

Лабораторная работа №2

Задание 1

Предъявите доверительный интервал уровня $1 - \alpha$ для указанного параметра при данных предположениях (с математическими обоснованиями). Сгенерируйте 2 выборки объема 25 и посчитайте доверительный интервал. Повторите 1000 раз. Посчитайте, сколько раз 95-процентный доверительный интервал покрывает реальное значение параметра. То же самое сделайте для объема выборки 10000. Как изменился результат? Как объяснить? Что изменяется при росте объемов выборок?

Задача представлена в 4 вариантах. Везде даны две независимые выборки X_1, X_2 из нормальных распределений $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2), \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ объемов n_1, n_2 соответственно. Сначала указывается оцениваемая функция, потом данные об остальных параметрах, затем параметры эксперимента и подсказки.

1. $\tau = \mu_1 - \mu_2$; σ_1^2, σ_2^2 известны; $\mu_1 = 2, \mu_2 = 1, \sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = 0.5$; воспользуйтесь функцией

$$\frac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - \tau}{\sigma}, \quad \sigma^2 = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}.$$

2. $\tau = \mu_1 - \mu_2$; $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ неизвестна; $\mu_1 = 2, \mu_2 = 1, \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$; воспользуйтесь функцией

$$\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - \tau}{\sqrt{n_1 S_*^2(X_1) + n_2 S_*^2(X_2)}},$$

где $S_*^2(X_i)$ – выборочная смещенная дисперсия для выборки X_i . Смотрите в сторону распределения Стьюдента.

3. $\tau = \sigma_1^2 / \sigma_2^2$; μ_1, μ_2 неизвестны; $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0, \sigma_1^2 = 2, \sigma_2^2 = 1$; воспользуйтесь функцией

$$\frac{n_1(n_2 - 1)S_*^2(X_1)}{n_2(n_1 - 1)S_*^2(X_2)},$$

где $S_*^2(X_i)$ – выборочная смещенная дисперсия для выборки X_i . Смотрите в сторону распределения Фишера.

4. $\tau = \sigma_1^2 / \sigma_2^2$; μ_1, μ_2 известны; $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0, \sigma_1^2 = 2, \sigma_2^2 = 1$; воспользуйтесь функцией

$$\frac{n_2 \sum_{i=1}^{n_1} (X_{1,i} - \mu_1)^2}{n_1 \sum_{i=1}^{n_2} (X_{2,i} - \mu_2)^2}.$$

Смотрите в сторону распределения Фишера.

Задание 2

Постройте асимптотический доверительный интервал уровня $1 - \alpha$ для указанного параметра. Проведите эксперимент по схеме, аналогичной первой задаче.

Задача представлена в 5 вариантах. Сначала указывается класс распределений (однопараметрический) и оцениваемый параметр, затем параметры эксперимента и подсказки.

1. $\text{Exp}(\lambda)$; медиана; $\lambda = 1$; воспользуйтесь предельной теоремой об асимптотическом поведении среднего члена вариационного ряда.
2. Распределение Лапласа с неизвестным параметром сдвига μ и единичным масштабирующим параметром; μ ; $\mu = 2$; можно воспользоваться подсказкой для предыдущего варианта, хотя другие способы решения приветствуются.

3. $U[-\theta, \theta]$; θ ; $\theta = 5$; воспользуйтесь предельной теоремой об асимптотическом поведении крайних членов вариационного ряда.
4. $\text{Geom}(p)$; p ; $p = 0.7$; тут рецепт стандартный).
5. $\text{Pois}(\lambda)$; второй момент; $\lambda = 1$; воспользоваться асимптотической нормальностью второго момента.