freie Algebra zur Lie-Algebra

Menge X, Vektorraum $V = \mathrm{span}(X)$

Tensoralgebra $T(V)$ und $\iota: X \hookrightarrow T(V)$

$\Rightarrow (T(V), [\cdot,\cdot])$ ist eine Lie-Algebra.

$\Rightarrow f(X) := \bigcap \{ L \mid L \subset T(V) \text{ ist Lie-Unteralgebra mit } \iota(X) \subset L \}$

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, "\exists! g'"] & \mathfrak{g} \\ X \arrow[u, hook, "\iota"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \quad \text{mit } g'|_X = g$$

Darstellungstheorie halbeinfacher Lie-Algebren
(auch unendlichdimensional)

- $\mathfrak{g}$ halbeinfache Lie-Algebra und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ Cartansche

  V ein Gewichtsmodul von $\mathfrak{g}$ bzgl. $\mathfrak{h}$

  z.z. Jd. Quotient und jeder Untermodul ist Gewichtsmodul von $\mathfrak{h}$

  Menge der Gewichte eines Quotienten oder Untermoduls von V sind eine Teilmenge der Gewichte von V.

  $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$, $V_\lambda = \{ v \in V \mid hv = \lambda(h) \cdot v \ \forall h \in \mathfrak{h} \}$

  $W \subset V$ Untermodul

  $\mathfrak{h}$ auf V diagonalisierbar (halbeinfach) $\Rightarrow \mathfrak{h}|_W$ diagonalisierbar

  $\Rightarrow \forall w \in W: w = \sum_\lambda' w_\lambda, \quad w_\lambda \in W \cap V_\lambda$

  $\Rightarrow W = \bigoplus_\lambda (W \cap V_\lambda)$

  W Gewichtsmodul mit Gewichten $\{ \lambda \mid W \cap V_\lambda \neq 0 \} \subseteq \{ \text{Gewichte von } V \}$.

  $\pi: V \longrightarrow V/W$

  Für $v \in V_\lambda$ und $h \in \mathfrak{h}$

  $$h.\pi(v) = \pi(h.v) = \pi(\lambda(h).v) = \lambda(h)\pi(v)$$

  $\Rightarrow \pi(v) \in V/W$ ist Gewichtsvektor von λ

  $\Rightarrow \forall \pi(v) \in V/W: \pi(v) = \sum_\lambda' \pi(v_\lambda)$

  $\Rightarrow V/W = \bigoplus_\lambda \pi(V_\lambda)$

  $\{ \lambda \mid \pi(V_\lambda) \neq 0 \} \subseteq \{ \text{Gewichte von } V \}$

  $\pi(V_\lambda) = 0 \Leftrightarrow V_\lambda \subseteq W$

Darstellungen von $\mathfrak{g}$ und $U(\mathfrak{g})$

V k-Vektorraum, $\mathfrak{g} \xrightarrow{\text{Hom. v. LA}} \mathfrak{gl}(V)$

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "can"] \arrow[dr, "f"'] & U(\mathfrak{g}) \arrow[d, "\exists!"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Hom v. LA

$\Rightarrow U(\mathfrak{g}) \to End_k(V)$ Universelle Eigenschaft der Einhüllenden

Umgekehrt: $\rho': U(\mathfrak{g}) \to End_k(V)$ Darstellung

$\Rightarrow \rho' \circ can: \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g}) \to End_k(V)$ Darstellung von $\mathfrak{g}$

Entsprechung der Hom. von Darstellungen und damit UD, QD, direkte Summen etc.

Darstellungen von $U(\mathfrak{g})$ und $\mathfrak{g}$ sind äquivalent.

$\Rightarrow$ Darstellungstheorie von Lie-Algebren Spezialfall der Darstellungstheorie von assoziativen Algebren.

Tensoralgebra

$T^n V := V \otimes_k \cdots \otimes_k V$ Erzeuger $T^1 V = V$

$T(V) := \bigoplus_{n \geq 0} T^n V$ 1-Element $1 \in k$

Iso. $T^n V \otimes_k T^m V \to T^{n+m} V$

$\Rightarrow$ bilinear fortgesetzt auf $T(V)$: $\underbrace{T(V) \otimes_k T(V) \to T(V)}_{\text{Verknüpfung}}$

$\Rightarrow$ assoziative k-Algebra

$\bigoplus_{n \geq 0} \tilde{f}^n : T(V) = \bigoplus_{n \geq 0} T^n(V) \to A$

$\bigoplus_{n \geq 0} v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto \sum_{n \geq 0} f(v_1) \cdots f(v_n)$

Universelle Einhüllende

$J \subset T(\mathfrak{g})$, $J := \langle x \otimes y - y \otimes x - [x,y] \rangle$

$U(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g}) / J$

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "can'"] \arrow[drr, "f"'] & T(\mathfrak{g}) \arrow[r, "can"] \arrow[dr, "\text{univ. Eig. Tensoralgebra } \exists!"] & U(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g})/J \arrow[d, "\text{univ. Eigenschaft des Quotienten } \exists!"] \\ & & A \end{tikzcd}$$

Poincaré-Birkhoff-Witt

Geordnete Monome $\bar{x}_{i(1)} \cdots \bar{x}_{i(n)}$ für $n \geq 0$ und $i(1), \dots, i(n) \in I$ mit $i(1) \leq \dots \leq i(n)$

bilden Basis von $U(\mathfrak{g})$

Bsp. $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^2$, Basis $\{x, y\}$, $[x, y] = 0$ (abelsche Lie-Algebra)

Grad 0: 1

Grad 1: x, y

Grad 2: x^2, xy, y^2

Grad 3: x^3, x^2y, xy^2, y^3

$\Rightarrow U(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}[x, y]$

Heisenberg-Algebra

$\{p, q, z\}$, $[p, q] = z$, $[p, z] = [q, z] = 0$

Grad 0: 1

Grad 1: p, q, z

Grad 2: $p^2, pq, pz, q^2, qz, z^2$

Grad 3: $p^3, p^2q, p^2z, pq^2, pqz, pz^2, q^3, q^2z, qz^2, z^3$

Nicht geordnete Monome werden umgeschrieben:

$$qp = pq - z, \quad qpz = pqz - z^2$$

Nicht geordnete Monome können mit Lie-Klammer in geordnete Monome zerlegt werden.