Лекция 13

6. Линейное программирование

6.1. Постановка задач линейного программирования

Общая задача линейного программирования может быть сформулирована следующим образом: минимизировать функцию

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j =< \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} >, \tag{1.1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, k, \tag{1.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = k+1, \ldots, m, \tag{1.3}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, s, \tag{1.4}$$

где c_j, b_i, a_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, — заданные числа.

Функция (1.1) называется *целевой функцией*, условия (1.2) — *ограничениями типа неравенств*, условия (1.3) — *ограничениями типа равенств*. Условия (1.4) неотрицательности переменных тоже являются ограничениями типа неравенств, но их принято выделять отдельно. В задаче (1.1) – (1.4) не исключаются случаи, когда в (1.1) – (1.4) отсутствуют ограничения типа неравенств или типа равенств.

Точка $(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая всем условиям (1.2) – (1.4), называется *планом* (или *допустимой* точкой) задачи (1.1) – (1.4). Множество всех допустимых точек будет называться *допустимым множеством* и обозначаться через X.

Пусть $f_* = \inf\limits_{x \in X} f(x)$ — нижняя грань функции $f(x)$ на множестве X. Точку $x_* \in X$ называют решением задачи (1.5), если $f(x_*) = f_*$. Множество решений этой задачи обозначим через X_*. Таким образом,

$$X_* = \{x \in X : \ f(x) = f_*\}.$$

Задача (1.1) – (1.4) называется *разрешимой*, если $X \neq \varnothing$, $f_* > -\infty$ и $X_* \neq \varnothing$.

Для обозначения задачи минимизации функции $f(x)$ на множестве X часто пользуются следующей краткой записью:

$$f(x) \to \min, \quad x \in X. \tag{1.5}$$

Задача максимизации функции $f(x)$ на множестве X записывается в виде

$$f(x) \to \max, \quad x \in X. \tag{1.6}$$

Для задачи (1.6) введём обозначения: $f^* = \sup\limits_{x \in X} f(x)$ — верхняя грань функции $f(x)$ на множестве X; $X^* = \{x \in X : \ f(x) = f^*\}$ — множество решений задачи (1.6). Эта задача равносильна задаче минимизации

$$h(x) = -f(x) \to \min, \quad x \in X, \tag{1.7}$$

т. е. всякое решение задачи (1.7) является решением задачи (1.6) и обратно.

Пусть $A \in \mathrm{Mat}(m, n)$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$.

Основной задачей ЛП называется задача:

$$< \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} > \to \min, \quad A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}. \tag{1.8}$$

Основная задача получается из общей при $s = 0$, $k = m$.

Стандартной задачей ЛП называется задача:

$$< \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} > \to \min, \quad A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}. \tag{1.9}$$

Стандартная задача получается из общей при $s = n$, $k = m$.

Канонической задачей ЛП называется задача:

$$< \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} > \to \min, \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}. \tag{1.10}$$

Каноническая задача получается из общей при $s = n$, $k = 0$.

1. Ограничение-неравенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i$$

добавлением в левую часть дополнительной неотрицательной переменной преобразуется в ограничение-равенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i, \quad x_{n+1} \ge 0.$$

2. Ограничение-равенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$

можно записать в виде системы ограничений-неравенств

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i \\ -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n \le -b_i. \end{cases}$$

3. Если переменная x_k не подчинена условию неотрицательности, то её можно заменить двумя неотрицательными переменными u_k, v_k, приняв $x_k = u_k - v_k$.

Преобразования **1**, **2**, **3** позволяют любую задачу ЛП на максимум или минимум представить в любой из указанных форм.

Пример 1. Записать в форме канонической задачи на минимум следующую задачу:

$$F = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5 \to \max$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 \le 2 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 \le 3 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \le 6. \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \ge 0.$$

Используя (1.7) и преобразование 2, получим

$$-3x_1 + 2x_2 + 5x_4 - x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 2 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 3 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 = 6. \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8 \ge 0.$$

6.2. Примеры задач линейного программирования

Задача планирования производства

Пусть некоторое предприятие производит n типов товаров, затрачивая при этом m типов ресурсов. Известны следующие параметры:

a_{ij} — количество i-го ресурса, необходимое для производства единичного количества j-го товара, $a_{ij} \geq 0$ $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$;

b_i — запас i-го ресурса на предприятии, $b_i > 0$;

c_j — цена единичного количества j-го товара, $c_j > 0$.

Предполагается, что технология производства линейна, т. е. затраты ресурсов растут прямо пропорционально объёму производства. Пусть число x_j показывает планируемый объём производства j-го товара. Тогда допустимым является только такой набор производимых товаров $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, при котором суммарные затраты каждого i-го ресурса не превосходят его запаса:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.1}$$

Кроме того, имеем следующее естественное ограничение:

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.2}$$

Стоимость набора товаров $\boldsymbol{x}$ выражается величиной

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j. \tag{2.3}$$

Задача планирования производства ставится следующим образом: среди всех векторов $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющих ограничениям (2.1), (2.2), найти такой, при котором величина (2.3) принимает наибольшее значение. Таким образом, мы получаем задачу ЛП в стандартной форме (1.9) с той лишь спецификой, что матрица $A = (a_{ij})$ здесь неотрицательна, а векторы $\boldsymbol{b} = (b_i)$ и $\boldsymbol{c} = (c_j)$ положительны.

Задача о рационе

При организации питания больших коллективов людей, например в армии, больницах и т. п., возникает задача о наиболее экономном рационе питания, удовлетворяющем определённым медицинским требованиям. Пусть имеется n продуктов питания (хлеб, мясо, молоко, картофель и т. п.), в которых учитывается m полезных веществ (жиры, белки, углеводы, витамины и т. п.). Известны следующие параметры:

a_{ij} — содержание i-го вещества в единичном количестве j-го продукта, $a_{ij} \geq 0$ $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$;

b_i — минимальное количество i-го вещества, которое должно потребляться индивидуумом в расчёте, скажем, на месяц, $b_i > 0$;

c_j — цена единичного количества j-го продукта, $c_j > 0$.

Задача о рационе формулируется следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ \to\ \min.$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.4}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

где x_j обозначает количество j-го продукта, потребляемого индивидуумом в течение месяца. Иными словами, среди всех рационов питания $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, покрывающих минимальные потребности индивидуума в полезных веществах, необходимо выбрать наиболее дешевый.

Отметим, что (2.4) — это просто стандартная задача ЛП на минимум с неотрицательными параметрами.

Транспортная задача

Пусть некоторый однородный продукт (уголь, кирпич, картофель и т. п.) хранится на m складах и потребляется в n пунктах. Известны следующие параметры:

a_i — запас продукта на i-м складе, $a_i > 0$ $(i = 1, \ldots, m)$;

b_j — потребность в продукте в j-м пункте, $b_j > 0$ $(j = 1, \ldots, n)$;

c_{ij} — стоимость перевозки единичного количества продукта с i-го склада в j-й пункт, $c_{ij} > 0$.

При этом суммарные запасы равны суммарным потребностям:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{2.5}$$

Транспортная задача ставится как каноническая задача ЛП следующего специального вида:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \ \to \ \min.$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.6}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

где x_{ij} показывает количество продукта, перевозимого с i-го склада в j-й пункт. Иными словами, требуется так организовать перевозки продукта со складов в пункты потребления, чтобы при полном удовлетворении потребностей минимизировать суммарные транспортные расходы. Заметим, что условие (2.5) является необходимым и достаточным для существования по крайней мере одной матрицы перевозок $X = (x_{ij})$, удовлетворяющей ограничениям задачи (2.6).

Лекция 14

6.3. Геометрическая интерпретация задачи ЛП

Задачу ЛП с двумя переменными можно решить геометрически.

Пусть, например, дана основная задача ЛП (1.8) при $n = 2$. Тогда необходимо прежде всего изобразить на плоскости допустимое множество этой задачи

$$X = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : \ A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \right\}.$$

Линии уровня её целевой функции представляют собой семейство параллельных прямых

$$< \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} >= \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

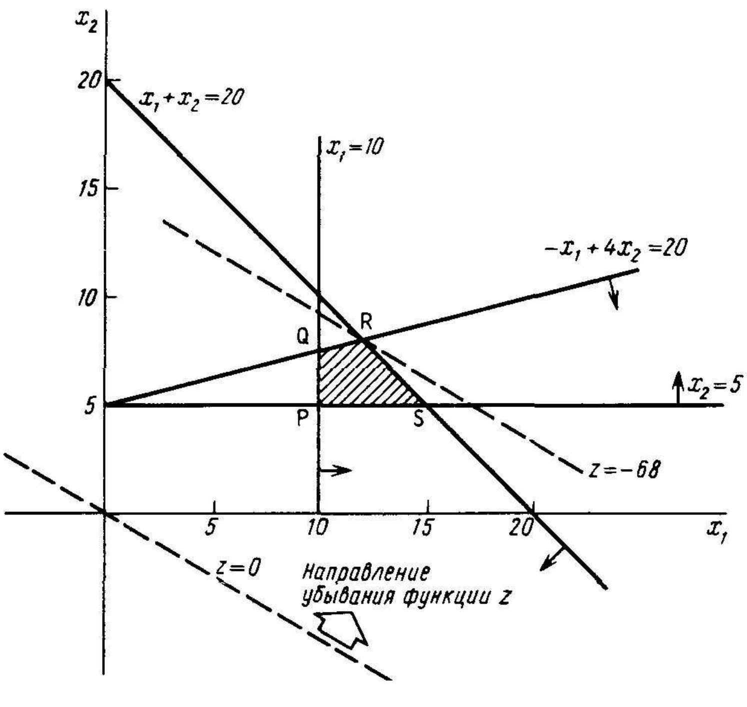
причём их общая нормаль $\boldsymbol{c}$ *смотрит* в сторону возрастания функции $< \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} >$. Поиск решения задачи сводится к нахождению максимального числа α^* среди всех α, при которых прямая $< \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} >= \alpha$ имеет непустое пересечение с X. Если такое (конечное) α^* существует, то оно является значением задачи. При этом любая точка на прямой $< \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} >= \alpha^*$, лежащая в X, служит решением задачи. Решение x^* может быть как единственным, так и неединственным. Если при всех достаточно больших α пересечение прямой $< \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} >= \alpha$ с X непусто, то значение задачи бесконечно, и, следовательно, она не имеет решения.

Пример 1. Минимизировать функцию

$$z = -3x_1 - 4x_2$$

при ограничениях $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 20 \\ -x_1 + 4x_2 \le 20 \\ x_1 \ge 10 \\ x_2 \ge 5. \end{cases}$$



Допустимой областью, изображённой на рисунке, является четырёхугольник PQRS. Функция z убывает в направлении вектора

$$-\nabla z = (3,4)^t.$$

Минимальное значение функции $z = -68$ и достигается в точке $R(12,8)$.

Пример 2. Минимизировать функцию

$$z = -6x_1 - 2x_2$$

при ограничениях $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$,

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 9 \\ \ \ 3x_1 + x_2 \leq 6. \end{cases}$$

На рисунке четырёхугольник OABC изображает допустимую область. Вектор

$$-\nabla z = (6,2)^t$$

указывает направление убывания функции z. Любая точка на отрезке $[B,C]$ является оптимальным решением.

Произвольная точка отрезка $[B,C]$ представляется формулой

$$\theta\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) + (1-\theta)(2,0) = \left(2-\frac{\theta}{2},\frac{3\theta}{2}\right) = \left(\frac{4-\theta}{2},\frac{3\theta}{2}\right),$$

где $0 \leq \theta \leq 1$. Для каждой такой точки значение функции z равно

$$-6\cdot\frac{4-\theta}{2} - 2\cdot\frac{3\theta}{2} = -12.$$

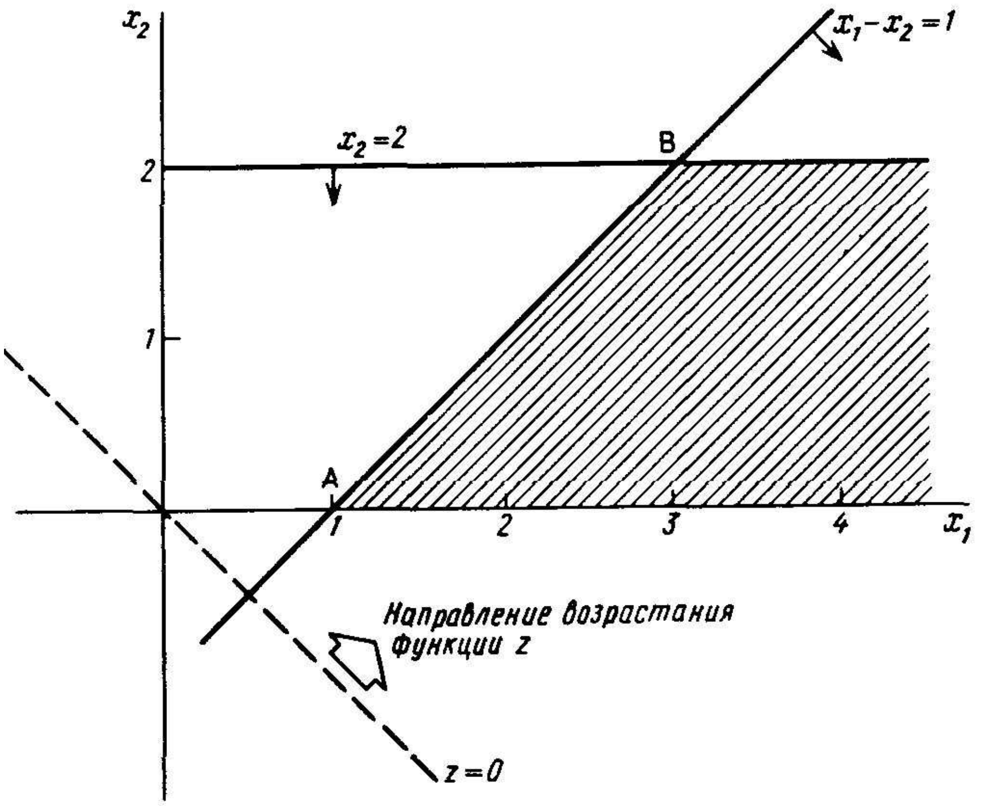
П р и м е р 3. Максимизировать функцию

$$z = x_1 + x_2$$

при ограничениях $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$,

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 1 \\ \qquad x_2 \leq 2. \end{cases}$$

Допустимая область, изображенная на рисунке, не ограничена в направлении, в котором функция z возрастает, т. е. в допустимой области не существует конечной точки, в которой функция z достигала бы максимума. Решение, как и максимальное значение функции z, не ограничено.



Однако некоторые задачи с неограниченными допустимыми областями имеют конечные решения. Например, задача максимизации функции $z' = x_2$ при ограничениях из примера 3 имеет конечное решение. Разумеется, если бы задача состояла в минимизации функции $z = x_1 + x_2$ при тех же ограничениях, то минимум достигался бы в единственной точке ($z_{min} = 1$ в вершине допустимой области $A(1, 0)$).

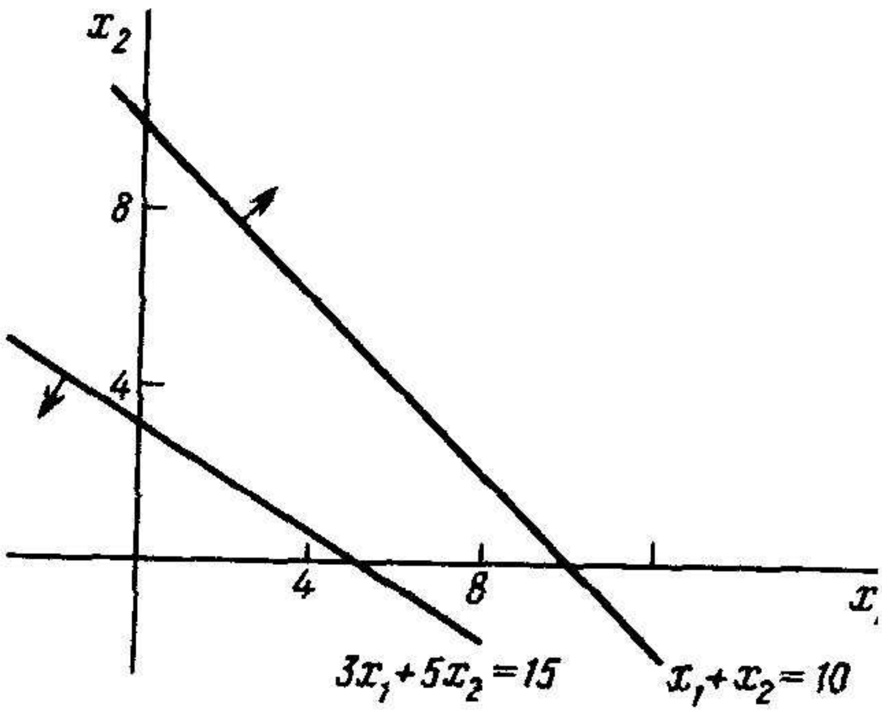
П р и м е р 4. Минимизировать функцию

$$z = 2x_1 + 3x_2$$

при ограничениях $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$,

$$\begin{cases} \quad x_1 + x_2 \geq 10 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 15. \end{cases}$$

Ограничения задачи противоречивы, поэтому нет допустимых решений.


x_2
8
4
4
8
x_1
$3x_1+5x_2=15$
$x_1+x_2=10$