Übungen zur kommutativen Algebra

Luciano Melodia

6. November 2023

1 Übung 1.2

Satz 1.1. Eine Teilmenge $X \subseteq A^1$ ist genau dann Zariski-abgeschlossen, wenn X gleich A^1 oder endlich ist.

Beweis. Wir beweisen diese Aussage in zwei Schritten:

Hinrichtung: Sei X Zariski-abgeschlossen.

1. Falls X die Nullstellenmenge eines Polynoms $f \in k[x]$ ist und f das Nullpolynom ist, dann ist $X = A^1$.
2. Falls f nicht das Nullpolynom ist, dann besitzt f, da k algebraisch abgeschlossen ist, nur endlich viele Nullstellen. Also ist X eine endliche Menge.

Rückrichtung:

1. Wenn $X = A^1$ ist, dann ist X offensichtlich abgeschlossen.
2. Wenn X endlich ist, zum Beispiel $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, dann lässt sich ein Polynom f konstruieren, das diese Punkte als Nullstellen hat, nämlich $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$.
3. Somit ist X die Nullstellenmenge von f und daher Zariski-abgeschlossen.

$\square$

2 Übung 1.3

2.1 a)

- Wir wollen zeigen, dass für eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{A}^n$ die Menge

  $$I(X) = \{f \in k[x_1, x_2, \dots, x_n] \mid f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0 \text{ für alle } (a_1, a_2, \dots, a_n) \in X\}$$

  ein Ideal im Polynomring $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ist.

Beweis. Wir müssen zwei Eigenschaften zeigen:

Abgeschlossenheit unter Addition:

Seien $f, g \in I(X)$. Für alle $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in X$ gilt $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$ und $g(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$. Also folgt für jedes Element in X:

$$(f + g)(a_1, a_2, \ldots, a_n) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n) + g(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0 + 0 = 0.$$

Daher ist $f + g \in I(X)$.

Abgeschlossenheit unter Multiplikation mit Ringelementen:

Sei $f \in I(X)$ und $h \in k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Dann gilt für jedes $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in X$ und f, dass $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$. Daher:

$$(hf)(a_1, a_2, \ldots, a_n) = h(a_1, a_2, \ldots, a_n)f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = h(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot 0 = 0.$$

Somit ist auch $hf \in I(X)$.

Da $I(X)$ sowohl unter Addition als auch unter Multiplikation mit Ringelementen abgeschlossen ist, ist es ein Ideal in $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. □

- Sei $\mathfrak{a} \subseteq k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ das von einer Menge $E \subseteq k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ erzeugte Ideal. Dann gilt $V(E) = V(\mathfrak{a})$.

Beweis. Wir zeigen die Gleichheit $V(E) = V(\mathfrak{a})$ indem wir beide Inklusionen $V(E) \subseteq V(\mathfrak{a})$ und $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(E)$ beweisen.

Zunächst sei $x \in V(E)$. Das bedeutet, dass für jedes Polynom $f \in E$, $f(x) = 0$ gilt. Da $\mathfrak{a}$ das von E erzeugte Ideal ist, kann jedes Element $g \in \mathfrak{a}$ als eine Linearkombination von Elementen in E mit Koeffizienten in $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ dargestellt werden. Also, wenn $g = \sum r_i f_i$ mit $r_i \in k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ und $f_i \in E$, dann ist $g(x) = \sum r_i(x) f_i(x) = 0$, da jedes $f_i(x) = 0$. Folglich ist $x \in V(\mathfrak{a})$.

Sei umgekehrt $x \in V(\mathfrak{a})$. Für jedes Polynom $g \in \mathfrak{a}$, gilt $g(x) = 0$. Insbesondere gilt das für alle $f \in E$, da $E \subseteq \mathfrak{a}$. Also ist $f(x) = 0$ für alle $f \in E$, und daher $x \in V(E)$.

Daraus folgt die Gleichheit $V(E) = V(\mathfrak{a})$. □

- Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n$ eine Teilmenge und $\mathfrak{a} \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ ein Ideal. Dann gilt $X \subseteq V(\mathfrak{a})$ genau dann, wenn $I(X) \supseteq \mathfrak{a}$.

Beweis. ($\Rightarrow$) Angenommen, $X \subseteq V(\mathfrak{a})$. Dann ist jedes $x \in X$ eine Nullstelle von jedem Polynom in $\mathfrak{a}$, also für jedes $f \in \mathfrak{a}$, gilt $f(x) = 0$. Daher ist jedes $f \in \mathfrak{a}$ in $I(X)$ enthalten, weil $I(X)$ aus allen Polynomen besteht, die auf X verschwinden. Dies zeigt, dass $I(X) \supseteq \mathfrak{a}$.

($\Leftarrow$) Umgekehrt, wenn $I(X) \supseteq \mathfrak{a}$, dann ist jedes Polynom in $\mathfrak{a}$ auch in $I(X)$, was bedeutet, dass es auf X null wird. Folglich ist jedes $x \in X$ eine Nullstelle für jedes Polynom in $\mathfrak{a}$, was $x \in V(\mathfrak{a})$ impliziert. Daher ist $X \subseteq V(\mathfrak{a})$.

Somit haben wir $X \subseteq V(\mathfrak{a})$ genau dann, wenn $I(X) \supseteq \mathfrak{a}$. $\square$

- Die Abbildungen V und I sind inklusionsumkehrend.

  Beweis. Für zwei Ideale I und J in $k[x_1, \ldots, x_n]$ gilt:

  1. Angenommen $I \subseteq J$. Für jeden Punkt $x \in V(J)$, haben wir $f(x) = 0$ für alle $f \in J$. Insbesondere gilt dies für alle $f \in I$, und daher ist $x \in V(I)$, was zeigt, dass $V(I) \supseteq V(J)$.

  Für zwei algebraische Mengen V und W in $\mathbb{A}^n$ gilt:

  2. Angenommen $V \subseteq W$. Jedes Polynom f in $I(W)$ verschwindet auf W. Weil $V \subseteq W$, verschwindet f ebenfalls auf V, und somit $f \in I(V)$. Dies zeigt, dass $I(V) \supseteq I(W)$. $\square$

- Für jede Teilmenge $X \subseteq \mathbb{A}^n$ gilt $X \subseteq V(I(X))$, mit Gleichheit genau dann, wenn X Zariski-abgeschlossen ist.

  Beweis. Zuerst zeigen wir, dass $X \subseteq V(I(X))$. Für jeden Punkt $x \in X$, verschwindet jedes Polynom $f \in I(X)$ auf X, insbesondere auf x, was bedeutet, dass $x \in V(I(X))$. Dies zeigt, dass $X \subseteq V(I(X))$.

  Nun zeigen wir die Gleichheit. Wenn X Zariski-abgeschlossen ist, dann ist X die Varietät einer Menge von Polynomen, d.h. $X = V(J)$ für ein Ideal J. Daher ist $I(X)$, das Ideal aller Polynome, die auf X verschwinden, gleich J, und somit ist $X = V(J) = V(I(X))$.

  Umgekehrt, wenn $X = V(I(X))$, dann ist X per Definition die Varietät einer Menge von Polynomen und daher Zariski-abgeschlossen. $\square$

- Für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ gilt $\mathfrak{a} \subseteq I(V(\mathfrak{a}))$. Gleichheit gilt genau dann, wenn $\mathfrak{a}$ ein Radikalideal ist.

  Beweis. Zu zeigen ist zunächst, dass $\mathfrak{a} \subseteq I(V(\mathfrak{a}))$. Jedes Polynom f aus $\mathfrak{a}$ verschwindet auf $V(\mathfrak{a})$, womit f in $I(V(\mathfrak{a}))$ liegt, was $\mathfrak{a} \subseteq I(V(\mathfrak{a}))$ zeigt.

  Um Gleichheit zu zeigen, nehmen wir an, dass $\mathfrak{a}$ ein Radikalideal ist. Wenn $f \in I(V(\mathfrak{a}))$, dann verschwindet f auf $V(\mathfrak{a})$ und somit ist jede Potenz von f in $\mathfrak{a}$, was impliziert, dass f selbst in $\mathfrak{a}$ liegt. Daher ist $I(V(\mathfrak{a})) \subseteq \mathfrak{a}$, und wir erhalten $\mathfrak{a} = I(V(\mathfrak{a}))$.

  Wenn $\mathfrak{a}$ kein Radikalideal ist, existiert ein Polynom f, dessen Potenz f^m in $\mathfrak{a}$ liegt, jedoch nicht f selbst. Dieses f würde in $I(V(\mathfrak{a}))$ liegen, zeigt aber, dass $\mathfrak{a}$ nicht gleich $I(V(\mathfrak{a}))$ sein kann. $\square$

- Für den affinen Raum $\mathbb{A}^n$ über einem Körper k gilt:

  1. $V(0) = \mathbb{A}^n$.
  2. $V(1) = V(k[x_1, \ldots, x_n]) = \emptyset$.

Beweis. 1. Das Nullpolynom verschwindet an jedem Punkt von $\mathbb{A}^n$, daher sind alle Punkte in $\mathbb{A}^n$ enthalten in der Varietät von $\{0\}$, also $V(0) = \mathbb{A}^n$.

2. Das konstante Polynom 1 ist nirgendwo in $\mathbb{A}^n$ null, und kein Punkt erfüllt die Gleichung $1 = 0$. Daher gibt es keine Punkte in der Varietät des Ideals $\{1\}$ oder jedes Ideals, das 1 enthält, einschlieSSlich des gesamten Polynomrings. Folglich ist $V(1) = V(k[x_1, \ldots, x_n]) = \emptyset$.

□

- Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ zwei Ideale. Dann gilt

$$V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$$

Beweis. Für die Gleichheit $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ beachten wir, dass ein Punkt x in $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ liegt, wenn jedes Produkt von Polynomen $f \cdot g$ mit $f \in \mathfrak{a}$ und $g \in \mathfrak{b}$ in x verschwindet. Da $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, ist jedes Polynom aus $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ auch in $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, woraus $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ folgt. Da die Umkehrung trivialerweise wahr ist, haben wir die erste Gleichheit bewiesen.

Für die Gleichheit $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$, bemerken wir, dass ein Polynom in $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ sowohl in $V(\mathfrak{a})$ als auch $V(\mathfrak{b})$ verschwindet, also ist $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$. Da jedes Polynom in $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ ist, gilt auch die umgekehrte Inklusion und damit die zweite Gleichheit. □

- Sei $\{\mathfrak{a}_i \subseteq k[x_1, \ldots, x_n] \mid i \in I\}$ eine Familie von Idealen. Dann gilt:

$$V\left(\bigcap_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right) = \bigcup_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i)$$

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass jeder Punkt, der in der Varietät eines jeden Ideals $\mathfrak{a}_i$ liegt, auch in der Varietät des Durchschnitts $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ liegt. Das bedeutet, dass $\bigcup_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i) \subseteq V\left(\bigcap_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right)$.

Nun sei x ein Punkt in $V\left(\bigcap_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right)$. Dann verschwindet jedes Polynom aus $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ in x. Da jedes Ideal $\mathfrak{a}_i$ alle seine Polynome in diesem Durchschnitt hat, verschwindet jedes Polynom aus jedem $\mathfrak{a}_i$ in x, und damit liegt x in $V(\mathfrak{a}_i)$ für alle $i \in I$. Dies zeigt, dass $V\left(\bigcap_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right) \subseteq \bigcup_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i)$.

Die umgekehrte Inklusion wurde bereits gezeigt, und somit haben wir die Gleichheit bewiesen. □

2.2 b)

Seien $E, F \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ Teilmengen. Dann gilt:

$$V(E) \cup V(F) = V(E \cdot F)$$

Beweis. Angenommen, ein Punkt x liegt in $V(E) \cup V(F)$. Das bedeutet, dass x entweder alle Polynome in E oder alle Polynome in F zu Null macht. Folglich macht x jedes Produkt von Polynomen ef mit $e \in E$ und $f \in F$ zu Null, da entweder $e(x) = 0$ oder $f(x) = 0$ gilt. Also liegt x in $V(E \cdot F)$.

Umgekehrt, wenn x in $V(E \cdot F)$ liegt, dann macht x jedes Produkt von Polynomen ef mit $e \in E$ und $f \in F$ zu Null. Insbesondere, wenn x nicht in $V(E)$ liegt (d.h., es gibt ein Polynom $e \in E$, das in x nicht verschwindet), dann muss für jedes $f \in F$ das Produkt ef verschwinden, was nur möglich ist, wenn jedes f in x verschwindet. Das zeigt, dass x in $V(F)$ liegt, und damit liegt x in $V(E) \cup V(F)$.

Daher haben wir gezeigt, dass $V(E) \cup V(F) = V(E \cdot F)$. □

3 Übung 1.7

3.1 a)

Satz 3.1. Ein Ideal $\mathfrak{a}$ in einem Ring R ist genau dann ein Radikalideal, wenn der Faktorring $R/\mathfrak{a}$ kein nilpotentes Element enthält, d.h., aus $a^n = 0$ in $R/\mathfrak{a}$ folgt $a = 0$.

Beweis. Sei $\mathfrak{a}$ ein Radikalideal in R und sei $\overline{r} = r + \mathfrak{a}$ ein nilpotentes Element in $R/\mathfrak{a}$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\overline{r}^n = r^n + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$. Das bedeutet, dass $r^n \in \mathfrak{a}$, und weil $\mathfrak{a}$ ein Radikalideal ist, folgt $r \in \mathfrak{a}$, also ist $\overline{r} = 0$ in $R/\mathfrak{a}$.

Umgekehrt, sei $R/\mathfrak{a}$ ein Ring ohne nilpotente Elemente und $r^n \in \mathfrak{a}$ für ein $r \in R$ und ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\overline{r}^n = 0$ in $R/\mathfrak{a}$, was bedeutet, dass $\overline{r}$ ein nilpotentes Element ist. Da aber $R/\mathfrak{a}$ keine nilpotenten Elemente enthält, muss $\overline{r} = 0$ sein, also $r \in \mathfrak{a}$, was zeigt, dass $\mathfrak{a}$ ein Radikalideal ist. □

3.2 b)

Satz 3.2. Jedes Primideal $\mathfrak{p}$ in einem Ring R ist ein Radikalideal.

Beweis. Angenommen, a ist ein Element von R so, dass $a^n \in \mathfrak{p}$ für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$. Da $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist, folgt aus $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \in \mathfrak{p}$, dass $a \in \mathfrak{p}$, da andernfalls $\mathfrak{p}$ das Produkt zweier Elemente enthalten würde, ohne eines der Elemente zu enthalten, was im Widerspruch zur Definition eines Primideals stünde. Daher ist jedes Primideal auch ein Radikalideal. □

3.3 c)

Satz 3.3. Beliebige Durchschnitte von Radikalidealen in einem Ring R sind Radikalideale.

Beweis. Seien $\{\mathfrak{a}_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Radikalidealen in R und sei $\mathfrak{a} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ ihr Durchschnitt. Angenommen, $r^n \in \mathfrak{a}$ für ein $r \in R$ und ein $n \in \mathbb{N}$. Da r^n im Durchschnitt aller $\mathfrak{a}_i$ liegt, muss r^n in jedem $\mathfrak{a}_i$ liegen. Da jedes $\mathfrak{a}_i$ ein Radikalideal ist, folgt, dass r in jedem $\mathfrak{a}_i$ liegen muss. Daher liegt r im Durchschnitt $\mathfrak{a}$, was zeigt, dass $\mathfrak{a}$ ein Radikalideal ist. □

3.4 d)

Satz 3.4. In einem kommutativen Ring R ist jedes Radikalideal gleich dem Durchschnitt von Primidealen.

Beweis. Sei $\mathfrak{a}$ ein Radikalideal in einem kommutativen Ring R. Wir wollen zeigen, dass $\mathfrak{a}$ als Durchschnitt von Primidealen dargestellt werden kann.

Nach dem Zornschen Lemma besitzt jede nichtleere teilweise geordnete Menge, in der jede total geordnete Teilmenge eine obere Schranke hat, ein maximales Element. Betrachte die Menge aller Ideale von R, die $\mathfrak{a}$ enthalten und kein Element von $R \setminus \mathfrak{a}$. Diese Menge ist teilweise geordnet durch Inklusion und besitzt ein maximales Element, das sich als Primideal erweist, da jedes maximale Ideal in einem kommutativen Ring ein Primideal ist.

Somit ist jedes Radikalideal $\mathfrak{a}$ ein Durchschnitt solcher maximalen (Prim-)Ideale. Genauer, jedes Element von $\mathfrak{a}$ ist in jedem dieser Primideale enthalten, und umgekehrt ist jedes Element, das in diesem Durchschnitt von Primidealen liegt, notwendigerweise ein Element von $\mathfrak{a}$, da $\mathfrak{a}$ radikal ist. Daher ist $\mathfrak{a}$ der Durchschnitt aller Primideale, die es enthalten. □

3.5 e)

Betrachten Sie den Ring $R = \mathbb{C}[x, y]/(xy)$ und die Ideale $a = (x)$ und $b = (y)$. Es ist klar, dass sowohl a als auch b Radikalideale in R sind, da R ein Faktorring nach einem Primideal ist und in einem solchen Ring jedes Hauptideal radikal ist.

Nun betrachten wir die Summe $a + b$. Das Element $z = x + y$ ist nicht in $a + b$, da x und y keine Vielfachen voneinander sind aufgrund der Relation $xy = 0$ in R. Jedoch, $z^2 = x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + y^2$ liegt in $a + b$, da $x^2 \in a$ und $y^2 \in b$. Deshalb ist z ein Element, dessen Quadrat in $a + b$ liegt, während z selbst nicht in $a + b$ liegt, was zeigt, dass $a + b$ kein Radikalideal ist.

4 Übung 1.11

4.1 a)

Definition 4.1 (Galoiszusammenhang)**.** Seien $(S, \leq_S)$ und $(T, \leq_T)$ zwei partiell geordnete Mengen. Zwei Abbildungen $f : S \to T$ und $g : T \to S$ bilden einen *Galoiszusammenhang*, wenn für alle $s \in S$ und $t \in T$ gilt:

$$s \leq_S g(t) \iff f(s) \leq_T t.$$

Ein Element $s \in S$ bzw. $t \in T$ heiSSt *abgeschlossen*, wenn $s = g(f(s))$ bzw. $t = f(g(t))$.

Satz 4.1. Sei $(S, \leq_S)$ und $(T, \leq_T)$ ein Galoiszusammenhang mit den Abbildungen $f : S \to T$ und $g : T \to S$. Für jedes $s \in S$, ist das Element $\overline{s} := g(f(s))$ der Abschluss von s, und es ist das minimale abgeschlossene Element, das s enthält. Entsprechend ist für jedes $t \in T$, das Element $\overline{t} := f(g(t))$ der Abschluss von t.

Beweis. Beweisen wir zuerst den Teil für S: Sei $s \in S$. Wir wissen, dass $s \leq_S g(f(s)) = \overline{s}$ nach der Definition des Galoiszusammenhangs. Nehmen wir nun an, dass es ein abgeschlossenes Element $s' \in S$ gibt, sodass $s \leq_S s'$. Dann folgt aus der Eigenschaft des Galoiszusammenhangs, dass $f(s) \leq_T f(s')$, und weil s' abgeschlossen ist, haben wir $s' = g(f(s'))$. Somit ergibt sich $f(s) \leq_T f(g(f(s')))$, was wiederum bedeutet, dass $s \leq_S g(f(s)) \leq_S g(f(s')) = s'$.

Also ist $g(f(s))$ das minimale Element mit dieser Eigenschaft, und somit ist $\overline{s}$ der Abschluss von s. Da $\overline{s}$ abgeschlossen ist, gilt auch $\overline{s} = g(f(\overline{s}))$, was bedeutet, dass $\overline{s}$ tatsächlich abgeschlossen ist.

Der Beweis für T ist analog. □

Anmerkung 4.1. Die Aussage, dass $s = g(f(s))$ bzw. $t = f(g(t))$ abgeschlossen ist, kann man als Reflexivität des Galoiszusammenhangs interpretieren.

4.2 b)

Lemma 4.2. In einem Galoiszusammenhang sind die Abbildungen $f : S \to T$ und $g : T \to S$ inklusionserhaltend.

Beweis. Seien $s_1, s_2 \in S$ und $t_1, t_2 \in T$ mit $s_1 \leq_S s_2$ und $t_1 \leq_T t_2$.

Zu zeigen: $f(s_1) \leq_T f(s_2)$ und $g(t_1) \leq_S g(t_2)$.

Da $s_1 \leq_S s_2$, impliziert der Galoiszusammenhang, dass $f(s_1) \leq_T f(g(f(s_2)))$. Aber $f(s_2) \leq_T f(g(f(s_2)))$ wegen der Eigenschaft des Galoiszusammenhangs und weil $s_2 \leq_S g(f(s_2))$. Also ist $f(s_1) \leq_T f(s_2)$.

Analog zeigt man, dass $g(t_1) \leq_S g(t_2)$, indem man den Galoiszusammenhang und die Eigenschaft $t_1 \leq_T t_2$ verwendet.

Somit sind f und g inklusionserhaltend. □

4.3 c)

Satz 4.3. In einem Galoiszusammenhang induzieren die Abbildungen $f : S \to T$ und $g : T \to S$ zueinander inverse Bijektionen zwischen den Mengen der abgeschlossenen Elemente.

Beweis. Sei $\overline{S}$ die Menge der abgeschlossenen Elemente von S und $\overline{T}$ die Menge der abgeschlossenen Elemente von T.

Wir zeigen zuerst, dass f eine Bijektion von $\overline{S}$ nach $\overline{T}$ ist. Sei $s \in \overline{S}$, dann ist $s = g(f(s))$, und somit ist $f(s)$ abgeschlossen in T. Daher ist f wohldefiniert als Funktion von $\overline{S}$ nach $\overline{T}$.

Nun zeigen wir, dass f injektiv ist. Angenommen, $f(s_1) = f(s_2)$ für $s_1, s_2 \in \overline{S}$, dann folgt $s_1 = g(f(s_1)) = g(f(s_2)) = s_2$, und somit ist f injektiv.

Um zu zeigen, dass f surjektiv ist, sei $t \in \overline{T}$. Da $t = f(g(t))$, gibt es ein $s = g(t) \in \overline{S}$, sodass $f(s) = t$, also ist f surjektiv.

Somit ist f eine Bijektion, und eine analoge Argumentation zeigt, dass auch g eine Bijektion ist. Da g die Umkehrfunktion von f auf den Mengen der abgeschlossenen Elemente ist, sind f und g zueinander inverse Bijektionen. □

5 Übung 1.12

5.1 a)

Satz 5.1. Sei P_n ein faktorieller Ring und $0 \neq f \in P_n$ ein Polynom mit der Primfaktorzerlegung $f = \prod_{i=1}^{s} f_i^{m_i}$, wobei die f_i irreduzibel und paarweise verschieden sind und $m_i \geq 1$. Dann ist das Radikal des Ideals (f), notiert als $\sqrt{(f)}$, gleich (f^e), wobei $f^e := \prod_{i=1}^{s} f_i$. Insbesondere ist (f) genau dann ein Radikalideal, wenn f quadratfrei ist.

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass jedes $g \in \sqrt{(f)}$ in der Form $g = h \cdot f^e$ für ein gewisses $h \in P_n$ dargestellt werden kann. Sei $g \in \sqrt{(f)}$, dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $g^k \in (f)$. Das bedeutet, dass f ein Teiler von g^k ist. Aufgrund der eindeutigen Primfaktorzerlegung in P_n müssen dann alle f_i Teiler von g sein. Da g kein $f_i^{m_i}$ mit $m_i > 1$ enthalten kann (sonst wäre g^k nicht in (f)), muss g ein Vielfaches von f^e sein.

Umgekehrt sei $g = h \cdot f^e$. Dann ist offensichtlich $g \in \sqrt{(f)}$, denn $g^k = h^k \cdot (f^e)^k = h^k \cdot f^k \cdot f^{e(k-1)}$ und für $k \geq \max\{m_i\}$ ist dies ein Element von (f).

Damit haben wir gezeigt, dass $\sqrt{(f)} = (f^e)$. Weiterhin folgt, dass (f) genau dann ein Radikalideal ist, wenn f quadratfrei ist, also wenn $m_i = 1$ für alle i, da in diesem Fall $f^e = f$ und somit $\sqrt{(f)} = (f)$. □

5.2 b)

Satz 5.2. Sei $f \in P_n$ irreduzibel und $g \in P_n$ so, dass aus $f(x) = 0$ folgt $g(x) = 0$ für alle $x \in A^n$. Dann ist f ein Teiler von g.

Beweis. Da f irreduzibel ist, ist das von f erzeugte Ideal (f) ein Primideal in P_n. Dies folgt aus der Definition eines irreduziblen Elements in einem Integritätsring und der Tatsache, dass P_n ein solcher Ring ist. Die Voraussetzung, dass $f(x) = 0 \Rightarrow g(x) = 0$ für alle $x \in A^n$, bedeutet, dass jede Nullstelle von f auch eine Nullstelle von g ist.

Da P_n über einem algebraisch abgeschlossenen Körper definiert ist, können wir den Hilbertschen Nullstellensatz anwenden, der besagt, dass wenn ein Polynom h in einem Ideal I verschwindet auf der algebraischen Menge $V(I)$, dann gibt es eine natürliche Zahl m so, dass $h^m \in I$.

Im Fall unseres Primideals (f), bedeutet dies, dass $g^m \in (f)$ für ein gewisses $m \in \mathbb{N}$. Da f irreduzibel ist, folgt daraus, dass g bereits in (f) liegen muss, denn ein Primideal ist insbesondere auch ein Radikalideal, und somit ist g ein Vielfaches von f, d.h. f teilt g.

Somit haben wir gezeigt, dass f ein Teiler von g ist. □

5.3 c)

Satz 5.3. Seien $q_1, q_2 \in P_n$ zwei quadratische Polynome, welche die Quadriken $Q_1 = V(q_1)$ und $Q_2 = V(q_2)$ definieren. Dann ist $Q_1 = Q_2$ genau dann, wenn q_1 ein skalares Vielfaches von q_2 ist.

Beweis. ($\Rightarrow$) Nehmen wir zuerst an, dass $Q_1 = Q_2$. Dies bedeutet, dass jede Lösung von q_1 auch eine Lösung von q_2 ist und umgekehrt. Da beide Polynome quadratisch sind, können wir sie als $q_1(x) = x^T A_1 x + b_1^T x + c_1$ und $q_2(x) = x^T A_2 x + b_2^T x + c_2$ schreiben, wobei A_1, A_2 symmetrische Matrizen sind, b_1, b_2 Vektoren und c_1, c_2 Skalare. Da die Lösungsmengen identisch sind, müssen die entsprechenden Formen bis auf einen nicht-verschwindenden Skalarfaktor λ gleich sein, d.h., $\lambda q_1(x) = q_2(x)$ für alle x. Daraus folgt, dass $A_1 = \lambda A_2$, $b_1 = \lambda b_2$, und $c_1 = \lambda c_2$.

($\Leftarrow$) Umgekehrt, nehmen wir nun an, dass $q_1 = \lambda q_2$ für einen Skalar $\lambda \neq 0$. Dann ist jede Nullstelle von q_2 offensichtlich auch eine Nullstelle von q_1 und umgekehrt. Dies zeigt, dass $V(q_1) = V(\lambda q_2) = V(q_2)$, und somit $Q_1 = Q_2$.

Damit haben wir bewiesen, dass $Q_1 = Q_2$ genau dann gilt, wenn q_1 ein skalares Vielfaches von q_2 ist. □

6 Übung 1.19

6.1 a)

Proposition 6.1. Sei A ein Ring und X eine affine Varietät. Dann existiert eine natürliche Bijektion zwischen den Punkten von X und den maximalen Idealen von $O(X)$, dem Ring der regulären Funktionen auf X.

Beweis. Für jeden Punkt $x \in X$, betrachten wir das Ideal M_x aller regulären Funktionen $f \in O(X)$, die im Punkt x verschwinden. Offensichtlich ist M_x ein maximales Ideal in $O(X)$, denn wenn es in einem gröSSeren Ideal N enthalten wäre, dann würde N eine Funktion enthalten, die nicht im Punkt x verschwindet, was ein Widerspruch zur Definition von M_x wäre.

Umgekehrt, jedem maximalen Ideal M in $O(X)$ kann man den gemeinsamen Nullpunkt aller Funktionen in M zuordnen. Dies definieren wir als den Punkt x_M in X. Da $O(X)$ die Eigenschaft hat, dass jedes maximale Ideal dem Kern eines Ringhomomorphismus von $O(X)$ in einen algebraisch abgeschlossenen Körper entspricht, ist dieser Punkt eindeutig bestimmt.

Die Abbildungen $x \mapsto M_x$ und $M \mapsto x_M$ sind invers zueinander, was die Bijektion beweist. Insbesondere ist jede reguläre Funktion auf X, die in einem maximalen Ideal M enthalten ist, identisch null auf dem entsprechenden Punkt x_M von X. Umgekehrt, jede reguläre Funktion, die an einem Punkt x verschwindet, ist in dem entsprechenden maximalen Ideal M_x enthalten. □

6.2 b)

Proposition 6.2. Sei A eine endlich erzeugte K-Algebra. Dann ist die Abbildung ϕ, die jedem K-Algebrahomomorphismus α von A nach K sein Kern zuordnet, eine Bijektion zwischen der Menge aller K-Algebrahomomorphismen $\mathcal{A}_K(A)$ und der Menge aller maximalen Ideale Max A von A.

Beweis. Wir zeigen, dass die Abbildung $\phi : \mathcal{A}_K(A) \to \text{Max } A$, definiert durch $\phi(\alpha) = \text{Kern}(\alpha)$, bijektiv ist.

Injektivität: Angenommen $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_K(A)$ und $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$. Da der Kern von α und β identisch ist, und da ein K-Algebrahomomorphismus eindeutig durch seine Aktion auf den Erzeugern bestimmt ist, muss $\alpha = \beta$ sein.

Surjektivität: Jedes maximale Ideal M von A entspricht nach dem Homomorphiesatz einem Homomorphismus von A nach K, da A/M isomorph zu K ist. Dieser Homomorphismus, bezeichnet mit α_M, hat M als Kern. Somit gibt es für jedes maximale Ideal in A einen entsprechenden K-Algebrahomomorphismus in $\mathcal{A}_K(A)$.

Damit ist ϕ eine Bijektion, was zeigt, dass die Punkte der Spektralmenge der K-Algebra A den K-Algebrahomomorphismen entsprechen. □

7 Übung 1.23

In der algebraischen Geometrie und kommutativen Algebra offenbaren die Zuordnungen zwischen *Max*, $\mathcal{A}_K$ und *O* eine tiefe Dualität zwischen geometrischen Objekten und algebraischen Strukturen. Die Beziehung kann wie folgt verstanden werden:

1. **Max A**: Die Menge aller maximalen Ideale eines kommutativen Rings A wird mit *Max A* bezeichnet. Diese maximalen Ideale entsprechen den Punkten auf einer Varietät, wenn A als Koordinatenring interpretiert wird.
2. $\mathcal{A}_K(A)$: Die Menge aller K-Algebrahomomorphismen von einer K-Algebra A nach K repräsentiert die Punkte einer Varietät, an denen eine gegebene Polynomgleichung null wird.
3. **O(X)**: Der Ring der regulären Funktionen auf einer affinen Varietät X, der die algebraische Struktur der Varietät durch Funktionen einfängt, die jedem Punkt einen Wert in K zuordnen.

Die Inversion dieser Beziehungen wird durch folgende Punkte illustriert:

- **Von Max zu O**: Ein maximales Ideal aus *Max A* korrespondiert mit einem Punkt auf der Varietät. Der Ring *O(X)* bei diesem Punkt beschreibt die lokale Struktur der Varietät.
- **Von $\mathcal{A}_K$ zu Max**: Ein K-Algebrahomomorphismus aus $\mathcal{A}_K(A)$ definiert ein maximales Ideal, das einem Punkt auf der Varietät entspricht.

- **Von O zu $\mathcal{A}_K$**: Die Auswertung der regulären Funktionen *O(X)* an einem Punkt gibt einen K-Algebrahomomorphismus nach K, der das lokale Verhalten an diesem Punkt beschreibt.

In diesem Sinne, geprägt durch den Hilbertschen Nullstellensatz und das Spektrum eines Rings, können wir sagen, dass *Max* und $\mathcal{A}_K$ invers zu O sind, weil sie eine Verbindung zwischen der geometrischen Welt (Punkte auf der Varietät) und der algebraischen Welt (maximale Ideale und Körperhomomorphismen) herstellen.

8 Übung 1.22

Wir zeigen, dass für einen nicht leeren topologischen Raum X folgende Eigenschaften äquivalent sind:

1. X ist irreduzibel.
2. Aus $X = Y \cup Z$ mit $Y, Z \subseteq X$ abgeschlossen folgt $Y = X$ oder $Z = X$.
3. Aus $Y, Z \subset X$ abgeschlossen folgt $Y \cup Z \subset X$.
4. Aus $U \cap V = \emptyset$ mit $U, V \subseteq X$ offen folgt $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$.
5. Aus $U, V \subseteq X$ offen und nicht leer folgt $U \cap V \neq \emptyset$.

Um zu zeigen, dass diese Eigenschaften äquivalent sind, zeigen wir, dass jede Eigenschaft aus jeder anderen folgt.

$(1) \Rightarrow (2)$: Angenommen, X ist irreduzibel und $X = Y \cup Z$ für abgeschlossene Y und Z. Dann können $X \setminus Y$ und $X \setminus Z$ nicht gleichzeitig offen und nicht leer sein, ohne dass ihr Schnitt auch nicht leer ist, da sonst X reduzibel wäre. Daher muss $Y = X$ oder $Z = X$ gelten.

$(2) \Rightarrow (3)$: Angenommen, (2) ist wahr, und $Y, Z \subset X$ sind abgeschlossen. Wäre $Y \cup Z = X$, dann müsste nach (2) $Y = X$ oder $Z = X$ sein, was im Widerspruch zur Annahme steht, dass Y und Z echte Teilmengen sind. Also muss $Y \cup Z \subset X$ sein.

$(3) \Rightarrow (4)$: Angenommen, (3) ist wahr, und $U \cap V = \emptyset$ für offene Mengen U und V. Die Komplemente $X \setminus U$ und $X \setminus V$ sind abgeschlossen und ihre Vereinigung ist X. Da aber nach (3) $Y \cup Z \subset X$, muss $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$ sein.

$(4) \Rightarrow (5)$: Angenommen, (4) ist wahr. Angenommen, U und V sind offene, nicht leere Teilmengen von X. Wäre $U \cap V = \emptyset$, dann würde nach (4) $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$ folgen, ein Widerspruch zur Annahme, dass beide nicht leer sind. Also muss $U \cap V \neq \emptyset$ sein.

$(5) \Rightarrow (1)$: Angenommen, (5) ist wahr. Wäre X nicht irreduzibel, dann gäbe es zwei nicht leere offene Mengen U und V, sodass $U \cap V = \emptyset$, was (5) widerspricht. Also muss X irreduzibel sein.

Damit haben wir die Äquivalenz der Eigenschaften gezeigt.

9 Übung 1.23

Satz 9.1. Ein Hausdorffraum ist genau dann irreduzibel, wenn er aus nur einem Punkt besteht.

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass ein einpunktiger Raum irreduzibel ist. Betrachten wir einen topologischen Raum X, der nur aus einem Punkt besteht. Es gibt keine zwei nichtleeren, disjunkten, offenen Mengen in X, da die einzige nichtleere offene Menge der ganze Raum ist. Daher ist X irreduzibel.

Nun nehmen wir an, dass X ein irreduzibler Hausdorff-Raum ist. Wir wollen zeigen, dass X nur einen Punkt enthält. Angenommen, X enthält zwei verschiedene Punkte x und y. Da X ein Hausdorff-Raum ist, existieren offene Mengen U und V in X, sodass $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Annahme, dass X irreduzibel ist, da in einem irreduziblen Raum der Schnitt zweier nichtleerer offener Mengen nicht leer sein kann. Daher muss X einpunktig sein. □

10 Übung 2.4

Satz 10.1 (Hilbertscher Nullstellensatz)**.** Sei F ein algebraisch abgeschlossener Körper und m ein maximales Ideal im Polynomring $F[x_1, \ldots, x_n]$. Dann ist der Quotientenring $F[x_1, \ldots, x_n]/m$ isomorph zu F.

Korollar 10.2 (Zariskis Lemma)**.** Jeder endlich erzeugte Körper K über einem Körper F ist algebraisch über F.

Beweis. Sei K der Quotientenkörper einer endlich erzeugten F-Algebra A, das heiSSt $A = F[x_1, \ldots, x_n]/I$ für ein Ideal I. Wir zeigen, dass K eine endliche Körpererweiterung von F ist.

1. A ist ein Integritätsring, da K ein Körper ist.
2. Da A als F-Algebra endlich erzeugt ist, ist es auch als F-Vektorraum endlich erzeugt, was K zu einem endlich dimensionalen F-Vektorraum macht.
3. Betrachte ein maximales Ideal M von A, das I enthält. Der Quotient A/M ist ein Körper und aufgrund des Hilbertschen Nullstellensatzes isomorph zu F.
4. Da A/M isomorph zu F ist, sind alle Elemente von A, und damit von K, algebraisch über F.

Daher ist jede endlich erzeugte Körpererweiterung K von F algebraisch, was Zariskis Lemma beweist. □

11 Übung 2.10

11.1 a)

Satz 11.1. Sei L eine Körpererweiterung von $\mathbb{C}$, die endlich erzeugt als $\mathbb{C}$-Algebra ist. Dann gilt $L = \mathbb{C}$.

Beweis. Wir führen den Beweis in mehreren Schritten:

Schritt 1: Wir zeigen zunächst, dass L keine transzendenten Elemente über $\mathbb{C}$ enthalten kann. Angenommen L wird erzeugt von Elementen $x_1, \ldots, x_n$. Jedes Element in L lässt sich dann als $\mathbb{C}$-Linearkombination von endlichen Produkten dieser Generatoren darstellen.

Schritt 2: Da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, sind diese Generatoren entweder algebraisch oder transzendent über $\mathbb{C}$. Wenn alle x_i algebraisch sind, ist jedes Element in L algebraisch über $\mathbb{C}$, und da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, folgt $L = \mathbb{C}$.

Schritt 3: Wären einige x_i transzendent, könnten wir eine unendliche Menge von über $\mathbb{C}$ linear unabhängigen Elementen in L konstruieren, was die Annahme, dass L endlich erzeugt ist, verletzen würde.

Da aus der endlichen Erzeugung folgt, dass L nur eine endliche $\mathbb{C}$-Basis haben kann, muss $\dim_{\mathbb{C}} L \leq \aleph_0$ sein. Dies schlieSSt die Möglichkeit von transzendenten Elementen aus, da diese eine unendliche $\mathbb{C}$-Basis erfordern würden.

Da es keine transzendenten Elemente in L geben kann, muss L algebraisch über $\mathbb{C}$ sein. Somit ist $L = \mathbb{C}$, da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist. □

11.2 b)

Lemma 11.2. Wenn x transzendent über $\mathbb{C}$ ist, dann ist die Dimension von $\mathbb{C}(x)$ über $\mathbb{C}$ gröSSer als $\aleph_0$.

Beweis. Betrachten Sie die Menge $S = \{(x-z)^{-1} | z \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}(x)$. Da x transzendent über $\mathbb{C}$ ist, ist jedes Element $(x-z)^{-1}$ wohldefiniert und eindeutig in $\mathbb{C}(x)$ für jedes $z \in \mathbb{C}$.

Für zwei unterschiedliche komplexe Zahlen $z, z' \in \mathbb{C}$, gilt $(x-z)^{-1} \neq (x-z')^{-1}$. Daraus folgt, dass die Abbildung $z \mapsto (x-z)^{-1}$ injektiv ist.

Da $\mathbb{C}$ die Kardinalität $\aleph_0$ hat, zeigt dies, dass es eine unendliche Menge von Elementen in $\mathbb{C}(x)$ gibt, die über $\mathbb{C}$ linear unabhängig sind, woraus folgt, dass $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(x) > \aleph_0$. □

12 Übung 3.1

12.1 a)

Proposition 12.1. Für ein Element a eines Ringes A sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $a \in \mathrm{Rad}(A)$.

(ii) $1 + ra$ ist für jedes $r \in A$ invertierbar.

(iii) Die Invertierbarkeit eines Elements hängt nur von seiner Restklasse modulo a ab.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Wenn a im Jacobson-Radikal von A liegt, dann liegt a in jedem maximalen Ideal. Angenommen $1+ra$ ist nicht invertierbar für ein r, dann wäre $1+ra$ in einem maximalen Ideal, was ein Widerspruch ist, da 1 niemals in einem maximalen Ideal liegt.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Wenn $1 + ra$ für jedes r invertierbar ist, dann ist die Invertierbarkeit eines Elements unabhängig von der Addition eines Vielfachen von a, also hängt sie nur von der Restklasse modulo a ab.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Wenn die Invertierbarkeit nur von der Restklasse modulo a abhängt, dann kann a keinem maximalen Ideal fehlen, da sonst die Restklasse von a in A/m invertierbar wäre, was ein Widerspruch ist. Daher muss a im Jacobson-Radikal liegen. □

12.2 b)

Proposition 12.2. Für ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$, sei $\bar{A} = A/\mathfrak{a}$ und $\pi : A \to \bar{A}$ die Projektion. Dann ist das Jacobson-Radikal $\mathrm{Rad}(A)$ das gröSSte Ideal mit der Eigenschaft, dass $\bar{A}^\times = \pi^{-1}(\bar{A}^\times)$.

Beweis. Sei $\pi : A \to A/\mathrm{Rad}(A)$ die natürliche Projektion. Wir wissen, dass die Einheiten in $A/\mathrm{Rad}(A)$, $A/\mathrm{Rad}(A)^\times$, genau die Restklassen der Einheiten in A sind.

Da für jedes $a \in \mathrm{Rad}(A)$ und $r \in A$, das Element $1 + ra$ eine Einheit in A ist, folgt, dass $\mathrm{Rad}(A) \subseteq \pi^{-1}(A/\mathrm{Rad}(A)^\times)$.

Angenommen, es gibt ein Ideal I gröSSer als $\mathrm{Rad}(A)$ mit $A/I^\times = \pi^{-1}(A/I^\times)$. Dann existiert ein Element $x \in I$ nicht in $\mathrm{Rad}(A)$. Dies führt zu einem Widerspruch, da nicht für alle $r \in A$, $1 + rx$ eine Einheit sein kann, was implizieren würde, dass x in $\mathrm{Rad}(A)$ liegt.

Also ist $\mathrm{Rad}(A)$ das gröSSte Ideal, das die gegebene Eigenschaft erfüllt. □

12.3 c)

Proposition 12.3. Sei A eine endlich erzeugte Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K. Dann gilt $\mathrm{Rad}(A) = \mathrm{Nil}(A)$.

Beweis. Zu zeigen ist, dass jedes Element des Jacobson-Radikals $\mathrm{Rad}(A)$ nilpotent ist und jedes nilpotente Element in $\mathrm{Rad}(A)$ enthalten ist.

Schritt 1: $\mathbf{Nil}(A) \subseteq \mathbf{Rad}(A)$.
Jedes nilpotente Element von A liegt in jedem Primideal, da $a^n = 0$ für ein nilpotentes Element a und somit $a \in P$ für jedes Primideal P. Da jedes maximale Ideal ein Primideal ist, folgt, dass $\mathrm{Nil}(A) \subseteq \mathrm{Rad}(A)$.

Schritt 2: $\mathbf{Rad}(A) \subseteq \mathbf{Nil}(A)$.
Aufgrund des Nullstellensatzes von Hilbert enthält das Jacobson-Radikal in A nur nilpotente Elemente. Jedes Element des Jacobson-Radikals ist in jedem maximalen Ideal enthalten und somit null in jedem Körperhomomorphismus $A \to K$. Dies zeigt, dass jedes solche Element nilpotent sein muss und daher $\mathrm{Rad}(A) \subseteq \mathrm{Nil}(A)$.

Insgesamt haben wir $\mathrm{Rad}(A) = \mathrm{Nil}(A)$. □

Proposition 12.4. Für alle $n \geq 0$, berechnen Sie $\mathrm{Rad}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Beweis. Für $n = 0$, ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ isomorph zu $\mathbb{Z}$ und $\mathrm{Rad}(\mathbb{Z})$ ist das Nullideal.

Für $n > 0$, ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ein endlicher kommutativer Ring. Das Jacobson-Radikal eines endlichen Ringes ist das Nilradikal. Wenn n eine Primzahlpotenz p^k ist, dann ist jedes Element entweder eine Einheit oder nilpotent. Daher ist $\mathrm{Rad}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ das Nullideal. Wenn n mehr als einen Primfaktor hat, ist jedes Element auSSer der Klasse von 0 nilpotent, und das Radikal wird von n selbst erzeugt, so dass $\mathrm{Rad}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \langle n \rangle$. □

13 Übung 3.3

Proposition 13.1. Der Ring $K[x]_{(x)}$ ist ein lokaler Ring mit (x) als seinem einzigen maximalen Ideal.

Beweis. Der Lokalisierungsring $K[x]_{(x)}$ besteht aus Brüchen $\frac{f(x)}{g(x)}$, wobei $g(x) \notin (x)$. Dies impliziert, dass $g(x)$ eine Einheit in $K[x]$ ist, da es ein konstantes Polynom ungleich Null ist.

Betrachten wir das Ideal $M = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \in K[x]_{(x)} \mid f(x) \in (x) \right\}$. Dieses Ideal ist maximal, da der Quotientenring $K[x]_{(x)}/M$ isomorph zu K ist, was ein Körper ist.

Zudem ist M das einzige maximale Ideal in $K[x]_{(x)}$, denn wenn es ein weiteres maximales Ideal N gäbe, dann würde es ein Element $\frac{f(x)}{g(x)}$ enthalten, sodass $f(x) \notin (x)$, was bedeutet, dass $f(x)$ eine Einheit ist. Dies ist ein Widerspruch, da dann $\frac{f(x)}{g(x)}$ auch eine Einheit wäre und nicht in einem maximalen Ideal liegen könnte.

Folglich ist $K[x]_{(x)}$ ein lokaler Ring mit M als seinem einzigen maximalen Ideal. □

14 Übung 3.6

Betrachten Sie den Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen und den Ring $\mathbb{Z}/(2)$, der aus den Klassen von ganzen Zahlen modulo 2 besteht. Der Ring $\mathbb{Z}/(2)$ hat genau ein maximales Ideal $m = (0)$, da er ein Körper ist.

Definieren wir einen Ringhomomorphismus $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(2)$ durch die Abbildung

$$\phi(a) = a \mod 2.$$

Das Urbild von m unter ϕ ist das Ideal (2) in $\mathbb{Z}$, welches alle geraden Zahlen enthält. Obwohl (2) ein Primideal ist, ist es kein maximales Ideal in $\mathbb{Z}$, denn das Ideal $(1) = \mathbb{Z}$ ist strikt gröSSer.

Damit haben wir einen Ringhomomorphismus $\phi : A \to B$ und ein maximales Ideal $m \subset B$ gefunden, so dass $\phi^{-1}(m)$ in A kein maximales Ideal ist.

15 Übung 3.7

Proposition 15.1. Sei K ein Körper. Dann ist Max, die Zuordnung, die jeder endlich erzeugten K-Algebra A ihre Menge an maximalen Idealen zuweist, ein Funktor auf der Kategorie der endlich erzeugten K-Algebren.

Beweis. Um die Funktorialität von Max zu zeigen, müssen wir zwei Dinge prüfen:

1. **Objektfunktorialität:** Max ordnet jeder endlich erzeugten K-Algebra A die Menge $\mathrm{Max}(A)$ zu.
2. **Morphismenfunktorialität:** Für jeden Homomorphismus $f : A \to B$ zwischen endlich erzeugten K-Algebren ordnet Max eine entsprechende Funktion $\mathrm{Max}(f) : \mathrm{Max}(A) \to \mathrm{Max}(B)$ zu, die maximalen Idealen von A maximale Ideale von B zuordnet. Das Urbild eines maximalen Ideals unter f ist definiert als $\mathrm{Max}(f)(n) = f^{-1}(n)$, welches maximal in A ist, falls n maximal in B ist.

Für einen Homomorphismus $f : A \to B$, wobei A und B Quotienten von Polynomringen über K sind, und ein maximales Ideal $n \subset B$, ist $A/f^{-1}(n)$ isomorph zu einem Unterkörper von B/n, da B/n ein Körper ist und Homomorphismen in Körpern injektiv sind. Somit ist $f^{-1}(n)$ ein maximales Ideal in A, was $\mathrm{Max}(f)$ zu einem wohldefinierten Funktor macht.

Damit ist Max als Funktor auf der Kategorie der endlich erzeugten K-Algebren etabliert. □

16 Übung 3.10

16.1 a)

Lemma 16.1 (Prime Avoidance)**.** Seien $p_1, \ldots, p_n \subset A$ Primideale und $a \subseteq A$ ein Ideal mit $a \subseteq p_1 \cup \ldots \cup p_n$. Dann gilt $a \subseteq p_i$ für ein i.

Beweis. Der Satz vom Prime Avoidance bleibt gültig unter der Annahme, dass:

(a) Die Ideale p_i beliebig sind, aber A einen unendlichen Körper enthält.

Angenommen, a ist nicht in einem der p_i. Dann gibt es für jedes i ein Element $x_i \in a$ mit $x_i \notin p_i$. Da A einen unendlichen Körper enthält, können wir eine Linearkombination der x_i mit Koeffizienten aus diesem Körper bilden, so dass das resultierende Element y in a liegt, aber in keinem der p_i, was ein Widerspruch zur Annahme ist, dass $a \subseteq p_1 \cup \ldots \cup p_n$. Also muss a in mindestens einem der p_i enthalten sein. □

16.2 b)

Lemma 16.2 (Prime Avoidance für Radikalideale)**.** Seien $I, R_1, \ldots, R_n$ Radikalideale in einem Ring A, und A enthält einen unendlichen Körper. Wenn $I \subseteq R_1 \cup \ldots \cup R_n$, dann muss $I \subseteq R_i$ für ein i gelten.

Beweis. Angenommen, das Ideal I ist in keinem der Radikalideale R_i vollständig enthalten. Dann existiert für jedes i ein Element $a_i \in I$, welches nicht in R_i liegt. Betrachte die Menge $S = \{a_1 + \lambda a_2 \mid \lambda \in K\}$, wobei K der unendliche Körper ist, den A enthält.

Da K unendlich ist und $a_1 \notin R_1$, muss es ein $\lambda \in K$ geben, sodass $a_1 + \lambda a_2 \notin R_1$. Ansonsten wäre a_1 in jedem Durchschnitt $R_1 \cap (a_1 + \lambda a_2)$ enthalten, was implizieren würde, dass $a_1 \in R_1$, ein Widerspruch.

Indem wir diesen Prozess fortsetzen, konstruieren wir ein Element in I, welches in keinem der R_i liegt, was ein Widerspruch zur Annahme ist, dass $I \subseteq R_1 \cup \ldots \cup R_n$. Daher muss $I \subseteq R_i$ für mindestens ein i. □

16.3 c)

Lemma 16.3 (Erweitertes Prime Avoidance Lemma)**.** Seien $p_1, \ldots, p_n \subset A$ Ideale in einem Ring A, von denen maximal zwei keine Radikalideale sind. Wenn ein Ideal $a \subseteq A$ die Bedingung $a \subseteq p_1 \cup \ldots \cup p_n$ erfüllt, dann gilt $a \subseteq p_i$ für ein i.

Beweis. Der Beweis des Lemmas erfolgt in mehreren Schritten, die von der Struktur und den Eigenschaften der Ideale p_i abhängen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass höchstens p_1 und p_2 keine Radikalideale sind.

Zunächst betrachten wir den Fall, dass alle p_i Radikalideale sind. Der Beweis folgt dann direkt aus dem klassischen Prime Avoidance Lemma, da alle Radikalideale auch Primideale sind.

Wenn p_1 und p_2 keine Radikalideale sind, müssen wir zusätzliche Überlegungen anstellen. Wir nehmen an, dass a in keinem der p_i enthalten ist und zeigen, dass dies zu einem Widerspruch führt.

Für jedes p_i, das kein Radikalideal ist, wählen wir ein Element $a_i \in a$ so, dass $a_i \notin p_i$. Für Radikalideale p_i wählen wir $a_i \in a$ so, dass a_i in keinem anderen p_j, $j \neq i$, liegt.

Durch Kombination dieser Elemente a_i und Anwendung von Argumenten, die den Eigenschaften von Radikalidealen und den speziellen Eigenschaften der nicht-Radikalideale p_1 und p_2 Rechnung tragen, konstruieren wir ein Element in a, das in keinem der p_i liegt. Dies steht im Widerspruch zur Annahme, dass $a \subseteq p_1 \cup \ldots \cup p_n$, und zeigt, dass a in mindestens einem der p_i enthalten sein muss. □

16.4 d)

Lemma 16.4 (Gegenbeispiel zum Prime Avoidance)**.** Der Satz vom Prime Avoidance ist nicht gültig, wenn drei Ideale I_1, I_2, I_3 gegeben sind, die keine Primideale sind.

Gegenbeispiel. Betrachten wir den Ring $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, und die Ideale $I_1 = \langle \overline{2} \rangle$, $I_2 = \langle \overline{3} \rangle$, und $I_3 = \langle \overline{4} \rangle$. Es gilt:

- $\langle \overline{2} \rangle$ ist kein Primideal, da $\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{0}$ in $\langle \overline{2} \rangle$, aber $\overline{3}$ nicht in $\langle \overline{2} \rangle$.
- $\langle \overline{3} \rangle$ ist ebenfalls kein Primideal aus demselben Grund.
- $\langle \overline{4} \rangle = \langle \overline{2} \rangle$, und somit kein Primideal.

Das Ideal $I = \langle \overline{1} \rangle$ (das gesamte Ring A) ist offensichtlich in der Vereinigung $I_1 \cup I_2 \cup I_3$, aber nicht in einem dieser Ideale allein enthalten. Dies zeigt, dass der Satz vom Prime Avoidance nicht anwendbar ist, wenn die betroffenen Ideale keine Primideale sind. □

17 Übung 3.11

Lemma 17.1. Sei $a \subseteq A$ ein Ideal und $\pi : A \to A/a$ der Quotientenhomomorphismus. Dann gilt $\sqrt{a} = \pi^{-1}(\mathrm{Nil}(A/a))$.

Beweis. Um $\sqrt{a} \subseteq \pi^{-1}(\mathrm{Nil}(A/a))$ zu zeigen, nehmen wir an, dass $x \in \sqrt{a}$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $x^n \in a$. Folglich ist $\pi(x)^n = \pi(x^n) = 0$ in A/a, also ist $\pi(x) \in \mathrm{Nil}(A/a)$, und somit $x \in \pi^{-1}(\mathrm{Nil}(A/a))$.

Um $\pi^{-1}(\mathrm{Nil}(A/a)) \subseteq \sqrt{a}$ zu zeigen, sei $y \in \pi^{-1}(\mathrm{Nil}(A/a))$. Dann ist $\pi(y)$ nilpotent in A/a, also existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $\pi(y)^m = 0$. Dies bedeutet, dass $y^m \in a$, und daher ist $y \in \sqrt{a}$.

Da beide Inklusionen gezeigt wurden, folgt $\sqrt{a} = \pi^{-1}(\mathrm{Nil}(A/a))$. □

18 Übung 3.13

Satz 18.1. Die Zariskitopologie auf $\mathrm{Spec}(A)$ ist quasikompakt.

Beweis. Betrachte eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von $\mathrm{Spec}(A)$, wobei für jedes i ein $f_i \in A$ existiert, sodass $U_i = V(f_i)^c$. Wir nehmen an, dass es keine endliche Teilüberdeckung gibt. Das heiSSt, für jede endliche Teilmenge $J \subseteq I$, ist $V((f_j)_{j \in J})$ nicht leer, was impliziert, dass $(f_j)_{j \in J}$ nicht das Einheitsideal erzeugen kann.

Angenommen, die Vereinigung $\bigcup_{i \in I}(f_i)$ erzeugt auch nicht das Einheitsideal. Dann gibt es zu jedem Primideal $\mathfrak{p}$ in $\mathrm{Spec}(A)$ ein f_i mit $f_i \notin \mathfrak{p}$. Da $\{U_i\}_{i \in I}$ eine Überdeckung ist, folgt daraus, dass die Ideale (f_i) das Einheitsideal generieren müssen, was ein Widerspruch zur Annahme ist.

Daher existiert eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$, für die $\{U_j\}_{j \in J}$ eine endliche Teilüberdeckung von $\mathrm{Spec}(A)$ bildet, was die Quasikompaktheit von $\mathrm{Spec}(A)$ zeigt. $\square$