

Spektralsequenzen

Leray–Serre Spektralsequenz

Luciano Melodia

Seminar zur Spektraltheorie

Lehrstuhl für Mathematische Physik

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg

luciano.melodia@fau.de

22. Januar 2025

Zusammenfassung

Die Homologiedefinition $H_n(A_\bullet)$ eines Kettenkomplexes A_\bullet ist für beliebige Homologietheorien als Quotient

$$H_n(A_\bullet) := \frac{\ker d_n}{\operatorname{im} d_{n+1}}$$

definiert. In Bezug auf Spektralsequenzen gibt es also in einem Kettenkomplex ein Differential, das aus der Gruppe herausgeht, in diesem Fall d_n , und eines, das in die Gruppe hineingeht, in diesem Fall d_{n+1} .

Mit dieser Sichtweise können wir verschiedene Homologiegruppen betrachten, je nachdem, welche Differentiale wir verwenden. Eine solche Betrachtung kann nummeriert und in sogenannten **Seiten** organisiert werden. Eine Spektralsequenz ist wie ein Buch, das aus einer unendlichen Anzahl von Seiten besteht. Jede Seite ist ein zweidimensionales Gitter, das aus Gruppen besteht, die bestimmten Differentialen zugeordnet sind.

Wir können eine natürliche Transformation anwenden, um von einer Seite zur nächsten zu gelangen, und im Idealfall stabilisieren sich die Seiten zu einem Seitenlimes im Unendlichen. Die Notation für die Homologien ist

$$E_{p,q}^r,$$

wobei r die Seitenzahl aus einer total geordneten Indexmenge (I, \leq) entnommen, $p \in \mathbb{Z}$ der horizontale Index und $q \in \mathbb{Z}$ der vertikale Index ist.

In gewisser Weise verhält sich jede Seite einer Spektralsequenz wie ein 2-dimensionaler Kettenkomplex. Die Gruppen sind durch zwei Parameter statt durch einen indiziert, und für jede Gruppe gibt es genau ein Differential, das aus der Gruppe herausführt, und genau ein Differential, das in die Gruppe hineinführt. Außerdem gilt immer die Eigenschaft

$$d^2 = 0.$$

Wie sieht nun die Operation aus, die uns von $E_{p,q}^r$ nach $E_{p,q}^{r+1}$ führt? Die Differentiale auf jeder Seite r hängen stark von der Definition der Spektralsequenz

ab. Schreiben wir $d_{\text{IN}}, d_{\text{OUT}}$ für die eingehenden und ausgehenden Differentiale von $E_{p,q}^r$, dann definieren wir

$$E_{p,q}^{r+1} := \frac{\ker d_{\text{OUT}}}{\text{im } d_{\text{IN}}}.$$

Die Funktionsweise der Spektralsequenz besteht darin, dass die Gruppen auf der ersten Seite $E_{p,q}^1$ definiert werden. Dann lassen wir die Spektralsequenzmaschine arbeiten. Im Falle der Serre-Spektralsequenz stabilisiert sich diese, das heißt, es gibt ein R , sodass für alle $r > R$ gilt:

$$E_{p,q}^r = E_{p,q}^R.$$

Dies sind die Einträge der stabilisierten Seite $E_{p,q}^\infty$.

Wir beschreiben nun, was wir in unsere Spektralsequenz eintragen müssen und was wir davon als Ergebnis erwarten können, insbesondere am Beispiel der Serre'schen Spektralsequenz.

Inhaltsverzeichnis

1	Homologische Spektralsequenzen	2
2	Filtrierungen und exakte Paare	5
3	Presentation der Serre spektralen Sequenz	11
4	Homologie von $\mathbb{C}P^\infty$	16

1 Homologische Spektralsequenzen

Generell besteht die Möglichkeit, Spektralsequenzen über abelsche Kategorien zu definieren, alternativ oder zusätzlich über R -Moduln. Gegenstand der vorliegenden Arbeit sind Spektralsequenzen über \mathbb{Z} -Moduln, also die Variante für abelsche Gruppen.

Definition 1.1 (Homologische Sequenz). *Sei $r_0 \in I$ mit $r_0 \geq 0$. Eine homologische Sequenz $\{A_{p,q}^r, d_{p,q}^r\}_{r \geq r_0}$ besteht aus*

1. *einer Familie abelscher Gruppen $\{A_{p,q}^r\}_{p,q \in \mathbb{Z}, r \geq r_0}$ und*
2. *einer Familie von Gruppenhomomorphismen $\{d_{p,q}^r : A_{p,q}^r \rightarrow A_{p-r,q+r-1}^r\}$, die als Differentiale bezeichnet werden,*

sodass für alle p, q, r gilt:

1. $d_{p-r,q+r-1}^r \circ d_{p,q}^r = 0$,
2. $E_{p,q}^{r+1}$ *ist die zugehörige Homologie von A^r , das heißt*

$$E_{p,q}^{r+1} = \frac{\ker d_{p,q}^r}{\text{im } d_{p+r,q-r+1}^r}.$$

Die vorliegende Definition einer homologischen Sequenz verdeutlicht, für welche Untergruppen die Quotienten berechnet werden, und zwar in einer Art Kettenkomplex mit zwei Indizes. Es ist jedoch davon auszugehen, dass sich eine Vereinfachung der Notation bei den weiteren Untersuchungen als hilfreich erweisen wird. Konkret wird ein r festgelegt und alle $A_{p,q}^r$ als ein Objekt A^r betrachtet. Diese neu entstandene Gruppe wird als bigradierte abelsche Gruppe bezeichnet, während die Differentiale d^r auch kollektiv als $d_{p,q}^r$ oder bigradierte Differentiale bezeichnet werden.

Definition 1.2 (Bigradierte abelsche Gruppen). *Eine **bigradierte abelsche Gruppe** A ist eine Familie von abelschen Gruppen*

$$A := \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} A_{p,q},$$

die man als direkte Summe auffassen kann, wobei die Indizes (p, q) aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ stammen. Sind zwei bigradierte abelsche Gruppen

$$A := \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} A_{p,q} \quad \text{und} \quad B := \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} B_{p,q}$$

gegeben, so bezeichnet man eine **bigradierte Abbildung** vom Bigrad (c, d) als die Familie von Gruppenhomomorphismen

$$f := \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} f_{p,q}^{(c,d)}.$$

$$\begin{array}{cccccc} A & A_{0,0} & A_{1,0} & A_{0,1} & A_{-1,0} & \cdots \\ \textcolor{red}{\downarrow} f & \downarrow f_{0,0}^{(0,0)} & \downarrow f_{1,0}^{(0,0)} & \downarrow f_{0,1}^{(0,0)} & \downarrow f_{-1,0}^{(0,0)} & \\ B & B_{0,0} & B_{1,0} & B_{0,1} & B_{-1,0} & \cdots \end{array}$$

Es sei darauf hingewiesen, dass der direkten Summe keine Bedeutung beigemessen wird, sodass die Reihenfolge der Summation als willkürlich zu betrachten ist. Eine alternative Betrachtungsweise besteht in der Auffassung der einzelnen abelschen Gruppen als Elemente einer Menge. Seien also $A = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} A_{p,q}$ und $B = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} B_{p,q}$ die bigradierten abelschen Gruppen.

Definition 1.3 (Bigradierte Abbildung). *Wir nennen einen Gruppenhomomorphismus*

$$f_{p,q}^{(c,d)} : A_{p,q} \longrightarrow B_{p+c, q+d}$$

eine Abbildung **vom Bigrad** (c, d) . Eine **bigradierte Abbildung** vom Bigrad (c, d) ist dann ein Gruppenhomomorphismus

$$f : A \longrightarrow B, \quad \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} a_{p,q} \longmapsto \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} f_{p,q}^{(c,d)}(a_{p,q}),$$

wobei jedem Summanden $a_{p,q} \in A_{p,q}$ das Element $f_{p,q}^{(c,d)}(a_{p,q}) \in B_{p+c, q+d}$ zugeordnet wird.

f kann als eine Sammlung von Gruppenhomomorphismen vom Bigrad (c, d) aufgefasst werden, die **elementweise** auf der direkten Summe der abelschen Gruppen operieren. Entsprechend können wir sinngemäß schreiben:

$$f := \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} f_{p,q}^{(c,d)}.$$

Beispiel 1.4. Sei R ein Ring. Dann trägt $R[x, x^{-1}, y, y^{-1}]$ die Struktur einer bigradigten abelschen Gruppe, indem wir

$$A_{p,q} = R x^p y^q \quad \text{für alle } p, q \in \mathbb{Z}$$

setzen.

Definition 1.5 (Bigradierte Untergruppen und Quotienten). Seien A und B bigradigte abelsche Gruppen. Dann definieren wir:

1. $A \subset B : \Leftrightarrow A_{p,q} \subset B_{p,q}$ für alle $p, q \in \mathbb{Z}$.
2. Falls $A \subset B$, so sei

$$\frac{B}{A} := \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} \frac{B_{p,q}}{A_{p,q}}.$$

Definition 1.6. Ist $f : A \rightarrow B$ eine bigradierte Abbildung des Grads (c, d) zwischen bigradigten abelschen Gruppen, so definieren wir

- $\ker f := \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} \ker f_{p,q}$,
- $\operatorname{im} f := \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} \operatorname{im} f_{p-c, q-d}$.

Nun können wir die zuvor definierte homologische Sequenz (Def. 1.1) zu einer homologischen **Spektralsequenz** erweitern.

Definition 1.7. Sei $r_0 \geq 0$. Eine **homologische Spektralsequenz**

$$\{E^r, d^r\}_{r \geq r_0}$$

besteht aus

1. einer bigradigten abelschen Gruppe E^r und
2. einer bigradigten Abbildung

$$d^r : E^r \longrightarrow E^r$$

vom Bigrad $(r, r-1)$, die als **Differential** bezeichnet wird, sodass für jedes r gilt:

- $d^r \circ d^r = 0$, d. h. $(d^r)^2 = 0$, und
- E^{r+1} ist die Homologie von E^r bezüglich des Differentials d^r , das heißt

$$E^{r+1} = \frac{\ker(d^r)}{\operatorname{im}(d^r)} = \frac{\bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} \ker d_{p,q}^r}{\bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} \operatorname{im} d_{p-r, q+r-1}^r} = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} \frac{\ker d_{p,q}^r}{\operatorname{im} d_{p-r, q+r-1}^r}.$$

Für jedes r nennt man E^r das **r -te Blatt** oder die **r -te Seite** der Spektralsequenz $\{E^r, d^r\}_{r \geq r_0}$.

Anmerkung 1.8. Es gibt eine entsprechende Variante als **kohomologische Spektralsequenz**, die in analoger Weise zu Def. 1.7 konstruiert wird. Dort schreibt man $E_r := \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} E_r^{p,q}$ für die Kohomologieanteile und verwendet Differentiale

$$d_r : E_r \longrightarrow E_r$$

vom Bigrad $(r, -r+1)$. Die homologische Spektralsequenz wird zur Berechnung von Homologiegruppen verwendet, während die kohomologische Spektralsequenz zur Bestimmung von Kohomologiegruppen dient.

Definition 1.9. Sei $\{E^r, d^r\}_{r \geq r_0}$ eine homologische Spektralsequenz. Angenommen, es existiert für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ eine natürliche Zahl

$$r(p, q) \in \mathbb{N},$$

abhängig von p und q , derart, dass für alle $r \geq r(p, q)$

$$E_{p,q}^r \cong E_{p,q}^{r(p,q)}.$$

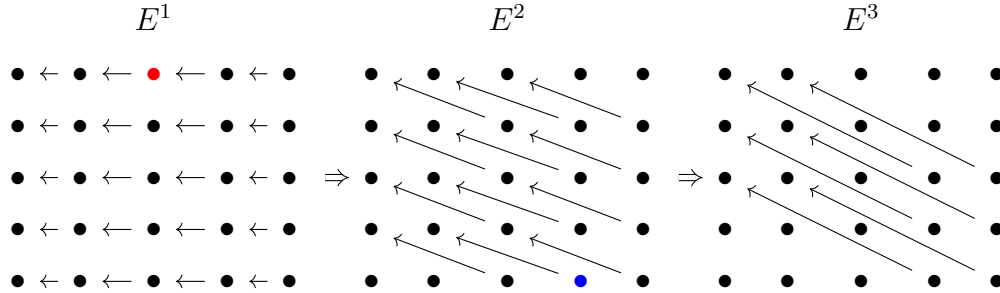
Dann sagen wir, dass die bigradierte abelsche Gruppe

$$E^\infty := \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} E_{p,q}^{r(p,q)}$$

der **Limes** der Spektralsequenz $\{E^r, d^r\}_{r \geq r_0}$ ist. Äquivalent sagen wir auch, dass die Spektralsequenz **an** E^∞ **angrenzt**.

Anmerkung 1.10. Im Folgenden ist eine schematische Darstellung der ersten drei Seiten einer Serre-Spektralsequenz mit den zugehörigen Differentialen (durch Pfeile \rightarrow) und den jeweiligen Definitions- und Zielbereichen (dargestellt durch \bullet). Die Symbole \bullet stehen in diesem Kontext für abelsche Gruppen, speziell für Homologiegruppen oder, falls über einem Körper \mathbb{F} betrachtet, für entsprechende Vektorräume.

Der rote Punkt \bullet stellt das Element $E_{2,4}^1$ dar, der blaue Punkt \bullet repräsentiert $E_{3,0}^2$. Diese besondere Spektralsequenz (die Serre-Spektralsequenz) **stabilisiert** immer, das heißt, für hinreichend große r ändert sich die jeweilige Seite nicht mehr.



2 Filtrierungen und exakte Paare

Angenommen, wir haben einen topologischen Raum X und einen **guten** Teilraum A , wobei das **Gütekriterium** in diesem Zusammenhang bedeutet, dass es eine Umgebung $U \subset X$ mit $\bar{A} \subset \overset{\circ}{U}$ gibt und A ein Deformationsretrakt von U ist. Dies stellt sicher, dass die relative Homologie

$$H_n(X, A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$$

isomorph zur **reduzierten** Homologie des Quotienten X/A ist. Falls wir nun die Homologien von A und X/A kennen, so ist es naheliegend, zur Berechnung der Homologie von X die lange exakte **reduzierte** Homologiesequenz zu verwenden:

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{H_n(\iota)} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{H_n(\pi)} \tilde{H}_n(X/A) \xrightarrow{\partial_n} \tilde{H}_{n-1}(A) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots$$

Erweitern wir unsere Situation auf **drei** ineinanderliegende Teilräume

$$B \subset A \subset X,$$

wobei wir wieder annehmen, dass alle Teilräume **gut** im obigen Sinne sind und wir bereits die Homologien von B , A/B sowie X/A kennen. Dann wünschen wir uns eine Verallgemeinerung der langen exakten Sequenz, die auch für ein solches verschachteltes Paar von Räumen funktioniert. Im Allgemeinen kann man eine solche Matroschka von topologischen Räumen als **Filtrierung** auffassen:

Definition 2.1. Eine **Filtrierung** eines topologischen Raumes X ist eine aufsteigende Folge von Teilräumen

$$\mathcal{X} : \quad \cdots \subset X_{-2} \subset X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X.$$

Wir werden zusätzlich fordern, dass (X_k, X_{k-1}) gute Paare sind, jedoch kann die Forderung für CW-Strukturen fallen gelassen werden, da diese durch die Definition eines CW-Komplexes bereits sichergestellt ist.

Nun stellt sich die Frage, was wir über die Homologien von X aussagen können, wenn wir unser Wissen über die Homologien der X_i aus einer Filtrierung \mathcal{X} und/oder über die Quotientenräume X_i/X_{i-1} einsetzen. Beschränken wir uns auf den Spezialfall, dass X der Totalraum einer Faserung ist, so erhalten wir eine zufriedenstellende Antwort auf diese Frage.

In einer Spektralsequenz kommt es häufig vor, dass E^r und d^r aus einer anderen Struktur hervorgehen, nämlich aus einem **exakten Paar**.

Definition 2.2. Ein **exaktes Paar** besteht aus einem Paar bigradierter abelscher Gruppen A und E zusammen mit bigradigten Abbildungen

$$i : A \rightarrow A, \quad j : A \rightarrow E, \quad k : E \rightarrow A,$$

sodass das folgende Diagramm exakt ist:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & A \\ & \swarrow k & \searrow j \\ & E & \end{array}$$

Die **Exaktheit** ist analog zu der für kurze exakte Sequenzen oder Kettenkomplexe definiert:

- $\ker i = \operatorname{im} k$,
- $\ker j = \operatorname{im} i$,
- $\ker k = \operatorname{im} j$.

Haben wir ein solches exaktes Paar (A, E, i, j, k) , so gibt es eine natürliche Art und Weise, das Differential

$$d = j \circ k : E \longrightarrow E$$

zu definieren, sodass

$$d^2 = (j \circ k)(j \circ k) = j(k \circ j)k = 0$$

gilt. Dieses Differential wird dann verwendet, um ein zweites exaktes Paar, das sogenannte **derivierte Paar**, zu definieren.

Lemma 2.3. Sei (A, E, i, j, k) ein exaktes Paar. Dann gibt es ein zweites exaktes Paar

$$(A', E', i', j', k'),$$

das **deriviertes Paar** genannt wird, und in folgendem Diagramm beschrieben ist:

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{i'} & A' \\ & \swarrow k' \quad \searrow j' & \\ & E' & \end{array}$$

wobei die Definitionen mittels

- $A' = i(A)$,
- $E' = \ker(d) / \operatorname{im}(d) = \ker(jk) / \operatorname{im}(jk)$,
- $i' = i|_{i(A)}$ (Einschränkung von i auf $i(A)$),
- Für alle $i(a) \in A' : j'i(a) = [j(a)] \in E'$,
- Für alle $[e] \in E' : k'[e] = k(e)$

gegeben sind.

Beweis. Der Beweis gliedert sich in drei Teile. Wir zeigen die Wohldefiniertheit von j' und k' sowie die Exaktheit des entstehenden Diagramms.

1. **Wohldefiniertheit von j' .**

Sei $i(a_1) = i(a_2)$ für $a_1, a_2 \in A$. Da $a_1 - a_2 \in \ker(i)$ liegt und nach Exaktheit $\ker(i) = \operatorname{im}(k)$ gilt, existiert ein $e \in E$ mit $k(e) = a_1 - a_2$. Dann folgt

$$j(a_1) - j(a_2) = j(a_1 - a_2) \in \operatorname{im}(j \circ k) = \operatorname{im}(d).$$

In anderen Worten ist $j(a_1) - j(a_2)$ ein **Rand** im Bild von d . Somit stimmen die Äquivalenzklassen überein:

$$[j(a_1)] = [j(a_2)] \quad \text{in } E'.$$

Also ist j' wohldefiniert und hängt nicht von der Wahl des Repräsentanten ab.

2. **Wohldefiniertheit von k' .**

Für jedes $e \in \ker(d) = \ker(jk)$ gilt zunächst $k(e) \in \ker(j)$. Nach Exaktheit ist $\ker(j) = \operatorname{im}(i)$, also $k(e) \in \operatorname{im}(i) = A'$. Für $[e_1] = [e_2]$ in E' (d. h. $[e_1 - e_2] = 0$) ist $e_1 - e_2$ ein Rand, also

$$e_1 - e_2 \in \operatorname{im}(d) = \operatorname{im}(jk) \subset \operatorname{im}(j) = \ker(k).$$

Folglich gilt

$$k(e_1 - e_2) = 0 \implies k'[e_1 - e_2] = 0 \implies k'[e_1] = k'[e_2].$$

Damit ist auch k' wohldefiniert.

3. **Exaktheit des Diagramms.**

(a) $\operatorname{im}(i') \subset \ker(j')$:

Sei $a' \in A'$. Dann existiert $a \in A$ mit $i(a) = a'$. Nun ist

$$(j' \circ i')(a') = j'i|_{i(A)}(a').$$

Da $a' = i(a)$, folgt

$$(j' \circ i')(i(a)) = j'(i(a)) = [j(a)].$$

Aber $ji(a) = 0$ (aus der Exaktheit folgt $ji = 0$). Somit ist

$$[j(a)] = [0] \implies (j' \circ i')(a') = 0 \implies \text{im}(i') \subset \ker(j').$$

(b) $\ker(j') \subset \text{im}(i')$:

Sei $a' \in \ker(j')$. Dann ist $j'(a') = 0$. Da $a' \in A'$ gilt $a' = i(a)$ für ein $a \in A$. Also

$$j'i(a) = [j(a)] = 0 \implies j(a) \in \text{im}(d).$$

Somit existiert $e \in E$ mit $j(a) = (jk)(e) = d(e)$. Folglich ist

$$a - k(e) \in \ker(j) = \text{im}(i).$$

Also gibt es ein $b \in A$, sodass $a - k(e) = i(b)$. Daraus folgt, da $ik = 0$ aufgrund der Exaktheit:

$$a' = i(a) = i(a) - i(k(e)) = i(a - k(e)) = ii(b) = i^2(b).$$

Da $i(a') = a'$ in A' bereits als Bild vorliegt, folgt $a' \in \text{im}(i')$. Somit $\ker(j') = \text{im}(i')$.

(c) $\text{im}(j') \subset \ker(k')$:

Sei $a' = i(a) \in A'$. Dann

$$k' \circ j'(a') = k'j'i(a) = k'[j(a)] = kj(a).$$

Doch aus Exaktheit folgt $k \circ j = 0$, also

$$kj(a) = 0.$$

Damit ist $\text{im}(j') \subset \ker(k')$.

(d) $\ker(k') \subset \text{im}(j')$:

Sei $[e] \in \ker(k')$. Dann ist $k'([e]) = k(e) = 0$, woraus $e \in \ker(k)$. Nach Exaktheit ist $\ker(k) = \text{im}(j)$, also existiert $a \in A$ mit $e = j(a)$. Daher

$$[e] = [j(a)] = j'i(a) \in \text{im } j'.$$

Somit $\ker(k') = \text{im}(j')$.

(e) $\text{im}(k') \subset \ker(i')$ **und** $\ker(i') \subset \text{im}(k')$:

Für jedes $[e] \in E'$ ist

$$i'k'([e]) = (i \circ k)(e) = 0$$

aufgrund der Exaktheit des Diagramms. Also $\text{im}(k') \subset \ker(i')$.

Ist umgekehrt $a' \in \ker(i') \subset A'$, so ist $i'(a') = 0$ in A' . Da $i'(a') = i(a')$ (Einschränkung) und $a' \in A' = i(A)$, existiert ein $a \in A$ mit $a' = i(a)$. Dann

$$0 = i'(a') = i'(i(a)) = ii(a).$$

Aufgrund der Exaktheit $\ker(i) = \text{im}(k)$ folgt, dass $i(a) \in \text{im}(k)$, also $i(a) = k(e)$ für ein $e \in E$. Damit ist $a' = k(e)$ und somit $a' = k'[e]$. Also $\ker(i') \subset \text{im}(k')$.

Insgesamt folgt aus (a)–(e), dass das so konstruierte Diagramm exakt ist. Damit ist (A', E', i', j', k') in der Tat ein exaktes Paar.

□

Der Prozess, bei dem aus einem exakten Paar ein deriviertes Paar erzeugt wird, kann beliebig oft wiederholt werden. Dadurch erhalten wir für jedes $r \in \mathbb{N}$ ein **r -fach deriviertes Paar** $(A^r, E^r, i^r, j^r, k^r)$. Setzen wir

$$d^r = j^r \circ k^r,$$

so entsteht die zugehörige **homologische Spektralsequenz** gerade durch die Paare

$$\{E^r, d^r\}_{r \in \mathbb{N}}.$$

Allerdings haben wir auf diese Weise zunächst keine Graduierung, das heißt, es handelt sich nur um einfache abelsche Gruppen. Die Graduierung ergibt sich aus der Filtrierung

$$X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X,$$

indem wir daraus ein **exaktes Paar** konstruieren.

Definition 2.4 (Exakte Paare einer Filtrierung). *Für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ setze*

$$E_{p,q}^1 = H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \quad \text{und} \quad A_{p,q}^1 = H_{p+q}(X_p).$$

Die Abbildungen i^1, j^1, k^1 definieren wir auf jedem $A_{p,q}^1$ bzw. $E_{p,q}^1$ in Übereinstimmung mit der langen exakten Homologiesequenz. Im Folgenden illustriert das Diagramm die Konstruktion:

$$\cdots \xrightarrow{k_{p,q+1}^1} H_{p+q}(X_{p-1}) \xrightarrow{i_{p,q}^1} H_{p+q}(X_p) \xrightarrow{j_{p,q}^1} H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \xrightarrow{k_{p,q}^1} H_{p+q-1}(X_{p-1}) \xrightarrow{i_{p,q-1}^1} \cdots$$

Dabei gilt:

- $i_{p,q}^1 = H_{p+q}(\iota) : A_{p,q}^1 \rightarrow E_{p,q}^1$ ist der funktorielle Homomorphismus, der aus der Inklusion $\iota : X_{p-1} \hookrightarrow X_p$ entsteht.
- $j_{p,q}^1 : A_{p,q}^1 \rightarrow E_{p,q}^1$ wird durch die Quotientenabbildung in der Kettengruppenfolge induziert.
- $k_{p,q}^1 : E_{p,q}^1 \rightarrow A_{p,q-1}^1$ ist der **verbindende Homomorphismus**

$$k_{p,q}^1 = \partial : H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \longrightarrow H_{p+q-1}(X_{p-1}).$$

Da die lange exakte Homologiesequenz exakt ist, bildet

$$(E_{p,q}^1, A_{p,q}^1, i_{p,q}^1, j_{p,q}^1, k_{p,q}^1)$$

ein **exaktes Paar**.

Aus Def. 2.4 erhalten wir für jedes r ein entsprechendes exaktes Paar und damit **unendlich viele** exakte Paare (möglicherweise abzählbar oder überabzählbar unendlich). Definieren wir

$$d^r = j^r \circ k^r,$$

wie oben, so erhalten wir aus diesen exakten Paaren die zugehörige homologische Spektralsequenz.

Satz 2.5 (Homologische Spektralsequenz einer Filtrierung). *Sei ein deriviertes exaktes Paar*

$$(E_{p,q}^1, A_{p+q}^1, i_{p,q}^1, j_{p,q}^1, k_{p,q}^1)$$

aus einer homologisch exakten Sequenz einer Filtrierung gegeben. Dann gibt es eine homologische Spektralsequenz

$$\{E^r, d^r\} \quad \text{mit} \quad d^r = j^r \circ k^r.$$

Beweis. Wir wissen bereits, dass $d^r \circ d^r = 0$ gilt und dass E^{r+1} die Homologie von E^r bezüglich d^r ist. Es bleibt also zu zeigen, dass

$$d^r : E^r \longrightarrow E^r \quad \text{vom Grad } (-r, r-1)$$

ist. Auf der ersten Seite folgt aus $d^1 = j^1 \circ k^1$, dass wir für

$$(H_{p+q}(X_p, X_{p-1}), d^1)$$

die Abbildungen

$$H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \xrightarrow{k^1} H_{p+q-1}(X_{p-1}) \xrightarrow{j^1} H_{p+q-1}(X_{p-1}, X_{p-2})$$

erhalten. Damit sehen wir, dass

$$d^1 : E_{p,q}^1 = H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \longrightarrow H_{p+q-1}(X_{p-1}, X_{p-2}) = E_{p-1,q}^1,$$

also ist d^1 vom Grad $(-1, 0)$.

Für den allgemeinen Fall teilen wir den Beweis in drei Schritte auf:

1. $A_{p,q}^r = i^{r-1} A_{p,q}^1$.
2. $k_{p,q}^r : E_{p,q}^r \longrightarrow A_{p-1,q}^r$.
3. $j_{p,q}^r : A_{p,q}^r \longrightarrow E_{p-r+1,q+r-1}^r$.

Zu (1). Dies folgt unmittelbar aus der Definition der derivierten Paare.

Zu (2). Der Homomorphismus $k_{p,q}^{r+1}$ wird durch $k_{p,q}^r$ auf $\ker d^r / \text{im } d^r$ induziert. Für die erste Seite wissen wir bereits, dass

$$k_{p,q}^1 : E_{p,q}^1 \longrightarrow A_{p-1,q}^1$$

gilt. Durch Induktion definiert man analog

$$k_{p,q}^n : E_{p,q}^n \longrightarrow A_{p-1,q}^n$$

für beliebige n . Somit ist auch $k_{p,q}^r : E_{p,q}^r \rightarrow A_{p-1,q}^r$ wohldefiniert.

Zu (3). Sei $a \in A_{p,q}^r$. Dann gibt es ein $b \in A_{p,q}^1$ mit $i^{r-1}(b) = a$, weil nach (1) $A_{p,q}^r = i^{r-1} A_{p,q}^1$. Folglich

$$\begin{aligned} j^r(a) &= j^r i^{r-1}(b) = [j^{r-1} i^{r-2}(b)] \\ &= [[j^{r-2} i^{r-3}(b)]] = \dots = [\dots [j^1(b)] \dots]. \end{aligned} \tag{1}$$

Hier kennzeichnen wir durch mehrfaches Einklammern, dass wir zunächst eine Äquivalenzklasse $[\alpha]$ in $E_{p,q}^r$ und anschließend eine weitere Klasse $[[\alpha]]$ in $E_{p,q}^{r+1}$ betrachten. Weil sowohl $[\dots [j^1(b)] \dots] \in E_{p,q}^{r+k}$ als auch $j^1(b) \in E_{p,q}^1$ in derselben **homologischen Ordnung** liegen, folgt, dass sich nur der **Grad des derivierten Paares** ändert, nicht jedoch die zugrundeliegenden Homologiegruppen. Insbesondere gilt

$$b \in A_{p-r+1,q+r-1}^1, \quad j^1(b) \in E_{p-r+1,q+r-1}^1,$$

und entsprechend

$$j_{p,q}^r : A_{p,q}^r \longrightarrow E_{p-r+1,q+r-1}^r.$$

Verkettet man nun

$$E_{p,q}^r \xrightarrow{k^r} A_{p-1,q}^r \xrightarrow{j^r} E_{p-r,q+r-1}^r,$$

erhält man $d^r = j^r \circ k^r$. Damit ist d^r vom Bigrad $(-r, r-1)$.

Somit ist gezeigt, dass die Abbildung

$$d^r : E^r \longrightarrow E^r$$

tatsächlich vom Grad $(-r, r-1)$ ist, was die Behauptung abschließt. \square

3 Presentation der Serre spektralen Sequenz

Die **Serre-Spektralsequenz** wurde entwickelt, um die Homologiegruppen der verschiedenen Bestandteile einer sogenannten **Faserung** miteinander in Beziehung zu setzen. Bei einer Faserung

$$Z \longrightarrow X \longrightarrow Y$$

denkt man an eine Abbildung

$$\pi : X \longrightarrow Y,$$

so dass sämtliche Urbilder $\pi^{-1}(y)$ für jedes $y \in Y$ homotopieäquivalent zu Z sind.

Bevor wir die Konstruktion der Serre-Spektralsequenz genauer vorstellen können, benötigen wir die Definition einer Faserung, die die **Homotopiehochhebungseigenschaft** erfüllt. Diese Eigenschaft erlaubt es uns, aus einfacheren und bereits bekannten Räumen durch Anwendung der Faserung neue, komplexere Räume zu konstruieren.

Die Faserung verallgemeinert dabei das Konzept eines Vektorbündels, kommt jedoch ohne lineare oder affine Struktur aus. Die Homotopiehochhebungseigenschaft wird sich anschließend in kompatiblen Eigenschaften auf der Ebene der Homologie niederschlagen und so die Grundlage für die Serre-Spektralsequenz bilden.

Definition 3.1 (Faserung). *Eine Abbildung $\pi : X \rightarrow B$, welche die folgende **Homotopiehochhebungseigenschaft** für beliebige Räume Z erfüllt, heißt eine **Faserung**:*

- für jede Homotopie $h : Z \times [0, 1] \rightarrow B$ und
- für jeden Lift $\tilde{h}_0 : Z \rightarrow X$ welcher

$$h_0 = h|_{Z \times \{0\}} \quad \text{hochhebt, so dass} \quad h_0 = \pi \circ \tilde{h}_0,$$

existiert eine **Homotopie** $\tilde{h} : Z \times [0, 1] \rightarrow X$, die genau h **liftet**. Im folgenden kommutativen Diagramm wird das veranschaulicht:

$$\begin{array}{ccc} Z \times \{0\} & \xrightarrow{\tilde{h}_0} & X \\ \downarrow \iota & \nearrow \tilde{h} & \downarrow \pi \\ Z \times [0, 1] & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

Nun betrachten wir einige Beispiele von Faserungen, um ein besseres **Gefühl** für diese Struktur zu bekommen.

Beispiel 3.2. *Beispiele für Faserungen:*

1. Seien X, Y topologische Räume. Dann ist die Projektion

$$\pi : X \times Y \longrightarrow Y$$

eine Faserung. Jede Faser ist homöomorph zu X . Zur Verifikation der Homotopiehochhebungseigenschaft sei

$$h : Z \times [0, 1] \longrightarrow Y$$

eine Homotopie und $\tilde{h}_0 : Z \times \{0\} \rightarrow X \times Y$ ein Lift mit

$$(\pi \circ \tilde{h}_0)(z) = h_0(z) = h(z, 0).$$

Definiere $\tilde{h} : Z \times [0, 1] \rightarrow X \times Y$ durch

$$\tilde{h}(z, t) = \left(\pi_X \circ \tilde{h}_0(z), h(z, t) \right),$$

wobei $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$ die Projektion auf die erste Komponente ist. Offenbar stimmt \tilde{h} in der X -Komponente mit \tilde{h}_0 und in der Y -Komponente mit h überein, was genau die benötigte Lifteigenschaft liefert.

2. Die kanonische Surjektion

$$\pi : S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n, \quad x \mapsto [x]$$

ist eine Faserung, deren Fasern homöomorph zu S^0 sind (man kann sich das als $\{\pm x\} \subset S^n$ über einem Punkt $[x]$ in $\mathbb{R}P^n$ vorstellen).

3. Die kanonische Surjektion

$$\pi : S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C}P^n, \quad x \mapsto [x]$$

ist eine Faserung, deren Fasern homöomorph zu S^1 sind. Hier interpretiert man die Punkte im $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ als Einheitsvektoren und deren Bilder in $\mathbb{C}P^n$ als komplexe Geraden.

Als gegebene Daten verwenden wir eine Faserung $\pi : X \rightarrow B$, wobei B ein wegzusammenhängender CW-Komplex und X ein topologischer Raum ist. Man beachte, dass wir die Homotopiehochhebungseigenschaften nur für CW-Komplexe fordern. Eine solche Faserung heißt auch eine **Serre-Faserung**. Der Raum B wird **Basisraum** genannt, X der **Totalraum**.

Wir erzeugen eine Filtrierung von X , indem wir das p -Skelett B^p von B betrachten und die Fasern

$$X_p := \pi^{-1}(B^p)$$

setzen. Aus dieser Filtrierung erhalten wir ein exaktes Paar, aus dem wiederum eine homologische Sequenz entsteht. In dieser Konstellation heißt die resultierende Spektralsequenz auch **Serre-Spektralsequenz**.

Für einen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ in den Basisraum B benötigen wir eine stetige Abbildung

$$L_\gamma : F_a \longrightarrow F_b,$$

wobei $F_a = \pi^{-1}(a)$ und $F_b = \pi^{-1}(b)$ die Fasern über $a = \gamma(0)$ bzw. $b = \gamma(1)$ sind. Die Existenz einer solchen Abbildung wird durch die Homotopieäquivalenz der Fasern $F_{\gamma(s)}$ für alle $s \in [0, 1]$ garantiert, sobald $\pi : X \rightarrow B$ eine Serre-Faserung ist. Dies führt zur folgenden Aussage:

Proposition 3.3. *Falls $\pi : X \rightarrow B$ eine Faserung ist, so sind die Fasern*

$$F_b = \pi^{-1}(b)$$

über jede wegzusammenhängende Komponente von B zueinander homotopieäquivalent.

Beweis. Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ ein Weg und $F_{\gamma(s)} := \pi^{-1}(\gamma(s))$ eine Faser. Wir definieren eine Homotopie

$$h : F_{\gamma(0)} \times [0, 1] \longrightarrow B, \quad h(x, t) = \gamma(t).$$

Sei $\tilde{h}_0 : F_{\gamma(0)} \times \{0\} \hookrightarrow X$ die Inklusion. Dann gilt für jedes $x \in F_{\gamma(0)}$:

$$(\pi \circ \tilde{h}_0)(x) = \gamma(0) = h_0(x).$$

Da $\pi : X \rightarrow B$ eine Faserung ist, existiert eine Abbildung

$$\tilde{h} : F_{\gamma(0)} \times [0, 1] \longrightarrow X,$$

sodass in folgendem Diagramm alles kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} F_{\gamma(0)} \times \{0\} & \xrightarrow{\tilde{h}_0} & X \\ \downarrow \iota & \nearrow \tilde{h} & \downarrow \pi \\ F_{\gamma(0)} \times [0, 1] & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

Insbesondere gilt $h = \pi \circ \tilde{h}$, und $\tilde{h}(x, t) \in F_{\gamma(t)}$. Für $t = 1$ erhalten wir daraus die gesuchte Abbildung

$$L_\gamma : F_{\gamma(0)} \longrightarrow F_{\gamma(1)}, \quad L_\gamma(x) = \tilde{h}(x, 1).$$

□

Diese Konstruktion zeigt die Homotopieäquivalenz der Fasern entlang des Weges γ , und damit sind sämtliche Fasern über eine wegzusammenhängende Komponente von B untereinander homotopieäquivalent.

Wir zeigen als Nächstes, dass sich die Abbildung $\gamma \mapsto L_\gamma$ bezüglich Homotopien [Hat01, Prop. 4.61] **gutartig** verhält:

- Falls γ und γ' Wege von a nach b sind und $\gamma \simeq_{\{0,1\}} \gamma'$ (d. h. es existiert eine Homotopie $h : \gamma \Rightarrow \gamma'$, die auf den Basispunkten 0 und 1 konstant ist), dann gilt

$$L_\gamma \simeq L_{\gamma'}.$$

- Falls γ_0 und γ_1 Wege sind, sodass $\gamma_1(0) = \gamma_0(1)$, dann gilt

$$L_{\gamma_0 \star \gamma_1} \simeq L_{\gamma_1} \circ L_{\gamma_0}.$$

Im Folgenden leiten wir aus diesen Eigenschaften die Proposition her. Seien F_a und F_b Fasern einer Faserung und γ ein Weg von a nach b . Wir betrachten die Abbildungen

$$L_\gamma : F_a \longrightarrow F_b \quad \text{und} \quad L_{\tilde{\gamma}} : F_b \longrightarrow F_a,$$

wobei $\tilde{\gamma}$ ein Weg von b zurück nach a bezeichnet.

Sei $\alpha \equiv a$ die konstante Schleife bei a , und sei \tilde{h} die Abbildung, mit der wir $L_\alpha(x)$ definieren. Da

$$h(x, t) = \alpha(x) = a \quad \text{für alle } x \in F_a, t \in [0, 1],$$

folgt $\tilde{h}(x, t) \in F_a$ für alle x und t . Somit ist \tilde{h} eine Homotopie, welche $\tilde{h}(x, 0) = \text{Id}_{F_a}(x)$ und $\tilde{h}(x, 1) = L_\alpha(x)$ erfüllt. Daher gilt

$$\text{Id}_{F_a} \simeq L_\alpha \quad \text{und analog} \quad \text{Id}_{F_b} \simeq L_\beta,$$

wobei β die konstante Schleife bei b ist.

Mit den oben genannten Eigenschaften nach [Hat01, Prop. 4.61] erhalten wir nun:

$$L_{\tilde{\gamma}} \circ L_\gamma \simeq L_{\gamma \star \tilde{\gamma}} \simeq L_\alpha \simeq \text{Id}_{F_a},$$

$$L_\gamma \circ L_{\tilde{\gamma}} \simeq L_{\tilde{\gamma} \star \gamma} \simeq L_\beta \simeq \text{Id}_{F_b}.$$

Daraus folgt, dass F_a und F_b homotopieäquivalent sind.

Durch diese Proposition hat sich die Konvention etabliert, für einen gegebenen (wegzusammenhängenden) Basisraum stets Bezug auf **die** Faser der Faserung zu nehmen, denn alle Fasern sind untereinander homotopieäquivalent. Üblich ist es daher, eine Faserung auch kurz in der Form

$$F \longrightarrow X \longrightarrow B$$

anzugeben, wobei F ein Raum ist, der homotopieäquivalent zu den jeweiligen Fasern $\pi^{-1}(b)$ ist.

Entsprechend lassen sich unsere Beispiele aus 3.2 wie folgt umschreiben:

- $F \longrightarrow F \times B \longrightarrow B$,
- $S^0 \longrightarrow S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$,
- $S^1 \longrightarrow S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C}P^n$.

In all diesen Beispielen sind die jeweiligen Fasern sogar **homeomorph**.

Für jeden Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ erhalten wir eine Abbildung

$$L_\gamma : F_{\gamma(0)} \longrightarrow F_{\gamma(1)},$$

indem wir die Homotopiehochhebungseigenschaft auf die Faser $F_{\gamma(0)}$ anwenden.

Um das Faserbündel

$$S^1 \longrightarrow S^\infty \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty$$

mit der kanonischen Surjektion $\pi : S^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ in unserem Beispiel nutzbar zu machen, müssen wir zeigen, dass es sich tatsächlich um eine **Faserung** handelt. Dabei verwenden wir, dass $\mathbb{C}P^\infty$ als **CW-Komplex** konstruiert wird, der zugleich wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend ist.

Sei nun X ein topologischer Raum und \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X .

Definition 3.4. Eine **Verfeinerung** von \mathcal{U} ist eine offene Überdeckung \mathcal{V} von X , sodass für jedes $V \in \mathcal{V}$ ein $U \in \mathcal{U}$ existiert mit $V \subset U$.

Wir sagen, dass eine Verfeinerung \mathcal{V} **lokal endlich** ist, falls für alle Punkte $x \in X$ und jede offene Umgebung U_x von x nur endlich viele Mengen $V \in \mathcal{V}$ die Bedingung $U_x \cap V \neq \emptyset$ erfüllen.

Definition 3.5. Ein topologischer Raum heißt **parakompakt**, falls jede offene Überdeckung eine lokal endliche Verfeinerung besitzt.

Anmerkung 3.6. Alle kompakten topologischen Räume sind parakompakt.

Lemma 3.7. Jeder **CW-Komplex** ist parakompakt.

Beweis. Sei X ein CW-Komplex mit n -Skeletten X^n . Wir können jedes X^n als Vereinigung

$$X^n = \bigcup_{\alpha} K_{\alpha}^n$$

von endlichen CW-Komplexen schreiben. Sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X . Für jedes n und jedes α betrachten wir

$$\mathcal{U}_{\alpha}^n = \{U \cap K_{\alpha}^n \mid U \in \mathcal{U}\},$$

das eine offene Überdeckung von K_α^n darstellt. Da jedes K_α^n kompakt ist, existiert eine Verfeinerung \mathcal{V}_α^n von \mathcal{U}_α^n . Für jede offene Menge $A \in \mathcal{V}_\alpha^n$ gibt es eine offene Menge $V_A \subset X$, sodass

$$A = V_A \cap K_\alpha^n.$$

Da $A \subset U_A \cap K_\alpha^n$ für ein $U_A \in \mathcal{U}$ gilt, können wir durch Bildung des Durchschnitts $V_A \cap U_A$ (falls nötig) annehmen, dass $V_A \subset U_A$ gilt.

Setzen wir nun

$$\mathcal{V} = \left\{ V_A \mid A \in \mathcal{V}_\alpha^n \right\}_{n,\alpha}.$$

Weil jede Familie $\{V_A \mid A \in \mathcal{V}_\alpha^n\}$ lokal endlich ist, ist \mathcal{V} eine **abzählbar lokal endliche** Verfeinerung von \mathcal{U} (d. h. \mathcal{V} ist eine Verfeinerung, die eine abzählbare Vereinigung lokal endlicher Familien ist). Da CW-Komplexe regulär sind, können wir nach Lemma 41.3 aus [Hat01] (bzw. [7]) darauf schließen, dass X parakompakt ist. \square

Satz 3.8 ([Hue55, Theorem 1]). *Falls $\pi : X \rightarrow B$ ein Faserbündel ist und B parakompakt, dann ist π eine Faserung.*

Aus diesem Satz und der Tatsache, dass alle CW-Komplexe parakompakt sind, ergibt sich das gewünschte Korollar:

Korollar 3.9. *Jedes Faserbündel mit einem CW-Komplex als Basisraum ist eine Faserung.*

Angenommen, wir haben eine Faserung

$$\pi : X \longrightarrow B,$$

wobei wir der Einfachheit halber voraussetzen, dass B ein wegzusammenhängender CW-Komplex ist. Für jedes p sei B^p das p -dimensionale Skelett von B , und wir definieren

$$X_p := \pi^{-1} B^p.$$

Die Räume X_p bilden eine Filtrierung von X , auf die wir später noch zurückkommen werden. Für eine gegebene Gruppe G definieren wir die **erste Seite** der Serre-Spektralsequenz durch

$$E_{p,q}^1 := H_{p+q}(X_p, X_{p-1}; G).$$

Sobald wir diese erste Seite festgelegt haben, **läuft** die Serre-Spektralsequenz weiter, bis sie schließlich bei der E^∞ -Seite **stabilisiert** und in einer Form vorliegt, die eng mit $H_\bullet(X; G)$ verwandt ist. Genauer erhalten wir den folgenden Satz, welchen wir hier nicht beweisen werden.

Satz 3.10. [Hat01, Proposition 4E.1] *Sei*

$$F \longrightarrow X \longrightarrow B$$

eine Faserung, wobei B ein einfach zusammenhängender CW-Komplex ist. Dann gibt es eine Spektralsequenz

$$E_{p,q}^r$$

mit folgenden Eigenschaften:

(a) *Die Differentiale auf der r -ten Seite haben die Form*

$$d^r : E_{p,q}^r \longrightarrow E_{p-r, q+r-1}^r.$$

(b) $E_{p,q}^{r+1}$ ist die Homologie von $E_{\bullet,\bullet}^r$ an der Stelle $E_{p,q}^r$, das heißt

$$E_{p,q}^{r+1} = \frac{\ker d^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_*^r}{\operatorname{im} d^r : E_*^r \rightarrow E_{p,q}^r}.$$

(c) Auf der zweiten Seite gilt

$$E_{p,q}^2 \cong H_p(B; H_q(F; G)).$$

(d) Die stabilen Terme $E_{p,q}^\infty$ sind isomorph zu den assoziierten Graden der gefilterten Gruppe $H_{p+q}(X; G)$,

$$E_{p,q}^\infty \cong \frac{F_p H_{p+q}(X; G)}{F_{p-1} H_{p+q}(X; G)},$$

wobei

$$0 = F_{-1} H_n(X; G) \subset F_0 H_n(X; G) \subset \dots \subset F_n H_n(X; G) = H_n(X; G)$$

eine bestimmte aufsteigende Filtrierung ist.

4 Homologie von $\mathbb{C}P^\infty$

Zunächst möchten wir in diesem Kapitel die Homologiegruppen von $\mathbb{C}P^\infty$ mithilfe der **zellulären Homologie** bestimmen. Dazu verwenden wir explizit die Struktur von $\mathbb{C}P^\infty$ als CW-Komplex und vergleichen das erhaltene Ergebnis anschließend mit dem Resultat aus der Spektralsequenz.

Der Raum $\mathbb{C}P^n$ besteht aus den komplexen Geraden durch den Ursprung in $\mathbb{C}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{2n+2}$. Ein isometrischer Isomorphismus wird durch die Abbildung

$$\phi: \mathbb{R}^{2n+2} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}, \quad (x_1, \dots, x_{2n+2}) \mapsto (x_1 + ix_2, x_3 + ix_4, \dots, x_{2n+1} + ix_{2n+2})$$

gegeben. Wir können $\mathbb{C}P^n$ als Quotientenraum

$$\mathbb{C}P^n = S^{2n+1} / \sim$$

auffassen, wobei die Äquivalenzrelation durch

$$(x_1, \dots, x_{2n+2}) \sim \lambda \cdot (x_1, \dots, x_{2n+2}) \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$$

definiert ist. Dies entspricht der Wirkung der Einheitssphäre $S^1 \subset \mathbb{C}$ auf S^{2n+1} durch skalare Multiplikation.

Die Struktur als CW-Komplex ergibt sich aus der Tatsache, dass $\mathbb{C}P^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Zellzerlegung besitzt, die aus genau einer Zelle jeder geraden Dimension $0, 2, 4, \dots, 2n$ besteht. Der Übergang von $\mathbb{C}P^n$ zu $\mathbb{C}P^\infty$ geschieht durch den Limes $n \rightarrow \infty$, wobei $\mathbb{C}P^\infty$ ebenfalls genau eine Zelle jeder geraden Dimension enthält.

Diese Beschreibung führt zu folgender Filtrierung in Skelette:

$$\begin{aligned} \emptyset &\subset \bullet \subset \bullet \subset \mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^1 \subset \dots \\ &\subset \mathbb{C}P^{n-1} \subset \mathbb{C}P^{n-1} \subset \mathbb{C}P^n \subset \mathbb{C}P^n \subset \dots \subset \mathbb{C}P^\infty, \end{aligned}$$

wobei $\mathbb{C}P^k$ jeweils aus $\mathbb{C}P^{k-1}$ durch Anheften von $2k$ -Zellen D^{2k} entsteht. Das Anheften erfolgt mittels der kanonischen Surjektion $\pi: S^{2k-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{k-1}$, die durch die

Projektion von der Einheitssphäre des komplexen Vektorraums auf die komplexe projektive Ebene definiert ist.

Das entsprechende Pushout-Diagramm lautet:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}P^k & \xleftarrow{[x] \mapsto [(x,0,0)]} & \mathbb{C}P^{k-1} \\ \uparrow c & & \uparrow \pi \\ D^{2k} & \xleftarrow{\iota} & S^{2k-1}. \end{array}$$

Hierbei ist die untere horizontale Abbildung die Anheftung der $2k$ -Zelle D^{2k} an das $(k-1)$ -te Skelett $\mathbb{C}P^{k-1}$, was die zelluläre Struktur von $\mathbb{C}P^k$ vollständig beschreibt.

Diese Filtrierung zeigt anschaulich die schrittweise Konstruktion von $\mathbb{C}P^\infty$ als Limes der endlichen komplexen projektiven Räume $\mathbb{C}P^k$, wobei in jedem Schritt genau eine Zelle hinzukommt.

In $\mathbb{C}P^\infty$ sind die Skelette durch

$$X_{2k} = X_{2k+1} = \mathbb{C}P^k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0$$

gegeben. Für den zugehörigen zellulären Kettenkomplex erhalten wir

$$HC_{2k}(\mathbb{C}P^\infty) \cong H_{2k}(X_{2k}, X_{2k-1}) \cong \mathbb{Z} \quad \text{für } k \geq 0,$$

sowie

$$HC_k(\mathbb{C}P^\infty) \cong H_k(X_k, X_{k-1}) = 0 \quad \text{für alle ungeraden } k \text{ und } k < 0.$$

Der zelluläre Kettenkomplex hat somit die Form

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d_{2n}} 0 \xrightarrow{d_{2n-1}} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_{2n-2}} 0 \xrightarrow{d_{2n-3}} \dots \xrightarrow{d_3} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} 0 \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_0} 0.$$

Die Differenzialabbildungen d_k des Kettenkomplexes verschwinden aufgrund der Zellsymmetrie, sodass die Homologiegruppen direkt abgelesen werden können. Es gilt:

$$H_k(\mathbb{C}P^\infty) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } k \in 2\mathbb{N}_0 \text{ (gerade)}, \\ 0, & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Dies illustriert, dass $\mathbb{C}P^\infty$ ein *klassifizierender Raum* für \mathbb{Z} -Homologie ist. Dieses Ergebnis werden wir im Folgenden mit der Homologie aus der Serre-Spektralsequenz vergleichen.

Anmerkung 4.1 (Motivation für die Serre-Spektralsequenz). *Betrachten wir nun die **Serre-Spektralsequenz**, um die Homologie von $\mathbb{C}P^\infty$ zu berechnen. Dabei **ignorieren** wir in gewisser Weise die erste Seite E^1 und beginnen direkt mit E^2 , die wir auf allen weiteren Seiten fortsetzen. Dies ist möglich, da die Faserung*

$$S^1 \longrightarrow S^\infty \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty$$

eine besonders einfache und äußerst nützliche Struktur besitzt, die es erlaubt, die Gruppen auf der zweiten Seite direkt zu bestimmen.

Im konkreten Fall können wir die gesamte Seite E^2 wie folgt beschreiben: Der Basisraum $\mathbb{C}P^\infty$ hat nichttriviale Homologie nur in geraden Graden, während die Faser S^1 nur in Grad 1 Homologie hat. Wir erhalten

$$E_{p,q}^2 = H_p(\mathbb{C}P^\infty; H_q(S^1; \mathbb{Z})).$$

Dies ergibt:

$$E_{p,q}^2 = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } p \text{ gerade und } q \in \{0, 1\}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Spektralsequenz artet in diesem Fall auf der zweiten Seite aus ($E^2 = E^\infty$), da die differentielle Abbildung d^2 wegen der geraden Homologie des Basisraums trivial ist. Somit erhalten wir direkt:

$$H_k(\mathbb{C}P^\infty) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies stimmt mit den Ergebnissen aus der zellulären Homologie überein und illustriert die Effizienz der Serre-Spektralsequenz in diesem Kontext.

Sei also $B = \mathbb{C}P^\infty$, $X = S^\infty$, $F = S^1$, dann ist unsere Faserung gegeben durch $F \rightarrow X \rightarrow B$. Nach Teil c) von Satz 3.10 ist die zweite Seite E^2 der Serre-Spektralsequenz durch die Homologien

$$E_{p,q}^2 = H_p(B; H_q(F; \mathbb{Z}))$$

gegeben.

Wir bemerken, dass $E_{p,q}^2$ nur dann nichttrivial sein kann, wenn $p \geq 0$ und $q \geq 0$, da alle Homologiegruppen für $p < 0$ oder $q < 0$ trivial sind. Damit sieht die Seite E^2 in einer Umgebung von $(p, q) = (0, 0)$ wie folgt aus:

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 0 & \leftarrow E_{0,2}^2 & \leftarrow E_{1,2}^2 & \leftarrow E_{2,2}^2 & E_{3,2}^2 \\ 1 & 0 & \leftarrow E_{0,1}^2 & \leftarrow E_{1,1}^2 & \leftarrow E_{2,1}^2 & E_{3,1}^2 \\ 0 & 0 & \leftarrow E_{0,0}^2 & \leftarrow E_{1,0}^2 & \leftarrow E_{2,0}^2 & E_{3,0}^2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

Weil $F = S^1$, kennen wir die Homologien von F :

$$H_q(F; \mathbb{Z}) = H_q(S^1; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2)$$

Da Homologiegruppen mit Koeffizienten in 0 selbst die triviale Gruppe sind, folgt unmittelbar, dass für $q \neq 0, 1$ gilt:

$$H_p(B; H_q(S^1; \mathbb{Z})) = H_p(B; 0) = 0.$$

Daraus ergibt sich, dass $E_{p,q}^2 = 0$ für alle $q \neq 0, 1$. Somit hat die Seite E^2 nur nichttriviale Gruppen in den beiden Reihen $q = 0$ und $q = 1$, wobei $p \geq 0$ gilt.

Da die Differenzialabbildungen d^r aufgrund der Gradstruktur trivial sind, degeneriert die Serre-Spektralsequenz hier auf der zweiten Seite, d.h., es gilt $E^2 = E^\infty$. Dies erlaubt uns, die Homologie von $\mathbb{C}P^\infty$ direkt aus E^2 zu bestimmen. Wir können E^2 daher wie folgt vereinfachen:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & E_{0,1}^2 & \leftarrow E_{1,1}^2 & \leftarrow E_{2,1}^2 & \leftarrow E_{3,1}^2 & \leftarrow E_{4,1}^2 & E_{5,1}^2 \\ 0 & E_{0,0}^2 & \leftarrow E_{1,0}^2 & \leftarrow E_{2,0}^2 & \leftarrow E_{3,0}^2 & \leftarrow E_{4,0}^2 & E_{5,0}^2 \\ & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

Man beachte, dass es stets ein Differential gibt, das für jedes $E_{p,q}^r$ in die Gruppe hinein abbildet, sowie eines, das aus der Gruppe hinausgeht. Alle nicht grafisch dargestellten Differentiale bilden jedoch entweder in die triviale Gruppe ab oder stammen aus der trivialen Gruppe. Diese sind daher die triviale Abbildung, da die triviale Gruppe in der Kategorie abelscher Gruppen sowohl initiales als auch finales Objekt ist.

Somit erhalten wir für $p \geq 0$ und $q = 0, 1$:

$$E_{p,q}^2 = H_p(B; H_q(F; \mathbb{Z})) = H_p(B; \mathbb{Z}) = H_p(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}).$$

Damit haben wir die zweite Seite E^2 vollständig berechnet. Sie sieht wie folgt aus:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 1 & H_0(\mathbb{C}P^\infty) & \leftarrow & H_1(\mathbb{C}P^\infty) & \leftarrow & H_2(\mathbb{C}P^\infty) & \leftarrow & H_3(\mathbb{C}P^\infty) & \leftarrow & H_4(\mathbb{C}P^\infty) & \leftarrow & H_5(\mathbb{C}P^\infty) \\
 0 & H_0(\mathbb{C}P^\infty) & & H_1(\mathbb{C}P^\infty) & & H_2(\mathbb{C}P^\infty) & & H_3(\mathbb{C}P^\infty) & & H_4(\mathbb{C}P^\infty) & & H_5(\mathbb{C}P^\infty) \\
 & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5
 \end{array}$$

Als nächstes betrachten wir die Seite E^∞ , also die stabilisierende Seite. Dazu machen wir folgende Beobachtung:

Lemma 4.2. *Falls $E_{p,q}^2 = 0$, dann ist $E_{p,q}^\infty = 0$.*

Beweis. Da $E_{p,q}^2 = 0$, sind die Differenziale, die nach $E_{p,q}^2$ hinein oder aus $E_{p,q}^2$ heraus abbilden, alle gleich der Nullabbildung. Somit gilt:

$$E_{p,q}^3 = \ker d_{p,q}^2 / \operatorname{im} d_{p+2,q-1}^2 = 0.$$

Induktiv können wir dasselbe Argument anwenden, da die Gruppen in allen weiteren Seiten durch Differenziale aus oder nach $E_{p,q}^r$ gebildet werden, die ebenfalls trivial sind. Daher gilt:

$$E_{p,q}^r = 0 \quad \text{für alle } r \geq 2.$$

Insbesondere folgt:

$$E_{p,q}^\infty = 0.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Nach Lemma 4.2 sieht E^∞ demnach wie folgt aus, wobei die Einträge alle 0 sind, außer in den Reihen für $q = 0, 1$ und den Spalten $p \geq 0$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & E_{0,1}^\infty & E_{1,1}^\infty & E_{2,1}^\infty & E_{3,1}^\infty & E_{4,1}^\infty & E_{5,1}^\infty \\
 0 & E_{0,0}^\infty & E_{1,0}^\infty & E_{2,0}^\infty & E_{3,0}^\infty & E_{4,0}^\infty & E_{5,0}^\infty \\
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5
 \end{array}$$

Nach Satz 3.10 d) gibt es für jedes $n \in \mathbb{Z}$ eine Filtrierung

$$0 \subset F_n^0 \subset \cdots \subset F_n^n = H_n(X; \mathbb{Z}),$$

so dass

$$E_{p,n-p}^\infty \cong F_n^p / F_n^{p-1}.$$

Da $X = S^\infty$ kontrahierbar ist, gilt $H_n(X; \mathbb{Z}) = 0$ für alle $n > 0$ und $H_0(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Somit ist $F_n^p = 0$ für alle $n > 0$ und $0 \leq p \leq n$, woraus folgt, dass $E_{p,n-p}^\infty = 0$ für alle n, p , falls $n \neq 0$. Für $n = 0$ haben wir $H_0(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, daher gilt:

$$E_{p,-p}^\infty = 0, \quad \text{für } p \neq 0,$$

und

$$E_{0,0}^\infty = F_0^0 = H_0(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

Damit kennen wir die gesamte Seite E^∞ , die wie folgt aussieht:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{Z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

Dies ist bereits der Endspurt. Wir machen noch eine weitere Beobachtung machen, indem wir die Homologien auf der stabilisierenden Seite mit denen der zweiten Seite in Verbindung bringen.

Lemma 4.3. $E_{0,0}^2 = E_{0,0}^\infty$.

Beweis. Sei d_{IN} das Differenzial, welches nach $E_{0,0}^2$ abbildet und dementsprechend d_{OUT} das Differenzial welches hinaus abbildet. Weil die Abbildungen durch $d_{\text{IN}} : E_{2,-1}^2 = 0 \rightarrow E_{0,0}^2$ und $d_{\text{OUT}} : E_{0,0}^2 \rightarrow E_{-2,1}^2 = 0$ gegeben sind, sind beide Differenziale trivial und somit ist

$$E_{0,0}^3 = \ker d_{\text{OUT}} / \text{im } d_{\text{IN}} = E_{0,0}^2 / 0 = E_{0,0}^2. \quad (3)$$

Aus dem Beweis von Lemma 4.3 wissen wir für $p < 0$ oder $q \neq 0, 1$, dass $E_{p,q}^r = 0$ für alle $r \geq 2$. Auf der r ten Seite gibt es ein Differenzial $E_{r,-r+1}^r \rightarrow E_{0,0}^r$ und eines $E_{0,0}^r \rightarrow E_{-r,r-1}^r$. Weil $-r + 1 < 0$ und $-r < 0$, sind beide Gruppen Null, also beide Differenziale die Nullabbildung. Somit erhalten wir $E_{0,0}^{r+1} = E_{0,0}^r$. Also ist für $r \geq 2$, $E_{0,0}^r = E_{0,0}^2$ und wir schlussfolgern $E_{0,0}^\infty = E_{0,0}^2$. \square

Dieses Ergebnis lässt sich wie folgt verallgemeinern:

Lemma 4.4. Für alle p, q gilt $E_{p,q}^3 = E_{p,q}^\infty$.

Beweis. Aus dem Beweis von Lemma 4.3 wissen wir, dass für $p < 0$ oder $q \notin \{0, 1\}$ gilt $E_{p,q}^r = 0$ für alle $r \geq 2$. Daher folgt für $p < 0$ oder $q \notin \{0, 1\}$, dass $E_{p,q}^3 = E_{p,q}^\infty$.

Angenommen, $p \geq 0$ und $q \in \{0, 1\}$. Auf der r -ten Seite für ein $r \geq 3$ kommt das Differential, das in $E_{p,q}^r$ eingeht, von $E_{p+r,q-r+1}^r$, und das Differential, das aus $E_{p,q}^r$ hinausgeht, führt zu $E_{p-r,q+r-1}^r$.

Da $r \geq 3$ und $q \leq 1$, folgt:

$$q - r + 1 \leq q - 2 \leq -1 \quad \Rightarrow \quad E_{p+r,q-r+1}^r = 0.$$

Weiterhin gilt für $r \geq 3$ und $q \geq 0$:

$$q + r - 1 \geq q + 2 \geq 2 \quad \Rightarrow \quad E_{p-r,q+r-1}^r = 0.$$

Damit sind beide Differentiale gleich null, also: $E_{p,q}^{r+1} = E_{p,q}^r$. Daher gilt für alle $r \geq 3$, dass $E_{p,q}^r = E_{p,q}^3$. \square

Wir wissen nun, wie sowohl die E_2 - als auch die E_3 -Seite aussehen, wobei die erste in Bezug auf die Homologie von \mathbb{CP}^∞ und die zweite explizit dargestellt ist. Um die Homologiegruppen von \mathbb{CP}^∞ zu berechnen, genügt es, zu betrachten, wie die E_3 -Seite aus der E_2 -Seite hervorgegangen ist.

Nach Lemma 4.4 können wir bereits schlussfolgern, dass $H_0(\mathbb{CP}^\infty) = E_2^{0,0} = E_3^{0,0} = \mathbb{Z}$. Das Berechnen der anderen Gruppen erfordert jedoch etwas mehr Arbeit.

Satz 4.5. Für alle $k \geq 1$ gilt $H_k(\mathbb{CP}^\infty) \cong H_{k-2}(\mathbb{CP}^\infty)$.

Beweis. Da Differentiale immer 0 ergeben, wenn sie miteinander komponiert werden, können wir für jedes k aus der E_2 -Seite den Kettenkomplex

$$E_2^{k+2,-1} = 0 \rightarrow E_2^{k,0} \rightarrow E_2^{k-2,1} \rightarrow E_2^{k-4,2} = 0$$

ableiten.

Falls $k \geq 1$, dann gilt $E_3^{k,0} = 0$ und $E_3^{k-2,1} = 0$. Somit sind die Homologiegruppen des gegebenen Kettenkomplexes alle trivial. Nach Proposition 2.5 ist der gegebene Kettenkomplex daher eine exakte Sequenz. Nach Proposition 2.3 folgt daraus $E_2^{k,0} \cong E_2^{k-2,1}$. Somit gilt für alle $k \geq 1$, dass

$$H_k(\mathbb{CP}^\infty) \cong H_{k-2}(\mathbb{CP}^\infty).$$

□

Korollar 4.6. Es gilt:

$$H_n(\mathbb{CP}^\infty) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 0, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Beweis. Aus Lemma 4.3 folgt, dass $H_0(\mathbb{CP}^\infty) = \mathbb{Z}$, und es ist bekannt, dass $H_{-1}(\mathbb{CP}^\infty) = 0$. Nach Satz 4.5 zeigt ein einfacher Induktionsbeweis, dass $H_n(\mathbb{CP}^\infty) = \mathbb{Z}$ für alle geraden n , und $H_n(\mathbb{CP}^\infty) = 0$ für alle ungeraden n . □

Also sieht E^2 wie folgt aus:

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & \mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z} & 0 \\
 & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \\
 0 & \mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z} & 0 \\
 & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5
 \end{array}$$

Literatur

- [Cho06] Timothy Y. Chow. *You Could Have Invented Spectral Sequences*. Cambridge University Press, 2006.
- [CY19] Man Cheung und Yao-Rui. *Examples of Spectral Sequences*. 2019. URL: https://www2.math.upenn.edu/~yeya/spectral_sequence.pdf.
- [Hat01] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2001. URL: <https://pi.math.cornell.edu/hatcher/AT/AT.pdf>.
- [Hat04] Allen Hatcher. *Spectral Sequences*. 2004. URL: <https://pi.math.cornell.edu/hatcher/AT/SSpage.html>.
- [Hue55] William Huebsch. *On the Covering Homotopy Theorem*. Techn. Ber. Princeton University, 1955.
- [Hut11] Michael Hutchings. *Introduction to Spectral Sequences*. 2011. URL: <https://math.berkeley.edu/~hutching/teach/215b-2011/ss.pdf>.
- [McC01] John McCleary. *A User's Guide to Spectral Sequences*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2001.
- [McC13] John McCleary. *A History of Spectral Sequences*. 2013. URL: https://www.algtop.net/wp-content/uploads/2012/02/docs_conf_ren-uir-2013_slides_MeknesTalk2013.pdf.
- [Meu24] Catherine Meusburger. *Vorlesungsskript Algebraische Topologie*. Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg, 2024.
- [Mun00] James Munkres. *Topology: A First Course*. Prentice Hall, 2000.
- [Ser12] Iskander Taimanow Sergei Petrowitsch Nowikow. *Topological Library. Part 3. Spectral Sequences in Topology*. Series on Knots and Everything. 2012.
- [Ser51] Jean-Pierre Serre. *Homologie Singulière des Espaces Fibrés*. 1951.
- [Ste17] Reuben Stern. *Homological Algebra of Spectral Sequences*. 2017. URL: https://scholar.harvard.edu/files/rastern/files/homological_0.pdf.
- [Ver93] Vladimir Vershinin. *Cobordisms and Spectral Sequences*. Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, 1993.