Hochschild (Ko)homologie

Luciano Melodia
Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Lehrstuhl für Darstellungstheorie und mathematische Physik
luciano.melodia@fau.de

28. April 2025

Zusammenfassung

Wir betrachten die (Ko)homologien von Algebren. Alle Algebren und auch Algebrenhomomorphismen in diesem Kontext sollen unital sein, falls nicht explizit anders gefordert wird. Um deren (Ko)homologien definieren zu können und diese Homologietheorien mit anderen verträglich zu machen, benötigen wir einen allgemeineren Begriff einer Algebra, nämlich den einer Algebra über einem kommutativen Ring k. Dies ist analog zur Algebra über einem Körper, jedoch wird die Struktur der Skalarmultiplikation durch eine k-Modulstruktur ersetzt.

Für die Ausarbeitung dieses Skripts habe ich die Vorlesungsskripte von Catherine Meusburger zur algebraischen Topologie, Einführung in die Darstellungstheorie und zur homologischen Algebra verwendet [1, 2, 3].

Definition 1. Sei k ein kommutativer Ring.

1. Eine Algebra über k ist ein Ring $(A, +, \cdot)$ mit einer k-Modul Struktur $\rhd : k \times A \to A, (\lambda, a) \mapsto \lambda a$ welche $(\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$ für alle $a, b \in A$ und $\lambda \in k$ erfüllt.

2. Ein Homomorphismus von k-Algebren ist ein Ringhomomorphismus der zugleich ein Homomorphismus von k-Moduln ist.

Beispiel 2. Beispiele von Algebren über einem Ring:

- Eine Algebra $(A, +, \cdot)$ über $\mathbb{Z}$ ist ein Ring und ein Homomorphismus von $\mathbb{Z}$-Algebren ist ein Ringhomomorphismus. Dafür betrachte man $\rhd : \mathbb{Z} \times A \to A, (n, a) \mapsto n \cdot a$. Diese $\mathbb{Z}$-Modulstruktur ist eindeutig, nämlich gerade die Struktur der abelschen Gruppe. Die Verträglichkeit der $\mathbb{Z}$-Modulstruktur mit der Multiplikation folgt aus dem Distributivgesetz.

- Für jede Gruppe G und jeden kommutativen Ring k ist der Gruppenring

$$k[G] := \left\{ \sum_{g \in G} \lambda_g \rhd g \mid \lambda_g = 0 \text{ für fast alle } \lambda_g \in k \right\}$$

eine abelsche Gruppe über k mit der k-Modulstruktur $(\lambda \rhd f)(g) := \lambda \rhd f(g)$ für alle $f : G \to k, g \in G$ und $\lambda \in k$.

- Der Ring $k[X]$ von Polynomen mit Koeffizienten in einem kommutativen Ring k ist eine Algebra über k.

- Der Ring $\mathrm{Mat}(n,k)$ von $(n\times n)$-Matrizen mit Einträgen in einem kommutativen Ring k ist eine Algebra über k mit der Matrizenmultiplikation, Matrizenaddition und der simultanen Multiplikation aller Matrizeneinträge mit Elementen aus k.
- Für jeden kommutativen Ring k und k-Modul M ist der Ring $\mathrm{End}_k(M) = \mathrm{Hom}_k(M,M)$ von k-Modulhomomorphismen $\varphi : M \to M$ eine Algebra über k mit der k-Modulstruktur gegeben durch die punktweise Multiplikation $(\lambda\varphi)(m) := \lambda\varphi(m) = \varphi(\lambda m)$ für alle $\lambda \in k, m \in M$.

Links- und Rechtsmoduln über einer k-Algebra A sind definiert als Links- bzw. Rechtsmoduln über dem Ring A. Genauso wie im Fall der Algebra über einem Körper hat jeder Linksmodul M über A eine k-Modulstruktur gegeben durch $\lambda m = (\lambda 1_A) \rhd m$ für alle $m \in M$. Dasselbe gilt für A-Rechtsmoduln, welche äquivalent definiert werden können als A^{op}-Moduln, und (A,A)-Bimoduln, definiert als $(A \otimes_k A^{\mathrm{op}})$-Moduln. Wir definieren den opponierten Ring $A^{\mathrm{op}} := (A, +, \cdot')$, s.d. $a \cdot' b := b \cdot a$ für alle $a, b \in A$. A ist sichtlich kommutativ genau dann, wenn $\mathrm{id}_A : A \to A^{\mathrm{op}}$ ein Ringhomomorphismus ist. Es folgt auch sofort, dass jeder A-Modulhomomorphismus automatisch k-linear ist.

Bevor wir die Kettengruppen und Randoperatoren definieren, wollen wir das Tensorprodukt für Algebren wiederholen.

Definition 3. Sei k ein Ring, $(M, \lhd)$ ein k-Rechtsmodul und $(N, \rhd)$ ein k-Linksmodul. Das Tensorprodukt $M \otimes_k N$ wird präsentiert als die von der Menge $M \times N$ erzeugte abelsche Gruppe mit den Relationen

$$\delta_{(m,n)} + \delta_{(m',n)} = \delta_{(m+m',n)} \quad \delta_{(m,n)} + \delta_{(m,n')} = \delta_{(m,n+n')} \tag{1}$$

$$\delta_{(m \lhd \lambda, n)} = \delta_{(m, \lambda \rhd n)}, \tag{2}$$

für alle $m, m' \in M, n, n' \in N, \lambda \in k$, also als der Quotient der abelschen Gruppe $\langle M \times N \rangle_{\mathbb{Z}} = \{f : M \times N \to \mathbb{Z} \mid f(m,n) = 0 \text{ für fast alle } (m,n) \in M \times N\}$ bezüglich der von den Relationen erzeugten Untergruppe. Wir bezeichnen die Äquivalenzklassen von $\delta_{(m,n)} : M \times N \to \mathbb{Z}, \delta_{(m,n)}(m,n) = 1$ und $\delta_{(m,n)}(m', n') = 0$ für $(m,n) \neq (m',n')$ in $M \otimes_k N$ mit $m \otimes n$ und mit $\otimes = \pi \circ \iota : M \times N \to M \otimes_k N$ die Verkettung der Inklusion $\iota : M \times N \to \langle M \times N \rangle_{\mathbb{Z}}$ mit der kanonischen Surjektion $\pi : \langle M \times N \rangle_{\mathbb{Z}} \to M \otimes_k N$.

Der von der Menge $M \times N$ erzeugte freie k-Modul hat die folgende universelle Eigenschaft: Zu jeder Abbildung $f : M \times N \to P$ in einen k-Modul P existiert genau eine k-lineare Abbildung $f' : \langle M \times N \rangle_k \to P$ mit $f'(\delta_{(m,n)}) = f(m,n)$ für alle $(m,n) \in M \times N$.

Definition 4. Sei A eine Algebra über einem kommutativen Ring k und M ein (A,A)-Bimodul mit der Strukturabbildung $\rhd : A \times M \to M$ und $\lhd : M \times A \to M$. Wir schreiben $A^{\otimes n} = A \otimes_k \cdots \otimes_k A$ für das n-fache Tensorprodukt von A über k mit $A^{\otimes 0} := k$.

1. Der k-Modul von n-Ketten ist

$$C_n(A,M) = \begin{cases} M \otimes_k A^{\otimes n} & n \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & n < 0. \end{cases} \tag{3}$$

2. Die Randoperatoren sind die k-linearen Abbildungen $d_n : C_n(A,M) \to C_{n-1}(A,M)$ gegeben durch $d_n = 0$ für $n \leq 0$ und $d_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_n^i$ für $n \in \mathbb{N}$ mit

$$d_n^i(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \begin{cases} (m \lhd a_1) \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n & i = 0 \\ m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes (a_i a_{i+1}) \otimes a_{i+2} \otimes \cdots \otimes a_n & 1 \leq i \leq n-1 \\ (a_n \rhd m) \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} & i = n. \end{cases} \tag{4}$$

Diese Strukturen werden uns die Hochschildhomologie definieren. Wenn wir statt der k-Moduln $M \otimes_k A^{\otimes n}$ die k-Moduln der k-linearen Abbildungen $f : A^{\otimes n} \to M$ betrachten, erhalten wir die duale Version der obigen Definition, nämlich die Hochschildkohomologie.

Definition 5. Sei A eine Algebra über einem kommutativen Ring k und M ein (A, A)-Bimodul mit Strukturabbildung $\rhd : A \times M \to M$ und $\lhd : M \times A \to M$. Wir schreiben $A^{\otimes n} = A \otimes_k \cdots \otimes_k A$ für das n-fache Tensorprodukt von A über k mit $A^{\otimes 0} := k$.

- Der k-Modul von n-Koketten ist

$$C^n(A, M) := \begin{cases} \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n}, M) & n \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & n < 0. \end{cases} \tag{5}$$

- Die Korandoperatoren sind die k-linearen Abbildungen $d^n : C^n(A, M) \to C^{n+1}(A, M)$, gegeben durch $d^n = 0$ für $n < 0$ und $d^n = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i d_i^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$(d_i^n f)(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = \begin{cases} a_0 \rhd f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) & i = 0 \\ f(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-2} \otimes (a_{i-1} a_i) \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n) & 1 \leq i \leq n \\ f(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}) \lhd a_n & i = n+1. \end{cases} \tag{6}$$

Genau wie für singuläre oder simpliziale (Ko)randoperatoren ist die Komposition zweier (Ko)randoperatoren, aus den obigen Definitionen, Null. Dies ist eine Folge der kombinatorischen Eigenschaften der Randoperatoren d_n^i und d_i^n.

Lemma 6. Sei k ein kommutativer Ring, A eine Algebra über k und M ein (A, A)-Bimoduln.

1. Die k-linearen Abbildungen $d_n^i : C_n(A, M) \to C_{n-1}(A, M)$ erfüllen $d_{n-1}^i \circ d_n^j = d_{n-1}^{j-1} \circ d_n^i, \forall 0 \leq i < j \leq n$, und dies impliziert $d_n \circ d_{n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.
2. Die k-linearen Abbildungen $d_i^n : C^n(A, M) \to C^{n+1}(A, M)$ erfüllen $d_i^{n+1} \circ d_j^n = d_{j+1}^{n+1} \circ d_i^n$, $\forall 0 \leq i \leq j \leq n$, und dies impliziert $d^{n+1} \circ d^n = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Wir beweisen den zweiten Teil des Lemmas. Der Beweis des ersten Teils funktioniert ganz analog.

Wir berechnen für $0 < i = j < n$:

$$\begin{aligned} d_i^{n+1}(d_i^n f)(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) &= (d_i^n f)(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-2} \otimes (a_{i-1} a_i) \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \\ &= f(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-2} \otimes (a_{i-1} a_i a_{i+1}) \otimes a_{i+2} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \\ &= (d_i^n f)(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-2} \otimes a_{i-1} \otimes (a_i a_{i+1}) \otimes a_{i+2} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \\ &= d_{i+1}^{n+1}(d_i^n f)(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}), \end{aligned} \tag{7}$$

für $0 < i < j < n$:

$$\begin{aligned} & d_i^{n+1}(d_j^n f)(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) = (d_j^n f)(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-2} \otimes (a_{i-1} a_i) \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \\ &= f(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-2} \otimes (a_{i-1} a_i) \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{j-1} \otimes (a_j a_{j+1}) \otimes a_{j+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \\ &= (d_i^n f)(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{j-2} \otimes a_{j-1} \otimes (a_j a_{j+1}) \otimes a_{j+2} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \\ &= d_{j+1}^{n+1}(d_i^n f)(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}), \end{aligned} \tag{8}$$

für $i = j = 0$:

$$\begin{aligned} d_0^{n+1}(d_0^n f)(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) &= a_0 \triangleright (d_0^n f)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \\ &= a_0 \triangleright (a_1 \triangleright f(a_2 \otimes \cdots a_{n+1})) \\ &= (a_0 a_1) \triangleright f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \\ &= (d_0^n f)((a_0 a_1) \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \\ &= d_1^{n+1}(d_0^n f)(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}), \end{aligned} \tag{9}$$

für $i = 0 < j < n$:

$$\begin{aligned} d_0^{n+1}(d_j^n f)(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) &= a_0 \triangleright (d_j^n f)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \\ &= a_0 \triangleright f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{j-1} \otimes (a_j a_{j+1}) \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \\ &= (d_0^n f)(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{j-1} \otimes (a_j a_{j+1}) \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \\ &= d_{j+1}^{n+1}(d_0^n f)(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}). \end{aligned} \tag{10}$$

Die Berechnungen für die Fälle $i = j = n$ und $0 \leq i < j = n$ sind analog. Diese Relationen implizieren

$$\begin{aligned} d^{n+1} \circ d^n &= \sum_{i=0}^{n+2} \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{i+j} d_i^{n+1} \circ d_j^n \\ &= \sum_{0 \leq j < i \leq n+2} (-1)^{i+j} d_i^{n+1} \circ d_j^n + \sum_{0 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{i+j} d_i^{n+1} \circ d_j^n \\ &\overset{6.2}{=} \sum_{0 \leq j < i \leq n+2} (-1)^{i+j} d_i^{n+1} \circ d_j^n + \sum_{0 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{i+j} d_{j+1}^{n+1} \circ d_i^n \\ &= \sum_{0 \leq j < i \leq n+2} (-1)^{i+j} d_i^{n+1} \circ d_j^n + \sum_{0 \leq i < j \leq n+2} (-1)^{i+j-1} d_j^{n+1} \circ d_i^n \\ &= \sum_{0 \leq j < i \leq n+2} (-1)^{i+j} (d_i^{n+1} \circ d_j^n - d_i^{n+1} \circ d_j^n) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

□

Wir erhalten also einen Kettenkomplex für die Hochschildhomologie

$$0 \xleftarrow{d_0} M \xleftarrow{d_1} M \otimes_k A \xleftarrow{d_2} M \otimes_k A \otimes_k A \xleftarrow{d_3} ...$$

und einen entsprechenden Kokettenkomplex für die Hochschildkohomologie

$$0 \xrightarrow{d^0} M \cong \mathrm{Hom}(A^{\otimes 0}, M) \xrightarrow{d^1} \mathrm{Hom}(A^{\otimes 1}, M) \xrightarrow{d^2} \mathrm{Hom}(A^{\otimes 2}, M) \xrightarrow{d^3} \ldots$$

Weil die Randoperatoren $d_n : C_n(A, M) \to C_{n-1}(A, M)$ die Relationen $d_n \circ d_{n+1} = 0$ erfüllen, wissen wir auch, dass $d_n(\mathrm{im}(d_{n+1})) = 0$ und somit $\mathrm{im}(d_{n+1}) \subset \ker(d_n) \subset C_n(A, M)$. Das erlaubt uns, den Quotientenmodul $\ker(d_n)/\mathrm{im}(d_{n+1})$ zu bilden. Auf analoge Art und Weise gilt $d^n \circ d^{n-1} = 0$ für die Korandoperatoren. Das impliziert also, dass $\mathrm{im}(d^{n-1}) \subset \ker(d^n) \subset C^n(A, M)$ Untermoduln sind, und das erlaubt uns, den Quotientenmodul $\ker(d^n)/\mathrm{im}(d^{n-1})$ zu bilden. Diese Quotienten heißen Hochschildhomologien bzw. Hochschildkohomologien von A mit Koeffizienten in M.

Bevor wir die Hochschildhomologien definieren, erinnern wir ebenfalls an die Definition eines Quotientenmoduls.

Satz 7. Sei M ein k-Modul, $U \subset M$ ein Untermodul und $\pi : M \to M/U, m \mapsto [m]$ die kanonische Surjektion auf die Faktorgruppe. Dann gilt:

1. Auf der abelschen Gruppe M/U existiert genau eine k-Modulstruktur, die $\pi : M \to M/U$ zu einem k-Modulhomomorphismus macht. Die abelsche Gruppe M/U mit dieser k-Modulstruktur wird als Quotientenmodul oder Faktormodul bezeichnet.

2. Zu jeder k-linearen Abbildung $\varphi : M \to M'$ mit $U \subset \ker(\varphi)$ gibt es genau eine k-lineare Abbildung $\varphi' : M/U \to M'$ mit $\varphi' \circ \pi = \varphi$. Dies ist die charakteristische Eigenschaft der Quotientenmoduln.

Beweis.

1. Die k-Linearität von $\pi : M \to M/U, m \mapsto [m]$ legt wegen der Surjektivität von π die k-Modulstruktur auf M/U eindeutig fest auf $\lambda \triangleright [m] = \lambda \triangleright \pi(m) = \pi(\lambda \triangleright m) = [\lambda \triangleright m]$ für alle $m \in M, \lambda \in k$. Zu zeigen ist, dass die Abbidung $\triangleright : k \times M/U \to M/U, (\lambda, [m]) \mapsto [\lambda \triangleright m]$ wohldefiniert ist und tatsächlich eine k-Modulstruktur auf M/U definiert. Gilt $[m] = [m']$, so folgt $[m - m'] = [0]$ und damit $m - m' \in U$. Da $U \subset M$ ein Untermodul ist, folgt $\lambda \triangleright (m - m') \in U$ für alle $\lambda \in k$ und damit $\lambda \triangleright [m] = [\lambda \triangleright m] = [\lambda \triangleright m'] + [\lambda \triangleright (m - m')] = [\lambda \triangleright m'] = \lambda \triangleright [m']$. Die übrigen Identitäten folgen sofort aus der k-Modulstruktur von M:

$$\begin{aligned}
\lambda \triangleright ([m] + [m']) &= [\lambda \triangleright (m + m')] = [\lambda \triangleright m + \lambda \triangleright m'] && (12)\\
&= [\lambda \triangleright m] + [\lambda \triangleright m'] = \lambda \triangleright [m] + \lambda \triangleright [m'], \\
(\lambda + \lambda') \triangleright [m] &= [(\lambda + \lambda') \triangleright m] = [\lambda \triangleright m + \lambda' \triangleright m] && (13)\\
&= [\lambda \triangleright m] + [\lambda' \triangleright m] = \lambda \triangleright [m] + \lambda' \triangleright [m], \\
1 \triangleright [m] &= [1 \triangleright m] = [m], && (14)\\
(\lambda\lambda') \triangleright [m] &= [(\lambda\lambda') \triangleright m] = [\lambda \triangleright (\lambda' \triangleright m)] = \lambda \triangleright (\lambda' \triangleright [m]). && (15)
\end{aligned}$$

2. Die Bedingung $\varphi' \circ \pi = \varphi$ legt die Abbildung $\varphi' : M/U \to M'$ wegen der Surjektivität von π eindeutig fest, denn sie erzwingt $\varphi'([m]) = \varphi(m)$ für alle $m \in M$. Zu zeigen ist, dass $\varphi' : M/U \to M', [m] \mapsto \varphi(m)$ wohldefiniert und k-linear ist. Falls $[m] = [m']$ ist, so folgt $m - m' \in U$ und wegen $U \subset \ker(\varphi)$ auch $\varphi(m - m') = 0$. Damit ergibt sich $\varphi'([m]) = \varphi(m) = \varphi(m' + m - m') = \varphi(m') + \varphi(m - m') = \varphi(m') = \varphi'([m'])$. Die k-Linearität folgt direkt aus der k-Linearität von φ:

$$\begin{aligned}
\varphi'(\lambda \triangleright [m]) &= \varphi'([\lambda \triangleright m]) = \varphi(\lambda \triangleright m) = \lambda \triangleright \varphi(m) = \lambda \triangleright \varphi'([m]), && (16)\\
\varphi'([m] + [m']) &= \varphi'([m + m']) = \varphi(m + m') = \varphi(m) + \varphi(m') = \varphi'([m]) + \varphi'([m']). && (17)
\end{aligned}$$

□

Definition 8. Sei A eine Algebra über einem kommutativen Ring k und M ein (A, A)-Bimoduln mit Strukturabbildung $\triangleright : A \times M \to M$ und $\triangleleft : M \times A \to M$.

- Der k-Modul $Z_n(A, M) = \ker(d_n) \subset C_n(A, M)$ heißt k-Modul der n-Zykel und der Untermodul $B_n(A, M) = \mathrm{im}(d_{n+1}) \subset Z_n(A, M)$ k-Modul der n-Ränder.

- Die n-te Hochschildhomologie von A mit Koeffizienten in M ist der Quotientenmodul

$$H_n(A, M) = \frac{Z_n(A, M)}{B_n(A, M)} = \frac{\ker(d_n)}{\mathrm{im}(d_{n+1})}. \tag{18}$$

- Der k-Modul $Z^n(A,M) = \ker(d^n) \subset C^n(A,M)$ heißt k-Modul der n-Koketten und der Untermodul $B^n(A,M) = \mathrm{im}(d^{n-1})_{¸} \subset Z^n(A,M)$ der k-Modul der n-Koränder.

- Die n-te Hochschildkohomologie von A mit Koeffizienten in M ist der Quotientenmodul

$$H^n(A,M) = \frac{Z^n(A,M)}{B^n(A,M)} = \frac{\ker(d^n)}{\mathrm{im}(d^{n-1})}. \tag{19}$$

Hochschild(ko)homologien von A mit Koeffizienten in M enthalten Informationen über die k-Algebra A und den (A,A)-Bimodul M. Da jede k-Algebra A ein (A,A)-Bimodul mit Links- und Rechtsmultiplikation ist, können wir auch den (A,A)-Bimodul $M = A$ betrachten und Informationen über die Algebra A selbst extrahieren.

Um die erste Hochschildkohomologie interpretieren zu können, benötigen wir das Konzept einer Derivation, welche die Ableitungen von Funktionen verallgemeinert. Um das zu sehen betrachten wir die Algebra $C^n(U)$ der n-fach stetig differenzierbaren reellen Funktionen auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$ mit der punktweisen Addition, Multiplikation und der Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{R}$. Da das Produkt einer C^n-Funktion mit einer C^{n-1}-Funktion wieder eine C^{n-1}-Funktion ergibt, können wir $C^{n-1}(U)$ als Bimodul über $C^n(U)$ mit $f \rhd g = g \lhd f = f \cdot g$ für alle $f \in C^n(U)$ und $g \in C^{n-1}(U)$ betrachten. Die Ableitung $' : C^n(U) \to C^{n-1}(U), f \mapsto f'$ ist $\mathbb{R}$-linear und erfüllt die Leibniz-Regel $(f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g = f \rhd g' + f' \lhd g$ für alle $f, g \in C^k(U)$. Indem wir $C^n(U)$ mit einer Algebra über einem kommutativen Ring k ersetzen und $C^{n-1}(U)$ mit einem allgemeinen (A,A)-Bimodul M, erhalten wir die Definition einer Derivation.

Definition 9. Sei A eine Algebra über einem kommutativen Ring k und M ein (A,A)-Bimodul mit Strukturabbildung $\rhd : A \times M \to M$ und $\lhd : M \times A \to M$.

1. Eine Derivation auf A mit Werten in M ist eine k-lineare Abbildung $f : A \to M$ welche folgende Formel erfüllt: $f(ab) = f(a) \lhd b + a \rhd f(b)$ für alle $a, b \in A$. Der k-Modul der Derivationen $f : A \to M$ wird als $\mathrm{Der}(A,M)$ geschrieben.

2. Eine Derivation auf A mit Werten in M heißt innere Derivation, falls sie von der Form $f_m : A \to M, a \mapsto a \rhd m - m \lhd a$ für ein $m \in M$ ist. Der Untermodul der inneren Derivationen wird geschrieben als $\mathrm{InnDer}(A,M) \subset \mathrm{Der}(A,M)$.

Beispiel 10. Sei A eine Algebra über einem kommutativen Ring k und M ein (A,A)-Bimodul mit $\rhd : A \times M \to M$ und $\lhd : M \times A \to M$. Wir berechnen nun die Hochschildhomologien $H_0(A,M)$ und $H_1(A,M)$ und Hochschildkohomologien $H^0(A,M)$ und $H^1(A,M)$.

1. Der Hochschildkomplex im Grad Null ist gerade M. Deshalb ist das Differenzial $d_1 : M \otimes_k A \to M$ gegeben durch $d_1(m \otimes a) = m \lhd a - a \rhd m$. Also ist $\mathrm{im}(d_1) = [M,A]$ und $H_0(A,M) = \ker(d_0)/\mathrm{im}(d_1) = M/[M,A]$. Als Spezialfall erhalten wir dann $H_0(A,A) = A/[A,A]$.

2. Der Hochschildkomplex im Grad Eins ist $M \otimes_k A$. Das Differenzial $d_1 : M \otimes_k A \to M$ ist gegeben durch $d_1(m \otimes a) = m \lhd a - a \rhd m$. Das Differenzial $d_2 : M \otimes_k A \otimes_k A \to M \otimes_k A$ ist gegeben durch $d_2(m \otimes a \otimes b) = (m \lhd a) \otimes b - m \otimes (ab) + (b \rhd m) \otimes a$. Wir erhalten $\ker(d_1) = \{m \otimes a \in M \otimes_k A \mid m \lhd a = a \rhd m\}$ und $\mathrm{im}(d_2) = \langle (m \lhd a) \otimes b - m \otimes (ab) + (b \rhd m) \otimes a \rangle_k$. Die erste Homologie ist

$$H_1(A,M) = \frac{\ker(d_1)}{\mathrm{im}(d_2)} = \frac{\{m \otimes a \in M \otimes_k A \mid m \lhd a = a \rhd m\}}{\langle (m \lhd a) \otimes b - m \otimes (ab) + (b \rhd m) \otimes a \rangle_k}. \tag{20}$$

Wir wollen zuletzt auch noch die Hochschildkohomologien in den Graden Null und Eins ausrechnen. Wir werden zeigen, dass die nullte Hochschildkohomologie das Zentrum eines (A,A)-Bimoduls M ist und zugleich ein Untermodul, für dessen Elemente die Links- und Rechtswirkung von A übereinstimmen.

Lemma 11. Sei A eine Algebra über einem kommutativen Ring k und M ein (A,A)-Bimodul mit Strukturabbildung $\rhd : A \times M \to M$ und $\lhd : M \times A \to M$.

- Die erste Hochschildkohomologie von A mit Koeffizienten in M ist gegeben durch

$$H^0(A,M) = Z_A(M) \qquad\qquad H^1(A,M) = \frac{\mathrm{Der}(A,M)}{\mathrm{InnDer}(A,M)}, \tag{21}$$

  wobei $Z_A(M) = \{m \in M \mid a \rhd m = m \lhd a \; \forall a \in A\}$ das Zentrum von M ist.

- Für $M = A$ als (A,A)-Bimodul über sich selbst mit Links- und Rechtsmultiplikation erhalten wir

$$H^0(A,A) = Z(A) \qquad\qquad H^1(A,A) = \frac{\mathrm{Der}(A,M)}{\mathrm{InnDer}(A,M}, \tag{22}$$

  wobei $Z(A) = \{a \in A \mid a \rhd m = m \lhd a \; \forall a \in A\}$ das Zentrum von A ist.

Beweis. Weil $\phi : \mathrm{Hom}_k(k,M) \to M, f \mapsto f(1)$ ein k-linearer Isomorphismus ist, gilt $C^0(A,M) = \mathrm{Hom}_k(k,M) \cong M$. Mit dieser Identifikation sind die ersten beiden Korandoperatoren gegeben durch

$$\begin{aligned} &d^0 : M \to \mathrm{Hom}_k(A,M), m \mapsto f_m && f_m(a) = a \rhd m - m \lhd a \\ &d^1 : \mathrm{Hom}_k(A,M) \to \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes 2},M), && (d^1 f)(a \otimes b) = a \rhd f(b) - f(ab) + f(a) \lhd b, \end{aligned} \tag{23}$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} \ker(d^0) &= \{m \in M \mid a \rhd m = m \lhd a \; \forall a \in A\} = Z_A(M), \\ \ker(d^1) &= \{f : A \to M \mid a \rhd f(b) - f(ab) + f(a) \lhd b = 0 \; \forall a,b \in A\} = \mathrm{Der}(A,M), \\ \ker(d^2) &= \{f_m : A \to M, a \mapsto a \rhd m - m \lhd a \mid m \in M\} = \mathrm{InnDer}(A,M). \end{aligned} \tag{24}$$

□

Das zeigt, dass die Hochschildkohomologie $H^0(A,M)$ die Nichtkommutativität eines Bimoduls M in Bezug auf die Links- bzw. Rechtswirkung seiner A-Modulstruktur misst. Insbesondere erhalten wir für $M = A$ als Bimodul über sich selbst ein Maß der Nichtkommutativität von A. Wenn wir einen Ring A als Algebra über $\mathbb{Z}$ betrachten und einen A-Modul N, dann wird die abelsche Gruppe $M = \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(N)$ der $\mathbb{Z}$-Modulendomorphismen $f : N \to N$ ein (A,A)-Bimodul mit Bimodulstruktur $(a \rhd f)(n) = a \rhd f(n)$ und $(f \lhd a)(n) = f(a \rhd n)$. In diesem Fall ist $H^0(A,M)$ die Untergruppe der A-Modulendomorphismen $f : N \to N$.

Die erste Hochschildkohomologie $H^1(A,M)$ zählt die Derivationen von A mit Werten in M, bis auf innere Derivationen. Falls M in Bezug auf die Wirkung von A kommutativ ist, erhalten wir $M = Z_A(M)$ und $\mathrm{InnDer}(A,M) = \{0\}$. In diesem Fall zählt $H^1(A,M)$ die Derivationen von A mit Werten in M. Falls $M = A$ als (A,A)-Bimodul über sich selbst betrachtet wird, dann sind die Derivationen gerade die k-linearen Abbildungen $f : A \to A$ mit $f(ab) = af(b) - f(a)b$ und die inneren Derivationen sind die Kommutatorabbildungen $f_b : A \to A, a \mapsto [a,b] = ab - ba$. Nach der Leibniz-Regel ist jede Kommutatorabbildung eine Derivation. Also zählt die Hochschildkohomologie $H^1(A,A)$ die Derivationen bis auf Kommutatorabbildungen.

Lemma 12. Sei k ein kommutativer Ring als eine Algebra über sich selbst und M ein (k,k)-Bimodul mit den Strukturabbildungen $k \triangleright m = m \triangleleft k$. Dann sind die Hochschildhomologien und Hochschildkohomologien in den Graden $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben durch

$$H_n(k,M) = \begin{cases} M & n = 0 \\ 0 & n \geq 1 \end{cases} \qquad H^n(k,M) = \begin{cases} M & n = 0 \\ 0 & n \geq 1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{25}$$

Beweis.

1. Wir berechnen die Hochschildhomologien $H_n(k,M)$. Der Hochschildkomplex für k ist gegeben durch

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} M \otimes_k k^{\otimes n} \xrightarrow{d_n} M \otimes k^{\otimes(n-1)} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} M \otimes_k k \xrightarrow{d_1} M \xrightarrow{d_0} 0. \tag{26}$$

Weil $k^{\otimes n} \cong k$, gilt für jeden Term $M \otimes_k k^{\otimes n} \cong M$. Die Differenziale alternieren zwischen der Identitätsabbildung und der Nullabbildung aufgrund der symmetrischen Bimodulstruktur, da alle Kommutatoren verschwinden. Es gilt $C_n(k,M) = M \otimes k^{\otimes n} \cong M$ und damit für $d_1 : C_1 \to C_0, m \otimes a \mapsto m \triangleleft a - a \triangleright m = m \cdot a - a \cdot m$. Weil M symmetrisch ist, also $m \cdot a = a \cdot m$, erhalten wir $d_1(m \otimes a) = m \cdot a - a \cdot m = m \cdot a - m \cdot a = 0$, also die Nullabbildung. Für $d_2 : C_2 \to C_2, m \otimes a \otimes b \mapsto m \triangleright a \otimes b - m \otimes (ab) + b \triangleleft m \otimes a$. Indem wir verwenden, dass $m \triangleright a = m \cdot a = a \cdot m = a \triangleleft m$, $m \triangleright b = m \cdot b = b \cdot m = b \triangleleft m$ und $ab = ba$, da k kommutativ ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} d_2(m \otimes a \otimes b) &= m \cdot a \otimes b - m \otimes (ab) + b \cdot m \otimes a \\ &= m \otimes ab - m \otimes ab + m \otimes ab = m \otimes ab. \end{aligned} \tag{27}$$

Aufgrund der Isomorphie $C_2(k,M) \cong M \otimes_k k \cong M$ erhalten wir auf den Elementen von M für $d_2 : M \to M, d_2(m) = m$, also $d_2 = \mathrm{id}_M$. Damit ist $H_0(k,M) = M/\mathrm{im}(d_1) = M/0 = M$. Wir erhalten für das allgemeine gerade Differenzial:

$$\begin{aligned} d_{2n}(m \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_{2n}) &= \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i d_{2n}^i (m \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots a_{2n}) \\ &= m \cdot a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_{2n} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{2n-1} (-1)^i m \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{2n} \\ &\quad + (-1)^{2n} a_{2n} \cdot m \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_{2n} \\ &= m \cdot (a_1 \cdot a_2 \cdots a_{2n}) \otimes 1_k \otimes \cdots \otimes 1_k \\ &= m \cdot (a_1 \cdot a_2 \cdots a_{2n}) \otimes 1_k \\ &= m \otimes (a_1 \cdot a_2 \cdots a_{2n}), \end{aligned} \tag{28}$$

und somit $d_{2n}(m) = m = \mathrm{id}_M$ sowie $d_{2n+1}(m) = 0$ für alle $m \in M$. Für $n \geq 1$ können wir den Hochschildkomplex umschreiben als

$$\cdots \xrightarrow{\mathrm{id}} M \xrightarrow{0} M \xrightarrow{\mathrm{id}} M \xrightarrow{0} 0. \tag{29}$$

Für den Kern der geraden Differenziale und die Bilder der ungeraden Differenziale erhalten wir $\ker(d_{2m}) = M$ und $\mathrm{im}(d_{2m-1}) = M$, also ergeben die geraden Homologien $H_{2m}(k,M) = M/M = 0$. Für die Kerne der ungeraden Differenziale und die Bilder der geraden Differenziale erhalten wir $\ker(d_{2m+1}) = 0$ und $\operatorname{im}(d_{2m}) = 0$, also $H_{2m+1}(k, M) = 0/0 = 0$. Das liefer das erste Ergebnis

$$H_n(k, M) = \begin{cases} M & n = 0 \\ 0 & n \geq 1. \end{cases} \tag{30}$$

2. Wir berechnen nun $H^n(k, M)$. Der Hochschildkokettenkomplex ist

$$0 \xrightarrow{d^0} M \xrightarrow{d^1} \operatorname{Hom}_k(k, M) \xrightarrow{d^2} \operatorname{Hom}_k(k^{\otimes 2}, M) \xrightarrow{d^3} \cdots. \tag{31}$$

Aufgrund der Identifikation $\operatorname{Hom}_k(k^{\otimes n}, M) \cong \operatorname{Hom}_k(k, M) \cong M$ vereinfacht sich dieser Hochschildkokettenkomplex zu

$$0 \xrightarrow{d^0} M \xrightarrow{d^1} M \xrightarrow{d^2} M \xrightarrow{d^3} \cdots. \tag{32}$$

Die Kokettengruppe vereinfacht sich zu $C^n(k, M) = \operatorname{Hom}_k(k^{\otimes n}, M) = \operatorname{Hom}_k(k, M) \cong M$. Das Differenzial $d^0 : C^0 \to C^1, d^0(m)(a) = a \cdot m - m \cdot a = 0$ ist die Nullabbildung, aufgrund der Symmetrie von M. Wir berechnen nun das Differenzial $d^1 : C^1 \to C^2$. Sei $\phi \in \operatorname{Hom}_k(k, M)$, so dass $\phi(1) = m$. Dann ist

$$\begin{aligned} d^1(\phi)(a \otimes b) &= a \cdot \phi(b) - \phi(ab) + \phi(a) \cdot b && (33) \\ &= a \cdot (b \cdot m) - (ab) \cdot m + (a \cdot m) \cdot b && (34) \\ &= (ab) \cdot m. && (35) \end{aligned}$$

Unter der Identifikation $C^2(k, M) \cong M$ ergibt dies für $d^1 : M \to M, m \mapsto m$ also $d^1 = \mathrm{id}_M$. Für das allgemeine ungerade Differenzial erhalten wir für $\phi \in \operatorname{Hom}_k(k^{\otimes 2n-1}, M), \phi(m) = 1$

$$\begin{aligned} d^{2n-1}(\phi)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{2n-1}) &= a_1 \cdot \phi(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{2n-1}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{2n-1} (-1)^i \phi(a_1 \otimes \cdots \otimes (a_i a_{i+1}) \otimes \cdots \otimes a_{2n-1}) \\ &\quad + (-1)^{2n} \phi(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{2n-2}) \cdot a_{2n-1} \\ &= a_1 \cdot (a_2 \cdots a_{2n-1} \cdot m) + (-1)^{2n} (a_1 \cdots a_{2n-1}) \cdot m \\ &= (a_1 \cdots a_{2n-1}) \cdot m + (a_1 \cdots a_{2n-1}) \cdot m \\ &= 2(a_1 \cdots a_{2n-1}) \cdot m, \end{aligned} \tag{36}$$

und somit ist $d^{2n-1}(\phi)(m) = m = \mathrm{id}_M(m)$ bzw. $d^{2n}(\phi)(m) = 0$ für alle $m \in M$. Der Hochschildkokettenkomplex ist also

$$0 \xrightarrow{0} M \xrightarrow{\mathrm{id}} M \xrightarrow{0} M \xrightarrow{\mathrm{id}} \cdots. \tag{37}$$

Die nullte Hochschildkohomologie $H^0(k, M) = \ker(d^0) = M$. Für $n \geq 1$ ist der Kern der geraden Differenziale und das Bild der ungeraden Differenziale gegeben durch $\ker(d^{2n}) = M$ und $\operatorname{im}(d^{2n-1}) = M$, damit also $H^{2n}(k, M) = M/M = 0$. Für die ungeraden Kerne der Differenziale und die geraden Bilder erhalten wir $\ker(d^{2n-1}) = 0$ und $\operatorname{im}(d^{2n}) = 0$. Somit ist $H^{2n-1}(k, M) = 0/0 = 0$. Als Ergebnis können wir zusammenfassen:

$$H^n(k, M) = \begin{cases} M & n = 0 \\ 0 & n \geq 1. \end{cases} \tag{38}$$

□

Literatur

[1] Catherine Meusburger. *Algebraic Topology*. Vorlesungsskript. 2025. URL: https://en.www.math.fau.de/wp-content/uploads/sites/3/2025/03/AlgTop.pdf.

[2] Catherine Meusburger. *Einführung in die Darstellungstheorie*. Vorlesungsskript. 2024. URL: https://www.math.fau.de/wp-content/uploads/2024/01/Einfuehrung-Darstellungstheorie.pdf.

[3] Catherine Meusburger. *Homological Algebra*. Vorlesungsskript. 2024. URL: https://www.math.fau.de/wp-content/uploads/2024/01/Homological-Algebra.pdf.