Beweisstunde zu Topologie am 3.05.2023

• informelle Notizen

Was ist ein metrischer Raum?

- Paar (X,d) aus einer Menge X und Abb. $d: X \times X \to \mathbb{R}$, die Metrik oder Abstandsfunktion und sie erfüllt:
  - (M1) 1.) Positivität: $d(x,y) \geq 0$ für alle $x,y \in X$ und $d(x,y)=0 \iff x=y$.
  - (M2) 2.) Symmetrie: $d(x,y) = d(y,x)$ für alle $x,y \in X$.
  - (M3) 3.) Dreiecksungleichung: $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ für alle $x,y,z \in X$.

Verfügt man einen Begriff von Abstand, so ist es naheliegend, einen Umgebungsbegriff über den Abstand zu definieren, nämlich indem man Punkte betrachtet, deren Abstand von einem gegebenen Punkt X kleiner als eine gegeben Zahl $r>0$ ist. Eine Umgebung eines Punktes x sollte dann etwas sein, das alle solchen Punkte für ein hinreichenden (kleinen) r enthält.

Eine Umgebung $U \subseteq X$ von $x \in X$ erfüllt die Eigenschaft, dass eine offene Menge $O \in \mathcal{O}_X$ existiert, so dass $x \in O \subseteq U$.

Wir definieren Objekte:
die offenen bzw. abgeschlossenen Kugeln vom Radius r um einen Punkt $x \in X$, als
$B_r(x) := \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$ bzw. $B_{\leq r}(x) := \{y \in X \mid d(x,y) \leq r\}$.
Wir nennen die Menge $\mathcal{O}_d := \{O \subseteq X \mid \forall x \in O\ \exists r>0 : B_r(x) \subseteq O\}$ die metrische Topologie.
Sie ist die Menge aller Teilmengen $O \subseteq X$, die zu jedem Punkt $x \in X$ auch die entsprechende offene Kugel mit Radius r, nämlich $B_r(x)$ enthält.
Nun beweisen wir Satz 1.1.10 aus der Vorlesung und zeigen:

Satz 1.1.10. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann gilt:

(1) Die metrische Topologie ist eine Topologie auf X.
(2) Für alle $r>0$ und $x \in X$ ist $B_{<r}(x)$ offen. (Bzw. $B_r(x)$)
(3) Für alle $r>0$ und $x \in X$ ist $B_{\leq r}(x)$ abgeschlossen. (Bzw. $\overline{B}_r(x)$).
(4) X mit der metrischen Topologie ist ein Hausdorffraum.

Beweis: Wir zeigen zunächst (T1) - (T3).

(T1) Die leere Menge $\emptyset$ enthält keine Punkte aus X und somit ist die entsprechende Bedingung leer. Damit gilt diese trivial und die leere Menge ist Element von $\mathcal{O}_d$. Es gilt außerdem für alle $r>0$ und $x \in X$, dass $B_r(x) \subseteq X$, also ist auch $X \in \mathcal{O}_d$.

(T2) Sei I eine beliebige Indexmenge, $O_i \in \mathcal{O}_d$ für alle $i \in I$ und $x \in \bigcup_{i \in I} O_i$. Dann gibt es ein $j \in I$ mit $x \in O_j$ und wegen $O_j \in \mathcal{O}_d$ ein $r>0$ mit $B_r(x) \subseteq O_j$. Daraus folgt $B_r(x) \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$ und damit ist $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}_d$.

(T3) Sei I eine endliche Indexmenge*, $O_i \in \mathcal{O}_d$ für alle $i \in I$ und $x \in \bigcap_{i \in I} O_i$. Da $x \in O_i$ und $O_i \in \mathcal{O}_d$, gibt es $r_i > 0$ mit $B_{r_i}(x) \subseteq O_i$ für alle $i \in I$. Da I endlich ist, existiert $r = \min_{i \in I} r_i$ und $0 < r \leq r_i$ für alle $i \in I$. Damit ist $B_r(x) \subseteq B_{r_i}(x) \subseteq O_i$ für alle $i \in I$ und damit auch $B_r(x) \subseteq \bigcap_{i \in I} O_i$. Also ist $\bigcap_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}_d$.

Damit ist (1) gezeigt.

* Intermezzo: Sie müssen darüber nachdenken, was die Intuition hinter offenen Mengen ist. Eine Möglichkeit, darüber nachzudenken, sind Umgebungen: Eine offene Menge ist eine Menge, die eine Umgebung zu jeden ihrer Punkte hat. Was ist die Umgebung eines Punktes? Eine Umgebung eines Punktes x ist eine Menge, die alle Punkte enthält, die ausreichend nahe an x liegen. (Was bedeutet hier ausreichend nahe? Das hängt von der jeweiligen Situation ab: man kann sich verschiedene Umgebungen vorstellen, die vielleicht unterschiedliche Grade der Nähe angeben). Insbesondere ist jede Menge, die eine Umgebung von x enthält, selbst eine Umgebung von x.
Also: Wenn man sich offene Mengen als Mengen vorstellt, die Umgebungen aller Punkte sind, die sie enthalten, dann ist es natürlich, dass die Vereinigung einer beliebigen Familie von Umgebungen offen ist: Jeder Punkt in der Vereinigung ist eine der offenen Mengen, und diese offene Menge ist eine Umgebung, und die Vereinigung enthält diese Umgebung und ist somit selbst Umgebung. Die bel. Vereinigung offener Mengen sollte also immernoch offen sein.

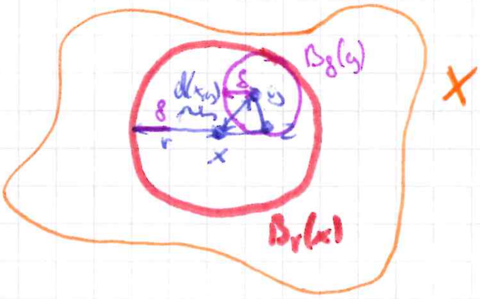
Was ist mit der Schnittmenge?
Nun, wenn man zwei offene Mengen O_1 und O_2 nimmt und einen Punkt x in $O_1 \cap O_2$ betrachtet, dann enthält O_1 alle Punkte, die hinreichend nahe an x liegen bzgl. r_1, und O_2 enthält alle Punkte, die hinreichend nahe an x liegen bzgl. r_2, so dass $O_1 \cap O_2$ alle Punkte enthält, die sowohl hinreichend nahe an x bzgl. r_1 aber auch bzgl. r_2 liegen, und somit alle Punkte enthält, die hinreichend nahe für eine bestimmte Bedeutung dieser Nähe, nämlich die des kleinsten beteiligten Radius, also ist die Menge ebenfalls offen. Damit erhält man induktiv alle endlichen Schnitte.
Aber was ist mit willkürlichen Schnittmengen?
Dann gibt es Probleme, denn wenn man zwei Grade der Nähe angibt, erhält man nach dem Schnitt einen neuen Grad der Nähe (den kleineren), aber eine unendliche Anzahl von Graden der Nähe kann dazu führen, dass alles ausgeschlossen wird! Wir wollen also nicht verlangen, dass eine beliebige Schnittmenge von Umgebungen eine Umgebung ist, und so wollen wir auch nicht verlangen, dass eine beliebige Schnittmenge von offenen Mengen eine offene Menge ist.

Bsp.: $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$, alle Punkte die $\frac{1}{n}$-nahe 0 sind. Führt zu einer leeren Umgebung.

Wir zeigen nun (2):
Sei $x \in X$ und $r > 0$. Wir müssen zeigen, dass für jeden Punkt $y \in B_r(x)$ ein $\delta = \delta(y) > 0$ mit $B_\delta(y) \subseteq B_r(x)$ existiert. Per Def. von $B_r(x)$ gilt $\delta := r - d(x,y) > 0$ für jeden Punkt $y \in B_r(x)$. Daraus folgt mit der Dreiecksungleichung

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + \delta = r \qquad \forall z \in B_\delta(y)$$

und damit $z \in B_r(x)$ für alle $z \in B_\delta(y)$. Also gilt $B_\delta(y) \subseteq B_r(x)$ und $B_r(x)$ ist offen.

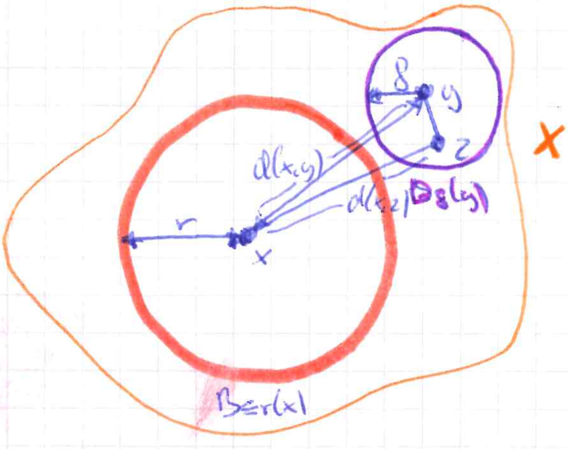


Wir zeigen nun (3):
Sei $x \in X$ und $r > 0$. Zu zeigen ist, dass $X \setminus B_{\leq r}(x)$ offen ist, also dass zu jedem $y \in X \setminus B_{\leq r}(x)$ ein $\delta = \delta(y) > 0$ mit $B_\delta(y) \subseteq X \setminus B_{\leq r}(x)$ existiert. Ist $y \in X \setminus B_{\leq r}(x)$, so ist $d(x,y) > r$ und $\delta := d(x,y) - r > 0$. Für jeden Punkt $z \in B_\delta(y)$ folgt dann aus der Dreiecksungleichung

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < d(x,z) + \delta \Rightarrow d(x,z) > d(x,y) - \delta = r \;!$$

Also ist $B_\delta(y) \subseteq X \setminus B_{\leq r}(x)$, $X \setminus B_{\leq r}(x)$ ist offen und $B_{\leq r}(x)$ abgeschlossen.

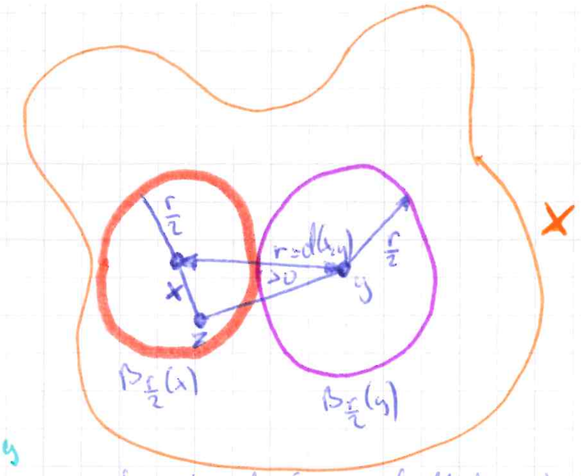
$z \in B_\delta(y)$



Zuletzt die Hausdorff-Eigenschaft:
Sind $x, y \in X$ mit $x \neq y$, so folgt $r := d(x,y) > 0$ mit der Positivität von d. Die Mengen $B_{\frac{r}{2}}$ und $B_{\frac{r}{2}}(y)$ sind offen nach (2), und für jeden Punkt $z \in B_{\frac{r}{2}}(x)$ folgt

$$r = d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \frac{r}{2} + d(z,y) \Rightarrow d(z,y) > \frac{r}{2} \Rightarrow z \notin B_{\frac{r}{2}}(y)$$

Also gilt $B_{\frac{r}{2}}(x) \cap B_{\frac{r}{2}}(y) = \emptyset$ und (X,d) ist damit hausdorffsch. ∎



Def.: $\mathring{M} = \bigcup_{\substack{O \subseteq X \text{ offen} \\ O \subseteq M}} O$

$\overline{M} = \bigcap_{\substack{A \subseteq X \text{ abg.} \\ M \subseteq A}} A$

$\partial M = \overline{M} \setminus \mathring{M}$

$M \subseteq X$ heißt dicht in X, falls $\overline{M} = X$ und nirgends dicht falls $\mathring{\overline{M}} = \emptyset$.

Bem.: $d(x,y) > 0$ für $x \neq y$ wird für Hausdorffeigenschaft benötigt.
Auch Semimetriken (M1) $d(x,y) \geq 0$ für $x \neq y$ definieren topologische Räume

$\boxed{\text{Beispiel 1.1.17:}}$

$O_d := \{A \subseteq \mathbb{R} \mid \forall x \in A\ \exists r > 0 : B_r(x) \subseteq A\}$.

1. Betrachte $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie (Metrik $d(x,y) = |x-y|$) und $M = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Da jedes offene Intervall $B_r(x) = (x-r, x+r)$ um einen Punkt $x \in \mathbb{R}$ sowohl Punkte aus $\mathbb{Q}$ als auch aus $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ enthält, gibt es außer der leeren Menge keine offenen Menge $O \subseteq \mathbb{Q}$ oder $O \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

$\Rightarrow \mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$ Präziser: $\tilde{O}_d := \{A \subseteq \mathbb{Q} \mid \forall x \in A\ \exists r > 0 : B_r(x) \subseteq A\}$

Achtung! Das Innere hängt vom umgebenden Raum ab. Betrachten wir nur $\mathbb{Q}$, so gilt $\mathring{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$.
Betrachten wir $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, so ist $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$.
Da $\forall q \in \mathbb{Q}\ \forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(q) = \{x \in \mathbb{R} : |x-q| < \varepsilon\}$ irrationale Zahlen enthält, die nicht in $\mathbb{Q}$ enthalten sind, also ist q kein Punkt des Innern von $\mathbb{Q}$.
$x \in \mathring{\mathbb{Q}} \iff \exists U$ von x mit $U \subseteq \mathbb{Q} \iff \mathbb{Q}$ ist eine Umgebung von x.

✓ für metrische Räume erfüllt.

$\Rightarrow \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ Definition einer Menge, die dicht in einer anderen liegt.

[~~$\overline{\mathbb{Q}}$ abgeschlossen, $\mathbb{Q} \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ und $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$ genau dann, wenn $\mathbb{Q}$ abgeschlossen ist.~~] [illegible]

Sei A eine abgeschlossene Menge, die $\mathbb{Q}$ enthält. Dann ist A^c offen.
Sei $a \in A^c$. Dann gibt es ein offenes Intervall $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq A^c$.
Also gibt es ein offenes Intervall mit keinem Element in A, also impliziert dies, dass es ein offenes Intervall ohne ein Element in $\mathbb{Q}$ gibt, das ist aber unmöglich, da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt. Also ist $A^c = \emptyset$ und somit $A = \mathbb{R}$. Damit ist die einzige abgeschlossene Menge, die $\mathbb{Q}$ enthält, $\mathbb{R}$. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \partial \mathbb{Q} = \underbrace{\overline{\mathbb{Q}}}_{\mathbb{R}} \cap \underbrace{\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$

$\partial \mathbb{R} = \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathring{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$

$\Rightarrow \partial\partial \mathbb{Q} = \partial \mathbb{R} = \emptyset = \partial \emptyset = \partial\partial\partial \mathbb{Q}$
denn $\partial\partial\mathbb{Q} = \partial(\underbrace{\overline{\mathbb{Q}}}_{\mathbb{R}} \cap \underbrace{\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}}_{\mathbb{R}}) = \partial \mathbb{R} = \emptyset$

2. Sei (X,d) ein metrischer Raum und $x \in X$. Für die offene Kugel $B_r(x)$ erhält man:
$\mathring{B}_r(x) = B_r(x) \subseteq \overline{B_r(x)} = \overline{B}_r(x)$
$\partial B_r(x) \subseteq \{y \in X \mid d(y,x) = r\}$ diskrete Topologie
Wann gilt hier Gleichheit? bzw. echte Umfasstheit / Teilmenge?
Für die diskrete Topologie ist jede Menge offen und abgeschlossen, also ist der Rand die leere Menge.
Definiere alternativ $d(x,y) = 1$ falls $x \neq y$ und $d(x,y) = 0$ sonst. Ist (X,d) ein metrischer Raum dann ist jede Menge offen und abgeschlossen.
Falls $r < 1$, ist der einzige Punkt der in $B_r(x)$ enthalten ist, gerade x. Also $B_{0 < r < 1}(x) = \{x\}$.
Damit ist jeder Punkt offen. Da alle Mengen somit offen sind, sind auch die Komplemente offen. Also sind alle Mengen auch abgeschlossen.
Sei $A \subset X$ offen, dann ist $\partial A \subseteq X \setminus A$ und $X \setminus A$ ist offen, dann ist $\partial(X \setminus A) \subseteq A$.
Aber $(X \setminus A) \cap A = \emptyset$. Also muss der Rand leer sein.

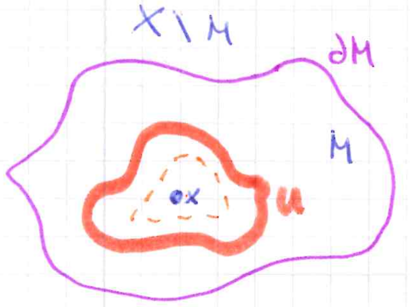
Satz 1.1.18

Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. $M \subset X$. Dann gilt:

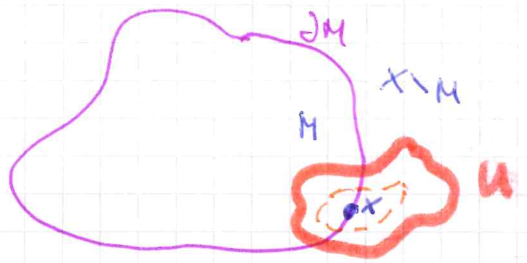
1) $x \in \mathring{M} \iff \exists$ eine Umgebung U von x mit $U \subseteq M \iff M$ ist eine Umgebung von x.

2) $x \in \overline{M} \iff$ Für jede Umgebung U von x ist $U \cap M \neq \emptyset \iff X \setminus M$ ist keine Umgebung von x.

3) $x \in \partial M \iff$ Für alle Umgebungen U von x gilt $U \cap M \neq \emptyset$ und $U \cap (X \setminus M) \neq \emptyset$.



Punkt $x \in \mathring{M}$ mit $U \subseteq M$



Punkt $x \in \partial M$ mit $U \subset X$.

Was ist der Rand von $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_d)$?
Was ist der Rand von $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_E)$?
$\mathcal{O}_d^{\mathbb{C}} := \{ A \subseteq \mathbb{C} \mid \forall x \in A\ \exists r > 0 : B_r(x) \subseteq A \}$

Beweis:

Eine Umgebung eines Punkts $x \in X$ ist nach Def. 1.1.5 eine Menge $U \subseteq X$, für die eine offene Menge $O \subset X$ existiert mit $x \in O \subset U$.

(1) Ist $x \in \mathring{M}$, so ist $\mathring{M}$ offen mit $x \in \mathring{M} \subseteq M$, und somit ist M eine Umgebung von x, dies
„⇒" gilt per Satz 1.1.16 oder per Definition von $\mathring{M}$.
„⇐" Gibt es umgekehrt eine Umgebung U von x mit $U \subseteq M$, so ex. eine offene Menge $O \subseteq U \subseteq M$ mit $x \in O$. Da $\mathring{M}$ die Vereinigung aller offenen Mengen $O' \subseteq M$ ist, folgt $x \in O \subseteq \mathring{M}$.
Setzen wir $U = M$, erhalten wir die letzte Äquivalenz.

Nach Def. der Umgebung

(2) Ist $x \in \overline{M} = X \setminus (X \setminus M)^\circ$, so kann es nach (1) keine Umgebung U von x mit $U \subseteq X \setminus M$ geben, denn sonst würde gelten $x \in (X \setminus M)^\circ$. Also gilt $U \cap M \neq \emptyset$ für jede Umgebung U von x und damit kann $X \setminus M$ keine Umgebung von x sein.
Ist umgekehrt $x \in X$ ein Punkt, so dass $X \setminus M$ keine Umgebung von x ist, so liegt nach (1) x nicht in $(X \setminus M)^\circ$ und damit nach (1) in $\overline{M}$.

$\Rightarrow$ also $x \in \overline{M}$

(3) Es gilt $\partial M = \overline{M} \cap \overline{(X \setminus M)}$ ~~[illegible]~~. Nach (2) und $\partial M \subseteq \overline{M}$, gilt $U \cap M \neq \emptyset$.
Da $x \in \partial M \iff x \in \overline{M} \cap \overline{(X \setminus M)} \Rightarrow x \in \overline{X \setminus M}$ und damit folgt nach (2) auch sofort, dass $U \cap (X \setminus M) \neq \emptyset$. ■

Lemma 1.2.4: Für jede Menge X und jede Teilmenge $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ gilt
$\langle \mathcal{M} \rangle = \{$ beliebige Vereinigung von endlichen Schnitten von Mengen in $\mathcal{M} \}$.

Beweis: Sei $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(M)$ die Menge auf der rechten Seite. Dann gilt $\mathcal{M} \subseteq \langle \mathcal{M} \rangle$ per Definition von $\langle \mathcal{M} \rangle$, denn $\bigcap_{\substack{\mathcal{M} \subseteq \mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X) \\ \mathcal{O} \text{ Topologie}}} \mathcal{O} = \langle \mathcal{M} \rangle$.

Da $\langle \mathcal{M} \rangle$ eine Topologie auf X ist, muss $\langle \mathcal{M} \rangle$ neben Elementen $M \in \mathcal{M}$ auch beliebige Vereinigungen (T2) von endlichen Schnitten (T3) von Elementen aus M enthalten. Insbesondere den leeren Schnitt $X = \bigcap_{i \in \emptyset} M_i$ und die leere Vereinigung $\emptyset = \bigcup_{i \in \emptyset} M_i$ (T1). Damit $\mathcal{O} \subseteq \langle \mathcal{M} \rangle$.

Es reicht nun zu zeigen, dass $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X ist. Dann ist $\mathcal{O}$ wegen $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{O}$ beteiligt am Schnitt aller Topologien auf X, die $\mathcal{M}$ als Teilmenge enthalten, und damit $\langle \mathcal{M} \rangle \subseteq \mathcal{O}$.

(T1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$ als leere Vereinigung und leerer Schnitt.
(T2) Vereinigungen von Vereinigungen endlicher Schnitte aus Mengen aus $\mathcal{M}$ sind wieder Vereinigungen endlicher Schnitte von Mengen aus M.
(T3) Seien $O_1, \ldots, O_n$ gegeben durch $O_i = \bigcup_{j \in J_i} A_{ij}$ mit endlichen Schnitten A_{ij} von Mengen aus $\mathcal{M}$.

Dann gilt

$$O_1 \cap \dots \cap O_n$$
$$= \{x \in X \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} \; \exists j \in J_i \text{ mit } x \in A_{ij}\}$$
$$= \bigcup_{j_1 \in J_1, \dots, j_n \in J_n} (A_{1 j_1} \cap \dots \cap A_{n j_n})$$

Dies sind Vereinigungen endlicher Schnitte von Mengen aus M.

Rückfragen:

Der Rand von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ ist leer.
Falls $\mathbb{R}$ in einen größeren Raum eingebettet wird, wie $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ändert sich das.
Ein Randpunkt ist ein Punkt einer Menge A, so dass jede offene Umgebung sowohl A als auch A^c schneidet. Falls eine Menge nur A ist, so ist $A^c = \emptyset$. Keine Menge schneidet die leere Menge.
Das Komplement von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ ist die Vereinigung der oberen und unteren Halbräume. Der Rand von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ ist $\mathbb{R}$. Der Rand von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ist $\{\pm\infty\}$.