

Евклидовы пространства

Задача 1



С помощью процедуры Грамма-Шмидта ортогонализировать систему из трех векторов:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Пример ответа:

$$\begin{bmatrix} 1.11 \\ 2.22 \\ 3.33 \\ 4.44 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5.55 \\ 6.66 \\ 7.77 \\ 8.88 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 9.99 \\ 10.1 \\ 11.11 \\ 12.12 \end{bmatrix}.$$

Пример ввода: [1.11, 2.22, 3.33, 4.44; 5.55, 6.66, 7.77, 8.88; 9.99, 10.10, 11.11, 12.12]

Ваш ответ: [1, 0, 0, 0; 0, 0.45, 0, -0.89; 0, -0.36, 0.91, -0.18]

Задача 2



Подпространство L Евклидова пространства \mathbb{E}^5 задано как линейная оболочка векторов:

$$L = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ -4 \\ -24 \\ -30 \end{pmatrix} \right\}$$

Скалярное произведение в \mathbb{E}^5 задано матрицей Грама G :

$$G = \begin{pmatrix} 11 & -20 & 0 & -20 & -6 \\ -20 & 55 & 36 & 44 & 10 \\ 0 & 36 & 71 & 14 & 0 \\ -20 & 44 & 14 & 41 & 10 \\ -6 & 10 & 0 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

Найдите базис ортогонального дополнения L^\perp к пространству L . Для ответа

$$L^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Пример ввода: [3, 2, -1; 5, 10, 1]

Ваш ответ: [-1945/571, -3302/1713, 1, 0, 0; 625/571, -718/1713, 0, 1, 0; 476/571, 100/1713, 0, 0, 1]

Задача 3



Подпространство L Евклидова пространства \mathbb{E}^3 задано как система уравнений на координаты векторов x_i :

$$L : \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 6x_1 + 11x_2 = 0 \end{cases}$$

Скалярное произведение задано матрицей Грама G

$$G = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 1 \\ 9 & 14 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдите базис ортогонального дополнения L^\perp к пространству L .
Для ответа

$$L^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Пример ввода: [3, 2, -1; 5, 10, 1]

Ваш ответ: [-13/8, 1, 5/8; -8/3, 5/3, 1]

Задача 4



В Евклидовом пространстве \mathbb{E}^3 скалярное произведение задано своей матрицей Грама G в стандартном базисе:

$$G = \begin{pmatrix} 7 & -11 & 9 \\ -11 & 18 & -15 \\ 9 & -15 & 13 \end{pmatrix}$$

Найти угол между вектором v и подпространством L , если вектор задан своими координатами в стандартном базисе, а линейное подпространство L задано как линейная оболочка векторов в стандартном базисе

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$L = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$$

Дробные числа в ответе вводить с точностью не менее 2 знаков после запятой, для рациональных дробей допустима запись в виде a/b .

Пример ввода: 13.37

Пример ввода: 2/7

Ваш ответ: 0.01688

Задача 5



В Евклидовом пространстве \mathbb{E}^2 скалярное произведение задано своей матрицей Грама G в базисе $\{e_i\}_{i=1}^2$:

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

В базисе $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^2$ заданы координаты векторов v_1 и v_2 .

Найти скалярное произведение векторов v_1 и v_2 , если

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{e}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Дробные числа в ответе вводить с точностью не менее 2 знаков после запятой, для рациональных дробей допустима запись в виде a/b .

Пример ввода: 13.37

Пример ввода: 2/7

Ваш ответ: 2

Задача 6



Дана матрица A_φ линейного оператора $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{E}^3, \mathbb{E}^3)$ в стандартном базисе.

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Скалярное произведение в \mathbb{E}^3 задано матрицей Грама G в стандартном базисе.

$$G = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -4 \\ -4 & 6 & 7 \\ -4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу A_φ^* , являющуюся матрицей оператора φ^* , сопряженного к исходному оператору φ .

Дробные числа в ответе вводить с точностью не менее 2 знаков после запятой, для рациональных дробей допустима запись в виде a/b .

Для ответа $A_\varphi^* = \begin{pmatrix} 3.45687 & \frac{3}{7} \\ 2 & -1.2333 \end{pmatrix}$

Пример ввода: [3.46, 3/7; 2, -1.23]

Ваш ответ: [77, -112, -129; 94, -139, -164; -36, 54, 65]

Задача 7



Найти координаты ортогональной проекции вектора x на линейную оболочку векторов e_1 и e_2 . Скалярное произведение стандартное.

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Пример ввода: [1.11, 2.22]

Ваш ответ: [6/7, 1/5]

Задача 8



Найти скалярное произведение двух векторов в Евклидовом пространстве, которое задано своей матрицей Грама G :

$$v_1 = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 7 & -13 & -3 & 13 \\ -13 & 28 & 5 & -31 \\ -3 & 5 & 2 & -5 \\ 13 & -31 & -5 & 37 \end{pmatrix}.$$

Пример ввода: 23

Ваш ответ: -4725

Задача 9



Подпространство L Евклидова пространства \mathbb{E}^3 задано в виде системы уравнений на координаты:

$$L : \begin{cases} -6x_1 - 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Скалярное произведение в \mathbb{E}^3 задано матрицей Грама в стандартном базисе:

$$G = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -11 \\ -3 & 2 & 7 \\ -11 & 7 & 25 \end{pmatrix}$$

Вектор y задан своими координатами в стандартном базисе:

$$y = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Найти y_L - ортогональную проекцию вектора y на L .

Дробные числа в ответе вводить с точностью не менее 4 знаков после запятой, для рациональных дробей допустима запись в виде a/b .

Для ответа

$$y_L = \begin{pmatrix} 3.340212 \\ 2.11999 \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

Пример ввода: [3.3402, 2.12, 3/7]

Ваш ответ: [-124/101, 248/101, 124/101]

[На главную](#)