

Spektralsequenzen

Leray–Serre Spektralsequenz

Luciano Melodia

Seminar zur Spektraltheorie

Lehrstuhl für Mathematische Physik

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg

luciano.melodia@fau.de

9. Januar 2025

Zusammenfassung

Die Homologiedefinition $H_n(A_\bullet)$ eines Kettenkomplexes ist für beliebige Homologietheorien als Quotient $\ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1}$ definiert. In Bezug auf Spektralsequenzen gibt es also in einem Kettenkomplex ein Differential, das aus der Gruppe herausgeht, in diesem Fall d_n , und eines, das in die Gruppe hineingeht, in diesem Fall d_{n+1} . Mit dieser Sichtweise können wir verschiedene Homologiegruppen betrachten, je nachdem, welche Differenziale wir verwenden. Eine solche Betrachtung kann nummeriert und in sogenannten Seiten organisiert werden. Eine Spektralsequenz ist wie ein Buch, das aus einer unendlichen Anzahl von Seiten besteht. Jede Seite ist ein zweidimensionales Gitter, das aus Gruppen besteht, die bestimmten Differentialen zugeordnet sind. Wir können eine natürliche Transformation anwenden, um von einer Seite zur nächsten zu gelangen, und im Idealfall stabilisieren sich die Seiten zu einem Seitenlimes im Unendlichen. Die Notation für die Homologien ist $E_{p,q}^r$, wobei r die Seitenzahl aus einer total geordneten Indexmenge (I, \leq) entnommen, $p \in \mathbb{Z}$ der horizontale Index und $q \in \mathbb{Z}$ der vertikale Index ist.

In gewisser Weise verhält sich jede Seite einer Spektralsequenz wie ein 2-dimensionaler Kettenkomplex. Die Gruppen sind durch zwei Parameter statt durch einen indiziert, und für jede Gruppe gibt es genau ein Differential, das aus der Gruppe herausführt, und genau ein Differential, das in die Gruppe hineinführt. Außerdem gilt immer die Eigenschaft $d^2 = 0$.

Wie sieht nun die Operation aus, die uns von $E_{p,q}^r$ nach $E_{p,q}^{r+1}$ führt? Die Differenziale auf jeder Seite r hängen stark von der Definition der Spektralsequenz ab. Schreiben wir $d_{\text{IN}}, d_{\text{OUT}}$ für die eingehenden und ausgehenden Differenziale von $E_{p,q}^r$, dann definieren wir $E_{p,q}^{r+1} := \ker d_{\text{OUT}} / \operatorname{im} d_{\text{IN}}$.

Die Funktionsweise der Spektralsequenz besteht darin, dass die Gruppen auf der ersten Seite $E_{p,q}^1$ definiert werden. Dann lassen wir die Spektralsequenzmaschine arbeiten. Im Falle der Serre Spektralsequenz stabilisiert sich diese, es gibt also ein R , so dass für alle $r > R$ gilt: $E_{p,q}^r = E_{p,q}^R$. Dies sind die Einträge der stabilisierten Seite $E_{p,q}^\infty$.

Wir beschreiben nun, was wir in unsere Spektralsequenz eintragen müssen und was wir davon als Ergebnis erwarten können, insbesondere am Beispiel der Serre'schen Spektralsequenz.

Inhaltsverzeichnis

1	Homologische Spektralsequenzen	2
2	Filtrierungen und exakte Paare	5
3	Presentation der Serre spektralen Sequenz	11
4	Homologie von $\mathbb{C}P^\infty$	13

1 Homologische Spektralsequenzen

Generell besteht die Möglichkeit, Spektralsequenzen über abelsche Kategorien zu definieren, alternativ oder zusätzlich über R -Moduln. Gegenstand der vorliegenden Arbeit sind Spektralsequenzen über \mathbb{Z} -Moduln, also die Variante für abelsche Gruppen.

Definition 1.1 (Homologische Sequenz). Sei $r_0 \in I$ mit $r_0 \geq 0$. Eine homologische Sequenz $\{A_{p,q}^r, d_{p,q}^r\}_{r \geq r_0}$ besteht aus

1. einer Familie abelscher Gruppen $\{A_{p,q}^r\}_{p,q \in \mathbb{Z}, r \geq r_0}$ und
2. einer Familie von Gruppenhomomorphismen $\{d_{p,q}^r : A_{p,q}^r \rightarrow A_{p-r,q+r-1}^r\}$, die als Differentiale bezeichnet werden,

sodass für alle p, q, r gilt:

1. $d_{p-r,q+r-1}^r \circ d_{p,q}^r = 0$,
2. $E_{p,q}^{r+1}$ ist die zugehörige Homologie von A^r , das heißt

$$E_{p,q}^{r+1} = \frac{\ker(d_{p,q}^r)}{\operatorname{im}(d_{p+r,q-r+1}^r)}.$$

Die vorliegende Definition einer homologischen Sequenz verdeutlicht, für welche Untergruppen die Quotienten berechnet werden, und zwar in einer Art Kettenkomplex mit zwei Indizes. Es ist jedoch davon auszugehen, dass sich eine Vereinfachung der Notation bei den weiteren Untersuchungen als hilfreich erweisen wird. Konkret wird ein r festgelegt und alle A^r als ein Objekt A^r betrachtet. Diese neu entstandene Gruppe wird als bigraduierte abelsche Gruppe bezeichnet, während die Differentiale d^r auch kollektiv als d^r oder bigraduierte Differentiale bezeichnet werden.

Definition 1.2 (Bigraduierte abelsche Gruppen). Eine bigraduierte abelsche Gruppe A ist eine Familie von abelschen Gruppen

$$A := \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} A_{p,q},$$

die man als direkte Summe auffassen kann, wobei die Indizes (p, q) aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ stammen. Sind zwei bigraduierte abelsche Gruppen

$$A := \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} A_{p,q} \quad \text{und} \quad B := \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} B_{p,q}$$

gegeben, so bezeichnet man eine bigraduierte Abbildung vom Grad (c, d) als die Familie von Gruppenhomomorphismen

$$f := \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} f_{p,q}^{(c,d)}.$$

$$\begin{array}{cccccc} A & A_{0,0} & A_{1,0} & A_{0,1} & A_{-1,0} & \cdots \\ \textcolor{red}{\downarrow} f & \downarrow f_{0,0} & \downarrow f_{1,0} & \downarrow f_{0,1} & \downarrow f_{-1,0} & \\ B & B_{0,0} & B_{1,0} & B_{0,1} & B_{-1,0} & \cdots \end{array}$$

Es sei darauf hingewiesen, dass der direkten Summe keine Bedeutung beigemessen wird, sodass die Reihenfolge der Summation als willkürlich zu betrachten ist. Eine alternative Betrachtungsweise besteht in der Auffassung der einzelnen abelschen Gruppen als Elemente einer Menge. Seien also $A = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} A_{p,q}$ und $B = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} B_{p,q}$ die bigraduierten abelschen Gruppen.

Definition 1.3 (Bigraduierte Abbildung). *Wir nennen einen Gruppenhomomorphismus*

$$f_{p,q}^{(c,d)} : A_{p,q} \longrightarrow B_{p+c, q+d}$$

eine Abbildung vom Bigrad (c, d) . Eine bigraduierte Abbildung vom Bigrad (c, d) ist dann ein Gruppenhomomorphismus

$$f : A \longrightarrow B, \quad \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} a_{p,q} \longmapsto \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} f_{p,q}^{(c,d)}(a_{p,q}),$$

wobei jedem Summanden $a_{p,q} \in A_{p,q}$ das Element $f_{p,q}^{(c,d)}(a_{p,q}) \in B_{p+c, q+d}$ zugeordnet wird.

f kann als eine Sammlung von Gruppenhomomorphismen vom Bigrad (c, d) aufgefasst werden, die *elementweise* auf der direkten Summe der abelschen Gruppen operieren. Entsprechend können wir sinngemäß schreiben:

$$f = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} f_{p,q}^{(c,d)}.$$

Beispiel 1.4. *Sei R ein Ring. Dann trägt $R[x, x^{-1}, y, y^{-1}]$ die Struktur einer bigraduierten abelschen Gruppe, indem wir*

$$A_{p,q} = R x^p y^q \quad \text{für alle } p, q \in \mathbb{Z}$$

setzen.

Definition 1.5 (Bigraduierte Untergruppen und Quotienten). *Seien A und B bigraduierte abelsche Gruppen. Dann definieren wir:*

1. $A \subset B : \Leftrightarrow A_{p,q} \subset B_{p,q}$ für alle $p, q \in \mathbb{Z}$,
2. Falls $A \subset B$, so sei

$$\frac{B}{A} := \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} \frac{B_{p,q}}{A_{p,q}}.$$

Definition 1.6. *Ist $f : A \rightarrow B$ eine bigraduierte Abbildung des Grads (c, d) zwischen bigraduierten abelschen Gruppen, so definieren wir*

- $\ker f := \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} \ker(f_{p,q}),$
- $\operatorname{im} f := \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} \operatorname{im}(f_{p-c,q-d}).$

Nun können wir die zuvor definierte homologische Sequenz (Definition 1.1) zu einer *spektralen* homologischen Sequenz erweitern.

Definition 1.7. Sei $r_0 \geq 0$. Eine homologische Spektralsequenz

$$\{E^r, d^r\}_{r \geq r_0}$$

besteht aus

1. einer bigraduierten abelschen Gruppe E^r und
2. einer bigraduirten Abbildung

$$d^r : E^r \longrightarrow E^r$$

vom Bigrad $(r, r-1)$, die als Differential bezeichnet wird, sodass für jedes r gilt:

- $d^r \circ d^r = 0$, d. h. $(d^r)^2 = 0$, und
- E^{r+1} ist die Homologie von E^r bezüglich des Differentials d^r , das heißt

$$E^{r+1} = \frac{\ker(d^r)}{\operatorname{im}(d^r)} = \frac{\bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} \ker(d_{p,q}^r)}{\bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} \operatorname{im}(d_{p-r,q+r-1}^r)} = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} \frac{\ker(d_{p,q}^r)}{\operatorname{im}(d_{p-r,q+r-1}^r)}.$$

Für jedes r nennt man E^r das r -te Blatt oder die r -te Seite der Spektralsequenz $\{E^r, d^r\}_{r \geq r_0}$.

Anmerkung 1.8. Es gibt eine entsprechende Variante als kohomologische Spektralsequenz, die in analoger Weise zu Definition 1.7 konstruiert wird. Dort schreibt man $E_r := \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} E_r^{p,q}$ für die Kohomologieanteile und verwendet Differentiale

$$d_r : E_r \longrightarrow E_r$$

vom Bigrad $(r, -r+1)$. Die homologische Spektralsequenz wird zur Berechnung von Homologiegruppen verwendet, während die kohomologische Spektralsequenz zur Bestimmung von Kohomologiegruppen dient.

Definition 1.9. Sei $\{E^r, d^r\}_{r \geq r_0}$ eine homologische Spektralsequenz. Angenommen, es existiert für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ eine natürliche Zahl

$$r(p, q) \in \mathbb{N},$$

abhängig von p und q , derart, dass für alle $r \geq r(p, q)$

$$E_{p,q}^r \cong E_{p,q}^{r(p,q)}.$$

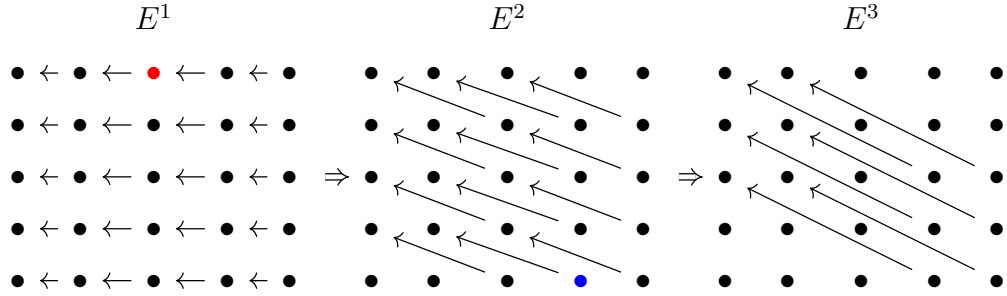
Dann sagen wir, dass die bigraduierte abelsche Gruppe

$$E^\infty := \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} E_{p,q}^{r(p,q)}$$

der Limes der Spektralsequenz $\{E^r, d^r\}_{r \geq r_0}$ ist. Äquivalent sagen wir auch, dass die Spektralsequenz an E^∞ angrenzt.

Anmerkung 1.10. Im Folgenden ist eine schematische Darstellung der ersten drei Seiten einer Serre-Spektralsequenz mit den zugehörigen Differentialen (durch Pfeile \rightarrow) und den jeweiligen Definitions- und Zielbereichen (dargestellt durch \bullet). Die Symbole \bullet stehen in diesem Kontext für abelsche Gruppen, speziell für Homologiegruppen oder, falls über einem Körper \mathbb{F} betrachtet, für entsprechende Vektorräume.

Der rote Punkt \bullet stellt das Element $E_{0,2}^1$ dar, der blaue Punkt \bullet repräsentiert $E_{1,-2}^2$. Diese besondere Spektralsequenz (die Serre-Spektralsequenz) stabilisiert immer, das heißt, für hinreichend große r ändert sich die jeweilige Seite nicht mehr.



Definition 1.11. Eine Spektralsequenz heißt Erste-Quadranten-Spektralsequenz, falls es für ein $r \in \mathbb{N}$ genau dann nichttriviale Einträge (d. h. nichtverschwindende Homologiegruppen auf der r -ten Seite) gibt, wenn $p \geq 0$ und $q \geq 0$ gelten.

2 Filtrierungen und exakte Paare

Angenommen, wir haben einen topologischen Raum X und einen *guten* Teilraum A , wobei das *Gütekriterium* in diesem Zusammenhang bedeutet, dass es eine Umgebung $U \subset X$ mit $\bar{A} \subset \mathring{U}$ gibt und A ein Deformationsretrakt von U ist. Dies stellt sicher, dass die relative Homologie

$$H_n(X, A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$$

isomorph zur *reduzierten* Homologie des Quotienten X/A ist. Falls wir nun die Homologien von A und X/A kennen, so ist es naheliegend, zur Berechnung der Homologie von X die lange exakte *reduzierte* Homologiesequenz zu verwenden:

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_n(A) \longrightarrow \tilde{H}_n(X) \longrightarrow \tilde{H}_n(X/A) \longrightarrow \tilde{H}_{n-1}(A) \longrightarrow \tilde{H}_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

Erweitern wir unsere Situation auf *drei* ineinanderliegende Teilräume

$$B \subset A \subset X,$$

wobei wir wieder annehmen, dass alle Teilräume *gut* im obigen Sinne sind und wir bereits die Homologien von B , A/B sowie X/A kennen. Dann wünschen wir uns eine Verallgemeinerung der langen exakten Sequenz, die auch für ein solches verschachteltes Paar von Räumen funktioniert. Im Allgemeinen kann man eine solche *Matroschka* von topologischen Räumen als *Filtrierung* auffassen:

Definition 2.1. Eine Filtrierung eines topologischen Raumes X ist eine aufsteigende Folge von Teilräumen

$$\mathcal{X}: \quad \cdots \subset X_{-2} \subset X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X.$$

Nun stellt sich die Frage, was wir über die Homologien von X aussagen können, wenn wir unser Wissen über die Homologien der X_i aus einer Filtrierung \mathcal{X} und/oder über die Quotientenräume X_i/X_{i-1} einsetzen. Beschränken wir uns auf den Spezialfall, dass X der Totalraum einer Faserung ist, so erhalten wir eine zufriedenstellende Antwort auf diese Frage.

Definition 2.2. In einer Spektralsequenz kommt es häufig vor, dass E^r und d^r aus einer anderen Struktur hervorgehen, nämlich aus einem exakten Paar.

Ein exaktes Paar besteht aus einem Paar bigraduierter abelscher Gruppen A und E zusammen mit bigraduierten Abbildungen

$$i : A \rightarrow A, \quad j : A \rightarrow E, \quad k : E \rightarrow A,$$

sodass das folgende Diagramm exakt ist:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & A \\ & \swarrow k & \searrow j \\ & E & \end{array}$$

Die Exaktheit ist analog zu der für kurze exakte Sequenzen oder Kettenkomplexe definiert:

- $\ker i = \operatorname{im} k$,
- $\ker j = \operatorname{im} i$,
- $\ker k = \operatorname{im} j$.

Haben wir ein solches exaktes Paar (A, E, i, j, k) , so gibt es eine natürliche Art und Weise, das Differential

$$d = j \circ k : E \longrightarrow E$$

zu definieren, sodass

$$d^2 = (j \circ k)(j \circ k) = j(k \circ j)k = 0$$

gilt. Dieses Differential wird dann verwendet, um ein zweites exaktes Paar, das sogenannte *derivierte Paar*, zu definieren.

Lemma 2.3. Sei (A, E, i, j, k) ein exaktes Paar. Dann gibt es ein zweites exaktes Paar

$$(A', E', i', j', k'),$$

das derivierte Paar genannt wird, und in folgendem Diagramm beschrieben ist:

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{i'} & A' \\ & \swarrow k' & \searrow j' \\ & E' & \end{array}$$

wobei die Definitionen mittels

- $A' = i(A)$,
- $E' = \ker(d) / \operatorname{im}(d) = \ker(jk) / \operatorname{im}(jk)$,
- $i' = i|_{i(A)}$ (Einschränkung von i auf $i(A)$),
- Für alle $i(a) \in A' : j'(i(a)) = [j(a)] \in E'$,

• Für alle $[e] \in E' : k'([e]) = k(e)$
gegeben sind.

Beweis. Der Beweis gliedert sich in drei Teile. Wir zeigen die Wohldefiniertheit von j' und k' sowie die Exaktheit des entstehenden Diagramms.

1. **Wohldefiniertheit von j' .**

Sei $i(a_1) = i(a_2)$ für $a_1, a_2 \in A$. Da $a_1 - a_2 \in \ker(i)$ liegt und nach Exaktheit $\ker(i) = \text{im}(k)$ gilt, existiert ein $e \in E$ mit $k(e) = a_1 - a_2$. Dann folgt

$$j(a_1) - j(a_2) = j(a_1 - a_2) \in \text{im}(jk) = \text{im}(d).$$

In anderen Worten ist $j(a_1) - j(a_2)$ ein *Rand* im Bild von d . Somit stimmen die Äquivalenzklassen überein:

$$[j(a_1)] = [j(a_2)] \quad \text{in } E'.$$

Also ist j' wohldefiniert und hängt nicht von der Wahl des Repräsentanten ab.

2. **Wohldefiniertheit von k' .**

Für jedes $e \in \ker(d) = \ker(jk)$ gilt zunächst $k(e) \in \ker(j)$. Nach Exaktheit ist $\ker(j) = \text{im}(i)$, also $k(e) \in \text{im}(i) = A'$. Für $[e_1] = [e_2]$ in E' (d. h. $[e_1 - e_2] = 0$) ist $e_1 - e_2$ ein Rand, also

$$e_1 - e_2 \in \text{im}(d) = \text{im}(jk) \subset \text{im}(j) = \ker(k).$$

Folglich gilt

$$k(e_1 - e_2) = 0 \implies k'([e_1 - e_2]) = 0 \implies k'([e_1]) = k'([e_2]).$$

Damit ist auch k' wohldefiniert.

3. **Exaktheit des Diagramms.**

(a) $\text{im}(i') \subset \ker(j')$:

Sei $a' \in A'$. Dann existiert $a \in A$ mit $i(a) = a'$. Nun

$$(j' \circ i')(a') = j'(i'(a')) = j'(i|_{i(A)}(a')).$$

Da $a' = i(a)$, folgt

$$(j' \circ i')(i(a)) = j'(i(a)) = [j(a)].$$

Aber $j(i(a)) = (j \circ i)(a) = 0$ (aus der Exaktheit folgt $j \circ i = 0$). Somit ist

$$[j(a)] = [0] \implies (j' \circ i')(a') = 0 \implies \text{im}(i') \subset \ker(j').$$

(b) $\ker(j') \subset \text{im}(i')$:

Sei $a' \in \ker(j')$. Dann ist $j'(a') = 0$. Da $a' \in A'$ gilt $a' = i(a)$ für ein $a \in A$. Also

$$j'(i(a)) = [j(a)] = 0 \implies j(a) \in \text{im}(d).$$

Somit existiert $e \in E$ mit $j(a) = (jk)(e) = d(e)$. Folglich ist

$$a - k(e) \in \ker(j) = \text{im}(i).$$

Also gibt es ein $b \in A$, sodass $a - k(e) = i(b)$. Daraus folgt

$$a' = i(a) = i(a) - i(k(e)) = i(a - k(e)) = i(i(b)) = i^2(b).$$

Da $i(a') = a'$ in A' bereits als Bild vorliegt, folgt $a' \in \text{im}(i')$. Somit $\ker(j') = \text{im}(i')$.

(c) $\text{im}(j') \subset \ker(k')$:

Sei $a' = i(a) \in A'$. Dann

$$(k' \circ j')(a') = k'(j'(i(a))) = k'([j(a)]) = k(j(a)).$$

Doch aus Exaktheit folgt $k \circ j = 0$, also

$$k(j(a)) = 0.$$

Damit ist $\text{im}(j') \subset \ker(k')$.

(d) $\ker(k') \subset \text{im}(j')$:

Sei $[e] \in \ker(k')$. Dann ist $k'([e]) = k(e) = 0$, woraus $e \in \ker(k)$. Nach Exaktheit ist $\ker(k) = \text{im}(j)$, also existiert $a \in A$ mit $e = j(a)$. Daher

$$[e] = [j(a)] = j'(i(a)) \in \text{im}(j').$$

Somit $\ker(k') = \text{im}(j')$.

(e) $\text{im}(k') \subset \ker(i')$ und $\ker(i') \subset \text{im}(k')$:

Für jedes $[e] \in E'$ ist

$$(i' \circ k')([e]) = i'(k'([e])) = i(k(e)) = (i \circ k)(e) = 0$$

(aus $i \circ k = 0$). Also $\text{im}(k') \subset \ker(i')$.

Ist umgekehrt $a' \in \ker(i') \subset A'$, so ist $i'(a') = 0$ in A' . Da $i'(a') = i(a')$ (Einschränkung) und $a' \in A' = i(A)$, existiert ein $a \in A$ mit $a' = i(a)$. Dann

$$0 = i'(a') = i'(i(a)) = i(i(a)).$$

Aufgrund der Exaktheit $\ker(i) = \text{im}(k)$ folgt, dass $i(a) \in \text{im}(k)$, also $i(a) = k(e)$ für ein $e \in E$. Damit ist $a' = k(e)$ und somit $a' = k'([e])$. Also $\ker(i') \subset \text{im}(k')$. Insgesamt folgt aus (a)–(e), dass das so konstruierte Diagramm exakt ist. Damit ist (A', E', i', j', k') in der Tat ein exaktes Paar. □

Der Prozess, bei dem aus einem exakten Paar ein deriviertes Paar erzeugt wird, kann beliebig oft wiederholt werden. Dadurch erhalten wir für jedes $r \in \mathbb{N}$ ein r -fach deriviertes Paar $(A^r, E^r, i^r, j^r, k^r)$. Setzen wir

$$d^r = j^r \circ k^r,$$

so entsteht die zugehörige *homologische Spektralsequenz* gerade durch die Paare

$$\{E^r, d^r\}_{r \in \mathbb{N}}.$$

Allerdings haben wir auf diese Weise zunächst keine Graduierung, das heißt, es handelt sich nur um einfache abelsche Gruppen. Die Graduierung ergibt sich aus der Filtrierung

$$X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X,$$

indem wir daraus ein *exaktes Paar* konstruieren.

Definition 2.4 (Exakte Paare einer Filtrierung). Für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ setze

$$E_{p,q}^1 = H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \quad \text{und} \quad A_{p,q}^1 = H_{p+q}(X_p).$$

Die Abbildungen i^1, j^1, k^1 definieren wir auf jedem $A_{p,q}^1$ bzw. $E_{p,q}^1$ in Übereinstimmung mit der langen exakten Homologiesequenz. Im Folgenden illustriert das Diagramm die Konstruktion:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{k_{p,q+1}^1} & H_{p+q}(X_{p-1}) & \xrightarrow{i_{p,q}^1} & H_{p+q}(X_p) & \xrightarrow{j_{p,q}^1} & H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \\ & & & & & & \downarrow k_{p,q}^1 \\ & & \cdots & \xleftarrow{i_{p,q-1}^1} & H_{p+q-1}(X_{p-1}) & & \end{array}$$

Dabei gilt:

- $i_{p,q}^1 = H_{p+q}(\iota) : A_{p,q}^1 \rightarrow A_{p,q}^1$ ist der funktorielle Homomorphismus, der aus der Inklusion $\iota : X_{p-1} \hookrightarrow X_p$ entsteht.
- $j_{p,q}^1 : A_{p,q}^1 \rightarrow E_{p,q}^1$ wird durch die Quotientenabbildung in der Kettengruppenfolge induziert.
- $k_{p,q}^1 : E_{p,q}^1 \rightarrow A_{p,q-1}^1$ ist der verbindende Homomorphismus

$$k_{p,q}^1 = \partial : H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \longrightarrow H_{p+q-1}(X_{p-1}).$$

Da die lange exakte Homologiesequenz exakt ist, bildet

$$(E_{p,q}^1, A_{p,q}^1, i_{p,q}^1, j_{p,q}^1, k_{p,q}^1)$$

ein exaktes Paar.

Aus Definition 2.4 erhalten wir für jedes r ein entsprechendes exaktes Paar und damit *unendlich viele* exakte Paare (möglicherweise abzählbar oder überabzählbar unendlich). Definieren wir

$$d^r = j^r \circ k^r,$$

wie oben, so erhalten wir aus diesen exakten Paaren die zugehörige homologische Spektralsequenz.

Satz 2.5 (Homologische Spektralsequenz einer Filtrierung). Sei ein *deriviertes exaktes Paar*

$$(E_{p,q}^1, A_{p+q}^1, i_{p,q}^1, j_{p,q}^1, k_{p,q}^1)$$

aus einer homologisch exakten Sequenz einer Filtrierung gegeben. Dann gibt es eine homologische Spektralsequenz

$$\{E^r, d^r\} \quad \text{mit} \quad d^r = j^r \circ k^r.$$

Beweis. Wir wissen bereits, dass $d^r \circ d^r = 0$ gilt und dass E^{r+1} die Homologie von E^r bezüglich d^r ist. Es bleibt also zu zeigen, dass

$$d^r : E^r \longrightarrow E^r \quad \text{vom Grad } (-r, r-1)$$

ist. Auf der ersten Seite folgt aus $d^1 = j^1 \circ k^1$, dass wir für

$$(H_{p+q}(X_p, X_{p-1}), d^1)$$

die Abbildungen

$$H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \xrightarrow{k^1} H_{p+q-1}(X_{p-1}) \xrightarrow{j^1} H_{p+q-1}(X_{p-1}, X_{p-2})$$

erhalten. Damit sehen wir, dass

$$d^1 : E_{p,q}^1 = H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \longrightarrow H_{p+q-1}(X_{p-1}, X_{p-2}) = E_{p-1,q}^1,$$

also ist d^1 vom Grad $(-1, 0)$.

Für den allgemeinen Fall teilen wir den Beweis in drei Schritte auf:

1. $A_{p,q}^r = i^{r-1}(A_{p,q}^1)$.
2. $k_{p,q}^r : E_{p,q}^r \longrightarrow A_{p-1,q}^r$.
3. $j_{p,q}^r : A_{p,q}^r \longrightarrow E_{p-r+1,q+r-1}^r$.

Zu (1). Dies folgt unmittelbar aus der Definition der derivierten Paare.

Zu (2). Der Homomorphismus $k_{p,q}^{r+1}$ wird durch $k_{p,q}^r$ auf $\ker(d^r)/\text{im}(d^r)$ induziert. Für die erste Seite wissen wir bereits, dass

$$k_{p,q}^1 : E_{p,q}^1 \longrightarrow A_{p-1,q}^1$$

gilt. Durch Induktion definiert man analog

$$k_{p,q}^n : E_{p,q}^n \longrightarrow A_{p-1,q}^n$$

für beliebige n . Somit ist auch $k_{p,q}^r : E_{p,q}^r \rightarrow A_{p-1,q}^r$ wohldefiniert.

Zu (3). Sei $a \in A_{p,q}^r$. Dann gibt es ein $b \in A_{p,q}^1$ mit $i^{r-1}(b) = a$, weil nach (1) $A_{p,q}^r = i^{r-1}(A_{p,q}^1)$. Folglich

$$\begin{aligned} j^r(a) &= j^r(i^{r-1}(b)) = [j^{r-1}(i^{r-2}(b))] \\ &= [[j^{r-2}(i^{r-3}(b))]] = \dots = [\dots [j^1(b)] \dots]. \end{aligned} \tag{1}$$

Hier kennzeichnen wir durch mehrfaches Einklammern, dass wir zunächst eine Äquivalenzklasse $[\alpha]$ in $E_{p,q}^r$ und anschließend eine weitere Klasse $[[\alpha]]$ in $E_{p,q}^{r+1}$ betrachten. Weil sowohl $[\dots [j^1(b)] \dots] \in E_{p,q}^{r+k}$ als auch $j^1(b) \in E_{p,q}^1$ in derselben *homologischen Ordnung* liegen, folgt, dass sich nur der *Grad des derivierten Paares* ändert, nicht jedoch die zugrundeliegenden Homologiegruppen. Insbesondere gilt

$$b \in A_{p-r+1,q+r-1}^1, \quad j^1(b) \in E_{p-r+1,q+r-1}^1,$$

und entsprechend

$$j_{p,q}^r : A_{p,q}^r \longrightarrow E_{p-r+1,q+r-1}^r.$$

Verkettet man nun

$$E_{p,q}^r \xrightarrow{k^r} A_{p-1,q}^r \xrightarrow{j^r} E_{p-r,q+r-1}^r,$$

erhält man $d^r = j^r \circ k^r$. Damit ist d^r vom Bigrad $(-r, r-1)$.

Somit ist gezeigt, dass die Abbildung

$$d^r : E^r \longrightarrow E^r$$

tatsächlich vom Grad $(-r, r-1)$ ist, was die Behauptung abschließt. \square

3 Presentation der Serre spektralen Sequenz

Die Serre Spektralsequenz ist konstruiert worden um die Homologiegruppen von unterschiedlichen Bestandteilen einer sogenannten Faserung zusammenzubringen. Bei einer Faserung $Z \rightarrow X \rightarrow Y$ sollte man an eine Abbildung $\pi : X \rightarrow Y$ denken, sodass alle Urbilder $\pi^{-1}(y)$ für $y \in Y$ homotopieäquivalent zu Z sind. Bevor wir die Definition der Serre spektralen Sequenz einführen können, benötigen wir also die Definition einer Faserung, welche die Homotopiehochhebungseigenschaft erfüllt. Diese erlaubt uns durch Anwendung der Faserung aus einfachen, bekannten Räumen, neue komplexere Räume zu konstruieren. Die Faserung ist eine Verallgemeinerung des Vektorbündels, welche auch ohne lineare oder affine Struktur auskommt. Die Homotopie-Hochhebungseigenschaft wird uns anschließend auch kompatible Eigenschaften auf Homologieebene induzieren.

Definition 3.1 (Faserung). *Eine Abbildung $\pi : X \rightarrow B$, welche folgende Homotopiehochhebungseigenschaften für beliebige Räume Z erfüllt, heißt Faserung:*

- für jede Homotopie $h : Z \times [0, 1] \rightarrow B$ und
- für jeden Lift $\bar{h}_0 : Z \rightarrow X$ mit $h_0 = h|_{Z \times \{0\}}$ und $h_0 = \pi \circ \bar{h}_0$,

existiert eine Homotopie $\bar{h} : Z \times [0, 1] \rightarrow X$, die h liftet. Daraus resultiert folgendes kommutierende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} Z \times \{0\} & \xrightarrow{\bar{h}_0} & X \\ \downarrow \iota & \nearrow \bar{h} & \uparrow \pi \\ Z \times [0, 1] & \xrightarrow{h} & B. \end{array}$$

Im folgenden betrachten wir ein paar Beispiele von Faserungen, um etwas Intuition zu gewinnen.

Beispiel 3.2. *Beispiele für Faserungen:*

1. Seien X, Y topologische Räume, dann ist die Projektion $\pi : X \times Y \rightarrow Y$ eine Faserung, wobei jede Faser homeomorph ist zu X . Sei $h : Z \times [0, 1] \rightarrow Y$ eine Homotopie mit $\bar{h}_0 : Z \times \{0\} \rightarrow X \times Y$, so dass $(\pi \circ \bar{h}_0)(z) = h_0(z) = h(z, 0)$. Sei $\bar{h} : Z \times [0, 1] \rightarrow X \times Y$ definiert durch $\bar{h}(z, t) = ((p_X \circ \bar{h}_0)(z, t), h(z, t))$, wobei $p_X : X \times Y \rightarrow X$ die Projektion auf die erste Komponente bezeichnet. Wir haben also \bar{h} so gebaut, dass es mit \bar{h}_0 in der X -Komponente und mit h in der Y -Komponente übereinstimmt.
2. Die kanonische Surjektion $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n, x \mapsto [x]$ ist eine Faserung mit Fasern homeomorph zu S^0 .
3. Die kanonische Surjektion $\pi : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n, x \mapsto [x]$ ist eine Faserung mit Fasern homeomorph zu S^1 .

Als gegebene Daten verwenden wir eine Faserung $\pi : X \rightarrow B$, wobei B ein wegzusammenhängender CW-Komplex ist und X ein topologischer Raum. Man beachte, dass wir die Homotopiehochhebungseigenschaften nur für CW-Komplexe fordern wollen, eine solche Faserung nennt man auch Serre-Faserung. Der Raum B wird Basisraum genannt und X heißt Totalraum. Wir können eine Filtrierung von X erzeugen, indem wir das p -Skelett B^p von B betrachten und $X_p := \pi^{-1}(B^p)$ definieren. Aus dieser Filtrierung erhalten wir ein exaktes Paar und von diesem exakten Paar wiederum

eine homologische Sequenz. In dieser Konstellation heißt die resultierende Spektralsequenz auch Serre Spektralsequenz.

Wir benötigen zunächst für einen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ in den Basisraum B eine Abbildung $L_\gamma : F_a \rightarrow F_b$ für die Fasern $F_a = \pi^{-1}(a)$ und $F_b = \pi^{-1}(b)$. Diese Abbildung zwischen den Fasern soll stetig sein und die Existenz einer solchen Abbildung wird garantiert, durch die Homotopieäquivalenz der Fasern über jede Wegzusammenhangskomponenten zueinander.

Proposition 3.3. *Falls $\pi : X \rightarrow B$ eine Faserung ist, dann sind die Fasern $F_b = \pi^{-1}(b)$ über jede Wegzusammenhangskomponente von B zueinander homotopieäquivalent.*

Beweis. Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ ein Weg und $F_{\gamma(s)} := \pi^{-1}(\gamma(s))$ eine Faser. Wir definieren eine Homotopie $h : F_{\gamma(0)} \times [0, 1] \rightarrow B$ durch $h(x, t) = \gamma(t)$. Sei $\bar{h}_0 : F_{\gamma(0)} \times \{0\} \hookrightarrow X$ die Inklusion. Dann gilt für $x \in F_{\gamma(0)}$, $(\pi \circ \bar{h}_0)(x) = \gamma(0) = h_0(x)$. Da $\pi : X \rightarrow B$ eine Faserung ist, existiert eine Abbildung $\bar{h} : F_{\gamma(0)} \times [0, 1] \rightarrow X$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} F_{\gamma(0)} \times \{0\} & \xrightarrow{\bar{h}_0} & X \\ \downarrow \iota & \searrow \bar{h} & \uparrow \pi \\ F_{\gamma(0)} \times [0, 1] & \xrightarrow{h} & B. \end{array}$$

Insbesondere gilt $h = \pi \bar{h}$, $\bar{h}(x, t) \in F_{\gamma(t)}$. Falls also $t = 1$ ist, erhalten wir die Abbildung $L_\gamma : F_{\gamma(0)} \rightarrow F_{\gamma(1)}$ definiert durch $L_\gamma(x) = \bar{h}(x, 1)$.

Wir zeigen als nächstes, dass die Abbildung $\gamma \mapsto L_\gamma$ sich gutartig verhält, in Bezug auf Homotopien [Hat01, Prop. 4.61]:

- Falls γ_0 und γ_1 Wege von a nach b sind und $\gamma \simeq_{\{0,1\}} \gamma'$ (d.h. es gibt eine Homotopie $h : \gamma \Rightarrow \gamma'$, welche konstant auf den Basispunkten 0 und 1 ist), dann gilt $L_\gamma \simeq L_{\gamma'}$.
- Falls γ_0 und γ_1 Wege sind, so dass $\gamma_1(0) = \gamma_0(1)$, dann ist $L_{\gamma_0 \star \gamma_1} \simeq L_{\gamma_1} \circ L_{\gamma_0}$.

Wir werden nun die Proposition aus diesen beiden Eigenschaften ableiten. Seien F_a und F_b Fasern und sei γ ein Weg von a nach b . Wir betrachten $L_\gamma : F_a \rightarrow F_b$ und $L_{\bar{\gamma}} : F_b \rightarrow F_a$.

Sei $\alpha \equiv a$ die Konstante Schleife und \bar{h} die Abbildung, welche wir verwenden um $L_\alpha(x)$ zu definieren. Weil $h(x, t) = \alpha(x) = a$ ist für alle x , wissen wir auch dass $\bar{h}(x, t) \in F_a$ für alle x und t . Also ist \bar{h} eine Homotopie, so dass $\bar{h}(x, 0) = \text{Id}_{F_a}$ und $\bar{h}(x, 1) = L_\alpha$. Also ist auch $F_a \simeq L_\alpha$ und ebenso $\text{Id}_{F_b} \simeq L_\beta$.

Mit den Eigenschaften aus [Hat01, Prop. 4.61] erhalten wir

$$L_{\bar{\gamma}} \circ L_\gamma \simeq L_{\gamma \star \bar{\gamma}} \simeq L_\alpha \simeq \text{Id}_{F_a}, \quad (2)$$

$$L_\gamma \circ L_{\bar{\gamma}} \simeq L_{\bar{\gamma} \star \gamma} \simeq L_\beta \simeq \text{Id}_{F_b}. \quad (3)$$

Also ist $F_a \simeq F_b$. □

Diese Proposition führt dazu, dass sich die Konvention etabliert hat, dass wir immer Bezug auf die Fasern einer Faserung eines einzelnen topologischen Raums nehmen, zu dem alle Fasern homotopeäquivalent sind, solange diese eben wegzusammenhängend sind. Es ist üblich eine Faserung als $F \rightarrow X \rightarrow X$ zu schreiben, wobei F der Raum ist, der homotopieäquivalent zu den Fasern ist.

Aus diese Art und Weise können wir unsere Beispiele 3.2 wie folgt umschreiben:

- $F \rightarrow F \times B \rightarrow B$,
- $S^0 \rightarrow S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$,
- $S^1 \rightarrow S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$.

Für alle drei Beispiele sind die Fasern sogar homeomorph.

Für jeden Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ können wir also eine Abbildung zwischen den Fasern der Anfangs- und Endpunkte definieren $L_\gamma : F_{\gamma(0)} \rightarrow F_{\gamma(1)}$, indem wir die Homotopiehochhebungseigenschaft in Bezug auf $F_{\gamma(0)}$ verwenden.

Um die Faserung für unser Beispiel nutzbar zu machen, müssen wir zeigen, dass das Faserbündel $S^1 \rightarrow S^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ mit $\pi : S^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ der kanonischen Surjektion eine Faserung ist. Wir sehen aufgrund der Konstruktion von $\mathbb{C}P^\infty$, dass der Raum einfach zusammenhängend als CW-Komplex ist.

Sei X ein topologischer Raum und \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X .

Definition 3.4. Eine Verfeinerung ist eine offene Überdeckung \mathcal{V} von X , so dass für alle $V \in \mathcal{V}$ ein $U \in \mathcal{U}$ existiert, mit $V \subset U$.

Wir sagen, dass eine Verfeinerung \mathcal{V} lokal endlich ist, falls für alle offenen Umgebungen U_x von $x \in X$ gilt $U_x \cap V = \emptyset$ für fast alle $V \in \mathcal{V}$.

Definition 3.5. Ein topologischer Raum heißt parakompakt, falls jede offene Überdeckung eine lokal endliche Verfeinerung besitzt.

Anmerkung 3.6. Alle kompakten topologischen Räume sind parakompakt.

Lemma 3.7. Jeder CW-Komplex ist parakompakt.

Beweis. TODO □

Satz 3.8. [Hue55, Theorem 1] Falls $\pi : X \rightarrow B$ ein Faserbündel ist und B parakompakt, dann ist π eine Faserung.

Aus diesem Satz und der Tatsache, dass alle CW-Komplexe parakompakt sind, folgt unser gewünschtes Korollar.

Korollar 3.9. Jedes Faserbündel mit einem CW-Komplex als Basisraum ist eine Faserung.

4 Homologie von $\mathbb{C}P^\infty$

Zunächst möchten wir in diesem Kapitel die Homologien von $\mathbb{C}P^\infty$ mittels zellulärer Homologie berechnen, in dem wir die Struktur eines CW-Komplexes darauf definieren, um sie anschließend mit dem Ergebnis aus der Spektralsequenz vergleichen zu können. Der Raum $\mathbb{C}P^n$ besteht aus den komplexen Geraden durch den Ursprung in $\mathbb{C}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{2n+2}$. Der isometrische Isomorphismus ist gegeben durch die Abbildung $\phi : \mathbb{R}^{2n+2} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$, $(x_1, \dots, x_{2n+2}) \mapsto (x_1 + ix_2, \dots, x_{2n+1} + ix_{2n+2})$. Wir können $\mathbb{C}P^n = S^{2n+1} / \sim$ schreiben, wobei die Äquivalenzrelation gegeben ist durch

$$(x_1, \dots, x_{2n+2}) \sim (R(x_1, x_2), \dots, R(x_{2n+1}, x_{2n+2})) \quad \forall R \in \text{SO}(2). \quad (4)$$

Dies ergibt die folgende Filtrierung in Skelette

$$\emptyset \subset \bullet \subset \bullet \subset \mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^1 \subset \dots \subset \mathbb{C}P^{n-1} \subset \mathbb{C}P^{n-1} \subset \mathbb{C}P^n \subset \mathbb{C}P^n \subset \dots \subset \mathbb{C}P^\infty,$$

wobei $\mathbb{C}P^k$ durch einen pushout aus $\mathbb{C}P^{k-1}$ konstruiert wird, indem $2k$ -Scheiben D^{2k} mittels der kanonischen Surjektion $\pi : S^{2k-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{k-1}$ angeheftet werden:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}P^k & \xleftarrow{[x] \mapsto [(x,0,0)]} & \mathbb{C}P^{k-1} \\ \uparrow c & & \uparrow \pi \\ D^{2k} & \xleftarrow{\iota} & S^{2k-1}. \end{array}$$

$\mathbb{C}P^\infty$ hat dabei Skelette $X_{2k} = X_{2k+1} = \mathbb{C}P^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Damit erhalten wir für den zellulären Kettenkomplex $C_{2k}(\mathbb{C}P^\infty) \cong H_{2k}(X_{2k}, X_{2k-1}) \cong \mathbb{Z}$ für $0 \leq k \leq n$ und $C_k(\mathbb{C}P^n) \cong H_k(X_k, X_{k-1}) = 0$ für $k > 2n$ für k ungerade. Der zelluläre Komplex ist gegeben durch

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d_{2n}} 0 \xrightarrow{d_{2n-1}} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_{2n-2}} 0 \xrightarrow{d_{2n-3}} \dots \xrightarrow{d_3} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} 0 \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_0} 0. \quad (5)$$

und seine Homologien sind

$$H_k(\mathbb{C}P^\infty) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k \in \mathbb{N}_0 \text{ gerade,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (6)$$

Etwas seltsam verhält es sich mit der Serre spektralen Sequenz für die Homologie von $\mathbb{C}P^\infty$, denn wir ignorieren im Grunde die erste Seite E^1 und beginnen unsere Berechnungen mit E^2 und setzen diese auf alle weiteren Seiten fort. Der Grund dafür ist, dass wir eine sehr einfache aber sehr nützliche Formel haben, für die Gruppen auf der zweiten Seite. Im Fall unserer Faserung $S^1 \rightarrow S^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ können wir die ganze zweite Seite E^2 sofort ausschreiben.

Nach Teil c) von Satz

Literatur

- [Cho06] Timothy Y. Chow. *You Could Have Invented Spectral Sequences*. Cambridge University Press, 2006.
- [CY19] Man Cheung und Yao-Rui. *Examples of Spectral Sequences*. 2019. URL: https://www2.math.upenn.edu/~yeya/spectral_sequence.pdf.
- [Hat01] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2001. URL: <https://pi.math.cornell.edu/hatcher/AT/AT.pdf>.
- [Hat04] Allen Hatcher. *Spectral Sequences*. 2004. URL: <https://pi.math.cornell.edu/hatcher/AT/SSpage.html>.
- [Hue55] William Huebsch. *On the Covering Homotopy Theorem*. Techn. Ber. Princeton University, 1955.
- [Hut11] Michael Hutchings. *Introduction to Spectral Sequences*. 2011. URL: <https://math.berkeley.edu/~hutching/teach/215b-2011/ss.pdf>.
- [McC01] John McCleary. *A User's Guide to Spectral Sequences*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2001.
- [McC13] John McCleary. *A History of Spectral Sequences*. 2013. URL: https://www.algtop.net/wp-content/uploads/2012/02/docs_conf_ren-uir-2013_slides_MeknesTalk2013.pdf.

- [Meu24] Catherine Meusburger. *Vorlesungsskript Algebraische Topologie*. Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg, 2024.
- [Mun00] James Munkres. *Topology: A First Course*. Prentice Hall, 2000.
- [Ser12] Iskander Taimanow Sergei Petrowitsch Nowikow. *Topological Library. Part 3. Spectral Sequences in Topology*. Series on Knots and Everything. 2012.
- [Ser51] Jean-Pierre Serre. *Homologie Singulière des Espaces Fibrés*. 1951.
- [Ste17] Reuben Stern. *Homological Algebra of Spectral Sequences*. 2017. URL: https://scholar.harvard.edu/files/rastern/files/homological_0.pdf.
- [Ver93] Vladimir Vershinin. *Cobordisms and Spectral Sequences*. Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, 1993.