Гафурова Фарангиз Фуркатовна
поток 21.3
Вариант: 4

III. Найти аналитическую функцию по известной её действительной или мнимой части.

$$u(x,y) = sh\frac{y}{2}\sin\frac{x}{2} + 4(x^2 - y^2) - 4x + 1$$

Решение:

№4 (III)

$u(x,y) = \mathrm{sh}\frac{y}{2}\sin\frac{x}{2} + 4(x^2-y^2) - 4x+1$

действ. и мнимая части ф-ии должны удовл. условиям Коши-Римана:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} v_y = \frac{1}{2}\mathrm{sh}\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2} + 8x - 4 & (1) \\ v_x = -\frac{1}{2}\mathrm{ch}\frac{y}{2}\sin\frac{x}{2} + 8y & (2) \end{cases}$$

тогда из (1): $v(x,y) = \mathrm{ch}\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2} + 8xy - 4y + f(x)$

подставим в (2): $-\frac{1}{2}\mathrm{ch}\frac{y}{2}\sin\frac{x}{2} + 8y + f'(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{ch}\frac{y}{2}\sin\frac{x}{2} + 8y$

$\Rightarrow f'(x) = 0$, $\Rightarrow f(x) = C$

итого, $v(x,y) = \mathrm{ch}\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2} + 8xy - 4y + C$

тогда аналит. ф-ия $g(x,y) = u(x,y) + i v(x,y) = \mathrm{sh}\frac{y}{2}\sin\frac{x}{2} + 4(x^2-y^2) - 4x + 1 +$

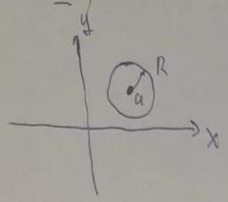
$+ i\left(\mathrm{ch}\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2} + 8xy - 4y + C\right)$

IV. Вычислить интеграл по заданной кривой в указанном направлении.

$\int_C x\,dx$, C — окружность $|z-a| = R$. Обход контура в отрицательном направлении.

Решение:

N4 (IV)



$$\int_C x\,dz = \left\{ z = a + Re^{i\varphi},\ 0 \le \varphi \le 2\pi \right\} = \int_0^{2\pi} (\mathrm{Re}\,a + R\cos\varphi) R \cdot i e^{i\varphi} d\varphi =$$

$$\left(\begin{array}{l} x = \mathrm{Re}\,a + R\cos\varphi \\ y = \mathrm{Im}\,a + R\sin\varphi \end{array} \right)$$

$$= \int_0^{2\pi} (\mathrm{Re}\,a + R\cos\varphi)\, iR(\cos\varphi + i\sin\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(iR\,\mathrm{Re}\,a\cos\varphi + iR^2\cos^2\varphi \right) d\varphi +$$

$$+ \int_0^{2\pi} (-R\sin\varphi \cdot \mathrm{Re}\,a - R^2\cos\varphi\sin\varphi) d\varphi = iR\,\mathrm{Re}\,a \cancel{\sin\varphi \Big|_0^{2\pi}}^{\,0} + \int_0^{2\pi} iR^2 \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi +$$

$$+ R\,\mathrm{Re}\,a \cancel{\cos\varphi \Big|_0^{2\pi}}^{\,0} - R^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sin 2\varphi\, d\varphi = iR^2 \cdot \pi + iR^2 \cdot \frac{1}{4} \cancel{\sin 2\varphi \Big|_0^{2\pi}}^{\,0} + \frac{R^2}{4} \cancel{\cos 2\varphi \Big|_0^{2\pi}}^{\,0} = i\pi R^2$$

I. Изобразить на комплексной плоскости множество $\mathcal{D}$:

$\mathcal{D}= \{1 < |z + 1 - 2i| \leq 3,\ \ \pi \leq \arg z < 2\pi\}$

Решение:

1. Первое неравенство: $1 < |z + 1 - 2i| \leq 3$

Это неравенство описывает область между двумя окружностями в комплексной плоскости. Сначала преобразуем его:

$$|z + 1 - 2i| = |(x + iy) + (1 - 2i)| = |(x + 1) + (y - 2)i| = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 2)^2}$$

Таким образом, первое неравенство $|z + 1 - 2i| > 1$ означает, что точка z находится вне окружности радиуса 1 с центром в точке (-1, 2) .

Второе неравенство $|z + 1 - 2i| \leq 3$ означает, что точка z находится внутри или на границе окружности радиуса 3 с тем же центром (-1, 2) .

В итоге первое условие определяет область между двумя окружностями с центром в точке (-1, 2) :

- Внешняя окружность: $|z + 1 - 2i| = 3$
- Внутренняя окружность: $|z + 1 - 2i| = 1$

2. Второе неравенство: $\pi \leq \arg z < 2\pi$

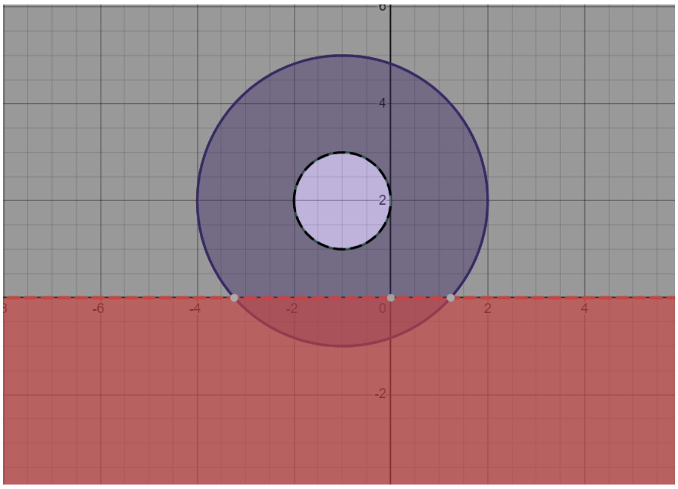
Это условие описывает область, где аргумент z находится между π и 2π . На комплексной плоскости это соответствует нижней полуплоскости, где угол измеряется от положительной оси x против часовой стрелки:

- $\arg z = \pi$ соответствует положительному направлению оси x (направление влево).

- $\arg z = 2\pi$ соответствует положительному направлению оси x (направление вправо).

Таким образом, область, соответствующая этому условию, включает все точки в нижней полуплоскости от линии, проходящей через точку (-1, 2) и направленной вниз.

Центр окружностей находится в точке $(-1,\ 2i)$, а радиусы равны 3 и 1 соответственно. Условие аргумента: ограничим область нижней половиной плоскости, оставляя только те части между окружностями, которые находятся в диапазоне от π до 2π .



6
4
2
-2
-6
-4
-2
0
2
4

II. Найти все значения функции в указанной точке.

$$(-2)^{\sqrt{2}}$$

Решение:

Чтобы выразить $(-2)^{\sqrt{2}}$ в комплексной форме, мы можем использовать формулу Эйлера:

$$a^b = e^{b\ln(a)}$$

где $a = -2$ и $b = \sqrt{2}$. Для отрицательных чисел мы можем записать:

$$-2 = 2 * e^{i\pi}$$

потому что -2 находится на окружности радиуса 2 под углом π в комплексной плоскости.

Подставим это в формулу:

$$(-2)^{\sqrt{2}} = \left(2e^{i\pi}\right)^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}}e^{i\pi\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\pi\sqrt{2}\right) + i\sin\left(\pi\sqrt{2}\right)\right)$$

Пусть $z = x + iy$.

$$z(t) = a + Re^{-it}, \ \ t \in [0, 2\pi]$$

Где, a – это центр окружности, R – радиус, а t – параметр.

Тогда:

$$dz = \frac{d}{dt}\left(a + Re^{-it}\right)dt = -iRe^{-it}dt$$

Теперь выразим x через параметризацию. Если$x = z$, то:

$$x(t) = a + Re^{-it}$$

Можем записать интеграл $\int_{\mathrm{C}} x\, dx$ как:

$$\int\limits_{\mathrm{C}} x\, dx = \int\limits_{0}^{2\pi} (\, a + Re^{-it})\left(-iRe^{-it}\right)dt$$

Разложим интеграл:

$$\int\limits_{0}^{2\pi} (\, a + Re^{-it})\left(-iRe^{-it}\right)dt = -iR \int\limits_{0}^{2\pi} (\, ae^{-it} + Re^{-2it})dt$$

теперь вычислим каждый из компонентов этого интеграла:

1. Интеграл от ae^{-it}:

$$\int\limits_{0}^{2\pi} ae^{-it}\, dt = a \int\limits_{0}^{2\pi} e^{-it}\, dt = 0$$

2. Интеграл от $\int_0^{2\pi} Re^{-2it}$:

$$\int\limits_{0}^{2\pi} Re^{-2it} = R \int\limits_{0}^{2\pi} e^{-2it}\, dt = 0$$

Таким образом, итоговый интеграл по заданной окружности равен:

$$\int\limits_{\mathrm{C}} x\, dx = -iR(0 + 0) = 0$$