall a \in A, n \in \mathbb{N}_0$ $(\star)$

$F_0 \equiv 0$.

Sei O.b.d.A $|F_n(a) - F_m(a)| = \left|\sum_{k=m+1}^{n}{}' F_k(a)\right|$

Sei $f(a) = \sum_{k=1}^{n}{}' F_k(a) + R_n(a)$ mit $|R_n(a)| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$= \sum_{k=1}^{m}{}' F_k(a) + R_m(a)$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}{}' F_k(a) = f(a) - R_n(a)$

$\sum_{k=1}^{m}{}' F_k(a) = f(a) - R_m(a)$

$\Rightarrow |F_n(a) - F_m(a)| = |R_m(a) - R_n(a)| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^m + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \frac{1}{2}\left(2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^m\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^m$

$\Rightarrow \sup_{x \in X} |F_n(x) - F_m(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{\min(m,n)}$

$\Rightarrow F = \sum_{k=0}^{\infty}{}' F_k$ konvergiert gleichmäßig mit

- $|F(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty}{}' |F_k(x)| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty}{}' \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3-2} = 1$ für $x \in X$
- $F(a) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n}{}' F_k(a) = f(a)$ für $a \in A$

Konstruktion:

$g(a) := f(a) - \sum_{k=1}^{n} F_k(a)$

$\Rightarrow A_1^n = g^{-1}\left(\left[\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n, \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]\right)$

Urbilder abg. Menge unter stetiger Abb. sind abg.

$F_0 \equiv 0$

Seien $F_1, \dots, F_n$ wie in $(\star)$ konstruiert.

Betrachte $A_1^n := \left\{a \in A \,\middle|\, f(a) - \sum_{k=1}^{n}{}' F_k(a) \in \left[\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n, \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]\right\}$

$A_2^n := \left\{a \in A \,\middle|\, f(a) - \sum_{k=1}^{n}{}' F_k(a) \in \left[-\left(\frac{2}{3}\right)^n, -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]\right\}$, $A_1^n \cap A_2^n = \emptyset$

$A_1^n, A_2^n$ wegen Stetigkeit von $f$ und $F_k|_A$ abg. in $A$ und damit auch in $X$

Lemma v. Urysohn

$\Rightarrow \exists\, h_n: X \to [0,1]: h_n|_{A_1^n} \equiv 0,\ h_n|_{A_2^n} \equiv 1$

$F_{n+1}: X \to \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}, \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$, $x \mapsto \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{2} - h_n\right)$

$\Rightarrow F_{n+1}$ stetig

$F_{n+1}(a) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$, $a \in A_1^n$ und $F_{n+1}(a) = -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$, $a \in A_2^n$

$$\Big|f(a) - \sum_{k=1}^{n+1}{}' F_k(a)\Big| = \Big|f(a) - \sum_{k=1}^{n}{}' F_k(a) - \frac{2^n}{3^{n+1}}\Big|$$

$$\le \Big|f(a) - \sum_{k=1}^{n}{}' F_k(a)\Big| - \frac{2^n}{3^{n+1}} \quad \Big(\text{da } f(a) - \sum_{k=1}^{n}{}' F_k(a) \ge \frac{2^n}{3^{n+1}}\Big)$$

$$\le \Big(\frac{2}{3}\Big)^n - \frac{2^n}{3^{n+1}}$$

$$= \frac{2^n}{3^n}\Big(1 - \frac{1}{3}\Big)$$

$$= \Big(\frac{2}{3}\Big)^{n+1} \qquad \text{für } a \in A_1^n$$

$$\Big|f(a) - \sum_{k=1}^{n+1}{}' F_k(a)\Big| = \Big|\underbrace{f(a) - \sum_{k=1}^{n}{}' F_k(a)}_{\le -\frac{2^n}{3^{n+1}}} + \frac{2^n}{3^{n+1}}\Big| \le \Big(\frac{2}{3}\Big)^n - \frac{2^n}{3^{n+1}} = \Big(\frac{2}{3}\Big)^{n+1} \quad \text{für } a \in A_2^n$$

Für $a \in A \setminus (A_1^n \cup A_2^n)$ gilt $f(a) - \sum_{k=1}^{n}{}' F_k(a) \in \Big[-\frac{1}{3}\Big(\frac{2}{3}\Big)^n, \frac{1}{3}\Big(\frac{2}{3}\Big)^n\Big]$ per Induktionsannahme, und per Definition von $A_1^n, A_2^n$

$$\Rightarrow \Big|f(a) - \sum_{k=1}^{n+1}{}' F_k(a)\Big| \overset{\Delta\text{-UGL}}{\le} \Big|f(a) - \sum_{k=1}^{n}{}' F_k(a)\Big| + |F_{n+1}(a)|$$

$$\le \frac{1}{3}\Big(\frac{2}{3}\Big)^n + \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{3}\Big)^{n+1} = \Big(\frac{2}{3}\Big)^{n+1} \quad \blacksquare$$

$B_\varepsilon^n(0) \cong \mathbb{R}^n$

② Sei $f: A \to \mathbb{R}$ stetig (beliebig).

$\exists\, \phi: \mathbb{R} \to (-1,1)$, Homöomorphismus, $x \mapsto \frac{x}{1+\sqrt{x^2}}$,

$\phi^{-1}: (-1,1) \to \mathbb{R}$, $\phi^{-1}(y) := \begin{cases} \frac{y}{1-y} & y \ge 0 \\ \frac{y}{1+y} & y < 0. \end{cases}$

Anwendung von ① (Tietze) auf $f$ liefert: $f' = \phi \circ f: A \to (-1,1)$ mit $f'(A) \subseteq (-1,1)$

$\Rightarrow F': X \to \mathbb{R}$, $F'|_A = f'$ und $F'(X) \subseteq [-1,1]$

Sei $h: X \to [0,1]$ Urysohn-Funktion (Wird verwendet um Bildbereich einzuschränken)

$A_1 = F'^{-1}(\{\pm 1\})$ abg, $A_2 = A$

$F'(A) = f'(A) \subseteq (-1,1) \Rightarrow A_1 \cap A = \emptyset$

$\Rightarrow F'' = h \cdot F': X \to \mathbb{R}$

$F''|_A = f'$ und $F''(X) \subseteq (-1,1)$

$\Rightarrow F = \phi^{-1} \circ F'': X \to \mathbb{R}$ ist die gesuchte stetige Abb. $\blacksquare$