

ПЛФ

Задача 1



Тензор a_{mipj} задаёт собой некоторую полилинейную форму $W \in \Omega_0^4(\mathbb{R}^2)$ в стандартном базисе пространства \mathbb{R}^2 .

Компоненты тензора a_{mipj} представляются матрицей A :

$$A = \left\| \begin{array}{cc|cc} -1 & 6 & 4 & -4 \\ -6 & 1 & -2 & 0 \\ \hline -2 & -2 & 1 & 3 \\ -5 & -6 & -4 & 3 \end{array} \right\|$$

В матрице тензора a индекс m определяется номером строки, индекс i определяется номером столбца, индекс p определяется номером слоя по горизонтали, индекс j определяется номером слоя по вертикали.

Найти значение этой ПЛФ на наборе векторов v , заданных в стандартном базисе

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Пример ввода: 1337

Ваш ответ: 1616

Задача 2



Вычислить произведение тензоров $a \otimes b$, если

$$a_{nr} \rightarrow A = \left\| \begin{array}{cc|c} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{array} \right\|$$

$$b_p \rightarrow B = \left\| \begin{array}{ccc} 2 & -2 & 0 \end{array} \right\|$$

В матрице A индекс n определяется номером строки, индекс r определяется номером столбца

В матрице B индекс p определяется номером столбца

В результирующей матрице индекс n определяется номером строки, индекс r определяется номером столбца, индекс p определяется номером слоя по горизонтали

Результирующему тензору с матрицей $\left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right\|$ соответствует

Пример ввода: [1, 2, 3, -1; 2, 1, -1, 3]

Ваш ответ: [-6, 4, -2, 6, -4, 2, 0, 0, 0; 4, 0, 2, -4, 0, -2, 0, 0, 0; 0, -2, -4, 0, 2, 4, 0, 0, 0]

Задача 3



Тензор a_p задан в стандартном базисе матрицей A .

$$A = \left\| \begin{array}{ccc} -2 & 2 & 4 \end{array} \right\|$$

В матрице A индекс p определяется номером столбца.

Тензор b_m^{lr} задан в стандартном базисе матрицей B .

$$B = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 4 & 2 & 1 & 1 & 1 & 4 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 4 & -4 & 4 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right\|$$

В матрице B индекс l определяется номером строки, индекс r определяется номером столбца, индекс m определяется номером слоя по горизонтали

Найти тензор матрицу C тензора c , если $c_m^r = a_l b_m^{lr}$

В результирующем тензоре индекс r определяется номером строки, индекс m определяется номером столбца.

Результирующему тензору с матрицей

$$C = \left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right\|$$

соответствует

Пример ввода: [1, 2, 3, -1; 2, 1, -1, 3]

Ваш ответ: [-10, -6, 16; -2, -26, -4; 4, -8, -2]

Задача 4



Тензоры a_{jk} и b_{ik} заданы своими матрицами A и B в стандартном базисе.

$$A = \left\| \begin{array}{cc} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{array} \right\|$$

$$B = \left\| \begin{array}{cc} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{array} \right\|$$

В матрице тензора a индекс j определяется номером строки, индекс k определяется номером столбца.

В матрице тензора b индекс i определяется номером строки, индекс k определяется номером столбца.

Найдите матрицу тензора c , если $c = 4a - 4b$.

В результирующем тензоре соглашение о порядке записи компонентов в матрицу тензора должно быть таким же, как в матрицах тензоров a и b .

Результирующему тензору с матрицей $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$ соответствует

Пример ввода: [1, 2, 3, -1; 2, 1, -1, 3]

Ваш ответ: [0, 0; -12, 0]

Задача 5



Квадратичная форма q в некотором базисе задаётся формулой:

$$q(x) = -(\xi^1)^2 + 2\xi^1\xi^2 - (\xi^2)^2$$

Найти матрицу этой квадратичной формы.

Дробные числа в ответе вводить с точностью не менее 3 знаков после запятой, для рациональных дробей допустима запись в виде a/b .

Пример ввода:

[1, 0; 0, -3/4]

Ваш ответ: [-1, 1; 1, -1]

Задача 6



Пусть задан стандартный базис пространства линейных форм

$$\begin{aligned} f^1 &= (1 \ 0 \ 0), \\ f^2 &= (0 \ 1 \ 0), \\ f^3 &= (0 \ 0 \ 1) \end{aligned}$$

Пусть задан набор линейных форм своими коэффициентами в стандартном базисе

$$\begin{aligned} g^1 &= (-4 \ -2 \ 0), \\ g^2 &= (2 \ 2 \ -2), \\ g^3 &= (0 \ 0 \ 2) \end{aligned}$$

Пусть тензор a определяется выражением

$$a = g^1 \wedge g^2 \wedge g^3$$

Представить тензор a в виде внешнего произведения линейной комбинации базисных линейных форм $\{f^i\}_{i=1}^3$.

При этом каждое из слагаемых должно быть уникальным, а линейные формы в произведении должны быть расположены в порядке возрастания индексов.

При вводе ответа расположите каждое из слагаемых на отдельной строке в следующем виде: числовой коэффициент перед этим слагаемым, а затем после пробела в квадратных скобках через запятую порядковые номера базисных линейных форм.

Ответу

$$a = 3f^1 \wedge f^2 \wedge f^4 - 2f^2 \wedge f^3 \wedge f^4 + f^1 \wedge f^2 \wedge f^3$$

соответствует

Пример ввода: 3 [1, 2, 4]

-2 [2, 3, 4]

1 [1, 2, 3]

Ваш ответ: -8 [1, 2, 3]

Задача 7



Найти базис ядра линейной формы: $f(-1, 6, 4, -3)$

Ответу $\left\{ \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{7}, \frac{1}{2} \right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -2 \right), (-5, 1, 0) \right\}$ **соответствует**

Пример ввода: [-14, 12, 21; 2, 3, -8; -5; 1; 0]

Ваш ответ: [6, 1, 0, 0; 4, 0, 1, 0; -3, 0, 0, 1]

Задача 8



Найти базис пространства R^{*4} , сопряженный данному:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -5 \\ 10 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 7 \\ -14 \end{bmatrix}, e_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -7 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Пример ответа:

$$f^1 = (1.11 \quad 2.22 \quad 3.33) \quad f^2 = (4.44 \quad 5.55 \quad 6.66) \quad f^3 = (7.77 \quad 8.88 \quad 9.99)$$

Пример ввода: [1.11, 2.22, 3.33; 4.44, 5.55, 6.66; 7.77, 8.88, 9.99]

Ваш ответ: [5, 4, 0, -1; 2, 3, 4, 1; 0, 1, 5, 2; 0, 0, 2, 1]

[На главную](#)