Лекция 2

1.4. Экстремумы неявных функций

Теорема 4.1. (Теорема о неявной функции — частный случай) *Пусть функция* $F : U \to \mathbb{R}$, *определённая в окрестности* $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *точки* $(x^{(0)}, y^{(0)}) = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, y^{(0)})$, *такова, что*

1. $F \in C^k(U)$, $k \geq 1$;
2. $F(x^{(0)}, y^{(0)}) = F(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, y^{(0)}) = 0$;
3. $F'_y(x^{(0)}, y^{(0)}) = F'_y(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, y^{(0)}) \neq 0$.

Тогда существуют $(n+1)$*-мерный промежуток* $I = I_x^n \times I_y \subset U$, *где*

$$I_x^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ |x_i - x_i^{(0)}| < \alpha_i)\}, \quad I_y = \{y \in \mathbb{R} : \ |y - y_i^{(0)}| < \beta\},$$

и такая функция $u \in C^{(k)}(I_x^n, I_y)$, *что для всякой точки* $(x, y) \in I_x^n \times I_y$

$$F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0 \iff y = u(x_1, \ldots, x_n). \tag{4.1}$$

При этом

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = -\frac{F'_{x_i}(x, u(x))}{F'_y(x, u(x))}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.2}$$

Пример 1. Найти стационарные точки неявно заданной неявно функции y от переменной x:

$$F(x, y) = x^2 + xy + y^2 = 27.$$

Так как

$$F'_x = 2x + y, \quad F'_y = x + 2y,$$

то по формуле (4.2) получаем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y}{x + 2y}.$$

Подставляя $y = -2x$ в равенство $F(x, y) = 0$, получаем две стационарные точки $(-3, 6)$, $(3, -6)$.

Пример 2. Найти стационарные точки заданной неявно функции z от переменных x и y:

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10.$$

Так как

$$F'_x = 2x - 2, \quad F'_y = 2y + 2, \quad F'_z = 2z - 4,$$

то по формуле (4.2) получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x - 1}{z - 2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y + 1}{z - 2}.$$

Подставляя $x = 1$, $y = -1$ в равенство $F(x, y, z) = 0$, получаем две стационарные точки $(1, -1, -2)$, $(1, -1, 6)$.

Предположим, что нам дана дифференцируемая функция $(n+1)$-го аргументов $\Phi(x_1, \ldots, x_n, u)$, причём аргумент u сам является дифференцируемой функцией n аргументов $x_1, \ldots, x_n$. Тогда функцию $\Phi(x_1, \ldots, x_n, u)$ можно рассматривать как сложную функцию n аргументов $x_1, \ldots, x_n$. Частные производные этой функции по x_i,

$i = 1, \dots, n$, называются *полными частными производными* функции $\Phi(x_1, \dots, x_n, u)$ по x_i и обозначаются $D\Phi/Dx_i$. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{D\Phi}{Dx_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{4.3}$$

Найдём частные производные второго порядка функции u, заданной неявно уравнением $F(x_1, \dots, x_n, u) = 0$. Введём обозначения

$$F'_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Используя формулы (4.2), получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_q \partial x_p} = \frac{D}{Dx_q}\left(-\frac{F'_p}{F'_u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{F'_p}{F'_u}\right)\frac{\partial u}{\partial x_q} + \frac{\partial}{\partial x_q}\left(-\frac{F'_p}{F'_u}\right).$$

Имеем

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{F'_p}{F'_u}\right) = \frac{F''_{pu}F'_u - F''_{uu}F'_p}{F'^2_u}\,\frac{F'_q}{F'_u}, \quad \frac{\partial}{\partial x_q}\left(-\frac{F'_p}{F'_u}\right) = \frac{-F''_{pq}F'_u + F''_{uq}F'_p}{F'^2_u}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_q \partial x_p} = \frac{F''_{pu}F'_qF'_u - F''_{uu}F'_pF'_q - F''_{pq}F'^2_u + F''_{uq}F'_pF'_u}{F'^3_u}. \tag{4.4}$$

В случае $F = F(x, u)$ имеем

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{2F''_{ux}F'_uF'_x - F''_{uu}F'^2_x - F''_{xx}F'^2_u}{F'^3_u}. \tag{4.5}$$

П р и м е р 1 (продолжение).

Исследуем стационарные точки $(-3, 6)$, $(3, -6)$ на экстремальность. Для этого найдём d^2y/dx^2. Так как

$$F''_{xx} = 2, \quad F''_{xy} = 1, \quad F''_{yy} = 2, \quad ,$$

то по формуле (4.5) получаем

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{2(x+2y)(2x+y) - 2(2x+y)^2 - 2(x+2y)^2}{(x+2y)^3} = -\frac{6(x^2+xy+y^2)}{(x+2y)^3}.$$

Следовательно,

$$\left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{(-3,6)} = -\frac{2}{9}, \quad \left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{(3,-6)} = \frac{2}{9}.$$

Таким образом, точка $(-3, 6)$ является точкой максимума, а точка $(3, -6)$ — точкой минимума.

П р и м е р 2 (продолжение).

Исследуем стационарные точки $(1, -1, -2)$, $(1, -1, 6)$ на экстремальность. Вычислим матрицу вторых частных производных в этих точках. Воспользуемся формулами (4.2) и (4.3). Имеем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{D}{Dx}\frac{x-1}{z-2} = \frac{x-1}{(z-2)^2}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{z-2} = -\frac{(x-1)^2}{(z-2)^3} - \frac{1}{z-2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{D}{Dy}\frac{x-1}{z-2} = \frac{x-1}{(z-2)^2}\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{(x-1)(y+1)}{(z-2)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{D}{Dy}\frac{y+1}{z-2} = \frac{y+1}{(z-2)^2}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{1}{z-2} = -\frac{(y+1)^2}{(z-2)^3} - \frac{1}{z-2},$$

Следовательно, в точках $(1,-1,-2)$ и $(1,-1,6)$ матрица вторых частных производных равна

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix},$$

соответственно. Таким образом, точка $(1,-1,-2)$ является точкой минимума, а точка $(1,-1,6)$ — точкой максимума.

1.5*. Зависимость функций

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m) = 0, \end{cases} \tag{5.1}$$

которую будем решать относительно y_1, …, y_m, т. е. искать систему функциональных связей

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1,\ldots,x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = f_m(x_1,\ldots,x_n), \end{cases} \tag{5.2}$$

локально эквивалентную системе (5.1).

Для краткости будем писать $x = (x_1,\ldots,x_n)$, $y = (y_1,\ldots,y_m)$; левую часть системы (5.1) будем записывать как $F(x,y)$, систему (5.1) как $F(x,y) = 0$, а отображение (5.2) как $y = f(x)$. Обозначим $x^{(0)} = (x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})$, $y^{(0)} = (y_1^{(0)},\ldots,y_m^{(0)})$.

Далее положим

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}(x),$$

$$F'_x(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}(x,y),$$

$$F'_y(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \ldots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} & \ldots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}(x,y).$$

Заметим, что матрица $F'_y(x,y)$ квадратная и, следовательно, она обратима тогда и только тогда, когда её определитель отличен от нуля. Матрицу, обратную к $F'_y(x,y)$, будем обозначать символом $\left[F'_y(x,y)\right]^{-1}$.

Теорема 5.1. (Теорема о неявной функции — общий случай) *Пусть отображение $F : U \to \mathbb{R}^m$, определённое в окрестности $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$, таково, что*

1. $F \in C^k(U)$, $k \geq 1$;
2. $F(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$;
3. $F'_y(x^{(0)}, y^{(0)})$ — *обратимая матрица.*

Тогда найдутся такие окрестности $U_x \subset \mathbb{R}^n$, $U_y \subset \mathbb{R}^m$ точек $x^{(0)}$, $y^{(0)}$ и такое отображение $f \in C^{(k)}(U_x, U_y)$, что для всякой точки $(x,y) \in U_x \times U_y$

$$F(x,y) = 0 \iff y = f(x). \tag{5.3}$$

При этом

$$f'(x) = -\left[F'_y(x, f(x))\right]^{-1} \left[F'_x(x, f(x))\right]. \tag{5.4}$$

Пусть на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ заданы непрерывно дифференцируемые функции

$$u_i = \varphi_i(x), \quad i = 1, \ldots, m, \quad x \in G. \tag{5.5}$$

Если существуют открытое множество D в пространстве $\mathbb{R}^{m-1}$ и непрерывно дифференцируемая на D функция $\Phi(y_1, \ldots, y_{m-1})$ такие, что в любой точке $x \in G$ выполняется равенство

$$u_k(x) = \Phi(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{k-1}(x), \varphi_{k+1}(x), \ldots, \varphi_m(x)), \tag{5.6}$$

то функция u_k называется *зависимой на множестве* G от остальных функций (5.5).

Если среди функций системы (5.5) есть функция, зависимая от остальных на множестве G, то эта система называется *зависимой на множестве* G. Если ни одна функция системы (5.5) не зависит от остальных на множестве G, то эта система называется *независимой на множестве* G.

В вопросе зависимости системы функций (5.5) фундаментальную роль играет матрица Якоби этой системы

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right), \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{5.7}$$

где i — номер строки, j — номер столбца.

Теорема 5.2. (Необходимое условие зависимости функций) *Пусть $m \leq n$ и система функций* (5.5) *зависима на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$. Тогда в любой точке этого множества ранг матрицы Якоби* (5.7) *этой системы меньше m.*

Следствие 1. *Пусть $m = n$ и система функций* (5.5) *зависима на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$. Тогда её якобиан $\dfrac{\partial(u_1, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$ равен нулю во всех точках множества G.*

Следствие 2. (Достаточные условия независимости функций) *Пусть $m \leq n$ и пусть ранг матрицы Якоби* (5.7) *хотя бы в одной точке открытого множества G равен m. Тогда система* (5.5) *независима на множестве G.*

Теорема 5.3. (Достаточные условия зависимости функций) *Пусть ранг матрицы Якоби* (5.7) *системы функций* (5.5) *в каждой точке открытого множества* G *не превышает числа* r, $r < m \leq n$, *а в некоторой точке* $x^{(0)} \in G$ *равен* r, *иначе говоря, существуют такие переменные* x_{j_1}, ..., x_{j_r} *и функции* $u_{i_1} = \varphi_{i_1}(x)$, ..., $u_{i_r} = \varphi_{i_r}(x)$, *что*

$$\frac{\partial(u_{i_1}, \ldots, u_{i_r})}{\partial(x_{j_1}, \ldots, x_{j_1})} \tag{5.8}$$

Тогда все r *функций, входящих в условие* (5.8), *независимы на множестве* G *и существует окрестность точки* $x^{(0)}$ *такая, что любая из оставшихся* $m-r$ *функций зависит на этой окрестности от указанных* r *функций.*

1.6. Условный экстремум

Пусть на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ заданы функции

$$y_i = f_i(x), \quad i = 1, \ldots, m, \quad x = (x_1, \ldots, n) \in G. \tag{6.1}$$

Обозначим через E множество

$$E = \left\{x \in G : \ f_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, m\right\}. \tag{6.2}$$

Уравнения

$$f_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{6.3}$$

называются *уравнениями связи.*

Пусть на $G \subset \mathbb{R}^n$ задана функция $y = f_0(x)$. Точка $x^{(0)} \in E$ называется *точкой условного экстремума* функции $f_0(x)$ относительно (или при выполнении) уравнений связи (6.3), если она является точкой обычного экстремума этой функции, рассматриваемой только на множестве E.

В дальнейшем будем предполагать, что:

1) все функции f_0, f_1, ..., f_m непрерывно дифференцируемы на открытом множестве G;

2) в рассматриваемой точке $x^{(0)}$ векторы ∇f_1, ..., ∇f_m линейно независимы, т. е. ранг матрицы Якоби

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right), \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n,$$

равен m — числу её строк (строки матрицы Якоби являются компонентами градиентов ∇f_1, ..., ∇f_m).

Согласно результатам предыдущего параграфа, это означает, что функции системы (6.1) независимы в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$. Поскольку ранг матрицы не может быть больше числа столбцов, то из условия 2) следует, что $m \leq n$. Ввиду тривиальности случая $m = n$, будем считать, что $m < n$.

Согласно условию 2) в точке $x^{(0)}$ хотя бы один из определителей вида

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_{j_1}, \ldots, x_{j_m})}$$

отличен от нуля. Пусть для определённости в точке $x^{(0)}$

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)} \neq 0. \tag{6.4}$$

Тогда в силу теоремы о неявной функции 5.1, систему уравнений (6.3) в некоторой окрестности точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ можно разрешить относительно переменных $x_1, \ldots, x_m$:

$$\begin{gathered} x_1 = \varphi_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = \varphi_m(x_{m+1}, \ldots, x_n). \end{gathered} \tag{6.5}$$

Подставив значения $x_1, \ldots, x_m$, даваемые формулами (6.5), в $y = f_0(x)$, получим функцию

$$y = f_0(\varphi_1(\tilde{x}), \ldots, \varphi_m(\tilde{x}), \tilde{x}), \quad \tilde{x} = (x_{m+1}, \ldots, x_n), \tag{6.6}$$

от $n-m$ переменных x_{m+1}, $\ldots$, x_n, определённую и непрерывно дифференцируемую в некоторой окрестности точки $\tilde{x}^{(0)} = \big(x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\big)$ в $(n-m)$-мерном пространстве $\mathbb{R}^{n-m}$.

Поскольку, согласно теореме о неявной функции, условия (6.3) и (6.5) равносильны, справедливо следующее утверждение.

Точка $x^{(0)}$ *является точкой (строгого) условного экстремума для функции* $f_0(x)$ *относительно уравнений связи* (6.3) *в том и только в том случае, когда* $\tilde{x}^{(0)}$ *является точкой обычного (строгого) экстремума функции* (6.6).

Пример. Найти условный экстремум функции

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

при условии

$$x + y - 1 = 0.$$

Выражая y из уравнения связи и подставляя в $f(x, y)$, получим

$$g(x) = f(x, 1-x) = x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1.$$

Так как $g'(x) = 4x - 2$ и $g''(x) = 4$, то функция $g(x)$ имеет единственную точку экстремума

$$x_{min} = \frac{1}{2}, \quad g_{min} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, в точке $(1/2, 1/2)$ функция $f(x, y)$ достигает условного минимума $f_{min} = 1/2$.

Таким образом, метод, основанный на решении системы уравнений (6.3), позволяет свести вопрос о нахождении условного экстремума к уже изученному вопросу об обычном экстремуме. Однако найти решение системы (6.3) в явном виде часто невозможно или весьма затруднительно.

В следующем разделе изложен метод, позволяющий находить условный экстремум, не решая системы (6.3).

1.7. Метод множителей Лагранжа

1. Рассмотрим функцию от $n + m$ переменных

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f_0(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j(x), \tag{7.1}$$

где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. Функция (7.1) называется *функцией Лагранжа.*

2. Находим стационарные точки функции $\mathcal{L}(x, \lambda)$. Для этого решаем систему $(n+m)$ - уравнений с $n+m$ неизвестными.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} = f_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, m, \end{cases} \tag{7.2}$$

3. Рассмотрим стационарную точку. Выясним является ли она точкой экстремума. Для этого запишем второй дифференциал функции Лагранжа в этой точке. $\mathcal{L}(x, \lambda)$

$$d^2\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_i \partial x_k} \, dx_i dx_k \tag{7.3}$$

4. Дифференциалы $dx_1, \dots, dx_n$ не являются независимыми. Условия связи (6.3) налагают на них условия

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} dx_n = 0,, \end{cases} \tag{7.4}$$

По условию ранг системы (7.4) равен m, $m < n$. Следовательно, найдутся $n - m$ независимых дифференциалов, через которые линейно выражаются остальные m дифференциалов. Для простоты будем считать независимыми $dx_1, \dots, dx_{n-m}$. Таким образом,

$$dx_i = \sum_{k=1}^{n-m} a_{ik} dx_k, \quad i = n - m + 1, \dots, n. \tag{7.5}$$

Подставляя в (7.5) в (7.3), получим

$$d^2\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n-m} \sum_{k=1}^{n-m} A_{ik} \, dx_i dx_k \tag{7.6}$$

5. Исследуем получившуюся квадратичную форму на знакоопределённость, например с помощью критерия Сильвестра. Если $d^2\mathcal{L} < 0$ ($d^2\mathcal{L} > 0$), то рассматриваемая стационарная точка является точкой строгого условного максимума (строгого условного минимума); если же $d^2\mathcal{L}$ неопределена, то данная точка не является точкой условного экстремума.

Пример . Найти условный экстремум функции

$$f(x, y, z) = xyz$$

при условиях

$$\varphi_1(x, y, z) = x + y - z - 3 = 0, \quad \varphi_2(x, y, z) = x - y - z - 8 = 0$$

Решение. 1) Составим функцию Лагранжа

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = xyz + \lambda_1(x + y - z - 3) + \lambda_2(x - y - z - 8).$$

2) Найдём стационарные точки функции $\mathcal{L}(x, \lambda)$. Запишем систему уравнений для определения параметров λ_1, λ_2 и координат стационарных точек.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= yz + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= xz + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= xy - \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ x + y &- z - 3 = 0, \\ x - y &- z - 8 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему уравнений, получим единственную стационарную точку

$$x = \frac{11}{4}, \quad y = -\frac{5}{2}, \quad z = -\frac{11}{4}, \quad \lambda_1 = \frac{11}{32}, \quad \lambda_2 = -\frac{231}{32}.$$

3) Найдём частные производные 2-го порядка. Имеем

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = z, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = y, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} = x.$$

Следовательно, второй дифференциал функции $L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2)$ равен

$$d^2 L = 2z\, dxdy + 2y\, dxdz + 2x\, dydz.$$

4) Связи дадут соотношения

$$dx + dy - dz = 0, \quad dx - dy - dz = 0.$$

В качестве независимого дифференциала можно взять dx. Имеем $dz = dx$, $dy = 0$. Поэтому второй дифференциал функции Лагранжа с учётом связей равен

$$d^2 L = 2y\, dx^2.$$

В стационарной точке $y = -5/2$. Таким образом $d^2 L = -5\, dx^2$.

5) Очевидно, что квадратичная форма $d^2 L = -5\, dx^2$ отрицательно определена. Таким образом, точка $(11/4, -5/2, -11/4)$ является точкой максимума; $f_{max} = 605/32$.