

Konstruktion des Jones Polynom aus $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

Luciano Melodia

LUCIANO.MELODIA@FAU.DE

Seminar Knoten und Schleifen

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg

Cauerstraße 11, 91052 Erlangen

30. Januar 2026

Zusammenfassung

Das Rechnen mit Diagrammen für monoidale Kategorien ist nicht nur eine angenehme Methode, um komplizierte Rechnungen durchzuführen, sondern verbindet Algebra direkt mit der Geometrie und Topologie. Unser Beispiel wird die Knotentheorie sein. Im neunzehnten Jahrhundert war die Knotentheorie ein brandaktuelles Thema in der Mathematik, wurde jedoch dann nicht weiter vorangetrieben, bis sie in den neunziger Jahren eine Wiedergeburt erlebte. Der Grund für diese Renaissance war die Entdeckung der Darstellung bestimmter Algebren aus der mathematischen Physik, welche zu Knoteninvarianten führten. Dies wurde formalisiert und in der Sprache der Schleifenkategorien mathematisch umgesetzt.

Inhaltsverzeichnis

1	Grundbegriffe	1
2	Knoten-, Links- und Schleifeninvarianten	7
3	Tangle- und Ribbon-Kategorie	10
4	Das Jones Polynom	15

1 Grundbegriffe

Ein zentrales Ziel dieses Vortrags ist, Linkinvarianten – insbesondere das Jones-Polynom – aus rein algebraischen Daten systematisch herzuleiten. Bereits auf der Ebene von Vektorräumen treten dabei zwei grundlegende Operationen auf: das Tensorprodukt von Objekten und Morphismen sowie die Auszeichnung eines Einheitsobjekts (etwa des Grundkörpers). In konkreten Modellen – Darstellungen von Quantengruppen, Temperley–Lieb-Algebren, geflochtene Vektorräume – ist das Rechnen mit Tensorprodukten allgegenwärtig, aber stets an die jeweilige Kategorie gebunden. Monoidale Kategorien abstrahieren genau diese Situation: Sie erfassen ein Tensorprodukt \otimes , ein Einheitsobjekt e und die zugehörigen Strukturisomorphismen (Assoziator, Links- und Rechtsunitäten) so, dass alle Kohärenzbedingungen präzise formuliert und kontrolliert werden können. Begriffe wie **geflochten**,

pivotal, Ribbon- oder Tangle-Kategorie werden dadurch zu wohldefinierten strukturellen Eigenschaften, unabhängig von einem konkreten Modell. Für den weiteren Verlauf ist diese Abstraktion aus zwei Gründen zentral: Zum einen erlaubt sie, Linkdiagramme als Morphismen in einer universellen Tangle- bzw. Ribbon-Kategorie zu interpretieren. Zum anderen entstehen Linkinvarianten genau dadurch, dass man monoidale Funktoren aus diesen Kategorien in eine algebraische Zielkategorie – etwa die Kategorie endlichdimensionaler Darstellungen von $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ – betrachtet.

Wir erinnern uns kurz an die Definition einer Kategorie.

Definition 1.1. Eine **Kategorie** \mathcal{C} besteht aus

- einer Klasse $\text{Ob}(\mathcal{C})$ von **Objekten**,
- für je zwei Objekte $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ einer Menge $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ von **Morphismen** $f : X \rightarrow Y$,
- für jedes Objekt X einem ausgezeichneten Morphismus $1_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$, dem **Identitätsmorphismus**,
- einer **Komposition** $\circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$, $(g, f) \mapsto g \circ f$,

so dass für alle passend definierten Morphismen f, g, h gilt:

1. **Assoziativität:** $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$,
2. **Einheitsaxiom:** $1_Y \circ f = f = f \circ 1_X$ für jeden Morphismus $f : X \rightarrow Y$.

Seien \mathcal{C} und \mathcal{D} Kategorien. Ein **Funktor** $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ besteht aus

- einer Zuordnung $X \mapsto F(X)$ von Objekten $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ zu Objekten $F(X) \in \text{Ob}(\mathcal{D})$,
- Zuordnungen $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$, $f \mapsto F(f)$, für alle Objekte X, Y ,

so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. **Erhalt von Identitäten:** $F(1_X) = 1_{F(X)}$ für alle Objekte X ,
2. **Erhalt der Komposition:** $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ für kompatible Morphismen f, g in \mathcal{C} .

Und nun versehen wir diese mit mehr Struktur.

Definition 1.2. Eine **monoidale Kategorie** ist ein Sextupel $(\mathcal{C}, \otimes, e, a, l, r)$, bestehend aus

- einer Kategorie \mathcal{C} ,
- einem Funktor $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, dem **Tensorprodukt**,
- einem Objekt $e \in \mathcal{C}$, der **Tensor-Einheit**,
- einem natürlichen Isomorphismus $a : \otimes(\otimes \times 1_{\mathcal{C}}) \Rightarrow \otimes(1_{\mathcal{C}} \times \otimes)$, dem **Assoziator**,
- natürlichen Isomorphismen $r : \otimes(1_{\mathcal{C}} \times e) \Rightarrow 1_{\mathcal{C}}$ und $l : \otimes(e \times 1_{\mathcal{C}}) \Rightarrow 1_{\mathcal{C}}$, den **Rechts- und Linksunitäten**,

so dass die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

1. **Pentagon-Axiom:** Für alle Objekte $U, V, W, X \in \mathcal{C}$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 ((U \otimes V) \otimes W) \otimes X & \xrightarrow{a_{U \otimes V, W, X}} & (U \otimes V) \otimes (W \otimes X) & \xrightarrow{a_{U, V, W \otimes X}} & U \otimes (V \otimes (W \otimes X)) \\
 \downarrow a_{U, V, W \otimes 1_X} & & & & \nearrow 1_U \otimes a_{V, W, X} \\
 (U \otimes (V \otimes W)) \otimes X & \xrightarrow{a_{U, V \otimes W, X}} & U \otimes ((V \otimes W) \otimes X).
 \end{array}$$

2. **Dreiecksaxiom:** Für alle Objekte $V, W \in \mathcal{C}$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 (V \otimes e) \otimes W & \xrightarrow{a_{V, e, W}} & V \otimes (e \otimes W) \\
 \searrow r_V \otimes 1_W & & \swarrow 1_V \otimes l_W \\
 & V \otimes W. &
 \end{array}$$

Die monoidale Kategorie heißt **strikt**, falls a , r und l **identitäre natürliche Transformationen** sind, das bedeutet, dass die natürliche Transformation für jedes Objekt gerade die Identität ist.

Monoidale Funktoren sind genau jene Funktoren, die das gesamte Gefüge einer Tensorstruktur bewahren. Sie transportieren Einheitsobjekt und Tensorprodukt mitsamt kanonischen Isomorphismen so, dass alle Rechnungen mit \otimes in der Zielkategorie nahtlos mit denen in der Ausgangskategorie übereinstimmen. Monoidale natürliche Transformationen ermöglichen es anschließend, solche strukturerhaltenden Funktoren miteinander zu vergleichen.

Definition 1.3. Seien \mathcal{C} und \mathcal{D} Kategorien und $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor.

1. F heißt **treu**, wenn für alle Objekte $X, Y \in \mathcal{C}$ die induzierte Abbildung $F_{X,Y} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$, $f \mapsto F(f)$, injektiv ist.
2. F heißt **voll**, wenn für alle Objekte $X, Y \in \mathcal{C}$ die Abbildung $F_{X,Y}$ surjektiv ist.
3. F heißt **volltreu**, wenn F voll und treu ist, d. h. wenn für alle Objekte $X, Y \in \mathcal{C}$ die Abbildung $F_{X,Y}$ bijektiv ist.

Definition 1.4. Seien \mathcal{C} und \mathcal{D} Kategorien.

1. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ heißt eine **Äquivalenz von Kategorien**, wenn es einen Funktor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ sowie natürliche Isomorphismen $\eta : 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$, $\varepsilon : FG \Rightarrow 1_{\mathcal{D}}$ gibt. In diesem Fall nennt man G eine **Quasiinverse** zu F und sagt, \mathcal{C} und \mathcal{D} seien **äquivalent**.
2. Äquivalent dazu ist $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ genau dann eine **Äquivalenz von Kategorien**, wenn F **volltreu** ist und **wesentlich surjektiv auf Objekten**, d. h. jedes Objekt von \mathcal{D} ist isomorph zu einem Objekt in der Bildkategorie von F .

Definition 1.5. Seien $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, e_{\mathcal{C}}, a^{\mathcal{C}}, r^{\mathcal{C}})$ und $(\mathcal{D}, \otimes_{\mathcal{D}}, e_{\mathcal{D}}, a^{\mathcal{D}}, l^{\mathcal{D}}, r^{\mathcal{D}})$ monoidale Kategorien.

1. Ein **monoidal Funktor** von \mathcal{C} nach \mathcal{D} ist ein Tripel $(F, \varphi^e, \varphi^{\otimes})$, bestehend aus
 - einem Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$,
 - einem Isomorphismus $\varphi^e : e_{\mathcal{D}} \rightarrow F(e_{\mathcal{C}})$ in \mathcal{D} ,
 - einem natürlichen Isomorphismus $\varphi^{\otimes} : \otimes_{\mathcal{D}}(F \times F) \Rightarrow F \otimes_{\mathcal{C}}$,
der die folgenden Axiome erfüllt:
 - (a) **Verträglichkeit mit dem Assoziator:** Für alle Objekte U, V, W von \mathcal{C} kommutiert

$$\begin{array}{ccc}
(F(U) \otimes F(V)) \otimes F(W) & \xrightarrow{a_{F(U), F(V), F(W)}^{\mathcal{D}}} & F(U) \otimes (F(V) \otimes F(W)) \\
\downarrow \varphi_{U,V}^{\otimes} \otimes 1_{F(W)} & & \downarrow 1_U \otimes \varphi_{V,W}^{\otimes} \\
F(U \otimes V) \otimes F(W) & & F(U) \otimes F(V \otimes W) \\
\downarrow \varphi_{U \otimes V, W}^{\otimes} & & \downarrow \varphi_{U, V \otimes W}^{\otimes} \\
F((U \otimes V) \otimes W) & \xrightarrow{F(a_{U,V,W}^{\mathcal{C}})} & F(U \otimes (V \otimes W)).
\end{array}$$

- (b) **Verträglichkeit mit den Rechts- und Linksunitäten:** Für alle Objekte V von \mathcal{C} kommutieren die Diagramme

$$\begin{array}{ccc}
e_{\mathcal{D}} \otimes F(V) & \xrightarrow{\varphi^e \otimes 1_{F(V)}} & F(e_{\mathcal{C}}) \otimes F(V) & F(V) \otimes e_{\mathcal{D}} & \xrightarrow{1_{F(V)} \otimes \varphi^e} & F(V) \otimes F(e_{\mathcal{C}}) \\
\downarrow l_{F(V)}^{\mathcal{D}} & & \downarrow \varphi_{e_{\mathcal{C}}, V}^{\otimes} & \downarrow r_{F(V)}^{\mathcal{D}} & & \downarrow \varphi_{V, e_{\mathcal{C}}}^{\otimes} \\
F(V) & \xleftarrow{F(l_V^{\mathcal{C}})} & F(e_{\mathcal{C}} \otimes V) & F(V) & \xleftarrow{F(r_V^{\mathcal{C}})} & F(V \otimes e_{\mathcal{C}}).
\end{array}$$

Ein monoidal Funktor $(F, \varphi^e, \varphi^\otimes)$ heißt **strikt**, falls $\varphi^e = 1_{e_D}$ und φ^\otimes die identitäre natürliche Transformation ist. Er heißt **monoidale Äquivalenz**, falls $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ eine Äquivalenz von Kategorien ist; in diesem Fall heißen \mathcal{C} und \mathcal{D} **monoidal äquivalent**.

2. Seien $(F, \varphi^e, \varphi^\otimes)$ und $(G, \phi^e, \phi^\otimes): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ monoidale Funktoren. Eine **monoidale natürliche Transformation** von F nach G ist eine natürliche Transformation $\eta: F \Rightarrow G$, s.d.:
 - (a) **Verträglichkeit mit φ^e und ϕ^e :**

$$\begin{array}{ccc} F(e_C) & \xrightarrow{\eta_{e_C}} & G(e_C) \\ \varphi^e \swarrow & & \searrow \phi^e \\ e_D & & \end{array} .$$

- (b) **Verträglichkeit mit φ^\otimes und ϕ^\otimes :** Für alle Objekte V, W von \mathcal{C} auch nachfolgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} F(V) \otimes F(W) & \xrightarrow{\eta_V \otimes \eta_W} & G(V) \otimes G(W) \\ \varphi_{V,W}^\otimes \downarrow & & \downarrow \phi_{V,W}^\otimes \\ F(V \otimes W) & \xrightarrow{\eta_{V \otimes W}} & G(V \otimes W). \end{array}$$

Eine monoidale natürliche Transformation $\eta: F \Rightarrow G$ heißt **monoidaler Isomorphismus**, falls für alle Objekte V von \mathcal{C} der Morphismus $\eta_V: F(V) \rightarrow G(V)$ ein Isomorphismus ist.

In unserem Kontext modelliert eine Verzopfung die topologische Operation des Überkreuzens zweier Stränge und kodiert damit algebraisch die Wirkung der Zopfgruppe auf Tensorprodukten von Objekten. Die Hexagon-Axiome stellen sicher, dass diese Überkreuzungen mit der monoidalen Struktur verträglich sind, d. h. dass verschiedene Arten, mehrere Stränge nacheinander zu vertauschen, zu demselben Morphismus führen. Dies ist wesentlich für die Konstruktion von Knoten- und Linkinvarianten aus Tangle- bzw. Ribbon-Kategorien, da dort Kreuzungen in Diagrammen durch die Verzopfungsmorphismen realisiert werden.

Definition 1.6. Sei $(\mathcal{C}, \otimes, e, a, l, r)$ eine monoidale Kategorie.

1. Eine **Verzopfung** auf \mathcal{C} ist ein natürlicher Isomorphismus $c: \otimes \Rightarrow \otimes^{\text{op}}$, der das **Hexagon-Axiom** erfüllt, d. h. für alle Objekte U, V, W in \mathcal{C} kommutieren die folgenden Diagramme:

$$\begin{array}{ccccc} (U \otimes V) \otimes W & \xrightarrow{c_{U,V} \otimes 1_W} & (V \otimes U) \otimes W & \xrightarrow{a_{V,U,W}} & V \otimes (U \otimes W) \\ a_{U,V,W} \downarrow & & & & \downarrow 1_V \otimes c_{U,W} \\ U \otimes (V \otimes W) & \xrightarrow{c_{U,V \otimes W}} & (V \otimes W) \otimes U & \xrightarrow{a_{V,W,U}} & V \otimes (W \otimes U), \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} U \otimes (V \otimes W) & \xrightarrow{1_U \otimes c_{V,W}} & U \otimes (W \otimes V) & \xrightarrow{a_{U,W,V}^{-1}} & (U \otimes W) \otimes V \\ a_{U,V,W}^{-1} \downarrow & & & & \downarrow c_{U,W} \otimes 1_V \\ (U \otimes V) \otimes W & \xrightarrow{c_{U \otimes V, W}} & W \otimes (U \otimes V) & \xrightarrow{a_{W,U,V}^{-1}} & (W \otimes U) \otimes V. \end{array}$$

2. Eine Verzopfung heißt **symmetrisch**, wenn $c_{W,V} = c_{V,W}^{-1}$ für alle Objekte V, W in \mathcal{C} .
3. Eine monoidale Kategorie mit einer Verzopfung heißt **verzopft monoidale Kategorie**. Ist die Verzopfung symmetrisch, so heißt sie **symmetrisch monoidale Kategorie**.

Definition 1.7. Seien \mathcal{C} und \mathcal{D} verzopft monoidale Kategorien.

1. Ein monoidal Funktor $(F, \phi^e, \phi^\otimes): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ heißt **verzopft monoidal Funktor**, wenn für alle Objekte V, W in \mathcal{C} das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(V) \otimes F(W) & \xrightarrow{c_{F(V), F(W)}^{\mathcal{D}}} & F(W) \otimes F(V) \\ \phi_{V,W}^\otimes \downarrow & & \downarrow \phi_{W,V}^\otimes \\ F(V \otimes W) & \xrightarrow{F(c_{V,W}^{\mathcal{C}})} & F(W \otimes V) \end{array}$$

kommutiert, wobei $c^{\mathcal{C}}$ bzw. $c^{\mathcal{D}}$ die Verzopfung in \mathcal{C} bzw. \mathcal{D} bezeichnet.

Sind \mathcal{C} und \mathcal{D} symmetrische monoidale Kategorien, so nennt man einen verzopft monoidalen Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ auch **symmetrisch monoidalen Funktor**.

2. Seien $(F, \phi^e, \phi^\otimes)$ und $(G, \psi^e, \psi^\otimes)$ verzopft monoidale Funktoren $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$. Eine **verzopft natürliche Transformation** von F nach G ist eine monoidale natürliche Transformation $\eta: F \Rightarrow G$, die mit den Verzopfungsmorphismen verträglich ist, d. h. für alle Objekte V, W in \mathcal{C} kommt.

$$\begin{array}{ccc} F(V) \otimes F(W) & \xrightarrow{c_{F(V), F(W)}^{\mathcal{D}}} & F(W) \otimes F(V) \\ \eta_V \otimes \eta_W \downarrow & & \downarrow \eta_W \otimes \eta_V \\ G(V) \otimes G(W) & \xrightarrow{c_{G(V), G(W)}^{\mathcal{D}}} & G(W) \otimes G(V). \end{array}$$

Eine **verzopft natürliche Isomorphie** ist eine verzopft natürliche Transformation, deren Komponenten η_V alle Isomorphismen sind.

Yang–Baxter-Operatoren kodieren in unserem Kontext die Wirkung von Kreuzungen auf dem Tensorprodukt eines einzelnen Objekts V in einer monoidalen Kategorie. Aus einem solchen Operator erhält man Darstellungen der Zopfgruppe, deren Invarianten sich zu Link- und Knoteninvarianten fortsetzen lassen. Die folgende Definition isoliert genau die algebraische Bedingung, die der dritten Reidemeister-Bewegung entspricht.

Definition 1.8. Sei $(\mathcal{C}, \otimes, e, a, l, r)$ eine monoidale Kategorie.

1. Ein **Yang–Baxter-Operator** in \mathcal{C} ist ein Objekt $V \in \mathcal{C}$ zusammen mit einem Isomorphismus $\sigma: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$, so dass das folgende Dodekagon-Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} (V \otimes V) \otimes V & \xleftarrow{\sigma \otimes 1_V} & (V \otimes V) \otimes V \xrightarrow{a_{V,V,V}} V \otimes (V \otimes V) \\ a_{V,V,V} \downarrow & & \downarrow 1_V \otimes \sigma \\ V \otimes (V \otimes V) & & V \otimes (V \otimes V) \\ 1_V \otimes \sigma \downarrow & & \downarrow a_{V,V,V}^{-1} \\ V \otimes (V \otimes V) & & (V \otimes V) \otimes V \\ a_{V,V,V}^{-1} \downarrow & & \downarrow \sigma \otimes 1_V \\ (V \otimes V) \otimes V & & (V \otimes V) \otimes V \\ \sigma \otimes 1_V \downarrow & & \downarrow a_{V,V,V} \\ (V \otimes V) \otimes V & \xrightarrow{a_{V,V,V}} & V \otimes (V \otimes V) \xleftarrow{1_V \otimes \sigma} V \otimes (V \otimes V) \end{array}$$

2. Ein **Morphismus von Yang–Baxter-Operatoren** in \mathcal{C} von (V, σ) nach (W, τ) ist ein Morphismus $f : V \rightarrow W$ in \mathcal{C} mit $\tau \circ (f \otimes f) = (f \otimes f) \circ \sigma$.

Yang–Baxter-Operatoren in \mathcal{C} und ihre Morphismen bilden eine Kategorie, die üblicherweise mit $\text{YB}(\mathcal{C})$ bezeichnet wird.

In diesem Abschnitt betrachten wir monoidale Kategorien mit zusätzlicher Struktur, nämlich mit linken und rechten Dualobjekten. Diese Duale spielen in den folgenden Abschnitten eine wichtige Rolle bei der Konstruktion von Knoteninvarianten und führen zu einem Begriff der Spur in einer monoidalen Kategorie. Sie verallgemeinern den Dualraum V^* eines endlichdimensionalen Vektorraums V über einem Körper \mathbb{F} und die damit verbundenen linearen Abbildungen

$$\text{ev} : V^* \otimes V \rightarrow \mathbb{F}, \quad \alpha \otimes v \mapsto \alpha(v), \quad \text{coev} : \mathbb{F} \rightarrow V \otimes V^*, \quad \lambda \mapsto \lambda \sum_{i=1}^n v_i \otimes \alpha^i,$$

wobei (v_1, \dots, v_n) eine Basis von V und $(\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ die zugehörige Dualbasis von V^* ist. Für einen endlichdimensionalen Vektorraum V ist es lediglich Konvention, ob man die Evaluation als Abbildung $V^* \otimes V \rightarrow \mathbb{F}$ oder als $V \otimes V^* \rightarrow \mathbb{F}$ definiert, und entsprechend für die Coevaluation. Diese Varianten sind durch die Vertauschung der Tensorfaktoren verknüpft. In einer allgemeinen monoidalen Kategorie gibt es jedoch im Allgemeinen keine ausgezeichnete Struktur, die die Tensorfaktoren vertauscht. Daher ist es wichtig, bei den Definitionen zwischen linken und rechten Dualen zu unterscheiden.

Definition 1.9. Sei $(\mathcal{C}, \otimes, e, a, l, r)$ eine monoidale Kategorie.

1. Ein Objekt X in \mathcal{C} heißt **rechts dualisierbar**, wenn es ein Objekt X^* , das **rechte Dual** von X , und Morphismen

$$\text{ev}_X^R : X^* \otimes X \longrightarrow e, \quad \text{coev}_X^R : e \longrightarrow X \otimes X^*$$

gibt, so dass die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{l_X^{-1}} & e \otimes X \xrightarrow{\text{coev}_X^R \otimes 1_X} (X \otimes X^*) \otimes X \\ \downarrow 1_X & & \downarrow a_{X, X^*, X} \\ X & \xleftarrow{r_X} & X \otimes e \xleftarrow{1_X \otimes \text{ev}_X^R} X \otimes (X^* \otimes X), \end{array} \tag{14}$$

$$\begin{array}{ccc} X^* & \xrightarrow{r_{X^*}^{-1}} & X^* \otimes e \xrightarrow{1_{X^*} \otimes \text{coev}_X^R} X^* \otimes (X \otimes X^*) \\ \downarrow 1_{X^*} & & \downarrow a_{X^*, X, X^*}^{-1} \\ X^* & \xleftarrow{l_{X^*}} & e \otimes X^* \xleftarrow{\text{ev}_X^R \otimes 1_{X^*}} (X^* \otimes X) \otimes X^*. \end{array}$$

2. Ein Objekt X in \mathcal{C} heißt **links dualisierbar**, wenn es ein Objekt *X , das **linke Dual** von X , und Morphismen

$$\text{ev}_X^L : X \otimes {}^*X \longrightarrow e, \quad \text{coev}_X^L : e \longrightarrow {}^*X \otimes X$$

gibt, so dass die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{r_X^{-1}} & X \otimes e \xrightarrow{1_X \otimes \text{coev}_X^L} X \otimes ({}^*X \otimes X) \\ \downarrow 1_X & & \downarrow a_{X, {}^*X, X}^{-1} \\ X & \xleftarrow{l_X} & e \otimes X \xleftarrow{\text{ev}_X^L \otimes 1_X} (X \otimes {}^*X) \otimes X, \end{array} \tag{1}$$

$$\begin{array}{ccc}
{}^*X & \xrightarrow{l_{*X}^{-1}} & e \otimes {}^*X \xrightarrow{\text{coev}_X^L \otimes 1_{*X}} (*X \otimes X) \otimes {}^*X \\
\downarrow 1_{*X} & & \downarrow a_{X,X,*X} \\
{}^*X & \xleftarrow{r_{*X}} & {}^*X \otimes e \xleftarrow{1_{*X} \otimes \text{ev}_X^L} {}^*X \otimes (X \otimes {}^*X).
\end{array} \tag{2}$$

\mathcal{C} heißt **rechtsstarr**, wenn jedes Objekt von \mathcal{C} rechts dualisierbar ist, und **linksstarr**, wenn jedes Objekt links dualisierbar ist. Sie heißt **starr**, wenn sie sowohl rechts- als auch linksstarr ist.

Aus dieser Definition folgt, dass ein Objekt Y in \mathcal{C} genau dann ein rechtes Dual eines Objekts X ist, wenn X ein linkes Dual von Y ist. Ferner gehören die Evaluation und die Coevaluation wesentlich zur Daten eines Duals. Rechtes und linkes Dual eines Objekts können als Objekte zusammenfallen, sich aber in ihren Evaluations- und Coevaluationsmorphismen unterscheiden.

Eine pivotale Struktur stellt sicher, dass Links- und Rechtsdualitäten kanonisch zusammenfallen und man in \mathcal{C} einen wohldefinierten Begriff einer Spur erhält. Dies ist zentral für die Konstruktion von Knoteninvarianten aus der Tangle-Kategorie, da die diagrammatische Invarianz von Morphismenabschlüssen genau diese Kompatibilität erfordert. Insbesondere bildet eine pivotal (oder sogar sphärische) Struktur die algebraische Grundlage für die **Reshetikhin–Turaev-Konstruktion**, aus der etwa das Jones-Polynom entsteht.

Definition 1.10. Sei \mathcal{C} eine **rechtsstarre monoidale Kategorie**. Eine **pivale Struktur** auf \mathcal{C} ist ein monoidal natürlicher Isomorphismus $\omega : 1_{\mathcal{C}} \longrightarrow **$. Eine **pivale Kategorie** ist ein Paar (\mathcal{C}, ω) , bestehend aus einer rechtsstarren Kategorie \mathcal{C} und einer pivalen Struktur ω .

Wir untersuchen nun die Wechselwirkung von Verzopfung und Dualität in einer verzopft monoidalen Kategorie. In einer verzopf pivalen Kategorie lassen sich Evaluations- und Coevaluationsmorphismen in Diagrammen über und unter Kreuzungen hindurchschieben; dabei bleibt ein grundlegendes Muster übrig, das eine Verzopfung mit einer Evaluation und einer Coevaluation kombiniert und sich nicht weiter vereinfachen lässt. Dieser Morphismus heißt **Twist** und spielt eine zentrale Rolle bei der Beschreibung von gerahmten Links und Ribbon-Kategorien.

Definition 1.11. Sei \mathcal{C} eine verzopft pivale Kategorie.

1. Für jedes Objekt X in \mathcal{C} ist der **Twist auf X** der Morphismus

$$\theta_X = r_X \circ (1_X \otimes \text{ev}_X^L) \circ a_{X,X,X^*} \circ (c_{X,X} \otimes 1_{X^*}) \circ a_{X,X,X^*}^{-1} \circ (1_X \otimes \text{coev}_X^R) \circ r_X^{-1},$$

wobei c die Verzopfung, a der Assoziator, r der rechte Unit, $\text{ev}_X^L : X \otimes X^* \rightarrow e$ die Evaluation des linken Duals und $\text{coev}_X^R : e \rightarrow X \otimes X^*$ die Coevaluation des rechten Duals von X ist.

2. Die Kategorie \mathcal{C} heißt **Schleifenkategorie**, wenn alle Twists selbstdual sind, d. h. für alle Objekte X in \mathcal{C} gilt $\theta_{X^*}^* = \theta_X : X^* \longrightarrow X^*$.

Offensichtlich existiert der Twistmorphismus θ_X in vier Varianten, die man erhält, indem man sein Diagramm an einer vertikalen Achse spiegelt und in Twist und Spiegelbild Über- und Unterkreuzungen vertauscht. Die erste dieser Operationen liefert sein Inverses θ_X^{-1} , während die beiden Varianten aus dem Spiegelbild der duale Twist $\theta_{X^*}^*$ und dessen Inversen sind. Diese fallen genau dann mit θ_X bzw. θ_X^{-1} zusammen, wenn \mathcal{C} eine Ribbon-Kategorie ist. Der Twist definiert einen natürlichen Isomorphismus $\theta : \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}}$ definiert, der im Allgemeinen jedoch nicht monoidal ist.

2 Knoten-, Links- und Schleifeninvarianten

Das Ziel der Knotentheorie ist es, wie wir bereits in den vorangegangenen Vorträgen gesehen haben, einfache und handhabbare Kriterien zu finden, mit denen wir

1. überprüfen können, ob zwei Knoten ineinander überführt werden können, ohne diese zu zerschneiden, und
2. ob ein Knoten entwirrt werden kann, ohne dass man ihn zerschneidet.

Definition 2.1.

1. Ein **orientierter Link** ist eine glatte Einbettung $L : \coprod_n S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Ein **orientierter Knoten** ist ein orientierter Link $L : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$.
2. Ein **Link** ist eine Äquivalenzklasse von orientierten Links bezüglich der Äquivalenzrelation, die durch Orientierungsumkehr auf jeder Kopie von S^1 definiert ist.
3. Zwei orientierte Links L, L' heißen **umgebungsisotop**, wenn es eine glatte Abbildung $F : [0, 1] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gibt, so dass $F_t = F(t, -) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ für alle $t \in [0, 1]$ ein Diffeomorphismus ist, $F_0 = 1$ gilt und $F_1 \circ L = L'$ ist.
4. Zwei Links heißen **umgebungsisotop**, wenn sie umgebungsisotop sind, bis auf Orientierungs-umkehr auf jeder Kopie von S^1 .

Hier bezeichnet $\coprod_n S^1$ die disjunkte Vereinigung von n Kopien von S^1 , versehen mit der Finaltopologie und der dadurch induzierten Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit. Die Orientierungsumkehr auf S^1 ist durch die Abbildung $o : S^1 \rightarrow S^1$, $z \mapsto z^{-1}$ gegeben. Eine Einbettung einer glatten Mannigfaltigkeit M in eine glatte Mannigfaltigkeit N ist eine injektive glatte Abbildung $f : M \rightarrow N$, die ein Homöomorphismus auf ihr Bild mit der Teilraumtopologie aus N ist und deren Tangentialabbildung $T_m f : T_m M \rightarrow T_{f(m)} N$ für alle $m \in M$ injektiv ist. Der Begriff der Umgebungsisotopie formalisiert die anschauliche Vorstellung, eine Verschlingung glatt zu deformieren, ohne sie durch sich selbst hindurchzuführen. Im Folgenden identifizieren wir daher — in leicht missbräuchlicher Weise — Links bzw. orientierte Links mit ihren Bildern und schreiben einfach $L \subset \mathbb{R}^3$ anstatt $L(\coprod_{i=1}^n S^1) \subset \mathbb{R}^3$.

Definition 2.2. Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $f : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Ein Punkt $x \in N$ heißt **transversaler Doppelpunkt** von f , wenn $f^{-1}(x) = \{p, q\} \subset M$ aus genau zwei Punkten besteht und die folgenden Bedingungen gelten:

- (i) $T_p f$ und $T_q f$ sind **immersiv**, d. h. jeweils injektive lineare Abbildungen.
- (ii) Die Bilder der Tangentialräume **schneiden sich transversal** $T_p f(T_p M) + T_q f(T_q M) = T_x N$. In diesem Fall nennt man die lokale Struktur von f bei x eine **transversale Doppelüberlagerung**. Liegt eine solche Situation für alle Doppelpunkte der Projektion eines Links vor, so spricht man von einer **transversalen Doppelkreuzung** im Linkdiagramm.

Proposition 2.3. Sei $L \subset \mathbb{R}^3$ ein Link und $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ die kanonische Projektion. Ein Linkdiagramm von L ist die Menge $P(L) \subset \mathbb{R}^2$. Durch geeignete Umgebungsisotopie von L kann stets erreicht werden, dass $P(L)$ **generisch** ist, d. h. die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i) Für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ gilt $|P^{-1}(x) \cap L| < 3$.
- (ii) Es gibt nur endlich viele Punkte $x \in \mathbb{R}^2$ mit $|P^{-1}(x) \cap L| = 2$.
- (iii) Für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ mit $|P^{-1}(x) \cap L| = 2$ existieren offene Umgebungen $U_p, U_q \subset \mathbb{R}^3$ von p bzw. q sowie ein orientationserhaltender Diffeomorphismus $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, so dass $f(P(U_p \cup U_q))$ die lokale Struktur einer transversalen Doppelüberlagerung aufweist.

Beweisskizze. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass $L \subset \mathbb{R}^3$ ein glatter Link ist, also das Bild einer glatten Einbettung $\iota : M := \coprod_{j=1}^n S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. Wähle auf jeder Zusammenhangskomponente von M eine Orientierung und versehe M mit einer glatten Riemannschen Metrik. Dann ist für jedes $p \in M$ der Tangentialraum $T_p M$ ein 1-dimensionaler, orientierter, euklidischer Vektorraum. In einem solchen Raum gibt es genau zwei Einheitsvektoren. Die Orientierung wählt davon eine Richtung als positiv aus, so dass genau einer dieser beiden Einheitsvektoren die gewählte Orientierung repräsentiert. Damit existiert für jedes $p \in M$ ein eindeutig bestimmter Einheitsvektor $u_p \in T_p M$, der die gewählte

Orientierung repräsentiert. Unter der Identifikation $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$ definieren wir eine glatte Abbildung

$$\tau: M \longrightarrow S^2, \quad p \mapsto \frac{d\iota(u_p)}{\|d\iota(u_p)\|},$$

wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm in \mathbb{R}^3 bezeichnet. Setze $A := \tau(M) \cup (-\tau(M)) \subset S^2$. Dann ist A kompakt und 1-dimensional. Insbesondere ist A als kompakte Teilmenge von S^2 abgeschlossen, so dass $S^2 \setminus A$ offen ist. Da A topologische Dimension 1 und S^2 Dimension 2 hat, besitzt A kein Inneres in S^2 . Folglich ist $S^2 \setminus A$ dicht. Sei $v \in S^2 \setminus A$ ein solcher Richtungsvektor, und sei $P_v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die orthogonale Projektion entlang der Richtung v .

Definiere $f_v := P_v \circ \iota: M \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Für jedes $p \in M$ ist $T_p M$ eindimensional und wird von $\tau(p)$ aufgespannt. Wäre $d f_v(p) = 0$, so läge $T_p M$ im Kern von P_v , also wäre $\tau(p) = \pm v$, im Widerspruch zu $v \notin A$. Folglich ist $d f_v(p) \neq 0$ für alle p , d.h. $f_v: M \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist eine Immersion. Damit ist insbesondere jede Faser $(f_v)^{-1}(x)$ endlich und lokal besteht $f_v(M)$ aus endlich vielen glatten Kurven.

1. **Doppelstellen:** Wir benutzen nun den **parametrischen Transversalitätssatz** [1, Theorem 2.7]. Setze $\Delta_2 := \{(p, p) \in M \times M\}$, $\widetilde{M}_2 := M \times M \setminus \Delta_2$ und betrachte die Abbildung

$$H_2: S^2 \times \widetilde{M}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad H_2(w, p, q) := P_w(\iota(p)) - P_w(\iota(q)).$$

Sie ist glatt. Nach dem parametrischen Transversalitätssatz gibt es eine residuale (insbesondere dichte) Teilmenge $U_2 \subset S^2$, so dass für jedes $w \in U_2$ die Einschränkung $h_{2,w} := H_2(w, \cdot): \widetilde{M}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transversal zur Nullmannigfaltigkeit $\{0\} \subset \mathbb{R}^2$ ist.

Für solches w ist $(h_{2,w})^{-1}(0)$ eine 0-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit, also eine diskrete Menge. Da \widetilde{M}_2 kompakt ist, ist diese Menge endlich. Die Punkte in $(h_{2,w})^{-1}(0)$ entsprechen genau den Paaren (p, q) mit $p \neq q$ und $P_w(\iota(p)) = P_w(\iota(q))$, und Transversalität bedeutet, dass die beiden Zweige von $f_w(M)$ sich dort transversal schneiden. Damit erhalten wir für solche w :

- es gibt nur endlich viele Doppelstellen, und
- jede Doppelstelle ist transversal.

2. **Dreifachstellen:** Setze $\Delta_3 := \{(p, q, r) \in M^3 \mid p = q \text{ oder } p = r \text{ oder } q = r\}$, $\widetilde{M}_3 := M^3 \setminus \Delta_3$ und definiere

$$H_3: S^2 \times \widetilde{M}_3 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad H_3(w, p, q, r) := (P_w(\iota(p)) - P_w(\iota(q)), P_w(\iota(p)) - P_w(\iota(r))).$$

Wiederum ist H_3 glatt. Nach demselben parametrischen Transversalitätssatz gibt es eine residuale Teilmenge $U_3 \subset S^2$, so dass für jedes $w \in U_3$ die Einschränkung $h_{3,w} := H_3(w, \cdot): \widetilde{M}_3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ transversal zur Nullmannigfaltigkeit $\{0\} \subset \mathbb{R}^4$ ist. Da $\dim \widetilde{M}_3 = 3$ und $\text{codim}\{0\} = 4$, ist für solche w das Urbild $(h_{3,w})^{-1}(0) = \emptyset$. Es gibt also keine Tripel (p, q, r) mit p, q, r paarweise verschieden und $P_w(\iota(p)) = P_w(\iota(q)) = P_w(\iota(r))$. Damit besitzt f_w keine Dreifachstellen. Setze nun $v \in (S^2 \setminus A) \cap U_2 \cap U_3$. Da $S^2 \setminus A$ offen und dicht ist und U_2, U_3 residual sind, ist diese Schnittmenge nicht leer; wähle ein solches v . Für dieses v gilt:

- f_v ist eine Immersion (Schritt 1),
- f_v hat nur endlich viele, jeweils transversale Doppelstellen (Eigenschaften (ii) und (iii)),
- f_v hat keine Dreifachstellen (Eigenschaft (i)).

Dies bedeutet genau, dass $P_v(L)$ im Sinne der Proposition generisch ist.

3. **Rückkehr zur kanonischen Projektion:** Sei nun $e_3 = (0, 0, 1)$ und $P = P_{e_3}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die in der Proposition verwendete Projektion $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. Wähle eine Rotation $R \in SO(3)$ mit $R(e_3) = v$ und setze $L' := R^{-1}(L)$. Da $SO(3)$ wegzusammenhängend ist, existiert ein stetiger Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow SO(3)$ mit $\gamma(0) = 1_{SO(3)}$ und $\gamma(1) = R^{-1}$. Die Abbildung $H: \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, t) \mapsto \gamma(t)(x)$, ist damit eine Umgebungs isotopie mit $H(-, 0) = 1_{SO(3)}$ und

$H(-, 1) = R^{-1}$. Da R orthogonal ist und $R(e_3) = v$ gilt, folgt $P_{e_3} \circ R^{-1} = R^{-1} \circ P_v$ und somit $P(L') = P_{e_3}(R^{-1}(L)) = R^{-1}(P_v(L))$. Die Einschränkung $R^{-1}|_{v^\perp} : v^\perp \rightarrow e_3^\perp \cong \mathbb{R}^2$ ist eine orientierungserhaltende lineare Isometrie; die Eigenschaften (i)–(iii) sind unter Anwendung eines solchen Diffeomorphismus von \mathbb{R}^2 invariant. Also ist $P(L')$ generisch.

□

Korollar 2.4. Ein generisches Linkdiagramm besitzt somit ausschließlich transversale Doppelkreuzungen zweier Stränge, und deren Anzahl ist endlich.

Um einen Link aus seiner Projektion zumindest bis auf Äquivalenz eindeutig rekonstruieren zu können, benötigt man an jedem Kreuzungspunkt die Information, welcher Strang über dem anderen liegt. In Linkdiagrammen wird diese Information durch die Unterscheidung von Überkreuzung und Unterkreuzung dargestellt: Der Strang mit der größeren z -Koordinate im Kreuzungspunkt verläuft über demjenigen mit der kleineren z -Koordinate. Die gleiche Diagrammnotation wird auch für orientierte Links verwendet; dabei wird die Orientierung jeder Zusammenhangskomponente durch Pfeile angegeben. Ein Knotendiagramm ohne Kreuzungspunkte heißt trivialer Knoten.

Definition 2.5. Sei $L \subset \mathbb{R}^3$ ein Link.

1. Ein **Linkdiagramm** von L ist eine generische Projektionsabbildung $P(L) \subset \mathbb{R}^2$, versehen mit der Zusatzinformation, welcher der beiden Punkte in $P^{-1}(x) \cap L = \{p, q\}$ für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ mit $|P^{-1}(x) \cap L| = 2$ die größere z -Koordinate besitzt. Diese Wahl bestimmt, welcher Strang an der entsprechenden Kreuzung oben bzw. unten verläuft.
2. Ein **orientiertes Linkdiagramm** von L ist ein Linkdiagramm, ausgestattet mit einer Orientierung auf jeder Zusammenhangskomponente von L .

Es wurde von Reidemeister gezeigt, dass (orientierte) Linkdiagramme sämtliche Informationen über die Äquivalenzklassen von (orientierten) Links enthalten. Der Beweis nutzt grundlegende topologische Methoden sowie elementare Tatsachen über glatte Mannigfaltigkeiten [6].

Theorem 2.6. Seien $L, L' \subset \mathbb{R}^3$ zwei (orientierte) Links. Dann sind L und L' äquivalent genau dann, wenn ihre (orientierten) Linkdiagramme D_L und $D_{L'}$ durch eine endliche Folge von orientierungserhaltenden Diffeomorphismen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sowie durch RM1, RM2 und RM3 ineinander überführt werden können. In diesem Fall heißen die Linkdiagramme D_L und $D_{L'}$ äquivalent.

Um Links (bzw. Knoten) topologisch zu unterscheiden, sucht man Funktionen, die nur von der Isotopieklassse des Links abhängen und nicht von einer konkreten zeichnerischen Darstellung im \mathbb{R}^2 . Linkdiagramme sind eine kombinatorische Kodierung solcher Links, und die Reidemeisterbewegungen beschreiben genau die lokalen Umformungen, die einer Umgebungs isotopie entsprechen.

Definition 2.7. Sei R ein kommutativer Monoid und D die Menge der (orientierten) Linkdiagramme.

1. Eine (**orientierte**) **Linkinvariante** ist eine Abbildung $I : D \rightarrow R$, die invariant ist unter orientierungserhaltenden Diffeomorphismen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sowie unter den Reidemeisterbewegungen RM1, RM2 und RM3.
2. Eine (**orientierte**) **Schleifeninvariante** ist eine Abbildung $I : D \rightarrow R$, die invariant ist unter orientierungserhaltenden Diffeomorphismen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sowie unter den Reidemeisterbewegungen RM1', RM2 und RM3.

3 Tangle- und Ribbon-Kategorie

Verdickte Links stehen in enger Beziehung zum diagrammatischen Kalkül von Schleifenkategorien. Über- und Unterkreuzungen entsprechen dort den Zopfmorphismen, Maxima und Minima in einem (verdickten) Linkdiagramm den Evaluations- und Koevaluationsmorphismen in einer pivotalen

Kategorie. Diese Grundbausteine eines Linkdiagramms erfüllen zusätzliche Relationen: die Reide-meisterbewegung RM2 entspricht der Inversen der Verzopfung, RM3 der Dodekagonidentität, und die modifizierte RM1' drückt aus, dass eine pivotal verzopfte monoidale Kategorie tatsächlich eine Schleifenkategorie ist. Daraus ergibt sich der Ansatz, (verdickte) Links durch eine sehr einfache Schleifenkategorie zu beschreiben, die nur die minimal nötigen Objekte und Morphismen enthält: Auf Objektebene gibt es ein grundlegendes Objekt, sein Dual und alle endlichen Tensorprodukte daraus. Auf Morphismenebene gibt es Evaluation und Koevaluation, die Verzopfung dieses Objekts mit sich selbst und seiner Inversen sowie alle Kompositionen und Tensorprodukte dieser Morphismen.

Wie bei der Zopfkategorie beschreibt man diese Schleifenkategorie am besten als strikte monoidale Kategorie durch Erzeuger und Relationen: Jedes Objekt ist ein Tensorprodukt aus erzeugenden Objekten, jeder Morphismus eine Komposition beziehungsweise ein Tensorprodukt der erzeugenden Morphismen; alle Relationen ergeben sich aus Komposition, Tensorprodukt und der monoidalen Struktur. Formal ähnelt das einer Präsentation einer Gruppe, nur dass es zwei Arten von „Verknüpfung“ (Komposition und Tensorprodukt) gibt und Morphismen nicht invertierbar sein müssen. Um Links und verdickte Links zu erfassen, führt man zwei solche Kategorien ein, die sich nur in genau einer Relation unterscheiden: Die Tangle-Kategorie \mathcal{T} beschreibt orientierte Linkdiagramme, und die Ribbon-Kategorie \mathcal{R} beschreibt orientierte gerahmte Linkdiagramme.

Definition 3.1. Die **Tangle-Kategorie \mathcal{T}** ist die strikte monoidale Kategorie mit endlichen Folgen $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ in \mathbb{Z}_2 als Objekten sowie sechs erzeugenden Morphismen

$$\begin{array}{cccccc}
 \text{U:} & \text{U':} & \text{n:} & \text{n':} & \text{x:} & \text{x}^{-1}: \\
 \begin{array}{c} \text{---} \\ \curvearrowleft \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} \\ \curvearrowright \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} \\ \curvearrowleft \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} \\ \curvearrowright \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \\
 - \otimes + \rightarrow \emptyset & \emptyset \rightarrow + \otimes - & + \otimes - \rightarrow \emptyset & \emptyset \rightarrow - \otimes + & + \otimes + \rightarrow + \otimes + & + \otimes + \rightarrow + \otimes +
 \end{array}$$

und den zugehörigen Relationen

1. **Identitätsmorphismen:** $1_+ : + \rightarrow +$ und $1_- : - \rightarrow -$.

2. **RM1:**

$$\begin{array}{ccc}
 \text{---} & = & \text{---} \\
 \text{---} & = & \text{---}
 \end{array}$$

RM2:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{---} & = & \text{---} \\
 \text{---} & = & \text{---}
 \end{array}$$

RM3:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{---} & = & \text{---} \\
 \text{---} & = & \text{---}
 \end{array}$$

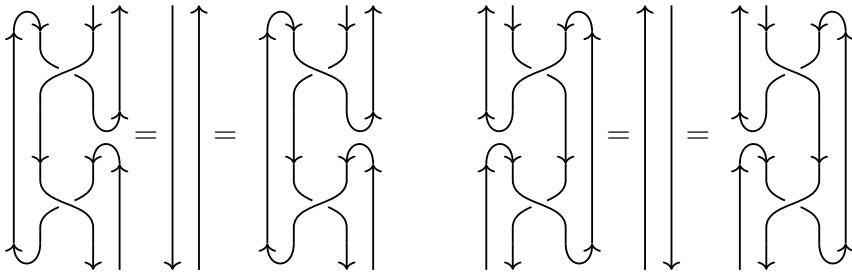
3. **Schlangenidentitäten:**

$$\begin{array}{ccc}
 \text{---} & = & \text{---} \\
 \text{---} & = & \text{---}
 \end{array}$$

4. **Verzopfte Schlangenidentitäten:**

$$\begin{array}{ccc}
 \text{---} & = & \text{---} \\
 \text{---} & = & \text{---}
 \end{array}$$

5. **Modifizierter RM2:**



6. Die Komposition von Morphismen ist die vertikale Komposition von Diagrammen, wann immer das Ende eines Diagramms mit dem Anfang eines zweiten Diagramms übereinstimmt.
7. Die monoidale Struktur ist gegeben durch die Verkettung von endlichen Folgen in \mathbb{Z}_2 und die horizontale Verkettung von Diagrammen.

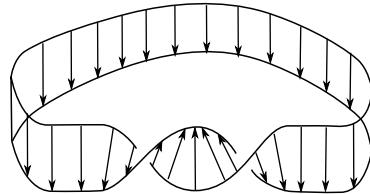
Ein Morphismus $f : (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m) \rightarrow (\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_n)$ in \mathcal{T} heißt **(m, n) -Tangle**.

Die Tangle-Kategorie \mathcal{T} weist als Relationen der Reidemeisterbewegungen RM1 bis RM3 auf, außerdem die Schlangenidentität sowie weitere Relationen zwischen Diagrammen, die durch Diffeomorphismen miteinander verknüpft sind. Insbesondere ist jedes $(0, 0)$ -Tangle bis auf Reidemeisterbewegungen und Diffeomorphismen des Diagramms ein orientiertes Linkdiagramm. Dies macht diese Kategorie geeignet zur Beschreibung von orientierten Linkinvarianten. Es gibt eine analoge strikt monoidale Kategorie zur Beschreibung orientierter Schleifen. Sie besitzt dieselben Erzeuger und Relationen, nur dass die Reidemeisterbewegung RM1 durch RM1' ersetzt wird.

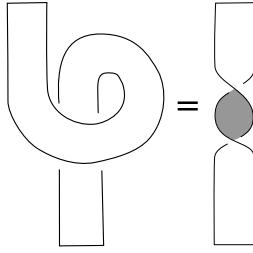
Definition 3.2.

- Ein **geframter Link** oder **Schleife** ist ein Link $L : \Pi_n S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zusammen mit einem Vektorfeld X entlang L , das nirgends tangential an L ist, d. h. einer glatten Abbildung $X : \Pi_n S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $X(z) \notin T_{L(z)} L \subset \mathbb{R}^3$ für alle $z \in \Pi_n S^1$.
- Zwei geframte Links (L, X) und (L', X') heißen **äquivalent** oder **umgebungsisotop**, falls es eine Umgebungsisotopie $F : [0, 1] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ von L nach L' gibt mit $X'(z) = T_{L(z)} F_1(X(z))$ für alle $z \in \Pi_n S^1$.

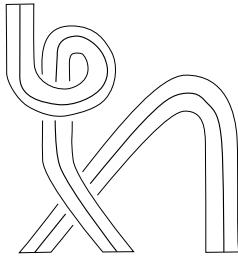
Sei $L \subset \mathbb{R}^3$ ein Link und X ein Vektorfeld entlang L , das nirgends tangential an L ist. Dann kann man L zu einer **Schleife** verdicken, das sich nur um ganzzahlige Vielfache von 2π um sich selbst dreht. Dies schließt insbesondere Möbiusbänder aus.



Ist man nur an Äquivalenzklassen geframter Links interessiert, so kann man das Vektorfeld vergessen und einen geframten Link stattdessen als einen Link mit einer Zuordnung einer ganzen Zahl $z \in \mathbb{Z}$ zu jeder Zusammenhangskomponente auffassen, die angibt, wie oft sich diese Zusammenhangskomponente um sich selbst dreht.



Mit Hilfe dieser Relation kann man jede Projektion einer zugehörigen Schleife in eine **blackboard framed** Schleifenprojektion überführen, die nur Verdrehungen des links dargestellten Typs, nicht aber die rechts dargestellte Verdrehung enthält. Dies entspricht der Vorstellung, das Schleifen in \mathbb{R}^3 in zwei Farben (schwarz und weiß) einzufärben und so zu projizieren, dass in allen Teilen der Projektion stets die weiße Seite nach oben zeigt. Blackboard-geframede Links lassen sich durch dieselben Diagramme wie gewöhnliche Links beschreiben, wobei das Linkdiagramm die Projektion einer Linie in der Mitte der Schleife, des **Kerns**, darstellt.



Der einzige Unterschied ist, dass die Linkdiagramme, die in Relation stehen mittels der Reidemeisterbewegung RM1 nicht länger als Projektionen von äquivalenten Schleifen beschrieben werden können. Stattdessen erhalten wir die modifizierte Reidemeisterbewegung RM1'.

Definition 3.3. Die Kategorie \mathcal{R} der **Ribbon-Tangles** ist die strikt monoidale Kategorie mit endlichen Folgen $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ in \mathbb{Z}_2 als Objekten und denselben erzeugenden Morphismen und Relationen wie in der Tangle-Kategorie, mit der Ausnahme, dass die Relation RM1 durch die Reidemeisterbewegung RM1' ersetzt wird.

$$\begin{array}{c}
 \text{RM1'}: \quad \left| \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ \text{with two strands} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ \text{with two strands} \end{array} \right| \\
 \text{RM2:} \quad \left| \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ \text{with three strands} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ \text{with three strands} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ \text{with three strands} \end{array} \right| \\
 \text{RM3:} \quad \left| \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ \text{with four strands} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ \text{with four strands} \end{array} \right|
 \end{array}$$

Ein Morphismus $f : (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) \rightarrow (\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n)$ in \mathcal{R} heißt ein **(m, n) -Ribbon-Tangle**.

Wie es ihre Bezeichnungen und die diagrammatische Darstellung nahelegen, sind die Tangle-Kategorie \mathcal{T} und die Ribbon-Kategorie \mathcal{R} tatsächlich Schleifenkategorien, wobei die Evaluation und Coevaluation durch \cup, \cup', \cap, \cap' gegeben sind und die Verzopfungen aus dem Morphismus \times und seiner Inversen konstruiert werden.

Proposition 3.4. Die Kategorien \mathcal{T}, \mathcal{R} sind strikte Schleifenkategorien.

Beweis. Siehe [4, Proposition 4.2.3]. □

Proposition 3.5 (Universalität der Ribbon-Kategorie). Sei \mathcal{C} eine Schleifenkategorie und $V \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ein Objekt. Sei ferner \mathcal{R} die Ribbon-Kategorie. Dann existiert ein geflochtener monoidal Funktor $F_V: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{C}$, der bis auf natürliche Isomorphismen eindeutig bestimmt ist, wobei diese natürlichen Isomorphismen durch Kompositionen aus den Assoziatoren und den Einheitsconstraints in \mathcal{C} gegeben sind, und der auf den erzeugenden Objekten und Morphismen festgelegt ist durch

$$F_V(+)=V, \quad F_V(-)=V^*, \quad F_V(\cup)=\text{ev}_V^R: V^* \otimes V \rightarrow e, \quad F_V(\cup')=\text{ev}_V^L: V \otimes V^* \rightarrow e.$$

Beweis. Zunächst behandeln wir den Fall, dass sowohl \mathcal{C} als auch \mathcal{R} strikt monoidal sind (d.h. die Assoziatoren und Unitoren Identitäten sind). Der allgemeine Fall folgt anschließend aus dem Kohärenzsatz von Mac Lane.

- **F_V auf den Objekten:** Die Objekte von \mathcal{R} sind endliche Folgen $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \varepsilon_i \in \{+, -\}$, mit monoidal Struktur gegeben durch Konkatenation und der leeren Folge als Einheitsobjekt. Ein strikt monoidal Funktor $F_V: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{C}$ mit $F_V(+)=V, F_V(-)=V^*$ ist damit auf allen Objekten eindeutig bestimmt durch $F_V(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)=F_V(\varepsilon_1) \otimes \dots \otimes F_V(\varepsilon_n)$, wobei $F_V(+)=V$ und $F_V(-)=V^*$ wie vorgegeben.
- **F_V auf den erzeugenden Morphismen:** Die Kategorie \mathcal{R} ist als geflochtene monoidale Kategorie wie folgt präsentiert: Sie wird erzeugt durch ein Objekt $+$ sowie durch die folgenden Morphismen
 - eine rechte Evaluation $\cup: (-, +) \rightarrow \emptyset$ und eine linke Evaluation $\cup': (+, -) \rightarrow \emptyset$,
 - die zugehörigen Coevaluationen $\cap: \emptyset \rightarrow (+, -)$ und $\cap': \emptyset \rightarrow (-, +)$,
 - eine geflochtene Struktur $\times: (+, +) \rightarrow (+, +)$ mit Inverser \times^{-1} ,
 - einen Twistsmorphismus $T: + \rightarrow +$ mit Inverser T^{-1} ,

unter den üblichen Relationen:

- (a) Schlangenidentitäten (\cup, \cap bzw. \cup', \cap' Dualitätsdaten für $+$ bzw. $-$),
- (b) Yang–Baxter-Gleichung für \times und Kompatibilität von \times mit Tensorprodukt,
- (c) Kompatibilität von \times mit den Dualitätsdaten, also die verzopften Schlangenidentitäten;
- (d) Kompatibilität des Twists T mit \times und den Dualitätsdaten (d.h. die aus den Ribbon-Link-Diagrammen ablesbaren Relationen).

In der Ribbon-Kategorie \mathcal{C} seien $\text{ev}_V^R: V^* \otimes V \rightarrow e$, $\text{coev}_V^R: e \rightarrow V \otimes V^*$ die Dualitätsmorphismen für das rechte Dual V^* von V , analog $\text{ev}_V^L: V \otimes V^* \rightarrow e$, $\text{coev}_V^L: e \rightarrow V^* \otimes V$ für die linke Dualität. Ferner sei c die Verzopfung und $\theta_V: V \rightarrow V$ der Twist von V in \mathcal{C} . Wir definieren nun F_V auf den erzeugenden Morphismen durch

$$F_V(\cup) := \text{ev}_V^R, \quad F_V(\cup') := \text{ev}_V^L, \quad F_V(X) := c_{V,V}, \quad F_V(T) := \theta_V.$$

Die Schlangenidentität in \mathcal{C} implizieren, dass es zu einer gegebenen Evaluation genau eine Coevaluation gibt, welche die Dualität vervollständigt. Da in \mathcal{R} die Morphismen \cap, \cap' gerade durch die Eigenschaft charakterisiert sind, zu \cup, \cup' die Schlangenidentität zu erfüllen, müssen wir notwendigerweise setzen

$$F_V(\cap) := \text{coev}_V^R, \quad F_V(\cap') := \text{coev}_V^L.$$

Damit ist F_V auf allen erzeugenden Morphismen eindeutig bestimmt.

- **Existenz eines geflochtenen monoidalen Funktors:** Da \mathcal{R} als geflochtene monoidale Kategorie durch die oben angegebenen Erzeuger und Relationen präsentiert ist, gibt es genau dann einen (strikten) geflochtenen monoidalen Funktor $F_V: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{C}$, der auf Objekten und erzeugenden Morphismen wie oben definiert ist, wenn sämtliche definierenden Relationen von \mathcal{R} unter F_V zu wahren Gleichungen in \mathcal{C} werden. Dies folgt aus den Axiomen einer Ribbon-Kategorie:

- Die Schlangenidentität für \cup, \cap und \cup', \cap' werden in \mathcal{C} genau von den Dualitätsdaten $\text{ev}_V^R, \text{coev}_V^R$ bzw. $\text{ev}_V^L, \text{coev}_V^L$ erfüllt; damit sind die Relationen in (a) erfüllt.
- Die Verzopfung c in \mathcal{C} erfüllt die Hexagon-Axiome und die Yang–Baxter-Gleichung; dies ist exakt die algebraische Form der Relationen in (b).
- Die Kompatibilität der Verzopfung mit Evaluation und Coevaluation in jeder Ribbon-Kategorie (d.h. die Eigenschaft, dass c mit den Dualitätsmorphismen vertauschbar ist und sich zu einer Verzopfung auf Dualobjekten fortsetzt) zeigt, dass auch die Relationen in (c) in \mathcal{C} gelten.
- Schließlich erfüllt der Twist θ in einer Ribbon-Kategorie per Definition genau die Relationen, die in (d) für \mathcal{R} vorgeschrieben sind: θ ist natürlich, mit der Verzopfung verträglich und selbstdual; insbesondere stimmen die entsprechenden Diagramme, welche die in \mathcal{R} vorgegebenen Twist-Relationen ausdrücken, auch in \mathcal{C} .
- **Verzopftheit und Eindeutigkeit:** Da \mathcal{R} als geflochtene monoidale Kategorie von \times erzeugt wird und $F_V(\times) = c_{V,V}$ ist, ist F_V per Konstruktion geflochten: Auf jedem Tensorprodukt $F_V(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ stimmt die durch F_V induzierte Verzopfung mit der in \mathcal{C} gegebenen Verzopfung überein. Eindeutigkeit im strikten Fall folgt aus der Tatsache, dass ein strikt geflohtener monoidal Funktor durch seine Werte auf $+, -, \cup, \cup', \times$ und T vollständig bestimmt ist; somit ist F_V der einzige solche Funktor.
- **Algemeiner Fall:** Sei nun \mathcal{C} eine beliebige (nicht notwendig strikte) Ribbon-Kategorie. Nach dem Kohärenzsatz für verzopfte monoidale Kategorien existiert eine strikte verzopfte monoidale Kategorie $\tilde{\mathcal{C}}$ sowie eine veruopfte monoidale Äquivalenz $E: \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}$. Wähle ein Objekt $\tilde{V} \in \text{Ob}(\tilde{\mathcal{C}})$ mit $E(\tilde{V}) \cong V$. Auf $\tilde{\mathcal{C}}$ konstruieren wir wie oben einen strikt verzopften monoidalen Funktor $\tilde{F}_{\tilde{V}}: \mathcal{R} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}$. Durch Komposition erhalten wir einen geflochtenen monoidalen Funktor $F_V := E \circ \tilde{F}_{\tilde{V}}: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{C}$, der auf Objekten isomorph zu den geforderten Zuordnungen $F_V(+)=V, F_V(-)=V^*$ ist und auf den erzeugenden Morphismen die vorgegebenen Evaluationen, Coevaluationen, Verzopfung und Twist realisiert. Die dabei auftretenden von E gelieferten Isomorphismen sind Kompositionen aus Assoziatoren und Einheitsconstraints von \mathcal{C} .

Die Eindeutigkeit von F_V bis auf natürliche Isomorphismen, die aus Assoziatoren und Einheitsconstraints in \mathcal{C} zusammengesetzt sind, folgt daraus, dass jede zwei derartige Funktoren nach Rückzug auf eine strikte Äquivalenzklasse wie oben zusammenfallen müssen und die einzigen verbleibenden Freiheitsgrade durch Kohärenz eben aus diesen Strukturisomorphismen bestehen. \square

4 Das Jones Polynom

Wir fixieren ein $q \in \mathbb{C}^\times$, das keine Einheitswurzel ist, und setzen

$$\mathbb{C}(q) := \left\{ \frac{p(q)}{r(q)} \mid p, r \in \mathbb{C}[q], r \neq 0 \right\},$$

den Quotientenkörper des Polynomrings $\mathbb{C}[q]$. Die **Quantengruppe** $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ ist die $\mathbb{C}(q)$ -Algebra mit Erzeugern E, F, K, K^{-1} und Relationen

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1, \quad KEK^{-1} = q^2E, \quad KFK^{-1} = q^{-2}F, \quad [E, F] = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}.$$

Für unsere Zwecke reicht es aus zu sehen, dass $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ auch die Struktur einer **Koalgebra** trägt. Die **Koproduktabbildung** ist ein $\mathbb{C}(q)$ -Algebrenhomomorphismus $\Delta: U_q(\mathfrak{sl}_2) \rightarrow U_q(\mathfrak{sl}_2) \otimes_{\mathbb{C}(q)} U_q(\mathfrak{sl}_2)$, gegeben durch

$$\Delta(K) = K \otimes K, \quad \Delta(E) = E \otimes K + 1 \otimes E, \quad \Delta(F) = F \otimes 1 + K^{-1} \otimes F.$$

Sei $V := \mathbb{C}(q)v_+ \oplus \mathbb{C}(q)v_-$ und $\rho: U_q(\mathfrak{sl}_2) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}(q)}(V)$ die eindeutige Darstellung mit

$$\rho(K)v_+ = qv_+, \quad \rho(K)v_- = q^{-1}v_-, \quad \rho(E)v_- = v_+, \quad \rho(E)v_+ = 0, \quad \rho(F)v_+ = v_-, \quad \rho(F)v_- = 0.$$

Die induzierte Wirkung auf $V \otimes_{\mathbb{C}(q)} V$ für einen Vektorraum V der Dimension 2, also geordneter Basis (v_+, v_-) , ist die $\mathbb{C}(q)$ -bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} \triangleright: U_q(\mathfrak{sl}_2) \times (V \otimes_{\mathbb{C}(q)} V) &\longrightarrow V \otimes_{\mathbb{C}(q)} V, \\ (x, (v \otimes w)) &\mapsto (\rho \otimes \rho)(\Delta(x))(v \otimes w). \end{aligned}$$

Wir schreiben

$$e_1 := v_+ \otimes v_+, \quad e_2 := v_+ \otimes v_-, \quad e_3 := v_- \otimes v_+, \quad e_4 := v_- \otimes v_-.$$

Aus der Definition von Δ und ρ folgt explizit

$$\begin{aligned} K \triangleright e_1 &= q^2 e_1, & E \triangleright e_1 &= 0, & F \triangleright e_1 &= e_3 + q^{-1} e_2, \\ K \triangleright e_2 &= e_2, & E \triangleright e_2 &= e_1, & F \triangleright e_2 &= e_4, \\ K \triangleright e_3 &= e_3, & E \triangleright e_3 &= q e_1, & F \triangleright e_3 &= q^{-1} e_4, \\ K \triangleright e_4 &= q^{-2} e_4, & E \triangleright e_4 &= q^{-1} e_2 + e_3, & F \triangleright e_4 &= 0. \end{aligned}$$

Setze

$$\begin{aligned} w_0 &:= v_+ \otimes v_- - q^{-1}v_- \otimes v_+, & w_2 &:= v_+ \otimes v_+ = e_1, \\ w_1 &:= v_+ \otimes v_- + q v_- \otimes v_+ = e_2 + q e_3, & w_{-2} &:= v_- \otimes v_- = e_4. \end{aligned}$$

Dann zerfällt

$$V \otimes_{\mathbb{C}(q)} V = V_2 \oplus V_0 \quad \text{mit} \quad V_0 := \mathbb{C}(q)w_0, \quad V_2 := \mathbb{C}(q)w_2 \oplus \mathbb{C}(q)w_1 \oplus \mathbb{C}(q)w_{-2}.$$

Dabei ist V_0 trivial und V_2 irreduzibel vom höchsten Gewicht 2, denn aus den obigen Wirkungen folgt $K \triangleright w_0 = w_0, E \triangleright w_0 = 0, F \triangleright w_0 = 0$, also V_0 trivial. Ebenso $K \triangleright w_2 = q^2 w_2, E \triangleright w_2 = 0$ und $F \triangleright w_2 = q^{-1} w_1, F \triangleright w_1 = (1+q^2)w_{-2} \neq 0$. Damit ist w_2 höchstgewichtig vom Gewicht 2, und der von w_2 erzeugte Untermodul besitzt die Basis $\{w_2, w_1, w_{-2}\}$ und ist irreduzibel. Da $\dim_{\mathbb{C}(q)}(V \otimes_{\mathbb{C}(q)} V) = 4$, folgt $V \otimes_{\mathbb{C}(q)} V = V_2 \oplus V_0$.

Sei $P_0: V \otimes_{\mathbb{C}(q)} V \longrightarrow V \otimes_{\mathbb{C}(q)} V$ die Projektion entlang V_2 auf V_0 , also $P_0(w_0) = w_0, P_0(w_1) = P_0(w_2) = P_0(w_{-2}) = 0$. In der Basis (e_1, e_2, e_3, e_4) gilt damit $P_0(e_1) = 0, P_0(e_4) = 0$, sowie

$$P_0(e_2) = \frac{q}{q+q^{-1}} e_2 - \frac{1}{q+q^{-1}} e_3, \quad P_0(e_3) = -\frac{1}{q+q^{-1}} e_2 + \frac{q^{-1}}{q+q^{-1}} e_3.$$

Setze

$$\delta := -(q + q^{-1}), \quad e := \delta P_0: V \otimes_{\mathbb{C}(q)} V \longrightarrow V \otimes_{\mathbb{C}(q)} V.$$

Dann ist

$$e(e_1) = 0, \quad e(e_4) = 0, \quad e(e_2) = -q(e_2 + e_3), \quad e(e_3) = e_2 - q^{-1}e_3.$$

Lemma 4.1. Es gilt $e^2 = \delta e = -(q + q^{-1})e$.

Beweis. Da $P_0: V \otimes_{\mathbb{C}(q)} V \rightarrow V \otimes_{\mathbb{C}(q)} V$ die Projektion auf V_0 entlang V_2 ist, gilt $P_0^2 = P_0$. Mit der Definition $e := \delta P_0$ folgt $e^2 = (\delta P_0) \circ (\delta P_0) = \delta^2 P_0^2 = \delta^2 P_0 = \delta(\delta P_0) = \delta e$. Da außerdem $\delta = -(q + q^{-1})$ definiert ist, erhalten wir $e^2 = \delta e = -(q + q^{-1})e$. \square

Auf V_2 ist $P_0 = 0$, also $e = 0$ und $e^2 = 0 = \delta e$. Auf V_0 ist $P_0 = 1_{V_0}$, also $e = \delta 1_{V_0}$ und $e^2 = \delta^2 1_{V_0} = \delta e$. Da $V \otimes_{\mathbb{C}(q)} V = V_2 \oplus V_0$, folgt $e^2 = \delta e$ auf ganz $V \otimes V$. Definiere

$$\tau: V \otimes_{\mathbb{C}(q)} V \longrightarrow V \otimes_{\mathbb{C}(q)} V, \quad \tau := q 1_{V \otimes_{\mathbb{C}(q)} V} + e.$$

Dann ist τ $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -äquivariant und wirkt auf der Basis (e_1, e_2, e_3, e_4) durch

$$\begin{aligned}\tau(e_1) &= q e_1, \\ \tau(e_2) &= q e_2 + (-q e_2 + e_3) = e_3, \\ \tau(e_3) &= q e_3 + (e_2 - q^{-1} e_3) = e_2 + (q - q^{-1}) e_3, \\ \tau(e_4) &= q e_4.\end{aligned}$$

In der Basis (v_+, v_-) also

$$\begin{aligned}\tau(v_+ \otimes v_+) &= q v_+ \otimes v_+, \\ \tau(v_+ \otimes v_-) &= v_- \otimes v_+, \\ \tau(v_- \otimes v_+) &= v_+ \otimes v_- + (q - q^{-1}) v_- \otimes v_+, \\ \tau(v_- \otimes v_-) &= q v_- \otimes v_-.\end{aligned}$$

Lemma 4.2 (Hecke-Relation). Für $\tau: V \otimes_{\mathbb{C}(q)} V \rightarrow V \otimes V$ gilt $(\tau - q 1_{V \otimes_{\mathbb{C}(q)} V})(\tau + q^{-1} 1_{V \otimes_{\mathbb{C}(q)} V}) = 0$, also $\tau - \tau^{-1} = (q - q^{-1}) 1_{V \otimes_{\mathbb{C}(q)} V}$.

Beweis. Mit $1 := 1_{V \otimes_{\mathbb{C}(q)} V}$ ist $\tau - q 1 = e$, $\tau + q^{-1} 1 = (q + q^{-1}) 1 + e$, also

$$(\tau - q 1)(\tau + q^{-1} 1) = e((q + q^{-1}) 1 + e) = (q + q^{-1}) e + e^2.$$

Mit $e^2 = \delta e = -(q + q^{-1}) e$ ist das Produkt null. Da τ invertierbar ist, folgt $\tau + (q^{-1} - q) 1 - \tau^{-1} = 0$, also $\tau - \tau^{-1} = (q - q^{-1}) 1$. \square

Für die spätere Verwendung im Jones-Polynom setzen wir $\sigma := q^{-2} \tau: V \otimes V \longrightarrow V \otimes V$. Dann ist $\sigma^{-1} = q^2 \tau^{-1}$ und

$$q^2 \sigma - q^{-2} \sigma^{-1} = \tau - \tau^{-1} = (q - q^{-1}) 1_{V \otimes_{\mathbb{C}(q)} V}.$$

Die explizite Wirkung von σ auf der Basis $(v_+ \otimes v_+, v_+ \otimes v_-, v_- \otimes v_+, v_- \otimes v_-)$ ist

$$\begin{aligned}\sigma(v_+ \otimes v_+) &= q^{-1} v_+ \otimes v_+, \\ \sigma(v_+ \otimes v_-) &= q^{-2} v_- \otimes v_+, \\ \sigma(v_- \otimes v_+) &= q^{-2} v_+ \otimes v_- + q^{-2} (q - q^{-1}) v_- \otimes v_+, \\ \sigma(v_- \otimes v_-) &= q^{-1} v_- \otimes v_-.\end{aligned}$$

Beispiel 4.3 (Jones-Polynom aus einem geflochtenen Vektorraum). Sei $q \in \mathbb{C}^\times$ keine Einheitswurzel. Wir arbeiten wieder über dem Körper $\mathbb{F} = \mathbb{C}(q)$. Sei (V, σ) der geflochtene Vektorraum mit geordneter Basis (v_1, \dots, v_n) , wobei die Flechtung $\sigma: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ durch

$$\sigma(v_i \otimes v_j) = \begin{cases} q^{-n} v_j \otimes v_i, & i < j, \\ q^{1-n} v_i \otimes v_i, & i = j, \\ q^{-n} v_j \otimes v_i + q^{-n} (q - q^{-1}) v_i \otimes v_j, & i > j \end{cases}$$

gegeben sei. Dann gibt es einen monoidalen Funktor $F: \mathcal{T} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{F}}$ von der Tangle-Kategorie \mathcal{T} in die Kategorie der \mathbb{F} -Vektorräume mit $F(+)=V, F(-)=V^*$, und auf den Erzeugern

$$\begin{aligned} F(\times): V \otimes V &\rightarrow V \otimes V, & F(\times^{-1}): V \otimes V &\rightarrow V \otimes V, \\ F(\cup): V^* \otimes V &\rightarrow \mathbb{F}, & F(\cup'): V \otimes V^* &\rightarrow \mathbb{F}, \\ F(\cap): \mathbb{F} &\rightarrow V \otimes V^*, & F(\cap'): \mathbb{F} &\rightarrow V^* \otimes V. \end{aligned}$$

Für $n=2$ liefert eine geeignete Normierung von F das Jones-Polynom. Ist $(\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ die zur Basis (v_1, \dots, v_n) duale Basis von V^* , so gilt:

$$\begin{aligned} F(\cup)(\alpha^i \otimes v_j) &= \delta_{ij}, & F(\cup')(v_i \otimes \alpha^j) &= q^{1+n-2i} \delta_{ij}, \\ F(\cap)(1) &= \sum_{i=1}^n v_i \otimes \alpha^i, & F(\cap')(1) &= \sum_{i=1}^n q^{2i-1-n} \alpha^i \otimes v_i. \end{aligned}$$

Diese Daten erfüllen die zusätzliche Relation $q^n F(\times) - q^{-n} F(\times^{-1}) = (q - q^{-1}) 1_{V \otimes V}$. Für einen Link L sei $F(L) \in \mathbb{F}$ die Auswertung von F auf einem geschlossenen Link-Diagramm, gegeben durch einen Morphismus in \mathcal{T} . Für $n=2$ definieren wir

$$J(L) := (q + q^{-1})^{-1} F(L) \in \mathbb{F}.$$

Dann ist $J(L)$ invariant unter Reidemeisterbewegungen, erfüllt die Jones-Skeinrelation

$$q^2 J(L_+) - q^{-2} J(L_-) = (q - q^{-1}) J(L_0),$$

und ist durch $J(\bigcirc) = 1$ normalisiert. Damit ist $J(L)$ das Jones-Polynom von L in der Variablen q .

Beweis.

1. **Wohldefiniertheit:** Die Bilder der Becher- und Kappenmorphismen werden durch die Schlangenidentitäten festgelegt. Die Gleichungen für $F(\cup)$ und $F(\cap')$ bedeuten

$$\begin{aligned} F(\cup) \circ F(\cap) &= 1_{\mathbb{F}}, & (1_V \otimes F(\cup)) \circ (F(\cap) \otimes 1_V) &= 1_V, \\ F(\cup') \circ F(\cap') &= 1_{\mathbb{F}}, & (1_V \otimes F(\cup')) \circ (F(\cap') \otimes 1_V) &= 1_V, \end{aligned}$$

Dies erzwingt genau die oben angegebenen Formeln für $F(\cap)$ und $F(\cap')$. Wir führen die Schlangenidentitäten explizit in der Basis durch.

- **Schlangenidentität auf V .** Zu zeigen ist $(1_V \otimes F(\cup)) \circ (F(\cap) \otimes 1_V) = 1_V$. Sei dazu ein Basisvektor $v_k \in V$ gegeben. Wir identifizieren $V \simeq \mathbb{F} \otimes V$ über $v_k \leftrightarrow 1 \otimes v_k$. Zunächst

$$\begin{aligned} (F(\cap) \otimes 1_V)(v_k) &= (F(\cap) \otimes 1_V)(1 \otimes v_k) = \sum_{i=1}^n v_i \otimes \alpha^i \otimes v_k \in V \otimes V^* \otimes V, \\ (1_V \otimes F(\cup))(v_i \otimes \alpha^j \otimes v_k) &= v_i \otimes F(\cup)(\alpha^j \otimes v_k) = v_i \otimes \delta_{jk}, \end{aligned}$$

also gilt auf einem beliebigen Basisvektor v_k :

$$(1_V \otimes F(\cup))((F(\cap) \otimes 1_V)(v_k)) = \sum_{i=1}^n v_i \otimes F(\cup)(\alpha^i \otimes v_k) = \sum_{i=1}^n v_i \otimes \delta_{ik} = v_k \otimes 1 \simeq v_k.$$

Damit gilt für jeden Basisvektor v_k :

$$(1_V \otimes F(\cup)) \circ (F(\cap) \otimes 1_V)(v_k) = v_k.$$

- **Schlangenidentitäten auf V^* .** Hier betrachten wir $(F(\cup) \otimes 1_{V^*}) \circ (1_{V^*} \otimes F(\cap)) = 1_{V^*}$. Sei $\alpha^k \in V^*$ ein Basiselement. Wir identifizieren $V^* \simeq V^* \otimes \mathbb{F}$ über $\alpha^k \leftrightarrow \alpha^k \otimes 1$. Zuerst

$$(1_{V^*} \otimes F(\cap))(\alpha^k) = (1_{V^*} \otimes F(\cap))(\alpha^k \otimes 1) = \sum_{i=1}^n \alpha^k \otimes v_i \otimes \alpha^i \in V^* \otimes V \otimes V^*.$$

Dann wirkt $F(\cup) \otimes 1_{V^*}$ als

$$(F(\cup) \otimes 1_{V^*})(\alpha^k \otimes v_i \otimes \alpha^j) = F(\cup)(\alpha^k \otimes v_i) \otimes \alpha^j = \delta_{ki} \alpha^j,$$

also gilt auf jedem Basisvektor α_k des Dualraums

$$(F(\cup) \otimes 1_{V^*})((1_{V^*} \otimes F(\cap))(\alpha^k)) = \sum_{i=1}^n F(\cup)(\alpha^k \otimes v_i) \otimes \alpha^i = \sum_{i=1}^n \delta_{ki} \alpha^i = \alpha^k.$$

Damit gilt für alle α_k

$$(F(\cup) \otimes 1_{V^*}) \circ (1_{V^*} \otimes F(\cap))(\alpha^k) = \alpha^k.$$

Alle anderen Identitäten wie RM1, RM2, RM3, die verzopfte Schlangenidentität und der modifizierte RM2 folgen analog durch eine explizite, jedoch sehr lange Rechnung. Wir überlassen dies dem interessierten Leser als Übung. Damit respektiert F alle definierenden Relationen und ist ein wohldefinierter monoidal Funktor $F : \mathcal{T} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{F}}$.

2. **Nachweis der Skein-Relation:** Wir müssen nun folgende Relation zeigen:

$$q^n F(\times) - q^{-n} F(\times^{-1}) = (q - q^{-1}) 1_{V \otimes V} \in \text{End}_{\mathbb{C}(q)}(V \otimes V). \quad (*)$$

In der Tangle-Kategorie seien $\times, \times^{-1} : + \otimes + \longrightarrow + \otimes +$ die positive bzw. negative Kreuzung, und $\cap : \emptyset \rightarrow - \otimes +$, $\cup : + \otimes - \rightarrow \emptyset$ die Kappe und Kuppe. Aus diesen drei Elementen bilden wir die drei geschlossenen Tangle-Diagramme

$$\begin{aligned} L_+ &:= \cup \circ (1_- \otimes \times \otimes 1_-) \circ \cap, \\ L_- &:= \cup \circ (1_- \otimes \times^{-1} \otimes 1_-) \circ \cap, \\ L_0 &:= \cup \circ (1_- \otimes 1_{+\otimes+} \otimes 1_-) \circ \cap, \end{aligned}$$

Diagrammatisch sind L_+, L_-, L_0 genau die drei Links, die sich nur in einer kleinen Scheibe durch eine positive Kreuzung, eine negative Kreuzung bzw. eine Glättung unterscheiden. Wenden wir den monoidalen Funktor F an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} F(L_{\pm}) &= F(\cup) \circ (1_{V^*} \otimes F(\times^{\pm 1}) \otimes 1_{V^*}) \circ F(\cap), \\ F(L_0) &= F(\cup) \circ (1_{V^*} \otimes 1_{V \otimes V} \otimes 1_{V^*}) \circ F(\cap). \end{aligned}$$

Nun verketten wir $(*)$ links mit $F(\cup) \otimes 1_{V^*}$ und rechts mit $1_{V^*} \otimes F(\cap)$. Wegen der Funktionalität von F und der Natürlichkeit der Tensorprodukte ergibt sich

$$\begin{aligned} q^n F(L_+) - q^{-n} F(L_-) &= F(\cup) \circ (1_{V^*} \otimes (q^n F(\times) - q^{-n} F(\times^{-1})) \otimes 1_{V^*}) \circ F(\cap) \\ &= F(\cup) \circ (1_{V^*} \otimes (q - q^{-1}) 1_{V \otimes V} \otimes 1_{V^*}) \circ F(\cap) \\ &= (q - q^{-1}) F(\cup) \circ (1_{V^*} \otimes 1_{V \otimes V} \otimes 1_{V^*}) \circ F(\cap) \\ &= (q - q^{-1}) F(\cup \circ (1_- \otimes 1_{+\otimes+} \otimes 1_-) \circ \cap) \\ &= (q - q^{-1}) F(L_0) \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

3. **Normierung:** Für das Unknotendiagramm \bigcirc erhält man

$$F(\bigcirc) = F(\cup') \circ F(\cap) = \sum_{i=1}^n q^{\pm(1+n-2i)} = q^{\pm(n+1)} \sum_{i=1}^n q^{\mp 2i} = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}.$$

Für $n = 2$ ist also

$$F(\bigcirc) = \frac{q^2 - q^{-2}}{q - q^{-1}} = q + q^{-1}.$$

Mit Normierung $J(L) = (q + q^{-1})^{-1}F(L)$ gilt somit $J(\bigcirc) = 1$, und die Skein-Relation für J lautet

$$q^2 J(L_+) - q^{-2} J(L_-) = (q - q^{-1})J(L_0).$$

Setzt man $t = q^2$, so erhält man die übliche Skein-Relation. Die so definierte Invariante $J(L)$ ist daher das Jones-Polynom:

$$t J(L_+) - t^{-1} J(L_-) = (t^{1/2} - t^{-1/2})J(L_0).$$

□

Danksagung: Ich möchte mich besonders bei Thomas Creutzig für die Besprechungen zu dem Vortrag bedanken, sowie bei Catherine Meusburger, die den Quellcode der hier verwendeten Grafiken geschrieben oder die Grafiken selbst gestaltet und zur Verfügung gestellt hat.

Literatur

- [1] M. W. Hirsch. Differential topology, 2012.
- [2] R. Lickorish. An introduction to knot theory, 2012.
- [3] C. Meusburger. Hopf algebras and representation theory of hopf algebras, 2017.
- [4] C. Meusburger. Tensor categories, 2024.
- [5] M. Morishita. Knots and primes, 2012.
- [6] K. Murasugi and B. Kurpita. Knot theory and its applications, 1996.