

Spektralsequenzen

Leray–Serre Spektralsequenz

Luciano Melodia

Seminar zur Spektraltheorie

Lehrstuhl für Mathematische Physik

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg

luciano.melodia@fau.de

8. Januar 2025

Zusammenfassung

Die Homologiedefinition $H_n(A_\bullet)$ eines Kettenkomplexes ist für beliebige Homologietheorien als Quotient $\ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1}$ definiert. In Bezug auf Spektralsequenzen gibt es also in einem Kettenkomplex ein Differential, das aus der Gruppe herausgeht, in diesem Fall d_n , und eines, das in die Gruppe hineingeht, in diesem Fall d_{n+1} . Mit dieser Sichtweise können wir verschiedene Homologiegruppen betrachten, je nachdem, welche Differenziale wir verwenden. Eine solche Betrachtung kann nummeriert und in sogenannten Seiten organisiert werden. Eine Spektralsequenz ist wie ein Buch, das aus einer unendlichen Anzahl von Seiten besteht. Jede Seite ist ein zweidimensionales Gitter, das aus Gruppen besteht, die bestimmten Differentialen zugeordnet sind. Wir können eine natürliche Transformation anwenden, um von einer Seite zur nächsten zu gelangen, und im Idealfall stabilisieren sich die Seiten zu einem Seitenlimes im Unendlichen. Die Notation für die Homologien ist $E_{p,q}^r$, wobei r die Seitenzahl aus einer total geordneten Indexmenge (I, \leq) entnommen, $p \in \mathbb{Z}$ der horizontale Index und $q \in \mathbb{Z}$ der vertikale Index ist.

In gewisser Weise verhält sich jede Seite einer Spektralsequenz wie ein 2-dimensionaler Kettenkomplex. Die Gruppen sind durch zwei Parameter statt durch einen indiziert, und für jede Gruppe gibt es genau ein Differenzial, das aus der Gruppe herausführt, und genau ein Differenzial, das in die Gruppe hineinführt. Außerdem gilt immer die Eigenschaft $d^2 = 0$.

Wie sieht nun die Operation aus, die uns von $E_{p,q}^r$ nach $E_{p,q}^{r+1}$ führt? Die Differenziale auf jeder Seite r hängen stark von der Definition der Spektralsequenz ab. Schreiben wir $d_{\text{IN}}, d_{\text{OUT}}$ für die eingehenden und ausgehenden Differenziale von $E_{p,q}^r$, dann definieren wir $E_{p,q}^{r+1} := \ker d_{\text{OUT}} / \operatorname{im} d_{\text{IN}}$.

Die Funktionsweise der Spektralsequenz besteht darin, dass die Gruppen auf der ersten Seite $E_{p,q}^1$ definiert werden. Dann lassen wir die Spektralsequenzmaschine arbeiten. Im Falle der Serre Spektralsequenz stabilisiert sich diese, es gibt also ein R , so dass für alle $r > R$ gilt: $E_{p,q}^r = E_{p,q}^R$. Dies sind die Einträge der stabilisierten Seite $E_{p,q}^\infty$.

Wir beschreiben nun, was wir in unsere Spektralsequenz eintragen müssen und was wir davon als Ergebnis erwarten können, insbesondere am Beispiel der Serre'schen Spektralsequenz.

Inhaltsverzeichnis

1 Homologische Spektralsequenzen

Generell besteht die Möglichkeit, Spektralsequenzen über abelsche Kategorien zu definieren, alternativ oder zusätzlich über R -Moduln. Gegenstand der vorliegenden Arbeit sind Spektralsequenzen über \mathbb{Z} -Moduln, also die Variante für abelsche Gruppen.

Definition 1.1 (Homologische Sequenz). *Sei $0 \leq r_0 \in I$. Eine homologische Sequenz $\{A_{p,q}^r, d_{p,q}^r\}_{r \geq r_0}$ besteht aus*

1. *einer Familie abelscher Gruppen $\{A_{p,q}^r\}_{p,q \in \mathbb{Z}, r \geq r_0}$ und*
2. *einer Familie Gruppenhomomorphismen $\{d_{p,q}^r : A_{p,q}^r \rightarrow A_{p-r,q+r-1}^r\}$ welche Differentiale genannt werden, so dass für alle p, q, r gilt*
 - (a) $d_{p-r,q+r-1}^r \circ d_{p,q}^r = 0$ und
 - (b) $E_{p,q}^{r+1}$ ist die Homologie von A^r und $A_{p,q}^r = \ker d_{p,q}^r / \text{im } d_{p+r,q-r+1}^r$.

Die vorliegende Definition einer homologischen Sequenz verdeutlicht, für welche Untergruppen die Quotienten berechnet werden, und zwar in einer Art Kettenkomplex mit zwei Indizes. Es ist jedoch davon auszugehen, dass sich eine Vereinfachung der Notation bei den weiteren Untersuchungen als hilfreich erweisen wird. Konkret wird ein r festgelegt und alle A^r als ein Objekt A^r betrachtet. Diese neu entstandene Gruppe wird als bigraduierte abelsche Gruppe bezeichnet, während die Differentiale d^r auch kollektiv als d^r oder bigraduierte Differentiale bezeichnet werden.

Definition 1.2 (Bigraduierte abelsche Gruppen). *Eine bigraduierte abelsche Gruppe A ist eine Familie von abelschen Gruppen $A := \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} A_{p,q}$, welche als direkte Summe indexiert über zwei Indizes aus \mathbb{Z} aufgefasst werden kann. Sind zwei bigraduierte abelsche Gruppen $A, B := \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} B_{p,q}$ gegeben, so ist die bigraduierte Abbildung vom Grad (c, d) eine Sammlung von Gruppenhomomorphismen $f := \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} f_{p,q}^{(c,d)}$.*

$$\begin{array}{cccccc}
 A & A_{0,0} & A_{1,0} & A_{0,1} & A_{-1,0} & \dots \\
 \downarrow f & \downarrow f_{0,0} & \downarrow f_{1,0} & \downarrow f_{0,1} & \downarrow f_{-1,0} & \\
 B & B_{0,0} & B_{1,0} & B_{0,1} & B_{-1,0} & \dots
 \end{array}$$

Es sei darauf hingewiesen, dass der direkten Summe keine Bedeutung beigemessen wird, sodass die Reihenfolge der Summation als willkürlich zu betrachten ist. Eine alternative Betrachtungsweise besteht in der Auffassung der einzelnen abelschen Gruppen als Elemente einer Menge. Seien also $A = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} A_{p,q}$ und $B = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} B_{p,q}$ die bigraduierten abelschen Gruppen.

Definition 1.3 (Bigraduierte Abbildung). *Wir nennen $f_{p,q}^{(c,d)} : A_{p,q} \rightarrow B_{p+c,q+d}$ einen Gruppenhomomorphismus vom Bigrad (c, d) . Dann ist eine bigraduierte Abbildung vom Bigrad (c, d) ein Gruppenhomomorphismen $f : A \rightarrow B, \bigoplus_{p,q} a_{p,q} \mapsto \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} f_{p,q}^{(c,d)}(a) = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} b_{p+c,q+d}$.*

f kann als Sammlung von Gruppenhomomorphismen vom Bigrad (c, d) verstanden werden, die elementweise auf der direkten Summe der abelschen Gruppen operieren. Wir können also sinngemäß schreiben $f = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} f_{p,q}^{(c,d)}$.

Beispiel 1.4. *Sei R ein Ring, dann trägt $R[x, x^{-1}, y, y^{-1}]$ die Struktur einer bigraduierten abelschen Gruppe $A_{p,q} = Rx^p y^q$ für alle $p, q \in \mathbb{Z}$.*

Definition 1.5 (Bigradierte Untergruppen und Quotienten). Seien A, B bigradierte abelsche Gruppen. Dann definieren wir

1. $A \subset B: \Leftrightarrow A_{p,q} \subset B_{p,q}$ für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ und
2. falls $A \subset B$, dann ist $B/A := \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} B_{p,q}/A_{p,q}$.

Definition 1.6. Falls $f : A \rightarrow B$ eine bigradierte Abbildung des Grads (c, d) zwischen bigradierten abelschen Gruppen ist, dann definieren wir

- $\ker f := \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} \ker f_{p,q}$ und
- $\operatorname{im} f := \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} \operatorname{im} f_{p-c, q-d}$.

Nun können wir die zuvor definierte homologische Sequenz (Def. ??) zu einer spektralen homologischen Sequenz erheben.

Definition 1.7. Sei $r_0 \geq 0$. Eine homologische Spektralsequenz $\{E^r, d^r\}$ besteht aus

1. einer bigradierten abelschen Gruppe E^r und
2. einer bigradierten Abbildung $d^r : E^r \rightarrow E^r$ vom Grad $(r, r-1)$, welche Differential genannt wird,

so dass für jedes r gilt:

- $d^r \circ d^r = 0$ und
- E^{r+1} ist die Homologie von E^r in Bezug auf die Differentiale d^r , d.h.

$$E^r = \frac{\ker d_r}{\operatorname{im} d_r} = \frac{\bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} d_{p,q}^r}{\bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} \operatorname{im} d_{p,q}^r} = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} \frac{d_{p,q}^r}{\operatorname{im} d_{p,q}^r}. \quad (1)$$

Für jedes r wird E^r das r te Blatt oder die r te Seite von $\{E^r, d^r\}_{r \geq r_0}$ genannt.

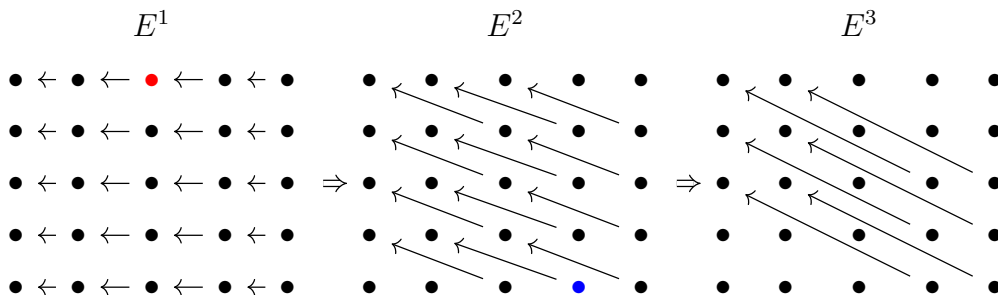
Anmerkung 1.8. Es gibt dieselbe Variante als kohomologische Spektralsequenz, welche auf analoge Weise wie Def. ?? definiert wird, mit der Ausnahme, dass wir nun $E_r := \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} E_r^{p,q}$ für die Kohomologien schreiben und die Differentiale durch $d_r : E_r \rightarrow E_r$ geschrieben werden und vom Grad $(r, -r+1)$ sind. Die homologische Spektralsequenz wird benutzt, um Homologiegruppen zu berechnen, während die kohomologische Spektrale Sequenz benutzt wird um Kohomologien zu berechnen.

Definition 1.9. Sei $\{E^r, d^r\}_{r \geq r_0}$ eine homologische Spektralsequenz, so dass es für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ eine natürliche Zahl $r(p, q) \in \mathbb{N}$ gibt, abhängig von p, q , so dass für alle $r \geq r(p, q)$, $E_{p,q}^r \cong E_{p,q}^{r(p,q)}$. Dann sagen wir, dass die bigradierte abelsche Gruppe

$$E^\infty := \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} E_{p,q}^{r(p,q)} \quad (2)$$

der Limes für $\{E^r, d^r\}_{r \geq r_0}$ ist. Äquivalent sagen wir auch, dass die Spektralsequenz an E^∞ angrenzt.

Anmerkung 1.10. Eine visuelle Darstellung der ersten drei Seiten der Serre spektralen Sequenz mit den Differenzialen (\rightarrow) und den Werte- und Zielbereichen dargestellt durch \bullet . Die \bullet repräsentieren dabei Gruppen, insbesondere Homologiegruppen, oder Homologievektorräume über einem Körper \mathbb{F} . Der rote Punkt \bullet entspricht $E_{0,2}^1$ und der blaue Punkt \bullet entspricht $E_{1,-2}^2$. Diese besondere Spektralsequenz stabilisiert immer.



Definition 1.11. Eine Spektralsequenz heißt Erste-Quadranten-Spektralsequenz, falls für ein $r \in \mathbb{N}$ die Einträge, also die Homologiegruppen auf der r ten Seite ungleich Null sind, genau dann wenn $p \geq 0$ und $q \geq 0$.

2 Filtrierungen und exakte Paare

Angenommen wir haben einen topologischen Raum X und einen guten Teilraum A , wobei das Gütekriterium in diesem Fall besagt, dass es eine Umgebung $U \subset X$ gibt, mit $\bar{A} \subset \mathring{U}$, so dass A ein Deformationsretrakt von U ist. Dies garantiert, dass die relative Homologie $H_n(X, A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$ isomorph ist zur reduzierten Homologie des Quotienten X/A . Falls wir nun die Homologien von A und X/A kennen, so ist der natürliche Weg die lange exakte reduzierte Homologiesequenz zu benutzen, um die Homologien von X zu berechnen:

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_n(A) \rightarrow \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n(X/A) \rightarrow H_{n-1}(A) \rightarrow H_{n-1}(X) \rightarrow \cdots \quad (3)$$

Wir erweitern unsere Situation auf drei ineinanderliegende Teilräume $B \subset A \subset X$, wobei wir wieder annehmen, dass die Teilräume gutartig sind und wir die Homologien von B , A/B und X/A kennen. Dann hätten wir gerne eine Verallgemeinerung der exakten Sequenz, die auch für ein solches Paar ineinanderliegender Räume funktioniert. Allgemeiner können wir eine solche Matroschka von topologischen Räumen als Filtrierung definieren:

Definition 2.1. Eine Filtrierung eines topologischen Raums X ist eine aufsteigende Folge von topologischen Teilräumen $\mathcal{X} : \cdots X_{-2} \subset X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X$.

Was können wir über die Homologien von X sagen, indem wir unser Wissen über die Homologien der X_i aus einer Filtrierung \mathcal{X} und/oder den Quotienten X_i/X_{i-1} verwenden? Falls wir uns auf einen Spezialfall beschränken, nämlich dass X der Totalraum einer Faserung ist, so erhalten wir eine zufriedenstellende Antwort auf diese Frage.

In einer spektralen Sequenz kommt es häufig vor, dass E^r und d^r aus einer anderen Struktur heraus gebildet werden, einem exakten Paar.

Definition 2.2. Ein exaktes Paar ist ein Paar bigraduierter abelscher Gruppen A und E zusammen mit bigraduierten Abbildungen $i : A \rightarrow A$, $j : A \rightarrow E$ und $k : E \rightarrow A$, so dass das folgende Diagramm exakt ist:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & A \\ & \swarrow k & \searrow j \\ & E & \end{array}$$

Exaktheit ist analog definiert, wie im Fall der kurzen exakten Sequenz oder der Kettenkomplexe:

- $\ker i = \operatorname{im} k$,
- $\ker j = \operatorname{im} i$ und
- $\ker k = \operatorname{im} j$.

Haben wir ein solches exaktes Paar gegeben, so gibt es eine natürliche Art und Weise (welche auch eine natürliche Transformation in den entsprechenden Kategorien bildet), wie man das Differential $d = jk : E \rightarrow E$ definiert, so dass $d^2 = jkjk = j(kj)k = 0$. Das Differential wird dann verwendet um ein zweites exaktes Paar zu definieren, das derivierte Paar.

Lemma 2.3. Sei (A, E, i, j, k) ein exaktes Paar, dann gibt es ein zweites exaktes Paar (A', E', i', j', k') , welches deriviertes Paar genannt wird, so dass

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{i'} & A' \\ & \nwarrow k' \quad \nearrow j' & \\ & E & \end{array}$$

definiert durch die folgenden Relationen:

- $A' = \text{im } i$,
- $E' = \ker jk / \text{im } jk = \ker d / \text{im } d$,
- $i' = i|_{A'}$,
- für alle $i(a) \in A' : j'(i(a)) = [j(a)] \in E'$ und
- für alle $[e] \in E' : k'([e]) = k(e)$.

Beweis. Der Beweis gliedert sich in drei Teile. Wir prüfen die Wohldefiniertheit von j' und k' und die Exaktheit des Diagramms.

1. Wohldefiniertheit von j' : Sei $i(a_1) = i(a_2)$ für $a_1, a_2 \in A$. Dann ist $a_1 - a_2 \in \ker i = \text{im } k$ nach Exaktheit, also ist auch $j(a_1 - a_2) = j(a_1) - j(a_2) \in \text{im } jk = \text{im } d$, per Definition des Differentials. Also gilt für die Äquivalenzklassen $[j(a_1)] - [j(a_2)] = 0$, da beide im Bild des Differentials liegen und deren Differenz ein Rand ist. Damit ist $[j(a_1)] = [j(a_2)]$ in E' und j' hängt nicht von der Wahl des Repräsentanten ab.
2. Wohldefiniertheit von k' : Für jedes $e \in \ker d = \ker jk$ gilt $k(e) \in \ker j = \text{im } i = A'$ nach Exaktheit und der Definition $i(A') = A'$. Weiterhin ist $[e_1] = [e_2]$ für $e_1, e_2 \in E$, so gilt $[e_1 - e_2] = [0]$, also ist $e_1 - e_2$ ein Rand und damit $e_1 - e_2 \in \text{im } d = \text{im } jk \subset \text{im } j = \ker k$. Deshalb gilt $k'([e_1] - [e_2]) = k(e_1 - e_2) = 0$ und deshalb $k'([e_1]) = k'([e_2])$.
3. Exaktheit: Sei $a' \in A'$, dann gibt es ein $a \in A$, so dass $i(a) = a'$. Wir erhalten $(j' \circ i')(a') = (j' \circ i|_{i(a)} \circ i)(a) = [(j \circ i|_{i(a)} \circ i)(a)] = [j(a')] = [(j \circ i)(a)] = 0$, denn $ji = 0$. Somit ist $j'i' = 0$, also $\text{im } i' \subset \ker j'$. Für $a' \in \ker j'$ mit $a' = i(a)$, dann ist $j'(a') = j'(i(a)) = [j(a)] = 0$ und somit $j(a) \in \text{im } d$. Also gibt es ein $e \in E$, so dass $j(a) = d(e) = jk(e)$. Deshalb ist $a - k(e) \in \ker j = \text{im } i$. Also gibt es ein $b \in A$, so dass $a - k(e) = i(b)$. Weil $ik = 0$ haben wir $a' = i(a) = i(a) - (ik)(e) = i(a - k(e)) = i^2(b)$. Also ist $a' = i(i(b))$ und damit ist $a' \in \text{im } i'$. Also ist $\ker j' \subset \text{im } i'$ und deshalb $\ker j' = \text{im } i'$. Sei $a' = i(a) \in A'$, dann sehen wir, dass $(k'j')(a') = k'([ja]) = (kj)(a) = 0$. Also ist $\text{im } j' \subset \ker k'$. Sei $[e] \in \ker k'$, dann ist $k(e) = 0$ und aufgrund der Exaktheit $e \in \text{im } j$. Also gibt es ein $a \in A$, so dass $e = j(a)$ aufgrund der Surjektivität von j . Deshalb ist $[e] = [j(a)] = j'(i(a))$. Also haben wir $[e] \in \text{im } j'$ und können schlussfolgern, dass $\ker k' = \text{im } j'$. Sei $[e] \in E'$, dann ist $(i' \circ k')([e]) = i'(k(e)) = (i \circ k)(e) = 0$ aufgrund der Tatsache dass $ik = 0$ und somit auch $\text{im } k' \subset \ker i'$. Sei $a' \in \ker i'$. Dann ist $a' \in \ker i$ und somit $a' \in \text{im } k$. Falls $a' = k(e)$, so ist $a' = k'([e])$. Wir schlussfolgern $\ker i' = \text{im } k'$. Also ist das derivierte Paar ein exaktes Paar.

□

Der Prozess, in dem ein deriviertes Paar von einem exakten Paar erzeugt wird, kann mehrmals iteriert werden, was uns zu einem r -fach derivierten Paar für ein $r \in \mathbb{N}$ führt, welches wir als $(A^r, E^r, i^r, j^r, k^r)$ bezeichnen. Sei $d^r = j^r k^r$, dann entsteht die

homologische Spektralsequenz gerade durch die paare $\{E^r, d^r\}$. Allerdings haben wir auf diese Weise noch keine Graduierung, also nur einfache abelsche Gruppen. Die Graduierung ergibt sich aus der Filtrierung $X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X$, indem wir daraus ein exaktes Paar konstruieren.

Definition 2.4 (Exakte Paare einer Filtrierung). Für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ sei $E_{p,1}^1 = H_{p+q}(X_p, X_{p-1})$ und $A_{p,q}^1 = H_{p+q}(X_p)$. Wir definieren i^1, j^1 und k^1 auf jedem A^1 oder E^1 , in Vereinbarkeit mit der langen exakten Homologiesequenz:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{k_{p,q+1}^1} & H_{p+q}(X_{p-1}) & \xrightarrow{i_{p,q}^1} & H_{p+q}(X_p) & \xrightarrow{j_{p,q}^1} & H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \\ & & & & & & \downarrow k_{p,q}^1 \\ & & & & & & \dots \xleftarrow{i_{p,q-1}^1} H_{p+q-1}(X_{p-1}) \end{array}$$

Die Abbildung

- $i_{p,q}^1 = H_{p+q}(\iota) : A^1 \rightarrow A^1$ wird funktoriell induziert für jedes Paar (X_p, X_{p-1}) durch die Inklusion $\iota : X_{p-1} \hookrightarrow X_p$.
- $j_{p,q}^1 : A^1 \rightarrow E^1$ wird induziert durch die Quotientenabbildung auf den Kettenkomplexen und
- $k_{p,q}^1 : E_{p,q}^1 \rightarrow A_{p,q}^1$ ist durch die verbindenden Homomorphismen definiert:

$$k_{p,q}^1 = \partial : H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \rightarrow H_{p+q-1}(X_{p-1}). \quad (4)$$

Da die lange exakte Homologiesequenz exakt ist, ist auch $(E_{p,q}^1, A_{p+q}^1, i_{p,q}^1, j_{p,q}^1, k_{p,q}^1)$ ein exaktes Paar.

Aus Def. ?? erhalten wir ein exaktes Paar für jedes r , also unendlich viele exakte Paare, wobei diese Paare sowohl abzählbar, als auch überabzählbar unendlich sein können. Definieren wir $d^r = j^r k^r$, wie aus den vorhergehenden Überlegungen, dann können wir aus all diesen exakten paaren eine homologische Spektralsequenz konstruieren.

Satz 2.5 (Homologische Spektralsequenz einer Filtrierung). Gegeben sei ein derivatives exaktes Paar $(E_{p,q}^1, A_{p+q}^1, i_{p,q}^1, j_{p,q}^1, k_{p,q}^1)$ aus einer homologisch exakten Sequenz einer Filtrierung, so gibt es eine homologische Spektralsequenz $\{E^r, d^r\}$ mit $d^r = j^r k^r$.

Beweis. Wir wissen bereits, dass $d^r \circ d^r = 0$ und E^{r+1} ist die Homologie von E^r in Bezug auf d^r . Also reicht es zu zeigen, dass $d^r : E^r \rightarrow E^r$ vom Grad $(-r, r-1)$ ist. Auf der ersten Seite gilt $d^1 = j^1 k^1$ und damit für $(H_{p+1}(X_p, X_{p-1}), d^1)$ auch

$$H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \xrightarrow{k^1} H_{p+q-1}(X_{p-1}) \xrightarrow{j^1} H_{p+q-1}(X_{p-1}, X_{p-2}). \quad (5)$$

Also sehen wir, dass $d^1 : E_{p,q}^1 = H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \rightarrow H_{p+q-1}(X_{p-1}, X_{p-2}) = E_{p-1,q}^1$. Damit ist d^1 vom Grad $(-1, 0)$.

Für den allgemeinen Fall gliedern wir den Beweis in drei Teile:

1. $A_{p,q}^r = i^{r-1}(A_{p,q}^1)$.
2. $k_{p,q}^r : E_{p,q}^r \rightarrow A_{p-1,q}^r$.
3. $j_{p,q}^r : A_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r+1,q+r-1}^r$.

Nun zeigen wir diese Schritte:

1. Das ist ersichtlich aus der Definition von derivierten Paaren.
2. Das ist ersichtlich, da $k^r + 1_{p,q}$ durch $k_{p,q}^r$ auf $\ker d^r / \text{im } d^r$ induziert wird. Wir wissen bereits, dass $k_{p,q}^1 : E_{p,q}^1 \rightarrow A_{p-1,q}^1$, also können wir induktiv auch $k_{p,q}^n : E_{p,q}^{n-1} \rightarrow A_{p-1,q}^{n-1}$ definieren, für beliebiges r .

3. Sei $a \in A_{p,q}^r$, dann gibt es ein $b \in A_{p,q}^1$, so dass $i^{r-1}(b) = a$, weil $A_{p,q}^r = i^{r-1}(A_{p,q}^1)$ nach der ersten Forderung für derivierte Paare. Damit haben wir

$$j^r(a) = j^r(i^{r-1}(b)) = [j^{r-1}(i^{r-2}(b))] = [[j^{r-2}(i^{r-3}(b))]] = \dots = [\dots [j^1(b)] \dots]. \quad (6)$$

Indem wir mehrere Klammern gesetzt haben, d.h. $[[\alpha]]$ für ein $\alpha \in E_{p,1}^{r-1}$, haben wir gekennzeichnet, dass wir zunächst eine Äquivalenzklasse $[\alpha] \in E_{p,q}^r$ betrachten und dann Äquivalenzklassen von Äquivalenzklassen $[[\alpha]] \in E_{p,q}^{r+1}$. Weil $[\dots [j^1(b)] \dots] \in E_{p,q}^{r+k}$ und $j^1(b) \in E_{p,q}^1$, ist die homologische Ordnung dieser beiden Äquivalenzklassen dieselbe, also nur der Grad der derivierten Paarung r unterscheidet sich. Damit ist auch die homologische Ordnung von $j^r(a)$ und $j^1(b)$ gleich, denn $b \in i^{r-1}(A_{p,q}^r) = A_{p-r+1,q+r-1}^1$ und $j^1(b) \in E_{p-r+1,q+r-1}^{r+1}$. Also ist $j_{p,q}^r : A_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r+1,q+r-1}^r$. Durch Verkettung erhalten wir $d^r : E_{p,q}^r \xrightarrow{k^r} A_{p-1,q}^r \xrightarrow{j^r} E_{p-r,q+r-1}^r$.

Damit ist der Grad der bigradierten Abbildung d^r gleich $(-r, r-1)$. \square

3 Presentation der Serre spektralen Sequenz

Die Serre Spektralsequenz ist konstruiert worden um die Homologiegruppen von unterschiedlichen Bestandteilen einer sogenannten Faserung zusammenzubringen. Bei einer Faserung $Z \rightarrow X \rightarrow Y$ sollte man an eine Abbildung $\pi : X \rightarrow Y$ denken, sodass alle Urbilder $\pi^{-1}(y)$ für $y \in Y$ homotopieäquivalent zu Z sind. Bevor wir die Presentation der Serre spektralen Sequenz einführen können, benötigen wir also die Definition einer Faserung, welche die Homotopiehochhebungseigenschaft erfüllt. Diese erlaubt uns durch Anwendung der Faserung aus einfachen, bekannten Räumen, neue komplexere Räume zu konstruieren. Die Faserung ist eine Verallgemeinerung des Vektorbündels, welche auch ohne lineare oder affine Struktur auskommt. Die Homotopie-Hochhebungseigenschaft wird uns anschließend auch kompatible Eigenschaften auf Homologieebene induzieren.

Definition 3.1 (Faserung). *Eine Abbildung $\pi : X \rightarrow B$, welche folgende Homotopiehochhebungseigenschaften für beliebige Räume X erfüllt, heißt Faserung:*

- für jede Homotopie $h : Z \times [0, 1] \rightarrow B$ und
- für jeden Lift $\bar{h}_0 : Z \rightarrow X$ mit $h_0 = h|_{Z \times \{0\}}$ und $h_0 = \pi \circ \bar{h}_0$,

existiert eine Homotopie $\bar{h} : Z \times [0, 1] \rightarrow X$, die h liftet. Daraus resultiert folgendes kommutierende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} Z \times \{0\} & \xrightarrow{\bar{h}_0} & X \\ \downarrow \iota & \nearrow \bar{h} & \uparrow \pi \\ Z \times [0, 1] & \xrightarrow{h} & B. \end{array}$$

Im folgenden betrachten wir ein paar Beispiele von Faserungen, um etwas Intuition zu gewinnen.

Beispiel 3.2. *Beispiele für Faserungen:*

1. Seien X, Y topologische Räume, dann ist die Projektion $\pi : X \times Y \rightarrow Y$ eine Faserung, wobei jede Faser homeomorph ist zu X . Sei $h : Z \times [0, 1] \rightarrow Y$ eine Homotopie mit $\bar{h}_0 : Z \times \{0\} \rightarrow X \times Y$, so dass $(\pi \circ \bar{h}_0)(z) = h_0(z) = h(z, 0)$. Sei $\bar{h} : Z \times [0, 1] \rightarrow X \times Y$ definiert durch $\bar{h}(z, t) = ((p_X \circ \bar{h}_0)(z, t), h(z, t))$, wobei $p_X : X \times Y \rightarrow X$ die Projektion auf die erste Komponente bezeichnet. Wir haben also \bar{h} so gebaut, dass es mit \bar{h}_0 in der X -Komponente und mit h in der Y -Komponente übereinstimmt.
2. Die kanonische Surjektion $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n, x \mapsto [x]$ ist eine Faserung mit Fasern homeomorph zu S^0 .
3. Die kanonische Surjektion $\pi : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n, x \mapsto [x]$ ist eine Faserung mit Fasern homeomorph zu S^1 .

Als gegebene Daten verwenden wir eine Faserung $\pi : X \rightarrow B$, wobei B ein wegzusammenhängender CW-Komplex ist und X ein topologischer Raum. Man beachte, dass wir die Homotopiehochhebungseigenschaften nur für CW-Komplexe fordern wollen, eine solche Faserung nennt man auch Serre-Faserung. Der Raum B wird Basisraum genannt und X heißt Totalraum. Wir können eine Filtrierung von X erzeugen, indem wir das p -Skelett B^p von B betrachten und $X_p := \pi^{-1}(B^p)$ definieren. Aus dieser Filtrierung erhalten wir ein exaktes Paar und von diesem exakten Paar wiederum eine homologische Sequenz. In dieser Konstellation heißt die resultierende Spektralsequenz auch Serre Spektralsequenz.

Wir benötigen zunächst für einen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ in den Basisraum B eine Abbildung $L_\gamma : F_a \rightarrow F_b$ für die Fasern $F_a = \pi^{-1}(a)$ und $F_b = \pi^{-1}(b)$. Diese Abbildung zwischen den Fasern soll stetig sein und die Existenz einer solchen Abbildung wird garantiert, durch die Homotopieäquivalenz der Fasern über jede Wegzusammenhangskomponenten zueinander.

Proposition 3.3. *Falls $\pi : X \rightarrow B$ eine Faserung ist, dann sind die Fasern $F_b = \pi^{-1}(b)$ über jede Wegzusammenhangskomponente von B zueinander homotopieäquivalent.*

Beweis. Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ ein Weg und $F_{\gamma(s)} := \pi^{-1}(\gamma(s))$ eine Faser. Wir definieren eine Homotopie $h : F_{\gamma(0)} \times [0, 1] \rightarrow B$ durch $h(x, t) = \gamma(t)$. Sei $\bar{h}_0 : F_{\gamma(0)} \times \{0\} \hookrightarrow X$ die Inklusion. Dann gilt für $x \in F_{\gamma(0)}, (\pi \circ \bar{h}_0)(x) = \gamma(0) = h_0(x)$. Da $\pi : X \rightarrow B$ eine Faserung ist, existiert eine Abbildung $\bar{h} : F_{\gamma(0)} \times [0, 1] \rightarrow X$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} F_{\gamma(0)} \times \{0\} & \xrightarrow{\bar{h}_0} & X \\ \downarrow \iota & \nearrow \bar{h} & \uparrow \pi \\ F_{\gamma(0)} \times [0, 1] & \xrightarrow{h} & B. \end{array}$$

Insbesondere gilt $h = \pi \bar{h}, \bar{h}(x, t) \in F_{\gamma(t)}$. Falls also $t = 1$ ist, erhalten wir die Abbildung $L_\gamma : F_{\gamma(0)} \rightarrow F_{\gamma(1)}$ definiert durch $L_\gamma(x) = \bar{h}(x, 1)$.

Wir zeigen als nächstes, dass die Abbildung $\gamma \mapsto L_\gamma$ sich gutartig verhält, in Bezug auf Homotopien [Hat01, Prop. 4.61]:

- Falls γ_0 und γ_1 Wege von a nach b sind und $\gamma \simeq_{\{0,1\}} \gamma'$ (d.h. es gibt eine Homotopie $h : \gamma \Rightarrow \gamma'$, welche konstant auf den Basispunkten 0 und 1 ist), dann gilt $L_\gamma \simeq L_{\gamma'}$.
- Falls γ_0 und γ_1 Wege sind, so dass $\gamma_1(0) = \gamma_0(1)$, dann ist $L_{\gamma_0 \star \gamma_1} \simeq L_{\gamma_1} \circ L_{\gamma_0}$.

Wir werden nun die Proposition aus diesen beiden Eigenschaften ableiten. Seien F_a und F_b Fasern und sei γ ein Weg von a nach b . Wir betrachten $L_\gamma : F_a \rightarrow F_b$ und $L_{\bar{\gamma}} : F_b \rightarrow F_a$.

Sei $\alpha \equiv a$ die Konstante Schleife und \bar{h} die Abbildung, welche wir verwenden um $L_\alpha(x)$ zu definieren. Weil $h(x, t) = \alpha(x) = a$ ist für alle x , wissen wir auch dass $\bar{h}(x, t) \in F_a$ für alle x und t . Also ist \bar{h} eine Homotopie, so dass $\bar{h}(x, 0) = \text{Id}_{F_a}$ und $\bar{h}(x, 1) = L_\alpha$. Also ist auch $F_a \simeq L_\alpha$ und ebenso $\text{Id}_{F_b} \simeq L_\beta$.

Mit den Eigenschaften aus [Hat01, Prop. 4.61] erhalten wir

$$L_{\bar{\gamma}} \circ L_\gamma \simeq L_{\gamma \star \bar{\gamma}} \simeq L_\alpha \simeq \text{Id}_{F_a}, \quad (7)$$

$$L_\gamma \circ L_{\bar{\gamma}} \simeq L_{\bar{\gamma} \star \gamma} \simeq L_\beta \simeq \text{Id}_{F_b}. \quad (8)$$

Also ist $F_a \simeq F_b$. □

Diese Proposition führt dazu, dass sich die Konvention etabliert hat, dass wir immer Bezug auf die Fasern einer Faserung eines einzelnen topologischen Raums nehmen, zu dem alle Fasern homotopeäquivalent sind, solange diese eben wegzusammenhängend sind. Es ist üblich eine Faserung als $F \rightarrow X \rightarrow X$ zu schreiben, wobei F der Raum ist, der homotopieäquivalent zu den Fasern ist.

Aus diese Art und Weise können wir unsere Beispiele ?? wie folgt umschreiben:

- $F \rightarrow F \times B \rightarrow B$,
- $S^0 \rightarrow S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$,
- $S^1 \rightarrow S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$.

Für alle drei Beispiele sind die Fasern sogar homeomorph.

Für jeden Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ können wir also eine Abbildung zwischen den Fasern der Anfangs- und Endpunkte definieren $L_\gamma : F_{\gamma(0)} \rightarrow F_{\gamma(1)}$, indem wir die Homotopiehochhebungseigenschaft in Bezug auf $F_{\gamma(0)}$ verwenden.

Um die Faserung für unser Beispiel nutzbar zu machen, müssen wir zeigen, dass das Faserbündel $S^1 \rightarrow S^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ mit $\pi : S^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ der kanonischen Surjektion eine Faserung ist. Wir sehen aufgrund der Konstruktion von $\mathbb{C}P^\infty$, dass der Raum einfach zusammenhängend als CW-Komplex ist.

Sei X ein topologischer Raum und \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X .

Definition 3.4. Eine Verfeinerung ist eine offene Überdeckung \mathcal{V} von X , so dass für alle $V \in \mathcal{V}$ ein $U \in \mathcal{U}$ existiert, mit $V \subset U$.

Wir sagen, dass eine Verfeinerung \mathcal{V} lokal endlich ist, falls für alle offenen Umgebungen U_x von $x \in X$ gilt $U_x \cap V = \emptyset$ für fast alle $V \in \mathcal{V}$.

Definition 3.5. Ein topologischer Raum heißt parakompakt, falls jede offene Überdeckung eine lokal endliche Verfeinerung besitzt.

Anmerkung 3.6. Alle kompakten topologischen Räume sind parakompakt.

Lemma 3.7. Jeder CW-Komplex ist parakompakt.

Beweis. TODO □

Satz 3.8. [Hue55, Theorem 1] Falls $\pi : X \rightarrow B$ ein Faserbündel ist und B parakompakt, dann ist π eine Faserung.

Aus diesem Satz und der Tatsache, dass alle CW-Komplexe parakompakt sind, folgt unser gewünschtes Korollar.

Korollar 3.9. Jedes Faserbündel mit einem CW-Komplex als Basisraum ist eine Faserung.

4 Homologie von $\mathbb{C}P^\infty$

Zunächst möchten wir in diesem Kapitel die Homologien von $\mathbb{C}P^\infty$ mittels zellulärer Homologie berechnen, in dem wir die Struktur eines CW-Komplexes darauf definieren, um sie anschließend mit dem Ergebnis aus der Spektralsequenz vergleichen zu können. Der Raum $\mathbb{C}P^n$ besteht aus den komplexen Geraden durch den Ursprung in $\mathbb{C}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{2n+2}$. Der isometrische Isomorphismus ist gegeben durch die Abbildung $\phi : \mathbb{R}^{2n+2} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$, $(x_1, \dots, x_{2n+2}) \mapsto (x_1 + ix_2, \dots, x_{2n+1} + ix_{2n+2})$. Wir können $\mathbb{C}P^n = S^{2n+1} / \sim$ schreiben, wobei die Äquivalenzrelation gegeben ist durch

$$(x_1, \dots, x_{2n+2}) \sim (R(x_1, x_2), \dots, R(x_{2n+1}, x_{2n+2})) \quad \forall R \in \text{SO}(2). \quad (9)$$

Dies ergibt die folgende Filtrierung in Skelette

$$\emptyset \subset \bullet \subset \bullet \subset \mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^1 \subset \dots \subset \mathbb{C}P^{n-1} \subset \mathbb{C}P^{n-1} \subset \mathbb{C}P^n \subset \mathbb{C}P^n \subset \dots \subset \mathbb{C}P^\infty,$$

wobei $\mathbb{C}P^k$ durch einen pushout aus $\mathbb{C}P^{k-1}$ konstruiert wird, indem $2k$ -Scheiben D^{2k} mittels der kanonischen Surjektion $\pi : S^{2k-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{k-1}$ angeheftet werden:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}P^k & \xleftarrow{[x] \mapsto [(x,0,0)]} & \mathbb{C}P^{k-1} \\ \uparrow c & & \uparrow \pi \\ D^{2k} & \xleftarrow{\iota} & S^{2k-1}. \end{array}$$

$\mathbb{C}P^\infty$ hat dabei Skelette $X_{2k} = X_{2k+1} = \mathbb{C}P^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Damit erhalten wir für den zellulären Kettenkomplex $C_{2k}(\mathbb{C}P^\infty) \cong H_{2k}(X_{2k}, X_{2k-1}) \cong \mathbb{Z}$ für $0 \leq k \leq n$ und $C_k(\mathbb{C}P^n) \cong H_k(X_k, X_{k-1}) = 0$ für $k > 2n$ für k ungerade. Der zelluläre Komplex ist gegeben durch

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d_{2n}} 0 \xrightarrow{d_{2n-1}} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_{2n-2}} 0 \xrightarrow{d_{2n-3}} \dots \xrightarrow{d_3} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} 0 \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_0} 0. \quad (10)$$

und seine Homologien sind

$$H_k(\mathbb{C}P^\infty) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k \in \mathbb{N}_0 \text{ gerade,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (11)$$

Etwas seltsam verhält es sich mit der Serre spektralen Sequenz für die Homologie von $\mathbb{C}P^\infty$, denn wir ignorieren im Grunde die erste Seite E^1 und beginnen unsere Berechnungen mit E^2 und setzen diese auf alle weiteren Seiten fort. Der Grund dafür ist, dass wir eine sehr einfache aber sehr nützliche Formel haben, für die Gruppen auf der zweiten Seite. Im Fall unserer Faserung $S^1 \rightarrow S^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ können wir die ganze zweite Seite E^2 sofort ausschreiben.

Nach Teil c) von Satz

Literatur

- [Cho06] Timothy Y. Chow. *You Could Have Invented Spectral Sequences*. Cambridge University Press, 2006.
- [CY19] Man Cheung und Yao-Rui. *Examples of Spectral Sequences*. 2019. URL: https://www2.math.upenn.edu/~yeya/spectral_sequence.pdf.

- [Hat01] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2001. URL: <https://pi.math.cornell.edu/hatcher/AT/AT.pdf>.
- [Hat04] Allen Hatcher. *Spectral Sequences*. 2004. URL: <https://pi.math.cornell.edu/hatcher/AT/SSpage.html>.
- [Hue55] William Huebsch. *On the Covering Homotopy Theorem*. Techn. Ber. Princeton University, 1955.
- [Hut11] Michael Hutchings. *Introduction to Spectral Sequences*. 2011. URL: <https://math.berkeley.edu/~hutching/teach/215b-2011/ss.pdf>.
- [McC01] John McCleary. *A User's Guide to Spectral Sequences*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2001.
- [McC13] John McCleary. *A History of Spectral Sequences*. 2013. URL: https://www.algtop.net/wp-content/uploads/2012/02/docs_conf_ren-uir-2013_slides_MeknesTalk2013.pdf.
- [Meu24] Catherine Meusburger. *Vorlesungsskript Algebraische Topologie*. Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg, 2024.
- [Mun00] James Munkres. *Topology: A First Course*. Prentice Hall, 2000.
- [Ser12] Iskander Taimanow Sergei Petrowitsch Nowikow. *Topological Library. Part 3. Spectral Sequences in Topology*. Series on Knots and Everything. 2012.
- [Ser51] Jean-Pierre Serre. *Homologie Singulière des Espaces Fibrés*. 1951.
- [Ste17] Reuben Stern. *Homological Algebra of Spectral Sequences*. 2017. URL: https://scholar.harvard.edu/files/rastern/files/homological_0.pdf.
- [Ver93] Vladimir Vershinin. *Cobordisms and Spectral Sequences*. Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, 1993.