Farpaitement !

11 février 2016

1 le background

L'homme a rapidement remarqué que les nombres entiers ont un côté magique quand on les combine avec des les opérations élémentaires. Une des plus connues fait le bonheur des amateurs du « compte est bon » : un nombre est divisible par 3 si la somme de ses digits est également divisible par 3 (cela fonctionne aussi avec 9). Par exemple, 123456 se divise par trois. Certaines combinaisons semblent tellement incroyables que l'humanité y a tout de suite vu la main d'une divinité, qui seule pouvait créer une telle complexité. Et l'homme de tenter de décoder l'avenir de l'univers dans les nombres !

Bien entendu, cette approche est généralement biaisée car le mystique, complotiste, ésotériste, ... a tendance a mettre en avant une combinaison très particulière de nombres soit-disant parfaits pour expliquer ceci, cela. Or, la plupart du temps, le charlatan a plutôt trouvé une combinaison amusante et cherche à plaquer une explication dessus, comme avec les prophéties. De plus, cette combinaison n'a souvent rien de particulier. Prenons par exemple 42, que presque tous les amateurs de SF connaissent. Si on le divise en deux parties égales, donc 4 et 2, que l'on fait la somme (6) et que l'on divise par deux, on obtient 3, c'est-à-dire le nombre entre 4 et 2. Le mystique en déduit aussitôt que ce nombre représente la lutte permanente entre chaos et ordre autour d'un point d'équilibre. Donc 42 représente parfaitement l'univers. Sauf que ... une infinité de nombres est comme ça. Par exemple 3335 : $(33 + 35)/2 = 34$. En revanche, 34 est intéressant car dans 123456, si on fait $(12 + 56)/2$, on obtient 34 !

Fort heureusement, les mathématiciens sont là pour chasser le brouillard mystique et étudier correctement les entiers. Ainsi, ils ont proposé une définition « originale » des nombres parfaits. Ce sont les entiers naturels égaux à la somme de leurs diviseurs stricts. Par exemple :

- $6 = 1 + 2 + 3$,
- $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$,
- $496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$,
- $8128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064$,
- etc.

Les quatre premiers nombres parfaits, listés ci-dessus, sont connus depuis l'Antiquité (cf. Nicomaque de Gérase), et l'on en connaît à l'heure actuelle 48, issus des 48 nombres premiers de Mersenne M_p connus (nombres de la forme $2^p - 1$).

En effet, on sait depuis Euclide que :

$$M_p \text{ premier} \Rightarrow \frac{M_p(M_p+1)}{2} \text{ parfait}$$

Dans le cas des nombres parfaits pairs, la réciproque a été démontrée par Euler. En revanche, on ne sait pas s'il existe des nombres parfaits impairs.

On sait également que $2^p - 1$ est premier si :
— l'écriture en base 2 de ce nombre comporte un nombre premier de uns.
— p est lui-même premier.

Les nombres parfaits ont plusieurs propriétés remarquables. Ils sont **triangulaires**, c'est-à-dire de la forme $1+2+3+...+k$. En effet, $\frac{M_p(M_p+1)}{2}$ est de la forme $\frac{N(N+1)}{2}$, soit la somme de termes en progression arithmétique de raison 1, commençant par 1. Ainsi :
— $6 = 1 + 2 + 3$,
— $28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$,
— $496 = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 32$,
— $8128 = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 128$,
— etc.

Ces nombres (sauf 6) sont aussi **hexagonaux**, c'est-à-dire somme de cubes impairs successifs :
— $28 = 1^3 + 3^3$,
— $496 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3$,
— $8128 = 1^3 + 3^3 + ... + 15^3$,
— etc.

Enfin, ce sont des **nombres de Kaprekar en base 2**. Rappelons qu'un nombre de Kaprekar est un nombre qui, dans une base donnée, lorsqu'il est élevé au carré, peut être séparé en une partie gauche et une partie droite (non nulle) telles que la somme donne le nombre initial. Ainsi $703^2 = 494209$, et 494+209=703 : 703 est de Kaprekar en base 10.

2 l'énoncé

Faire un programme qui, pour un entier naturel n donné, produit une liste de booléens, répondant respectivement aux questions suivantes :

1. n est-il parfait ?
2. n est-il triangulaire ?
3. n est-il somme de cubes impairs successifs ?
4. n est il de Kaprekar en base 10 ?
5. n est il de Kaprekar en base 2 ?

Pour cela, votre programme doit lire sur l'entrée standard :

1. un entier N représentant le nombre d'entiers à traiter.
2. N lignes donnant chaque entier à tester.

Votre programme doit écrire sur la sortie standard N lignes. La i^{eme} ligne concerne le i^{eme} entier à traiter. Chaque ligne contient 5 booléens (0 ou 1 séparés par des espaces), répondant dans l'ordre aux cinq questions énoncées ci-dessus.

Le tableau 1 donne un exemple d'entrée et la sortie attendue.

entrée	sortie
6	
3	0 1 0 0 1
6	1 1 0 0 1
21	0 1 0 0 0
703	0 1 0 1 0
4879	0 0 0 1 0
8128	1 1 1 0 1

Table 1 – Exemple d'entrée et la sortie attendue