ТеорМин 2

1) Перечислите свойства метрики (функции расстояния).

Определение. Метрическим пространством M называется некоторое множество, на котором определено отображение $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$, обладающее следующими свойствами:

M1. $\rho(x, y) \geqslant 0, \quad \rho(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y;$
M2. $\rho(x, y) = \rho(y, x);$
M3. $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z).$

Замечание. Отображение ρ называется **расстоянием** (или метрикой).

2) Перечислите свойства нормы.

Определение. Нормированным пространством называется линейное пространство $X(\mathbb{R})$, наделенное отображением $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, обладающим следующими свойствами:

N1. $\|x\| \geqslant 0, \quad \|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0;$
N2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \alpha \in \mathbb{R};$
N3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$

3) Как из нормированного пространства сделать метрическое?

Лемма 1.1. *Любое нормированное пространство может быть метризовано:*

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Доказательство. Действительно, аксиома **M1** следует из **N1**, точно также **M2** следует из **N2**:

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = |-1|\|y - x\| = \|y - x\| = \rho(y, x).$$

Для доказательства **M3** положим в **N3**

$$x = a - b, \quad y = b - c, \quad \Rightarrow \quad x + y = a - c,$$

которые после подстановки сразу дают необходимое неравенство. □

4) Перечислите свойства комплексного скалярного произведения.

Определение. Линейное пространство X над $\mathbb{C}$ называется **комплексным евклидовым пространством**, если на нем задана *метрическая форма* $g(x, y) = \langle x, y \rangle$ со следующими свойствами:

E1. $\langle x, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle = \alpha \langle x, y_1 \rangle + \beta \langle x, y_2 \rangle$ - линейность по второму аргументу;
E2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ - эрмитовость;
E3. $\langle x, x \rangle \geqslant 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$

Замечание. Из аксиом **E1** и **E2**, в частности, следует

$$\langle \alpha x, y \rangle = \overline{\langle y, \alpha x \rangle} = \overline{\alpha \cdot \langle y, x \rangle} = \overline{\alpha} \cdot \langle x, y \rangle.$$

То есть, из первого аргумента множитель выносится с сопряжением.

5) Перечислите свойства вещественного скалярного произведения.

Определение. Пусть X — векторное пространство (над $\mathbb{R}$). *Скалярное произведение* в X — это функция $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{R}$, обладающая свойствами:

(1) Симметричность: $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ для любых $x, y \in X$.

(2) Линейность по каждому аргументу (билинейность): $\langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle$, $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ для любых $x, y, z \in X$, $a \in \mathbb{R}$. Линейность по второму аргументу следует из симметричности.

(3) Положительная определенность: $\langle x, x\rangle > 0$ при всех $x \in X \setminus \{0\}$,

6) Как вычисляется матрица Грама?

Определение. Совокупность чисел $g_{ij} = g\left(e_i, e_j\right)$ называется **метрическим тензором**, а соответствующая матрица $G = \|g_{ij}\|$ - **матрицей Грама**:

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1\rangle & \langle e_1, e_2\rangle & \dots & \langle e_1, e_n\rangle \\ \langle e_2, e_1\rangle & \langle e_2, e_2\rangle & \dots & \langle e_2, e_n\rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle e_n, e_1\rangle & \langle e_n, e_2\rangle & \dots & \langle e_n, e_n\rangle \end{pmatrix}.$$

7) Как из евклидова пространства сделать нормированное?

Лемма 3.1. *Евклидово пространство может быть нормировано:*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Доказательство. Проверка первых двух аксиом нормы проводится непосредственно:

$$\sqrt{\langle x, x\rangle} \geqslant 0,$$
$$\sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x\rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Проверка последней аксиомы сводится к проверке утверждения

$$\langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle\,,$$

которое составляет утверждение теоремы о *неравенстве Шварца.*

□

8) Сформулируйте неравенство Шварца.

Теорема 3.1. *(Неравенство Шварца) Имеет место следующее соотношение между скалярным произведением и порождаемой им нормой*

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \, \|y\|\,.$$

9) В каком случае неравенство Шварца обращается в равенство?

Лемма 3.2. *Неравенство Шварца обращается в точное равенство тогда и только тогда, когда x и y - линейно зависимые векторы.*

Доказательство. Пусть $y = \alpha x$, тогда

$$|\langle x, \alpha x\rangle| \leqslant \|x\| \, \|\alpha x\| \,, \quad \Rightarrow \quad |\alpha| \, \|x\|^2 \leqslant |\overline{\alpha}| \, \|x\|^2 \,, \quad |\overline{\alpha}| = |\alpha| \,.$$

Пусть $|\langle x, y\rangle| = \|x\| \, \|y\|$, тогда

$$D/4 = |\langle x, y\rangle|^2 - \|x\|^2 \, \|y\|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \neq 0 : \quad \|\lambda x + y\|^2 = 0,$$
$$\Leftrightarrow \quad \lambda x + y = 0.$$

□

10) Дайте определение ортогональности элементов евклидова пространства.

Определение 1.1. Пусть $x, y \in E$. Говорят, что x **ортогонален** y (пишут $x \perp y$), если $\langle x, y\rangle = 0$.

Лемма 1.1. *Пусть* $x \perp y_1, y_2, \ldots, y_k$, *тогда* $x \perp \mathcal{L}\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$.

Доказательство.

$$\left\langle x, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle x, y_i\rangle \,.$$

□

11) Сформулируйте теорему Пифагора.

Теорема 1.2. *(Пифагора) Пусть* $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ *- набор ненулевых попарно ортогональных векторов, тогда*

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|^2 \,.$$

Доказательство.

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} x_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{k} x_i, \sum_{j=1}^{k} x_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{k} \langle x_i, x_j\rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle x_i, x_i\rangle = \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|^2 \,.$$

□

12) Дайте определение ортогональности вектора подпространству.

Определение 1.2. Говорят, что x **ортогонален подпространству** $L \leqslant X_E$, если

$$\forall y \in L \quad \langle x, y\rangle = 0.$$

Замечание. Для обозначения данного факта обычно пишут $x \perp L$.

13) Что называется ортогональным дополнением подпространства?

Определение 1.3. **Ортогональным дополнением** пространства L называется множество

$$M = \{x \in X : \quad x \perp L\}.$$

Лемма 1.2. *Ортогональное дополнение является подпространством X_E.*

Доказательство. В этом легко убедиться прямой проверкой.

□

14) Опишите процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

Теорема 2.1. *Пусть $\{x_j\}_{j=1}^k$ - линейно-независимый набор в евклидовом пространстве X_E, тогда $\{x_j\}_{j=1}^k$ можно преобразовать в ортогональный набор $\{e_j\}_{j=1}^k$.*

Доказательство. Используем процесс ортогонализации Грама-Шмидта:

1. $e_1 = x_1$,
2. $e_2 = x_2 + \alpha_2^1 e_1, \quad e_2 \perp e_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2^1 = -\frac{\langle e_1, x_2 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle}$,
3. $e_3 = x_3 + \alpha_3^2 e_2 + \alpha_3^1 e_1, \quad e_3 \perp e_1, e_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_3^1 = -\frac{\langle e_1, x_3 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle}, \alpha_3^2 = -\frac{\langle e_2, x_3 \rangle}{\langle e_2, e_2 \rangle}$,

... $\dots$

m. $e_m = x_3 + \alpha_m^{m-1} e_{m-1} + \ldots + \alpha_m^2 e_2 + \alpha_m^1 e_1, \quad \Rightarrow \quad \alpha_m^j = -\frac{\langle e_j, x_m \rangle}{\langle e_j, e_j \rangle}$.

□

Замечание. Для $\{x_j\}_{j=1}^k$ процесс ортогонализации не оборвется, то есть все $e_j \neq 0$.

15) Что произойдет с линейно зависимым набором векторов после применения ортогонализации Грама-Шмидта?

Замечание. Пусть $\{x_j\}_{j=1}^k$ - линейно независимый набор, а $\{x_j\}_{j=1}^{k+1}$ - линейно-зависимый, тогда $e_{k+1} = 0$.

Замечание. Имеет место следующее неравенство: $\|e_m\| \leqslant \|x_m\|$

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение:

$$\langle e_m, e_m \rangle = \langle e_m, x_m \rangle + 0 + \ldots + 0, \quad \Rightarrow \quad \|e_m\|^2 = \langle x_m, e_m \rangle \leqslant \|x_m\| \cdot \|e_m\|.$$

□

16) Какой базис называют ортогональным?

Определение 3.1. Базис $\{e_j\}_{j=1}^n$ евклидова пространства X_E называется

- **ортогональным**, если $\langle e_i, e_{j \neq i} \rangle = 0$.
- **ортонормированным**, если $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.

17) Какой базис называют ортонормированным?

Определение 3.1. Базис $\{e_j\}_{j=1}^n$ евклидова пространства X_E называется

- **ортогональным**, если $\langle e_i, e_{j\neq i}\rangle = 0$.
- **ортонормированным**, если $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$.

18) Как выглядит матрица Грама ортогонального базиса?

Замечание. Матрица Грама скалярного произведения в ортогональном базисе имеет диагональный вид, а в ортонормированном базисе имеет вид единичной матрицы:

$$G_{\text{ОБ}} = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}, \quad \lambda_j \neq 0, \quad G_{\text{ОНБ}} = \|\delta^i_j\|.$$

19) Как выглядит матрица Грама ортонормированного базиса?

Замечание. Матрица Грама скалярного произведения в ортогональном базисе имеет диагональный вид, а в ортонормированном базисе имеет вид единичной матрицы:

$$G_{\text{ОБ}} = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}, \quad \lambda_j \neq 0, \quad G_{\text{ОНБ}} = \|\delta^i_j\|.$$

20) Дайте определение ортогональной сумме подпространств.

Теорема 1.1. *Пусть L - подпространство евклидова пространства X_E и*

$$M = L^\perp = \{x \in X_E : \quad x \perp L\},$$

тогда

$$E = L \dot{+} M \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in X_E \quad \exists! z \in L,\ h \in L^\perp : \quad x = z + h.$$

Доказательство. Выполним по пунктам:

1. Пусть $\{e_j\}_{j=1}^k$ - ортонормированный базис в L,
2. Дополним $\{e_j\}_{j=1}^k$ до базиса X_E : $\quad \{e_1, e_2, \dots, e_k; x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n\}$
3. Проведем процесс ортогонализации Грама-Шмидта
$$\{e_1, e_2, \dots, e_k; e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n\},$$
4. $\forall x = \sum_{i=1}^k \xi^i e_i + \sum_{i=k+1}^n \xi^i e_i = z + h \quad \Rightarrow \quad X_E = L + M.$
5. Пусть $x = h_1 + z_1 = h_2 + z_2$, тогда $h_2 - h_1 = z_1 - z_2$ и
$$\|h_2 - h_1\|^2 = \langle z_1 - z_2, h_2 - h_1\rangle = 0, \quad \Rightarrow \quad h_2 - h_1 = 0.$$

□

Замечание. В данном случае прямая сумма $X_E = L \dot{+} M = L \oplus M$ называется также *ортогональной суммой* подпространств L и M.

21) Что такое ортогональный проектор на подпространство?

Определение 2.1. **Ортогональным проектром** на подпространство L называется линейный оператор, обладающий следующим свойством:

$$\mathcal{P}_L^\perp(x) = z, \quad x = z + h, \quad z \in L, \quad h \in M = L^\perp.$$

22) Дайте определение ортогональной проекции.

Замечание 2.1. Тогда вектор z называется *ортогональной проекцией* x на L.

23) Как задать ортогональный проектор на подпространство в ортонормированном базисе?

Теорема 2.1. *Пусть* $\{e_j\}_{j=1}^n$ *- ортонормированный базис в* X_E*. Тогда вид ортогонального проектора в этом базисе:*

$$\mathcal{P}_L^{\perp} x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i \rangle \, e_i, \quad \forall x \in X_E.$$

24) Что такое коэффициенты Фурье вектора?

Определение 3.2. Коэффициенты $\alpha_i = \langle x, e_i \rangle$ ортонормированном базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ пространства X_E называются **коэффициентами Фурье** вектора x относительно этого базиса.

Лемма 3.2. *Справедливо следующее равенство:*

$$\left\| \mathcal{P}_L^{\perp} x \right\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \left| \langle x, e_i \rangle \right|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2$$

25) Что такое неравенство Бесселя?

Лемма 3.3. *(Следствие предыдущих лемм) Неравенство Бесселя:*

$$\|x\|^2 \geqslant \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2 \quad \Leftrightarrow \quad x \in L.$$

26) Как выглядит равенство Парсеваля?

Теорема 3.1. *Система ортонормированных векторов* $\{e_i\}_{i=1}^k$ *является полной в* X_E *тогда и только тогда, когда для любого* $x \in X_E$ *имеет место равенство Парсеваля:*

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2, \quad \alpha_i = \langle e_i, x \rangle \quad \forall x \in X_E.$$

27) Дайте определение эрмитовски сопряженному оператору.

Определение 1.1. Оператор $\varphi^\dagger$ называется **эрмитовски сопряженным** к оператору φ, если он обладает следующим свойством:

$$\langle x, \varphi y \rangle = \langle \varphi^\dagger x, y \rangle.$$

Замечание 1.1. Свойства операции эрмитовского сопряжения теже, что и свойства операции сопряжения.

28) Как связаны матрицы оператора и эрмитовски сопряженного к нему?

Замечание 1.1. Свойства операции эрмитовского сопряжения теже, что и свойства операции сопряжения.

Лемма 1.1. *Пусть $\{e_j\}_{j=1}^n$ - базис евклидова пространства $X_E(\Bbbk)$ и G - его матрица Грама. Тогда если A_φ - матрица оператора φ в этом базисе, то матрица $\varphi^\dagger$ будет имеет вид*

$$A_{\varphi^\dagger} = G^{-1}A^\dagger G, \quad A^\dagger = \overline{A}^T.$$

29)Какой оператор называют самосопряженным (эрмитовым)?

Определение 2.1. Оператор, обладающий свойством $\varphi^\dagger = \varphi$ называется **самосопряженным**, если $\Bbbk = \mathbb{R}$ и **эрмитовским**, если $\Bbbk = \mathbb{C}$.

30) Каким свойством обладают матрицы самосопряженного (эрмитова) оператора?

Замечание 2.1. Матрицы самосопряженного φ и эрмитовского ψ операторов обладают соответственно свойствами:

$$A_\varphi^T = A_\varphi, \quad B_\psi^\dagger = B_\psi.$$

31) Каким свойством обладают собственные векторы эрмитова оператора, отвечающие различным собственным значениям?

Лемма 3.1. *Все собственные значения эрмитова оператора φ вещественны.*

Доказательство. Пусть λ - собственное значение φ и x - соответствующий собственный вектор. Тогда

$$\langle \varphi x, x\rangle = \overline{\lambda}\langle x, x\rangle, \quad \langle x, \varphi x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle \quad \Rightarrow \quad \overline{\lambda} = \lambda$$

□

Лемма 3.2. *Собственные векторы эрмитова оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны:*

$$\varphi x_1 = \lambda_1 x_1, \quad \varphi x_2 = \lambda_2 x_2, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 \perp x_2.$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{gathered}\langle \varphi x_1, x_2\rangle = \langle x_1, \varphi x_2\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle \lambda_1 x_1, x_2\rangle = \langle x_1, \lambda_2 x_2\rangle \\ \lambda_1\langle x_1, x_2\rangle = \lambda_2\langle x_1, x_2\rangle, \quad \overline{\lambda}_2 = \lambda_2, \quad \Rightarrow \\ (\lambda_1 - \lambda_2)\langle x_1, x_2\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle x_1, x_2\rangle = 0.\end{gathered}$$

□

32) Как выглядит спектральная теорема для эрмитова оператора?

Теорема 3.2. *(Спектральная теорема для эрмитова оператора) Пусть $\varphi : X_E \to X_E$ - эрмитов оператор и $\{e_j\}_{j=1}^n$ - ОНБ X_E, состоящий из собственных векторов φ, тогда:*

$$\varphi(*) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle *, e_i\rangle\, e_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

33) Что подразумевается под свойством изометрии унитарного оператора?

Лемма 1.1. *Пусть υ - опертор в евклидовом пространстве $X_E(\mathbb{k})$, тогда следующие свойства эквиваентны:*

(а) изометрия: $\langle \upsilon x, \upsilon y\rangle = \langle x, y\rangle$;

(б) сохранение нормы: $\|\upsilon x\| = \|x\|$;

(в) свойство сопряженного: $\upsilon^\dagger = \upsilon^{-1}$

34) Что означает свойство сохранения нормы линейным оператором?

- Опр.(1) $\Rightarrow$ Опр.(2):

$$\|\upsilon x\|^2 = \langle \upsilon x, \upsilon x\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2;$$

- Опр.(2) $\Rightarrow$ Опр.(1):

$$\|\upsilon(x+y)\|^2 = \|\upsilon x\|^2 + \|\upsilon y\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle \upsilon x, \upsilon y\rangle,$$
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y^2\| + 2\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle = \mathrm{Re}\,\langle \upsilon x, \upsilon y\rangle$$

Для Im аналогично рассматриваем $\|\upsilon(x + i\cdot y)\|^2$

35) Каким общим свойством обладает определитель унитарного оператора?

Определение 1.1. Унитарным называется оператор υ, обладающий одним из перечисленных выше свойств (и, как следствие, всем остальными).

Лемма 1.2. *Определитель оператора υ имеет следующее свойство:*

$$|\det \upsilon| = 1.$$

Доказательство. Прямой проверкой можно убедиться, что

$$\det \mathcal{I} = \det\left(\upsilon^\dagger \upsilon\right) = \det \upsilon^\dagger \det \upsilon = \overline{\det \upsilon} \cdot \det \upsilon = |\det \upsilon|^2 = 1.$$

□

36) Каким общим свойством обладает определитель ортогонального оператора?

Лемма 1.2. *Определитель оператора υ имеет следующее свойство:*

$$|\det \upsilon| = 1.$$

Доказательство. Прямой проверкой можно убедиться, что

$$\det \mathcal{I} = \det\left(\upsilon^\dagger \upsilon\right) = \det \upsilon^\dagger \det \upsilon = \overline{\det \upsilon} \cdot \det \upsilon = |\det \upsilon|^2 = 1.$$

□

Замечание 1.1. Унитарный оператор в вещественном евклидовом пространстве X_E называется **ортогональным** оператором.

37) Дайте определение ортогональному оператору.

Замечание 1.1. Унитарный оператор в вещественном евклидовом пространстве X_E называется **ортогональным** оператором.

38) Каким свойством обладает матрица унитарного оператора?

Замечание 2.1. Матрицы унитарного и ортогонального операторов имеют свойсва:

$$\mathbb{C}: \quad \upsilon \leftrightarrow U, \quad \overline{U^T} = U^{-1};$$
$$\mathbb{R}: \quad \upsilon \leftrightarrow U, \quad U^T = U^{-1}.$$

Замечание 2.2. В вещественном случае

$$\det \upsilon = \det U = \pm 1$$

39) Каким свойством обладает матрица ортогонального оператора?

Замечание 2.1. Матрицы унитарного и ортогонального операторов имеют свойсва:

$$\mathbb{C}: \quad \upsilon \leftrightarrow U, \quad \overline{U^T} = U^{-1};$$
$$\mathbb{R}: \quad \upsilon \leftrightarrow U, \quad U^T = U^{-1}.$$

Замечание 2.2. В вещественном случае

$$\det \upsilon = \det U = \pm 1$$

40) Укажите общее свойство собственных значений унитарного оператора.

Лемма 3.1. *Все собственные значения оператора υ по модулю равны единице:*

$$|\lambda| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = e^{i\chi}.$$

Доказательство. Пусть $\upsilon x = \lambda x$, тогда

$$\langle \upsilon x, \upsilon x \rangle = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = |\lambda|^2 \langle x, x \rangle. \quad \Rightarrow \quad |\lambda| = 1.$$

□

41) Каким свойством обладают собственные векторы унитарного оператора, отвечающие различным собственным значениям?

Лемма 3.2. *Собственные векторы унитарного оператора, отвечающие различным собственным значениям ортогональны:*

$$\upsilon x_1 = \lambda_1 x_1, \quad \upsilon x_2 = \lambda_2 x_2, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad \langle x_1, x_2 \rangle = 0.$$

Доказательство. Убедимся прямой проверкой:

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \langle \upsilon x_1, \upsilon x_2 \rangle = \overline{\lambda}_1 \lambda_2 \langle x_1, x_2 \rangle = e^{-i\chi_1} e^{i\chi_2} \langle x_1, x_2 \rangle = e^{i(\chi_2 - \chi_1)} \langle x_1, x_2 \rangle.$$

Откуда сразу следует:

$$\left(e^{i(\chi_1 - \chi_2)} - 1 \right) \langle x_1, x_2 \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle x_1, x_2 \rangle = 0.$$

□