Электростатика

Кулон: $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}$

Напряжённость: $\vec{E}(\vec{r}) = k\frac{|q|}{r^2}$, Сфера: $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$, Суперпозиция: $\vec{E} = \sum_k \vec{E}_k$

Дипольный момент: $\vec{p} = q\,\vec{d}$

Поле диполя ($r \gg d$): $\boxed{\vec{E} = \frac{3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{p}}{r^5}}$, Момент сил: $\vec{M} = \vec{p}\times\vec{E}$

Сила на диполь: $\vec{F} = P_x\frac{\partial\vec{E}}{\partial x} + P_y\frac{\partial\vec{E}}{\partial y} + P_z\frac{\partial\vec{E}}{\partial z}$

Теорема Гаусса: $\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = 4\pi q$, (дифф. форма): $\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 4\pi\rho$

Потенциал: $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$, Связь с полем: $\vec{E} = -\nabla\varphi$

Пуассон/Лаплас: $\boxed{\nabla^2\varphi = -4\pi\rho}$, ($\rho = 0) \Rightarrow \nabla^2\varphi = 0$

Сфера снаружи: $\vec{E}^e = \vec{E}^0 + \frac{3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{p}}{r^5}$

Поле проводников и зеркальные заряды

Циркуляция: $\oint_\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$ (дифф. форма): $\nabla\times\vec{E} = 0$

Граничные условия у проводника $E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, $\vec{E}_\tau = 0$

Теорема Фарадея (электростатика): поля внутри проводника нуль, заряд на поверхности.

Метод зеркальных изображений Заряд q над плоскостью $\to$ изображение $-q$. Для сферы: $q' = -qR/r'$ в центре $r' = \frac{R^2}{r}$.

Поле снаружи проводящего шара: $\vec{E}^e = \vec{E}^0 + \frac{3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{p}}{r^5}$

Вектор поляризации: $\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V}$

Диэлектрики и ёмкости

Теорема Гаусса для поляризации (диф.): $\nabla\cdot\vec{P} = -\rho_b$, (инт. форма): $-Q_b = \int_V \nabla\cdot\vec{P}\,dV = \oiint_S(\vec{P}\cdot d\vec{s})$

Вектор смещения $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$

Граничные условия $\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$

Поле поляризованного шара Внутри: $\vec{E} = -\frac{-4\pi}{3}\vec{P}$

Внешнее совпадает с диполем

Цилиндр диэлектрика $\vec{E} = \frac{2}{\varepsilon+1}\vec{E}_0$ поле вдоль оси

Электрическая ёмкость $C = \frac{Q}{U}$, шар: $C = 4\pi\varepsilon_0 R$, плоский: $C = \varepsilon_0\varepsilon\frac{S}{d}$

Конденсаторы Цилиндр: $C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(b/a)}$

Сферический: $C = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$ Общая ёмкость батареи: $C_{\text{экв посл}} = (\sum C_i^{-1})^{-1}$, $C_{\text{пар}} = \sum C_i$

Энергия и ток

Энергия системы зарядов $W = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$

Энергия плоского конденсатора $W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{qU}{2}$

Плотность энергии $w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$

Плотность энергии электрического поля $u = \frac{\vec{D}\vec{E}}{2}$

Собственная/взаимная энергия $U_{\text{собр}} = \frac{1}{2}\sum_i \frac{q_i^2}{C_{ii}}$; $U_{\text{взаим}} = \sum_{i<j}\frac{q_i q_j}{C_{ij}}$

Энергетический метод сил $\vec{F} = -\nabla U(\vec{r})$, $\tau = -\frac{\partial U}{\partial\varphi}$

Характеристики тока $I = \frac{dQ}{dt}$, $\vec{J} = \rho\vec{v}$

Уравнение непрерывности $\nabla\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$

Электрические цепи

ЭДС и напр. $\mathcal{E} = \int_1^2(\vec{E}_{\text{стор}}\cdot d\vec{l}) = \frac{A_{\text{ст}}}{q}$, $U = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}$

Модель Друде-Лоренца $\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$, Закон Ома: $\vec{J} = \sigma\vec{E}$, $I = U/R$ Закон Ома в замкнутой цепи $I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$ Сопротивление $R = \rho\frac{l}{S}$, $\rho = \frac{1}{\sigma}$ Сопротивление в общем виде R $= \frac{1}{4\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2\cdot\sigma(r)}$ Закон Джоуля-Ленца $Q = I^2Rt$ (инт.); w$=\frac{j^2}{\sigma}$ (дифф.) КПД источника $\eta = \frac{IU}{I\mathcal{E}} = \frac{R}{R+r}$

Соединения проводников последовательное: $R_\Sigma = R_1 + R_2 + \ldots$, параллельное: $R_\Sigma^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1} + \ldots$

Правила Кирхгофа 1: $\sum I_{\text{вх}} = 0$ узел, 2: $\sum\mathcal{E} - \sum IR = 0$ контур

Магнитостатика

Ток в газах: α-, β–процессы; движение ионов.

Магнитная сила Лоренца $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$

Био–Савар–Лаплас (элемент тока) $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{l}\times\hat{\vec{r}}}{r^2}$;проводник $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$;кольцо (ось) $B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$

Движущийся заряд $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\,\vec{v}\times\hat{\vec{r}}}{r^2}$

Гаусс по B: $\oiint\vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$

Ампер $\oint\vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{прох}}$, дифф. $\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}$

Соленоид $B = \mu_0 nI$;Тороид $B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$;Индуктивность длинного соленоида $L = \mu_0 n^2 S\ell$

Релятивистская связь $\vec{B}' = \frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}$; Сила на контур $\vec{F} = I\oint d\vec{l}\times\vec{B}$; для прямой $\vec{F} = I\,\vec{l}\times\vec{B}$

Работа при перемещении контура $A = I\,\Delta\Phi$; поворот 180° $A = 2IBS$

Магн. момент $\vec{p}_m = I\,\vec{S}$;момент сил $\vec{M} = \vec{p}_m\times\vec{B}$;энергия $W = -\vec{p}_m\cdot\vec{B}$

Собств. поток $\Phi = LI$;ЭДС $U_L = L\frac{dI}{dt}$;энергия $W_M = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{\Phi^2}{2L}$

Плотность энергии $w_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$;общее выражение $L = \frac{1}{I^2}\int\frac{B^2}{2\mu_0}\,dV$;взаимная $L_{12} = \frac{1}{I_1 I_2}\int\frac{\vec{B}_1\cdot\vec{B}_2}{\mu_0}\,dV$

Движение заряда ($\perp$ B) радиус $r = \frac{mv_\perp}{|q|B}$, период $T = 2\pi\frac{m}{|q|B}$, шаг $S = v_\parallel T$

Скрещённые поля (дрейф) $\vec{v}_D = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2}$;

Эффект Холла $U_H = R_H\frac{IB}{t}$, $R_H = \frac{1}{ne}$

Граничные условия $B_n^{(1)} = B_n^{(2)}$, $H_\tau^{(1)} - H_\tau^{(2)} = K_{\text{своб}}$

Материальные отклики — диа-, пара-, ферро-магн. ($\chi\neq 0$; петля B(H)).

Скрещённые поля (дрейф): $\vec{v}_D = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2}$.

Связь полей $\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right)$, $\vec{M} = \chi\vec{H}$, $\mu = 1 + \chi$

Диамагнетизм $\chi = -\frac{N\mu_0 e^2\langle r^2\rangle}{6m}$, Парамагнетизм $\chi = \frac{C}{T}$

Константы $\gamma_o = -e/2m$, $\gamma_s = -e/m$, $\mu_B = e\hbar/2m$

Ферромагнетики: петля $J(H)$; потери $W_{\text{гист}} = \oint HdB$

Энергия поля: $W = \frac{1}{2}\int\vec{B}\cdot\vec{H}dV$

Магнитные свойства и переменные токи

Гиромагнитное отношение $\gamma = \frac{e}{2m}$ (классич. для электрона)

Диамагн./Парамагн. Ланжевен: $\chi = \frac{\mu_0 N\mu^2}{3kT}$

Ферромагнетизм Кривые $B(H)$, домены; закон Вейса: $M = \chi_p(H + \lambda M)$

Гармонические колебания $i = i_0 e^{j\omega t}$; $Z = R + j\omega L + 1/(j\omega C)$

Затухающие колебания $i = i_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega_d t)$, $\gamma = \frac{R}{2L}$

Вынужденные Ампл. $i = \frac{\mathcal{E}_0}{|Z|}$

Резонанс $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$

Закон Ома (AC) $\vec{U} = \vec{Z}\vec{I}$, $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$

Векторные диаграммы Фаза: $\tan\varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$

Кирхгоф (AC) $\sum\vec{Z}I = \sum\mathcal{E}e^{j\theta}$

Длинные линии и ток смещения

Мощность AC $P = UI\cos\varphi$, $S = UI$, $Q = UI\sin\varphi$

Телеграфные уравнения $\frac{\partial U}{\partial x} = -RI - L\frac{\partial I}{\partial t}$, $\frac{\partial I}{\partial x} = -GU - C\frac{\partial U}{\partial t}$

Волновое ур-ние $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \gamma^2 U$, $\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$

Скорость (коаксиал) $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Скорость (открытая линия) То же, но C и L иных геом.

Волновое сопротивление $Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \approx \sqrt{\frac{L}{C}}$ (при высоким f)

Коэффициент отражения $\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$

Ток смещения $I_d = \varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}$, $\vec{J}_d = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

Уравнения Максвелла и волны

Уравнения Максвелла

$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, $\nabla\cdot\vec{B} = 0$, $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, $\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

Волновое ур-ние $\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$

ЭМ-волны $\vec{B} = \frac{1}{c}\hat{\vec{k}}\times\vec{E}$, $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$

Энергия волны $u = \frac{\varepsilon_0 E^2 + B^2/\mu_0}{2}$, $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$

Шкала ЭМ волн: радио $\to$ γ-кванты.

Получение: антенны, магнетроны, синхротроны.

Переход через границу: Коэфф. Френеля: $r_\perp = \frac{n_1\cos\theta_i - n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t}$, Закон Брюстера: $\tan\theta_B = \frac{n_2}{n_1}$

Электромагнитная индукция

Закон Фарадея (скалярная форма) $\mathscr{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$;

Интегральная форма $\oint_\Gamma\vec{E},d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int_S\vec{B},d\vec{S}$;

Дифференциальная форма $\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$;

ЭДС самоиндукции $\mathscr{E}_s = -L,\frac{dI}{dt}$;

RL-цепь при включении $I(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$, $\tau = \frac{L}{R}$;

Колебательный контур (RLC)

Дифференциальное уравнение $\frac{d^2q}{dt^2} + 2\gamma\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\mathscr{E}(t)}{L}$, $\gamma = \frac{R}{2L}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$;

Формула Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC}$;

Комплексный импеданс $Z = R + i\omega L - \frac{i}{\omega C}$;

Добротность $Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}$ (из $\Delta\omega = \omega_0/Q$);

Энергия контура $W = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2}$;

Длинные линии (телеграфные уравнения)

Телеграфные уравнения $\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{C_1}\frac{\partial I}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial x} = -L_1\frac{\partial I}{\partial t}$;

Фазовая скорость $v = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$;

Характ. сопр.: $Z = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$;

Коэффициент отражения $\rho = \frac{Z_{\text{н}} - Z}{Z_{\text{н}} + Z}$;

Скорость волны в среде $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$;

Электромагнитные волны и уравнения Максвелла

Максвелл в вакууме $\operatorname{div}\vec{E} = 0$, $\operatorname{div}\vec{B} = 0$, $\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, $\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$\$;

Волновое уравнение $\nabla^2\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$ (и аналогично для $\vec{B}$);

Физические константы

$e = 1.602\times 10^{-19}$ Кл, $\varepsilon_0 = 8.854\times 10^{-12}$ Ф/м, $\mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}$ Н/А^2, $c = 2.997\times 10^8$ м/с, $k_B = 1.380\times 10^{-23}$ Дж/К

σ — поверхностная плотность; ρ — объёмная плотность; $\vec{E}$ — напряжённость; $\vec{D}$ — смещение; $\vec{P}$ — поляризация; $\vec{B}$ — магнитная индукция; $\vec{H}$ — напряжённость B-поля; $\vec{J}$ — плотность тока; I — ток; R — сопротивление; C — ёмкость; L — индуктивность; φ — потенциал; $\mathcal{E}$ — ЭДС; Φ — поток; $\vec{p}$ — диполь; $\vec{m}/\vec{p}_m$ — магнитный диполь; ω — циклическая частота; Z — импеданс; Γ — коэффициент отражения.