Spektrale Sequenzen
Leray–Serre spektrale Sequenz

Luciano Melodia
Seminar zur Spektraltheorie
Lehrstuhl für Mathematische Physik
Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
luciano.melodia@fau.de

24. Dezember 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Homologische Spektrale Sequenzen

Spektrale Sequenzen können im Allgemeinen über abelschen Kategorien definiert werden, oder weniger allgemein über R-Moduln. Wir betrachten in dieser Arbeit die spektralen Sequenzen über $\mathbb{Z}$-Moduln, also die Variante für abelsche Gruppen.

Definition 1.1 (Homologische Sequenz). *Sei $r_0 \geq 0$. Eine homologische Sequenz $\{A^r_{p,q}, d^r_{p,q}\}$ besteht aus*

1. *einer Familie abelscher Gruppen $\{A^r_{p,q}\}_{p,q\in\mathbb{Z},r\geq r_0}$ und*
2. *einer Familie Gruppenhomomorphismen $\{d^r_{p,q} : A^r_{p,q} \to A^r_{p-r,q+r-1}\}$ welche Differentiale genannt werden, so dass für alle p, q, r gilt*
   (a) *$d^r_{p-r,q+r-1} \circ d^r_{p,q} = 0$ und*
   (b) *$E^{r+1}_{p,q}$ ist die Homologie von A^r und $A^r_{p,q} = \ker d^r_{p,q} / \operatorname{im} d_{p+r,q-r+1}$.*

Diese Definition einer homologischen Sequenz zeigt deutlich auf, für welche Untergruppen die Quotienten berechnet werden - in einer Art Kettenkomplex mit zwei Indizes. Eine übliche Vereinfachung der Notation wird sich jedoch bei den weiteren Untersuchungen als hilfreich erweisen, indem wir ein r festlegt und alle $A^r_{p,q}$ als ein

Objekt A^r behandeln. Dieses nennt man dann eine bigraduierte abelsche Gruppe. Die Differentiale $d^r_{p,q}$ heißen auch kollektiv d^r, oder bigraduierte Differentiale.

Definition 1.2 (Bigraduierte abelsche Gruppen)**.** *Eine bigraduierte abelsche Gruppe A ist eine Familie von abelschen Gruppen $A \coloneqq \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} A_{p,q}$ und $B \coloneqq \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} B_{p,q}$ bigraduierte abelsche Gruppen, so ist die bigraduierte Abbildung vom Grad (c,d) eine Sammlung von Gruppenhomomorphismen $f \coloneqq \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} f^{(c,d)}_{p,q}$.*

Seien $A = \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} A_{p,q}$ und $B = \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} B_{p,q}$ bigraduierte abelsche Gruppen.

Definition 1.3 (Bigraduierte Abbildung)**.** *Wir nennen $f^{(c,d)}_{p,q} : A_{p,q} \to B_{p+c,q+d}$ einen Gruppenhomomorphismus vom Bigrad (c,d). Dann ist eine bigraduierte Abbildung vom Bigrad (c,d) ein Gruppenhomomorphismen $f : A \to B, \bigoplus_{p,q} a_{p,q} \mapsto \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} f^{(c,d)}_{p,q}(a) = \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} b_{p+c,q+d}$.*

f kann als Sammlung von Gruppenhomomorphismen vom Bigrad (c,d) verstanden werden, die elementweise auf der direkten Summe der abelschen Gruppen operieren. Wir können also sinngemäß schreiben $f = \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} f^{(c,d)}_{p,q}$.

Beispiel 1.4. *Sei R ein Ring, dann trägt $R[x,x^{-1},y,y^{-1}]$ die Struktur einer bigraduierten abelschen Gruppe $A_{p,q} = Rx^py^q$ für alle $p,q \in \mathbb{Z}$.*

Definition 1.5 (Bigraduierte Untergruppen und Quotienten)**.** *Seien A,B bigraduierte abelsche Gruppen. Dann definieren wir*

1. *$A \subset B$: $\Leftrightarrow A_{p,q} \subset B_{p,q}$ für alle $p,q \in \mathbb{Z}$ und*
2. *falls $A \subset B$, dann ist $B/A \coloneqq \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} B_{p,q}/A_{p,q}$.*

Definition 1.6. *Falls $f : A \to B$ eine bigraduierte Abbildung des Grads (c,d) zwischen bigraduierten abelschen Gruppen ist, dann definieren wir*

- $\ker f \coloneqq \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} \ker f_{p,q}$ *und*
- $\operatorname{im} f \coloneqq \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} \operatorname{im} f_{p-c,q-d}$.

Nun können wir die zuvor definierte homologische Sequenz 1.1 zu einer spektralen homologischen Sequenz erheben.

Definition 1.7. *Sei $r_0 \geq 0$. Eine homologische spektrale Sequenz $\{E^r, d^r\}$ besteht aus*

1. *einer bigraduierten abelschen Gruppe E^r und*
2. *einer bigraduierten Abbildung $d^r : E^r \to E^r$ vom Grad $(r, r-1)$, welche Differential genannt wird,*

für jedes r, so dass

- $d^r \circ d^r = 0$ *und*
- *E^{r+1} ist die Homologie von E^r in Bezug auf die Differentiale d^r, d.h.*

$$E^r = \frac{\ker d_r}{\operatorname{im} d_r} = \frac{\bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} d^r_{p,q}}{\bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} \operatorname{im} d^r_{p,q}} = \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} \frac{d^r_{p,q}}{\operatorname{im} d^r_{p,q}} \tag{1}$$

Für jedes r wird E^r das $r$te Blatt oder die $r$te Seite von $\{E^r, d^r\}$ genannt.

Anmerkung 1.8. *Es gibt dieselbe Variante als kohomologische spektrale Sequenz, welche auf analoge Weise wie Def. 1.7 definiert wird, mit der Ausnahme, dass wir nun $E_r \coloneqq \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} E^{p,q}_r$ für die Kohomologien schreiben und die Differentiale durch $d_r : E_r \to E_r$ geschrieben werden und vom Grad $(r, -r+1)$ sind. Die homologische spektrale Sequenz wird benutzt, um Homologiegruppen zu berechnen, während die kohomologische Spektrale Sequenz benutzt wird um Kohomologien zu berechnen.*

Definition 1.9. *Sei $\{E^r, d^r\}$ eine homologische spektrale Sequenz, so dass es für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ eine natürliche Zahl $r(p,q) \in \mathbb{N}$, abhängig von p, q gibt, so dass für alle $r \geq r(p,q)$, $E^r_{p,q} \cong E^{r(p,q)}_{p,q}$. Dann sagen wir, dass die bigraduierte abelsche Gruppe*

$$E^\infty := \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} E^{r(p,q)}_{p,q} \tag{2}$$

der Limes für $\{E^r, d^r\}$ ist. Äquivalent sagen wir auch, dass die spektrale Sequenz an E^∞ angrenzt.

Definition 1.10. *Eine spektrale Sequenz heißt Erste-Quadranten-Spektralsequenz, falls für ein $r \in \mathbb{N}$ die Einträge auf der $r$ten Seite ungleich Null sind, genau dann wenn $p \geq 0$ und $q \geq 0$.*

2 Filtrierungen und exakte Paare

Angenommen wir haben einen topologischen Raum X und einen guten Teilraum A, wobei das Gütekriterium in diesem Fall besagt, dass es eine Umgebung $U \subset X$ gibt, mit $\overline{A} \subset \mathring{U}$, so dass A ein Deformationsretrakt von U ist. Dies garantiert, dass die relative Homologie $H_n(X,A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$ isomorph ist zur reduzierten Homologie des Quotienten X/A. Falls wir nun die Homologien von A und X/A kennen, so ist der natürliche Weg die lange exakte reduzierte Homologiesequenz zu benutzen, um die Homologien von X zu berechnen:

$$\cdots \to \tilde{H}_n(A) \to \tilde{H}_n(X) \to \tilde{H}_n(X/A) \to H_{n-1}(A) \to H_{n-1}(X) \to \cdots . \tag{3}$$

Wir erweitern unsere Situation auf drei ineinanderliegende Teilräume $B \subset A \subset X$, wobei wir wieder annehmen, dass die Teilräume gutartig sind und wir die Homologien von $B, A/B$ und X/A kennen. Dann hätten wir gerne eine Verallgemeinerung der exakten Sequenz, die auch für ein solches Paar ineinanderliegender Räume funktioniert. Allgemeiner können wir eine solche Matroschka von topologischen Räumen als Filtrierung definieren:

Definition 2.1. *Eine Filtrierung eines topologischen Raums X ist eine aufsteigende Folge von topologischen Teilräumen $\mathcal{X} : \cdots X_{-2} \subset X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X$.*

Was können wir über die Homologien von X sagen, indem wir unser Wissen über die Homologien der X_i aus einer Filtrierung $\mathcal{X}$ und/oder den Quotienten X_i/X_{i-1} verwenden? Falls wir uns auf einen Spezialfall beschränken, nämlich dass X der Totalraum einer Faserung ist, so erhalten wir eine zufriedenstellende Antwort auf diese Frage.

In einer spektralen Sequenz kommt es häufig vor, dass E^r und d^r aus einer anderen Struktur heraus gebildet werden, einem exakten Paar.

Definition 2.2. *Ein exaktes Paar ist ein Paar bigraduierter abelscher Gruppen A und E zusammen mit bigraduierten Abbildungen $i : A \to A$, $j : A \to E$ und $k : E \to A$, so dass das folgende Diagramm exakt ist:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "i"] & & A \arrow[dl, "j"] \\ & E \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd}$$

D.h.

- $\ker i = \operatorname{im} k$,
- $\ker j = \operatorname{im} i$ *und*
- $\ker k = \operatorname{im} j$.

Haben wir ein solches exaktes Paar gegeben, so gibt es eine natürliche Art und Weise (welche auch eine natürliche Transformation in den entsprechenden Kategorien bildet), wie man das Differential $d = jk : E \to E$ definiert, so dass $d^2 = jkjk = j(kj)k = 0$. Das Differential wird dann verwendet um ein zweites exaktes Paar zu definieren, das derivierte Paar.

Lemma 2.3. *Sei (A, E, i, j, k) ein exaktes Paar, dann gibt es ein zweites exaktes Paar (A', E', i', j', k'), welches derivertes Paar genannt wird, so dass*

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[rr, "i'"] & & A' \arrow[dl, "j'"] \\ & E \arrow[ul, "k'"] & \end{tikzcd}$$

definiert durch
- $A' = i(A)$,
- $E' = \ker jk / \operatorname{im} jk = \ker d / \operatorname{im} d$,
- $i' = i|_{i(A)}$,
- *für alle* $i(a) \in A' : j'(i(a)) = [j(a)] \in E'$ *und*
- *für alle* $[e] \in E' : k'([e']) = k(e)$.

Beweis. Der Beweis gliedert sich in drei Teile. Wir prüfen die Wohldefiniertheit von j' und k' und die Exaktheit des Diagramms.
1. Wohldefiniertheit von j': Sei $i(a_1) = i(a_2)$ für $a_1, a_2 \in A$. Dann ist $a_1 - a_2 \in \ker i = \operatorname{im} k$ nach Exaktheit, also ist auch $j(a_1 - a_2) = j(a_1) - j(a_2) \in \operatorname{im} jk = \operatorname{im} d$, per Definition des Differentials. Also gilt für die Äquivalenzklassen $[j(a_1)] - [j(a_2)] = 0$, da beide im Bild des Differentials liegen und deren Differenz ein Rand ist. Damit ist $[j(a_1)] = [j(a_2)]$ in E' und j' hängt nicht von der Wahl des Repräsentanten ab.
2. Wohldefiniertheit von k': Für jedes $e \in \ker d = \ker jk$ gilt $k(e) \in \ker j = \operatorname{im} i = A'$ nach Exaktheit und der Definition $i(A') = A'$. Weiterhin ist $[e_1] = [e_2]$ für $e_1, e_2 \in E$, so gilt $[e_1 - e_2] = [0]$, also ist $e_1 - e_2$ ein Rand und damit $e_1 - e_2 \in \operatorname{im} d = \operatorname{im} jk \subset \operatorname{im} j = \ker k$. Deshalb gilt $k'([e_1] - [e_2]) = k(e_1 - e_2) = 0$ und deshalb $k'([e_1]) = k'([e_2])$.
3. Exaktheit: Sei $a' \in A'$, dann gibt es ein $a \in A$, so dass $i(a) = a'$. Wir erhalten $(j' \circ i')(a') = (j' \circ i|_{i(a)} \circ i)(a) = [(j \circ i|_{i(a)} \circ i)(a))] = [j(a'))] = [(j \circ i)(a)] = 0$, denn $ji = 0$. Somit ist $j'i' = 0$, also $\operatorname{im} i' \subset \ker j'$. Für $a' \in \ker j'$ mit $a' = i(a)$, dann ist $j'(a') = j'(i(a))) = [j(a)] = 0$ und somit $j(a) \in \operatorname{im} d$. Also gibt es ein $e \in E$, so dass $j(a) = d(e) = jk(e)$. Deshalb ist $a - k(e) \in \ker j = \operatorname{im} i$. Also gibt es ein $b \in A$, so dass $a - k(e) = i(b)$. Weil $ik = 0$ haben wir $a' = i(a) = i(a) - (ik)(e) = i(a - k(e)) = i^2(b)$. Also ist $a' = i(i(b))$ und damit ist $a' \in \operatorname{im} i'$. Also ist $\ker j' \subset \operatorname{im} i'$ und deshalb $\ker j' = \operatorname{im} i'$. Sei $a' = i(a) \in A'$, dann sehen wir, dass $(k'j')(a') = k'([ja]) = (kj)(a) = 0$. Also ist $\operatorname{im} j' \subset \ker k'$. TODO

$\square$

Der Prozess, in dem ein deriviertes Paar von einem exakten Paar erzeugt wird, kann mehrmals iteriert werden, was uns zu einem r-fach derivierten Paar für ein $r \in \mathbb{N}$ führt, welches wir als $(A^r, E^r, i^r, j^r, k^r)$ bezeichnen. Sei $d^r = j^r k^r$, dann entsteht die homologische spektrale Sequenz gerade durch die paare $\{E^r, d^r\}$. Allerdings haben wir auf diese Weise noch keine Graduierung, also nur einfache abelsche Gruppen. Die Graduierung ergibt sich aus der Filtrierung $X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X$, indem wir daraus ein exaktes Paar konstruieren.

Definition 2.4 (Exakte Paare einer Filtrierung)**.** *Für alle* $p, q \in \mathbb{Z}$ *sei* $E^1_{p,1} = H_{p+q}(X_p, X_{p-1})$ *und* $A^1_{p,q} = H_{p+q}(X_p)$*. Wir definieren* i^1, j^1 *und* k^1 *auf jedem* A^1 *oder* E^1*, in Vereinbarkeit mit der langen exakten Homologiesequenz:*

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "k^1_{p,q+1}"] & H_{p+q}(X_{p-1}) \arrow[r, "i^1_{p,q}"] & H_{p+q}(X_p) \arrow[r, "j^1_{p,q}"] & H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \arrow[d, "k^1_{p,q}"] \\ & & \cdots & H_{p+q-1}(X_{p-1}) \arrow[l, "i^1_{p,q-1}"'] \end{tikzcd}$$

Die Abbildung

- $i^1_{p,q} = H_{p+q}(\iota) : A^1 \to A^1$ *wird funktoriell induziert für jedes Paar* (X_p, X_{p-1}) *durch die Inklusion* $\iota : X_{p-1} \hookrightarrow X_p$*.*
- $j^1_{p,q} : A^1 \to E^1$ *wird induziert durch die Quotientenabbildung auf den Kettenkomplexen und*
- $k^1_{p,q} : E^1_{p,q} \to A^1_{p,q}$ *ist durch die verbindenden Homomorphismen definiert:*

$$k^1_{p,q} = \partial : H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \to H_{p+q-1}(X_{p-1}). \tag{4}$$

Da die lange exakte Homologiesequenz exakt ist, ist auch $(E^1_{p,q}, A^1_{p+q}, i^1_{p,q}, j^1_{p,q}, k^1_{p,q})$ *ein exaktes Paar.*

Aus Def. 2.4 erhalten wir ein exaktes Paar für jedes r, also unendlich viele exakte Paare, wobei diese Paare sowohl abzählbar, als auch überabzählbar unendlich sein können. Definieren wir $d^r = j^r k^r$, wie aus den vorhergehenden Überlegungen, dann können wir aus all diesen exakten paaren eine homologische spektrale Sequenz konstruieren.

Satz 2.5 (Homologische spektrale Sequenz einer Filtrierung)**.** *Gegeben sei ein deriviertes exaktes Paar* $(E^1_{p,q}, A^1_{p+q}, i^1_{p,q}, j^1_{p,q}, k^1_{p,q})$ *aus einer homologisch exakten Sequenz einer Filtrierung, so gibt es eine homologische spektrale Sequenz* $\{E^r, d^r\}$ *mit* $d^r = j^r k^r$*.*

Beweis. Wir wissen bereits, dass $d^r \circ d^r = 0$ und E^{r+1} ist die Homologie von E^r in Bezug auf d^r. Also reicht es zu zeigen, dass $d^r : E^r \to E^r$ vom Grad $(-r, r-1)$ ist,. Auf der ersten Seite gilt $d^1 = j^1 k^1$ und damit für $(H_{p+1}(X_p, X_{p-1}), d^1)$ auch

$$H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \xrightarrow{k^1} H_{p+q-1}(X_{p-1}) \xrightarrow{j^1} H_{p+q-1}(X_{p-1}, X_{p-2}). \tag{5}$$

Also sehen wir, dass $d^1 : E^1_{p,q} = H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \to H_{p+q-1}(X_{p-1}, X_{p-2}) = E^1_{p-1,q}$. Damit ist d^1 vom Grad $(-1, 0)$.

Für den allgemeinen Fall gliedern wir den Beweis in drei Teile:

1. $A^r_{p,q} = i^{r-1}(A^1_{p,q})$.
2. $k^r_{p,q} : E^r_{p,q} \to A^r_{p-1,q}$.
3. $j^r_{p,q} : A^r_{p,q} \to E^r_{p-r+1,q+r-1}$.

1. 1

□

3 Presentation der Serre spektralen Sequenz

4 Homologie von ΩS^n und $\mathbb{C}P^\infty$