(2 часть) Гафурова Ф.Ф.

Вариант 4

(V) Разложить функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z_0 и указать область, в которой ряд представляет данную функцию.

$$f(z) = \operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(\exp z - \exp(-z)), \quad z_0 = 0$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} f^{(2k)}(z) &= \operatorname{sh} z \\ f^{(2k+1)}(z) &= \operatorname{ch} z \end{aligned} \quad k = 0, 1, \ldots, \Rightarrow \quad \begin{aligned} f^{(2k)}(z=0) &= 0 \\ f^{(2k+1)}(z=0) &= 1 \end{aligned}$$

Тогда ряд Тейлора для $\operatorname{sh} z$:

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f^{(m)}(z)}{m!}\Bigg|_{z=0} z^m = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_n$$

Р-им $\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \left|\frac{z^{2k+3}}{(2k+2)!}\frac{(2k+1)!}{z^{2k+1}}\right| = \frac{|z|^2}{(2k+2)}$

$\xrightarrow[k \to \infty]{} 0$ $\Rightarrow$ по признаку Даламбера ряд сходится $\forall z$.

$\forall z = f ix$

(VI) Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанной области.

$$f(z) = z^{-1}(1-z)^{-1}, \quad 0<|z-1|<1$$

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z}+\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1+(z-1)} - \frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-1)^n - \frac{1}{z-1}$$

(VII) Вычислить интеграл при помощи вычетов.

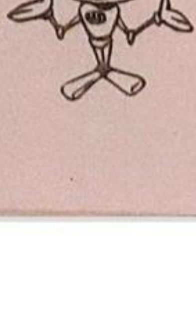
$$\int_L \frac{exp(iz)-1}{z^3}\,dz, \quad L=\{z:|z|=1\}.$$

$$\int_L \frac{e^{iz}-1}{z^3}\,dz = 2\pi i \, Res(z=0)$$

функция $\frac{e^{iz-1}-1}{z^3}$ раскладывается

в ряд Лорана в точке $z_0=0$:

$$\frac{e^{iz}-1}{z^3} = \frac{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(iz)^k}{k!}-1}{z^3} = \sum_{k=1}^{\infty} i^k \frac{z^{k-3}}{k!} =$$



$$= \frac{i}{z^2} - \frac{1}{2z} + \ldots, \Rightarrow \operatorname{Res}(z=0) = C_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int\limits_L \frac{e^{iz}-1}{z^3}\,dz = 2\pi i \left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i$$

(VIII) Вычислить несобственный интеграл

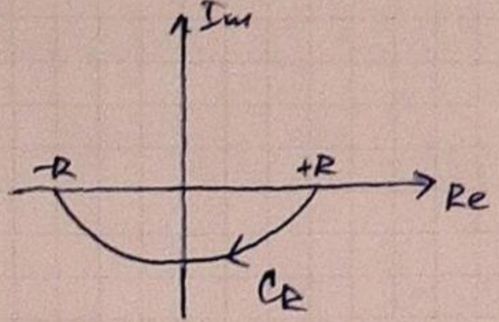
$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2+7}\,dx, \quad a<0$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin(ax)}{x+7}\,dx = \operatorname{Im}\left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{x e^{iax}}{x^2+7}\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{iax}}{x^2+7}\,dx\right) =$$ (по лемме

Жордана по нижней полуплоскости)

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\int\limits_{C_R} \frac{z e^{iaz}}{z^2+7}\,dz\right),$$ где C_R – нижняя полуокр с $R \to +\infty$:



тогда $\displaystyle\int_{C_R} \frac{z e^{iaz}}{z^2+7}\, dz = \int_{C_R} \frac{z e^{iaz}}{(z-i\sqrt{7})(z+i\sqrt{7})}\, dz =$

$= -2\pi i \; Res\left(-i\sqrt{7}\right) = -2\pi i \cdot \dfrac{z e^{iaz}}{z-i\sqrt{7}}\Big|_{z=-i\sqrt{7}}$

$= -2\pi i \, \dfrac{-i\sqrt{7}\, e^{a\sqrt{7}}}{-2i\sqrt{7}} = -2\pi i \cdot \dfrac{1}{2} e^{a\sqrt{7}} = -i\pi e^{a\sqrt{7}}$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2+7}\, dx = \frac{1}{2}\left(-\pi e^{a\sqrt{7}}\right)$