Лекция 7

3.6. Вторая вариация функционала

Функционал $J[x, y]$, зависящий от двух элементов x и y, принадлежащих некоторому банахову пространству R, называется *билинейным*, если

$$J[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y] = \alpha_1 J[x_1, y] + \alpha_2 J[x_2, y]$$
$$J[x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2] = \beta_1 J[x, y_1] + \beta_2 J[x, y_2],$$

для любых x, y, x_1, y_1, x_2, y_2, принадлежащих R, и для любых чисел α_1, β_1, α_2, β_2.

Пусть $J[x, y]$ — билинейный функционал. Функция $J[x, x]$ называется *квадратичным функционалом.* Квадратичный функционал $J[x, x]$ называется *положительно определённым*, если

$$J[x, x] > 0$$

для любого ненулевого элемента x.

Пример 1. Выражение

$$\int_a^b A(t)x(t)y(t)\,dt,$$

где $A(t)$ — фиксированная функция, представляет собой билинейный функционал, а

$$\int_a^b A(t)\,x^2(t)\,dt,$$

— квадратичный функционал в пространстве $C[a, b]$ Если $A(t) > 0$ при всех t, $a \leq t \leq b$, то квадратичный функционал будет положительно определённым.

Пример 2. Интеграл

$$\int_a^b \int_a^b K(s, t)\,x(s)\,y(t)\,ds\,dt,$$

где $K(s, t)$ — фиксированная функция двух переменных, является билинейным функционалом в пространстве $C[a, b]$. Заменив здесь $y(t)$ на $x(t)$, получим квадратичный функционал

$$\int_a^b \int_a^b K(s, t)\,x(s)\,x(t)\,ds\,dt,$$

Пусть $J[y]$ — функционал, определённый на каком-либо банаховом пространстве R. Функционал $J[y]$ имеет вторую вариацию, если его приращение можно записать в виде

$$\Delta J = J[y + h] - J[y] = l_1(h) + l_2(h) + \beta\,\|h\|^2, \tag{6.1}$$

где $l_1(h)$ — линейный функционал, $l_2(h)$ — квадратичный функционал, а $\beta \to 0$ при $\|h\| \to 0$. Квадратичный функционал $l_2(h)$ называется *второй вариацией* функционала $J[y]$ и обозначается $\delta^2 J[h]$

Теорема 1. *Предположим, что функционал $J[y]$ имеет в точке y вторую вариацию. Тогда $\delta^2 J$ определяется единственным образом.*

Доказательство. Это доказывается точно также, как и однозначность первой вариации (теорема 3.1). ■

Пример 3. Найти вторую вариацию функционала

$$J[y] = \int_0^1 (xy^2 + y'^3)\, dx,$$

определённого в пространстве $C^1[0,1]$.

Решение.

$$\Delta J = J[y+h] - J[y] = \int_0^1 \left[x(y+h)^2 + (y'+h')^3 - xy^2 - y'^3 \right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left[2xyh + xh^2 + 3y'^2 h' + 3y'h'^2 + h'^3 \right] dx =$$

$$= \int_0^1 (2xyh + 3y'^2 h')\, dx + \int_0^1 (xh^2 + 3y'h'^2)\, dx + \int_0^1 h'^3\, dx.$$

При фиксированном $y(x)$ первое слагаемое правой части есть линейный относительно $h(x)$ функционал; второе слагаемое правой части есть квадратичный функционал. Третье слагаемое правой части допускает оценку

$$\left| \int_0^1 h'^3\, dx \right| \le \left(\max_{x \in [0,1]} |h'(x)| \right)^3 \le \|h\|_1^3,$$

откуда видно, что это слагаемое представимо в виде $\beta \|h\|_1^2$, где $\beta \to 0$ при $\|h\|_1 \to 0$. Таким образом,

$$\delta^2 J = \int_0^1 \left(xh^2 + 3y'h'^2 \right) dx.$$

Теорема 2. *Если функционал $J[y]$ в точке y имеет вторую вариацию, то его вторую вариацию можно посчитать по формуле*:

$$\delta^2 J[h] = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2}\, J[y+th]\big|_{t=0}. \tag{6.2}$$

Доказательство. Аналогично доказательству теорема 3.2. ■

Пример 4. Рассмотрим функционал из примера 3. Как было показано, этот функционал имеет вторую вариацию. Поэтому вариацию этого функционала можно найти по формуле (6.2). Имеем

$$\frac{d^2}{dt^2} J[\,y+th\,] = \frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 \left[x(y+th)^2 + (y'+th')^3 \right] dx = \int_0^1 \left[2xh^2 + 6h'^2(y'+th') \right] dx.$$

Полагая в этом выражении $t=0$, получим

$$\delta^2 J = \int_0^1 \left(xh^2 + 3y'h'^2 \right) dx.$$

Теорема 3. *Пусть функционал $J[y]$ имеет вторую вариацию в точке y_0. Для того, чтобы функционал $J[y]$ при $y = y_0$ имел минимум (максимум), необходимо, чтобы при $y = y_0$ выполнялось условие*

$$\delta^2 J[h] \ge 0 \quad (\le 0) \tag{6.3}$$

для всех допустимых h.

Доказательство. В точке экстремума $\delta J[h] = 0$, поэтому если $\delta^2 J[h] \neq 0$, то при достаточно малом $\|h\|$ знак выражения

$$\Delta J[h] = \delta^2 J[h] + \beta \|h\|^2$$

будет совпадать со знаком $\delta^2 J[h]$. Пусть $\delta^2 J[h_0] < 0$ при некотором h_0. Тогда при любом $\varepsilon \neq 0$ имеем

$$\delta^2 J[\varepsilon h_0] = \varepsilon^2 \delta^2 J[h_0] < 0,$$

и следовательно, $\Delta J = J[y_0 + \varepsilon h_0] - J[y_0] < 0$ при достаточно малом ε, т. е. при $y = y_0$ минимума нет. Аналогично и в случае максимума. ■

Неотрицательность второй вариации необходима, но, конечно, не достаточна для того, чтобы функционал $J[y]$ достигал на данной кривой минимума. Для получения достаточного условия минимума введём следующее понятие. Квадратичный функционал $l_2(h)$, заданный в некотором банаховом пространстве, *сильно положителен*, если существует такое постоянное $k > 0$, что

$$l_2(h) \geq k \|h\|^2,$$

для всех h.

Теорема 4. Для того чтобы функционал $J[y]$, определённый в банаховом пространстве E, имел в точке $y = y_0$, в которой $\delta J = 0$, строгий минимум, достаточно, чтобы при $y = y_0$ его вторая вариация была сильно положительна, т. е. чтобы выполнялось условие

$$\delta^2 J(h) \geq k \|h\|^2, \tag{6.4}$$

где $k = const > 0$.

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы при $\|h\| < \varepsilon$ величина β в равенстве (6.1) удовлетворяла условию $\|h\| < \dfrac{k}{2}$. Тогда

$$\Delta J = \delta^2 J(h) + \beta \|h\|^2 > \frac{k}{2} \|h\|^2 > 0$$

при $\|h\| < \varepsilon$, т. е. имеет место строгий минимум. ■

3.7. Достаточные условия экстремума

Будем рассматривать простейшую задачу вариационного исчисления. Таким образом,

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')\, dx. \tag{7.1}$$

Функционал $J[y]$ определён на функциях $y(x) \in C^1[a, b]$, удовлетворяющих условиям

$$y(a) = A, \quad y(b) = B, \tag{7.2}$$

Дадим функции $y(x)$ приращение $h(x)$, удовлетворяющее условиям

$$h(a) = h(b) = 0. \tag{7.3}$$

Справедлива формула для второй вариации

$$\delta^2 J = \int_a^b \left(Qh^2 + Ph'^2\right)\, dx, \tag{7.4}$$

где

$$Q = \frac{1}{2}\left(F_{yy} - \frac{d}{dx}\, F_{yy'}\right), \quad P = \frac{1}{2}\, F_{y'y'} \tag{7.5}$$

Теорема 1. (Лежандр) *Для того, чтобы функционал* (7.1) *достигал на кривой* $y = y(x)$ *минимума (максимума), необходимо, чтобы вдоль этой кривой выполнялось условие*

$$F_{y'y'} \geq 0 \quad (F_{y'y'} \leq 0). \tag{7.6}$$

Условие (7.5) называется *условием Лежандра.* Условие

$$F_{y'y'} > 0 \quad (F_{y'y'} < 0). \tag{7.7}$$

называется *усиленным условием Лежандра.*

Рассмотрим квадратичный функционал

$$\int_a^b \left(Qh^2 + Ph'^2\right)\, dx, \tag{7.8}$$

на множестве функций $h \in C^1[a, b]$, удовлетворяющих условиям (7.3).

Напишем для квадратичного функционала (7.8) уравнение Эйлера. Получим

$$-\frac{d}{dx}\,(Ph') + Qh = 0. \tag{7.9}$$

Уравнение называется *уравнением Якоби.* Уравнению (7.9) и граничным условиям (7.3) удовлетворяет, очевидно, функция $h(x) \equiv 0$. Однако оно может, вообще говоря, иметь и другие решения, удовлетворяющие тем же граничным условиям.

Точка $\tilde{x}$ называется *сопряжённой* с точкой $x = a$, если уравнение (7.9) имеет решение, не равное нулю тождественно, обращающееся в нуль при $x = a$ и при $x = \tilde{x}$.

Теорема 2. *Если* $P(x) > 0$, $a \leq x \leq b$, *и отрезок* $[a, b]$ *не содержит точек, сопряжённых с* a, *то квадратичный функционал* (7.8) *положительно определён для всех* $h \in C^1[a, b]$, *удовлетворяющих условиям* (7.3).

Сформулируем систему условий, достаточных для того, чтобы допустимая кривая $y = y(x)$ реализовывала экстремум функционала

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')\, dx, \quad y(a) = A, \; y(b) = B. \tag{7.10}$$

1. Кривая $y = y(x)$ является экстремалью, т. е. удовлетворяет уравнению Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx}\, F_{y'} = 0.$$

2. Вдоль этой кривой

$$P(x) \equiv \frac{1}{2}\, F_{y'y'}\,(x, y(x), y'(x)) > 0$$

(усиленное условие Лежандра).

3. Отрезок $[a, b]$ не содержит точек, сопряжённых с точкой $x = a$ (усиленное условие Якоби).

Теорема 3. *Если допустимая кривая функционала* (7.10) *удовлетворяет условиям* 1 — 3, *то эта кривая реализует минимум данного функционала.*

Пример 1. Исследовать на экстремум функционал

$$J[y] = \int_0^{\pi/2} \left(y^2 - y'^2 \right) \, dx, \quad y(0) = 0, \; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Решение. Здесь $F(x, y, y') = y^2 - y'^2$. Имеем

$$F_y = 2y, \quad F_{y'} = -2y'.$$

Следовательно, уравнение Эйлера имеет вид

$$y'' + y = 0.$$

Общее решение есть

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Граничные условия выделяют допустимую экстремаль $\tilde{y}(x) = \sin x$. Вычисляем P и Q:

$$P = \frac{1}{2} F_{y'y'} = -1, \quad Q = \frac{1}{2} \left(F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'} \right) = 1.$$

Так как $P = -1 < 0$, то усиленное условие Лежандра выполнено. Составим уравнение Якоби (7.9). Имеем

$$h'' + h = 0, \quad h(0) = 0.$$

Нетривиальное решение этого уравнения имеет вид $h(x) = C \sin x$ и не обращается в нуль при всех $(0, \pi/2]$. Следовательно, выполнено усиленное условие Якоби. Таким образом, экстремаль $\tilde{y} = \sin x$ даёт максимум.

Лекция 8

3.8. Задача со свободными концами

Задача со свободными концами формулируется следующим образом. Среди всех кривых концы которых лежат на двух заданных вертикалях $x = a$, $x = b$, найти ту которая даёт экстремум функционалу

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')\, dx. \tag{8.1}$$

Вариация функционала (8.1) равна (см п.3)

$$\delta J = \int_a^b \left[F_y(x, y, y')h + F_{y'}(x, y, y')h'\right]\, dx$$

Так как здесь, в отличие от задачи с закреплёнными концами, $h(x)$ не обязательно обращается в нуль в точках a и b, то, интегрируя по частям второе слагаемое, получим

$$\int_a^b F_{y'} h'\, dx = F_{y'} h\Big|_a^b - \int_a^b h\, \frac{d}{dx} F_{y'}\, dx = F_{y'}\Big|_{x=b} h(b) - F_{y'}\Big|_{x=a} h(a) - \int_a^b h\, \frac{d}{dx} F_{y'}\, dx.$$

В результате

$$\delta J = \int_a^b \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\right] h(x)\, dx + F_{y'}\Big|_{x=b} h(b) - F_{y'}\Big|_{x=a} h(a). \tag{8.2}$$

Рассмотрим сначала такие функции $h(x)$, для которых $h(a) = h(b) = 0$. Тогда, как и в простейшей задаче, из условия $\delta J = 0$ получаем, что

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0. \tag{8.3}$$

Итак, для того чтобы кривая $y = y(x)$ могла быть решением задачи со свободными концами, она должна быть экстремалью, т. е. решением уравнения Эйлера (8.3). Пусть теперь $y = y(x)$ — экстремаль. Тогда в выражении (8.2) для δJ интегральный член исчезает и условие $\delta J = 0$ принимает вид

$$F_{y'}\Big|_{x=b} h(b) - F_{y'}\Big|_{x=a} h(a) = 0.$$

В силу произвольности $h(x)$ получаем

$$F_{y'}\Big|_{x=b} = 0, \quad F_{y'}\Big|_{x=a} h(a) = 0. \tag{8.4}$$

Таким образом, для решения поставленной задачи нужно найти общий интеграл уравнения Эйлера (8.3) и затем определить значения произвольных постоянных из условий (8.4).

Наряду с закрепленными и свободными концами можно рассматривать смешанный случай, т. е. считать, что один конец закреплён, а другой свободен.

Пусть, например, ищется экстремум функционала (8.1) на классе кривых, соединяющих данную точку A (с абсциссой a) и произвольную точку прямой $x = b$. В этом случае из двух условий (8.4) остаётся только одно условие

$$F_{y'}\Big|_{x=b} = 0,$$

а равенство $y(a) = A$ служит вторым краевым условием.

Пример 1. Пусть в задаче о брахистохроне (см. п.2.5) левая граничная точка закреплена, а правая может перемещаться по вертикальной прямой. Экстремалями функционала

$$T[y] = \frac{1}{2g}\int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{y(x)}}\,dx.$$

являются циклоиды, уравнения которых имеют вид

$$x = C(t - \sin t), \quad y = C(1 - \cos t).$$

Для определения C используем условие $F_{y'}\big|_{x=x_1} = 0$, которое в данном случае имеет вид

$$\left.\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}\right|_{x=x_1} = 0,$$

откуда $y'(x_1) = 0$. т.е. искомая циклоида должна пересекать прямую $x = x_1$ под прямым углом и, следовательно, точка $B(x_1, y_1)$ должна быть вершиной циклоиды. Так как вершине соответствует значение $t = \pi$, то $x_{=}C\pi$, $C = x_1/\pi$. Следовательно, экстремум может реализоваться лишь на циклоиде

$$x = \frac{x_1}{\pi}(t - \sin t), \quad y = \frac{x_1}{\pi}(1 - \cos t).$$

Сформулируем более общую задачу с подвижными границами. Пусть

$$F = F(x, y, y')$$

— трижды дифференцируемая функция своих аргументов и пусть в плоскости XOY заданы две кривые

$$y = \varphi(x), \quad y = \psi(x), \tag{8.5}$$

где φ, $\psi \in C^1$. Рассмотрим функционал

$$J[y] = \int_\gamma F(x, y, y')\,dx, \tag{8.6}$$

определённый на гладких кривых $y = y(x)$, концы которых $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$ лежат на заданных линиях (8.5), так что

$$y_0 = \varphi(x_0), \quad y_1 = \psi(x_1),$$

Требуется найти экстремум функционала (8.6).

Теорема 1. *Пусть кривая γ: $y = y(x)$ даёт экстремум функционалу*

$$J[y] = \int_\gamma F(x, y, y')\,dx$$

среди всех кривых класса C^1, соединяющих две произвольные точки двух данных кривых $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$. Тогда кривая γ является экстремалью и в концах $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$ кривой γ выполняются условия трансверсальности

$$\begin{cases} [F + (\varphi' - y')F_{y'}]\big|_{x=x_0} = 0, \\ [F + (\psi' - y')F_{y'}]\big|_{x=x_1} = 0. \end{cases} \tag{8.7}$$

Таким образом, для решения задачи с подвижными границами надо:

1) Написать и решить соответствующее уравнение Эйлера. В результате получим семейство экстремалей $y = f(x, C_1, C_2)$, зависящее от двух параметров C_1 и C_2.

2) Из условий трансверсальности (8.7) и из уравнений

$$\begin{cases} f(x_0, C_1, C_2) = \varphi(x_0), \\ f(x_1, C_1, C_2) = \psi(x_1) \end{cases} \tag{8.8}$$

определить постоянные C_1, C_2, x_0, x_1.

3) Вычислить экстремум функционала (8.5).

П р и м е р 2. Найти расстояние между параболой и $y = x^2$ и прямой $x - y = 5$.

Р е ш е н и е. Задача сводится к нахождению экстремального значения интеграла

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

при условии, что левый конец экстремали может перемещаться по кривой $y = x^2$, а правый — по прямой $y = x - 5$.

1) Напишем уравнение Эйлера. У нас $F = \sqrt{1 + y'^2}$. Следовательно,

$$F_y = 0, \quad F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Получаем

$$\frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$y = C_1 x + C_2$$

является общим решением уравнение Эйлера.

2) Условия трансверсальности (8.7) имеют вид

$$\begin{cases} \left[\sqrt{1 + y'^2} + (2x - y') \dfrac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right] \Bigg|_{x = x_0} = 0, \\ \left[\sqrt{1 + y'^2} + (1 - y') \dfrac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right] \Bigg|_{x = x_1} = 0. \end{cases}$$

Так как $y' = C_1$, то эти условия перепишутся

$$\begin{cases} \sqrt{1 + C_1^2} + (2x_0 - C_1) \dfrac{C_1}{\sqrt{1 + C_1^2}} = 0, \\ \sqrt{1 + C_1^2} + (1 - C_1) \dfrac{C_1}{\sqrt{1 + C_1^2}} = 0, \end{cases} \tag{8.9}$$

Уравнения (8.8) принимают вид

$$\begin{cases} C_1 x_0 + C_2 = x_0^2, \\ C_1 x_1 + C_2 = x_1 - 5. \end{cases} \tag{8.10}$$

Итак, получаем систему четырёх уравнений (8.9), (8.10) с четырьмя неизвестными C_1, C_2, x_0, x_1.

Из второго уравнения (8.9) легко видеть, что $C_1 = -1$. Подставляя это значение в первое уравнение (8.9), находим $x_0 = 1/2$. Аналогично находим C_2, x_1. В результате

$$C_1 = -1, \quad C_2 = \frac{3}{4}, \quad x_0 = \frac{1}{2}, \quad x_1 = \frac{23}{8}.$$

3) Значит уравнение экстремали есть

$$y = -x + \frac{3}{4}$$

и расстояние между заданными параболой и прямой равно

$$L = \int_{1/2}^{23/8} \sqrt{1 + (-1)^2}\, dx = \sqrt{2}\, x \Big|_{1/2}^{23/8} = \frac{19\sqrt{2}}{8}.$$

3.9. Условный экстремум

Пусть даны две функции $F(x, y, y')$ и $G(x, y, y')$. Среди всех кривых $y = y(x) \in C^1[a, b]$, вдоль которых функционал

$$K[y] = \int_a^b G(x, y, y')\, dx. \tag{9.1}$$

принимает заданное значение l, определить ту, для которой функционал

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')\, dx.$$

принимает экстремальное значение.

Относительно функций F и G предполагаем, что они имеют непрерывные частные производные первого и второго порядков при $a \leq x \leq b$ и при произвольных значениях переменных y, y'.

Т е о р е м а 1. *Если кривая $y = y(x)$ даёт экстремум функционалу*

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')\, dx. \tag{9.1}$$

при условиях

$$K[y] = \int_a^b G(x, y, y')\, dx = l, \quad y(a) = A, \; y(b) = B, \tag{9.2}$$

и если $y = y(x)$ не является экстремалью функционала K, то существует константа λ такая, что кривая $y = y(x)$ есть экстремаль функционала

$$L[y] = \int_a^b \big[F(x, y, y') + \lambda G(x, y, y')\big]\, dx. \tag{9.3}$$

П р и м е р 1. Найти экстремум функционала

$$J[y] = \int_0^\pi y'^2\, dx.$$

при условиях

$$K[y] = \int_0^\pi y\cos x\,dx = \frac{\pi}{2}, \quad y(0) = 1,\ y(\pi) = -1.$$

Р е ш е н и е. Согласно теореме 1 рассмотрим функционал

$$L[y] = \int_0^\pi (y'^2 + \lambda y\cos x)\,dx.$$

Уравнение Эйлера для функционала L имеет вид

$$2y'' = \lambda\cos x.$$

Общее решение есть

$$y(x) = C_1x + C_2 - \frac{\lambda}{2}\cos x.$$

Граничные условия дают

$$C_2 - \frac{\lambda}{2} = 1, \quad C_1\pi + C_2 + \frac{\lambda}{2} = -1.$$

Так как

$$\int_0^\pi x\cos x\,dx = -2, \quad \int_0^\pi \cos x\,dx = 0, \quad \int_0^\pi \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{2},$$

то

$$\int_0^\pi xy(x)\,dx = -2C_1 - \frac{\pi\lambda}{4}.$$

Таким образом, получаем систему трёх уравнений с тремя неизвестными:

$$C_2 - \frac{\lambda}{2} = 1, \quad C_1\pi + C_2 + \frac{\lambda}{2} = -1, \quad -2C_1 - \frac{\pi\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Решая эту систему, получим

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad \lambda = -2.$$

Следовательно, искомая экстремаль $y(x) = \cos x$.