

1. Критерий Сильвестра

1.1. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$

1.2. Найти точки экстремума функции

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & (x, y) \neq 0, \\ 1, & (x, y) = 0. \end{cases}$$

1.3. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$f(x, y) = (1 + e^y) \cos x - ye^y.$$

1.4. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}, \quad x > 0, y > 0, z > 0.$$

1.5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x, y) = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x + y), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \pi.$$

2. Условный экстремум

2.1. Найти условный экстремум

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad x + y - 1 = 0.$$

2.2. Найти условный экстремум

$$f(x, y) = 6 - 5x - 4y, \quad x^2 - y^2 - 9 = 0.$$

2.3. Найти условный экстремум

$$f(x, y) = xy, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

2.4. Найти условный экстремум

$$f(x, y) = e^{xy}, \quad x + y = a.$$

2.5. Найти условный экстремум

$$f(x, y, z) = x - 2y + 2z, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

2.6. Найти условный экстремум

$$f(x, y, z) = xy + yz, \quad x^2 + y^2 = 2, \quad y + z = 2 \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$$

2.7*. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x, y, z) = x^2 - 2ax + y^2 - 2ay + z^2 - 2az \quad (a > 0)$$

в полушаре

$$D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2, z \geq 0\}.$$

Ответы

1. Критерий Сильвестра

1.1. Стационарные точки: $(0, 0)$, $(\sqrt{-2}, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, \sqrt{-2})$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = A_3 = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}.$$

В точке $(0, 0)$ экстремума нет, а в точках $(\sqrt{-2}, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, \sqrt{-2})$ — \min , $f_{\min} = -8$.

1.2. $f_{\max} = 1$ в точке $(0, 0)$.

1.3. Стационарные точки: $M_s(2\pi s, 0)$, $N_t(\pi(2t + 1), -2)$, $s, t \in \mathbb{Z}$.

$$A_M = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_N = \begin{pmatrix} 1 + e^{-2} & 0 \\ 0 & -e^{-2} \end{pmatrix}.$$

В точках N_t экстремума нет, а в точках M_s — \max , $f_{\max} = 2$.

1.4. $f_{\min} = 4$ в точке $(1/2, 1, 1)$.

1.5. $f_{\min} = -3\sqrt{3}/8$ в точке $(2\pi/3, 2\pi/3)$; $f_{\max} = 3\sqrt{3}/8$ в точке $(\pi/3, \pi/3)$.

1. Условный экстремум

2.1. $f_{\min} = 1/2$ в точке $(1/2, 1/2)$.

2.2. $f_{\min} = 15$ в точке $(-5, 4)$;
 $f_{\max} = -3$ в точке $(5, -4)$.

2.3. $f_{\min} = -1/2$ в точках $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ и $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$;
 $f_{\max} = 1/2$ в точках $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ и $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

2.4. $f_{\max} = e^{a^2/4}$ в точке $(a/2, a/2)$.

2.5. $f_{\min} = -9$ в точке $(-1, 2, -2)$, $f_{\max} = 9$ в точке $(1, -2, 2)$.

2.6. $f_{\max} = 2$ в точке $(1, 1, 1)$.

2.7. $f_{\min} = -3a^2$ в точке (a, a, a) , $f_{\max} = 4a^2(\sqrt{2} + 1)$ в точке $(-\sqrt{2}a, -\sqrt{2}a, 0)$.