Лекция 4

2.4. Дифференциальные уравнения высших порядков

1. Теорема существования и единственности. Общий вид обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка следующий:

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{4.1}$$

Частным случаем уравнения (4.1) является уравнение

$$\frac{d^n y}{dx} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right). \tag{4.2}$$

ОДУ вида (4.2) называется уравнение в *нормальной форме*, или уравнением, *разрешённым относительно старшей производной*.

Поставим следующую задачу: найти решение уравнения (4.2) такое, что

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{4.3}$$

где x_0, y_0, y_0', $\ldots$, $y_0^{(n-1)}$ — заданные числа. Задача (4.2), (4.3) называется *задачей Коши*. Условия (4.3) называются *начальными данными* или *данными Коши*.

Теорема существования и единственности. *Рассмотрим дифференциальное уравнение n-го порядка* (4.2). *Пусть функция f и частные производные*

$$\frac{\partial f}{\partial y},\ \ \frac{\partial f}{\partial y'},\ \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$$

непрерывны в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^n$, точка $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ лежит в D. Тогда

1. Существование. *В некоторой окрестности $U = \{x:\ |x - x_0| < \delta\}$ точки x_0 существует решение задачи Коши* (2.2), (2.3).

2. Единственность . *Если $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ — два решения задачи Коши* (2.2), (2.3), *то $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ в некоторой окрестности точки x_0.*

Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка называется множество решений, состоящее из всех без исключения частных решений.

Если правая часть уравнения (4.2) в некоторой области изменения аргументов удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности, то общее решение уравнения (4.2) зависит от n параметров, в качестве которых могут быть выбраны, например, начальные значения искомой функции и её производных y_0, y_0', $\ldots$, $y_)^{(n-1)}$.

Таким образом, общее решение уравнения (4.2) имеет вид:

$$y = \varphi\big(x, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}\big).$$

Так как начальные значения $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ являются параметрами, то мы приходим к выводу, что общее решение уравнения n-го порядка содержит n произвольных постоянных и имеет вид:

$$y = \varphi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right). \tag{4.4}$$

Если соотношение, связывающее x, y и n произвольных постоянных, дано в виде, не разрешённом относительно y:

$$\Phi\left(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n\right) = 0, \tag{4.5}$$

то такое соотношение называется *общим интегралом* уравнения (4.1) или (4.2).

2. Простейшие случаи понижения порядка. В некоторых случаях порядок дифференциального уравнения может быть понижен, что обычно облегчает его интегрирование. Укажем несколько наиболее часто встречающихся классов уравнений, допускающих понижение порядка.

1. *Уравнение не содержит искомой функции и её производных до порядка $k-1$ включительно*:

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{4.6}$$

В этом случае порядок уравнения может быть снижен до $n-k$ заменой переменных $y^{(k)} = p$.

Действительно, после замены переменных уравнение (4.6) принимает вид

$$F\left(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)}\right) = 0.$$

Из этого уравнения определяется $p = p\,(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$, а y находим из $y^{(k)} = p$ k-кратным интегрированием.

Пример 1. Рассмотрим ОДУ 5-го порядка

$$\frac{d^5y}{dx^5} - \frac{1}{x}\frac{d^4y}{dx^4} = 0.$$

Полагая $p = \dfrac{d^4y}{dx^4}$, получаем $\dfrac{dp}{dx} - \dfrac{1}{x}p = 0$. Общим решением этого уравнения является $p = Cx$ (см. пример 2.3). Интегрируя уравнение $\dfrac{d^4y}{dx^4} = Cx$, получим

$$y = C_1x^5 + C_2x^3 + C_3x^2 + C_4x + C_5.$$

2. *Уравнение не содержит независимого пере- переменного*:

$$F\left(y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{4.7}$$

В этом случае порядок уравнения можно понизить на единицу подстановкой $y' = p$, причём p рассматривается как новая неизвестная функция y, $p = p(y)$, и следовательно, все производные $\dfrac{d^ky}{dx^k}$ надо выразить через производные от новой неизвестной функции $p(y)$ по y:

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} = p,\\
&\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p,\\
&\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy}p\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dp}{dy}p\right)\frac{dy}{dx} = \frac{d^2p}{dy^2}p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p
\end{aligned}$$

и аналогично для производных более высокого порядка. При этом очевидно, что производные $\dfrac{d^ky}{dx^k}$ выражаются через производные порядка не выше $k-1$ от p по y, что и приводит к понижению порядка на единицу.

П р и м е р 2. Рассмотрим ОДУ 2-го порядка

$$y\,\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0.$$

Полагая $\dfrac{dy}{dx}=p$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=p\,\dfrac{dp}{dy}$, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$yp\,\frac{dp}{dy}-p^2=0,$$

общее решение которого этого уравнения $p=C_1y$ (см. пример 2.3) или $\dfrac{dy}{dx}=C_1y$. Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\ln|y|=C_1x+C,\quad\Rightarrow y=C_2\mathrm{e}^{C_1x}.$$

3. *Левая часть уравнения*

$$F\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right)=0 \tag{4.8}$$

является производной некоторого дифференциального выражения $(n-1)$*-го порядка* $\Phi\left(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}\right)$.

В этом случае легко находим дифференциальное уравнение $(n-1)$-го порядка, содержащее одну произвольную постоянную, эквивалентное данному уравнению n-го порядка, и тем самым понижаем порядок уравнения на единицу. Действительно, уравнение (4.8) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dx}\,\Phi\left(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}\right)=0. \tag{4.9}$$

Если $y(x)$ является решением уравнения (4.9), то производная $\Phi\left(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}\right)$ тождественно равна нулю. Следовательно, функция $\Phi\left(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}\right)$ равна постоянной

$$\Phi\left(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}\right)=C.$$

П р и м е р 3. Рассмотрим ОДУ 2-го порядка

$$yy''+(y')^2=0.$$

Это уравнение можно записать в виде $\dfrac{d}{dx}\,(yy')=0$, откуда $yy'=C$. Следовательно, общим интегралом является

$$y^2=C_1x+C_2.$$

2.5. Линейные ОДУ с постоянными коэффициентами

1. Чтобы решить линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0, \tag{5.1}$$

надо составить характеристическое уравнение

$$a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \tag{5.2}$$

и найти все его корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Общее решение уравнения (5.1) есть сумма, состоящая из слагаемых вида $C_i e^{\lambda_i x}$ для каждого простого корня λ_i уравнения (5.2) и слагаемых вида

$$\left(C_{m+1} + C_{m+2}x + \ldots + C_{m+k}x^{k-1}\right) e^{\lambda x} \tag{5.3}$$

для каждого кратного корня λ уравнения (5.2), где k — кратность корня. Все C_i — произвольные постоянные. Коэффициенты уравнения (5.1) и корни λ здесь могут быть вещественными или комплексными.

Если же все коэффициенты уравнения (5.1) вещественные, то решение можно написать в вещественной форме и в случае комплексных корней λ. Для каждой пары комплексных сопряжённых корней $\lambda = \alpha \pm \beta i$ в формулу общего решения включаются слагаемые

$$C_{m+1}e^{\alpha x}\cos\beta x + C_{m+2}e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

если эти корни простые, и слагаемые

$$P_{k-1}(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_{k-1}(x)e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

если каждый из корней $\alpha + \beta i$ и $\alpha - \beta i$ имеет кратность k. Здесь $P_{k-1}(x)$ и $Q_{k-1}(x)$ — многочлены степени $k-1$, аналогичные многочлену (5.1), их коэффициенты — произвольные постоянные.

Пример 1. Решить уравнение

$$y^{\mathrm{V}} - 2y^{\mathrm{IV}} - 16y' + 32y = 0.$$

Пишем характеристическое уравнение

$$\lambda^5 - 2\lambda^4 - 16\lambda + 32 = 0.$$

Разлагая левую часть на множители, находим корни:

$$(\lambda - 2)(\lambda^4 - 16) = 0, \quad (\lambda - 2)^2(\lambda + 2)(\lambda^2 + 4) = 0,$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = -1, \quad \lambda_4 = 2i, \quad \lambda_5 = -2i.$$

По изложенным выше правилам пишем общее решение

$$y = (C_1 + C_2x)\,e^{2x} + C_3\,e^{-2x} + C_4\cos 2x + C_5\sin 2x$$

(степень многочлена $C_1 + C_2x$ на 1 меньше кратности корня $\lambda = 2$).

2. Для линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами и с правой частью, состоящей из сумм и произведений функций $\sum_{i=1}^{m} b_i x^i$, $e^{\alpha x}$, $\cos\beta x$, $\sin\beta x$, частное решение можно искать методом неопределённых коэффициентов.

Для уравнений с правой частью $P_m(x)\,e^{\gamma x}$, где $P_m(x)$ — многочлен m-й степени от x, частное решение имеет вид

$$y_1 = x^s Q_m(x)e^{\gamma x}, \tag{5.4}$$

где $Q_m(x)$ — многочлен той же степени m. Число $s = 0$, если γ — не корень характеристического уравнения (5.2), а если γ — корень, то s равно кратности этого корня. Чтобы найти коэффициенты многочлена $Q_m(x)$, надо решение (5.4) подставить в дифференциальное уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях уравнения.

Для уравнения с правой частью

$$e^{\alpha x}\left(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\right) \tag{5.5}$$

можно искать частное решение в виде

$$y_1 = x^s(R_m(x)\cos\beta x + T_m(x)\sin\beta x), \tag{5.6}$$

где $s = 0$, если $\alpha + \beta i$ не корень характеристического уравнения, и s равно кратности корня $\alpha + \beta i$ в противном случае, а R_m и T_m — многочлены степени m, равной наибольшей из степеней многочленов P и Q. Чтобы найти коэффициенты многочленов R_m и T_m, надо подставить решение (5.6) в уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах.

Если правая часть уравнения равна сумме нескольких функций вида $P(x)\,e^{\gamma x}$ и вида (5.5), то частное решение отыскивается по следующему правилу.

Частное решение линейного уравнения с правой частью $f_1 + \ldots + f_p$ равно сумме частных решений уравнений с той же левой частью и правыми частями $f_1, \ldots, f_p$.

Общее решение линейного неоднородного уравнения во всех случаях равно сумме частного решения этого уравнения и общего решения однородного уравнения с той же левой частью.

П р и м е р 2. Решить уравнение

$$y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x} + e^{3x}\cos 2x. \tag{5.7}$$

Характеристическое уравнение $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = 0$. имеет корень $\lambda = 3$ кратности 2 и корень $\lambda = 0$ кратности 1. Поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_0 = (C_1 + C_2 x)\,e^{3x} + C_3.$$

Правая часть (5.7) состоит из двух слагаемых вида (5.4) и (5.5). Ищем отдельно частные решения уравнений

$$y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x}. \tag{5.8}$$

$$y''' - 6y'' + 9y' = e^{3x}\cos 2x. \tag{5.9}$$

Число $\lambda = 3$ является корнем кратности $s = 2$, поэтому частное решение уравнения (5.8) согласно (5.4) имеет вид

$$y_1 = x^2(ax + b)\,e^{3x} = (ax^3 + bx^2)\,e^{3x}.$$

Найдём производные y_1. Имеем

$$y_1' = \left[(3ax^2 + 2bx) + 3(ax^3 + bx^2)\right]e^{3x} = \left[3ax^3 + x^2(3a + 3b) + 2bx\right]e^{3x},$$

$$y_1'' = \left[9ax^2 + 2x(3a + 3b) + 2b\right]e^{3x} + 3\left[3ax^3 + x^2(3a + 3b) + 2bx\right]e^{3x} =$$
$$= \left[9ax^3 + x^2(18a + 9b) + x(6a + 12b) + 2b\right]e^{3x},$$

$$y_1''' = \big[27ax^2 + 2x(18a+9b) + (6a+12b)\big]\,\mathrm{e}^{3x} + \\ + 3\big[9ax^3 + x^2(18a+9b) + x(6a+12b) + 2b\big]\,\mathrm{e}^{3x} =$$

$$= \big[27ax^3 + x^2(81a+27b) + x(54a+54b) + (6a+18b)\big]\,\mathrm{e}^{3x},$$

Подставим y_1, y_1', y_1'', y_1''', в (5.8). Получим, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях:

x^3: $27a - 6\cdot 9a + 9\cdot 3a = 0,$

x^2: $(81a+27b) - 6(18a+9b) + 9(3a+3b) = 0,$

x^1: $(54a+54b) - 6(6a+12b) + 9\cdot 2b = 1,$

x^1: $(6a+18b) - 6\cdot 2b + 9\cdot 0 = 0.$

В результате $18a = 1$ и $6a + 6b = 0$, откуда $a = 1/18$, $b = -1/18$.

Далее, число $\alpha + \beta i = 3 + 2i$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение уравнения (5.9) согласно (5.6) имеет вид

$$y_2 = \mathrm{e}^{3x}(c\cos 2x + d\sin 2x).$$

Найдём производные y_2. Имеем

$$y_2' = (-2c\sin 2x + 2d\cos 2x)\,\mathrm{e}^{3x} + 3(c\cos 2x + d\sin 2x)\,\mathrm{e}^{3x} =$$

$$= \big[(3c+2d)\cos 2x + (-2c+3d)\sin 2x\big]\,\mathrm{e}^{3x},$$

$$y_2'' = \big[(-6c-4d)\sin 2x + (-4c+6d)\cos 2x\big]\,\mathrm{e}^{3x} + \\ + 3\big[(3c+2d)\cos 2x + (-2c+3d)\sin 2x\big]\,\mathrm{e}^{3x} =$$

$$= \big[(5c+12d)\cos 2x + (-12c+5d)\sin 2x\big]\,\mathrm{e}^{3x},$$

$$y_2''' = \big[(-10c-24d)\sin 2x + (-24c+10d)\cos 2x\big]\,\mathrm{e}^{3x} + \\ + 3\big[(5c+12d)\cos 2x + (-12c+5d)\sin 2x\big]\,\mathrm{e}^{3x} =$$

$$= \big[(-9c+46d)\cos 2x + (-46c-9d)\sin 2x\big]\,\mathrm{e}^{3x},$$

Подставим y_2, y_2', y_2'', y_2''', в (5.9). Получим, приравнивая коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$:

$\cos 2x$: $(-9c+46d) - 6(5c+12d) + 9(3c+2d) = 1,$

$\sin 2x$: $(-46c-9d) - 6(-12c+5d) + 9(-2c+3d) = 0,$

В результате $-12c - 8d = 1$ и $8c - 12d = 0$, откуда $c = -3/52$, $d = -1/26$.

Общее решение уравнения (5.7) равно $y = y_0 + y_1 + y_2$. Итак

$$y = (C_1 + C_2x)\,\mathrm{e}^{3x} + C_3 + \frac{x^2}{18}\,(x-1)\,\mathrm{e}^{3x} - \frac{1}{52}\,(3\cos 2x + 2\sin 2x)\,\mathrm{e}^{3x}.$$