

Группа 3220

К работе допущен \_\_\_\_\_

Студент Гафурова Ф. Ф.

Работа выполнена \_\_\_\_\_

Преподаватель Пулькин Н. С.

Отчет принят \_\_\_\_\_

## **Рабочий протокол и отчет по лабораторной работе №1.02**

### **Изучение скольжения тележки по наклонной поверхности**

## 1. Цель работы.

1) Экспериментальная проверка равноускоренности движения тележки по наклонной плоскости.

2) Определение величины ускорения свободного падения  $g$ .

## 2. Задачи.

1) Проведение измерений.

2) Обработка результатов измерений.

3) Построение графика по результатам измерений.

## 3. Объект исследования.

Ускорение тележки при различных углах наклона.

## 4. Метод экспериментального исследования.

Измерение времени, за которое тележка проходит заданное расстояние по наклонной плоскости при различных углах наклона.

## 5. Рабочие формулы и исходные данные.

**Формула зависимости проекции скорости на ось  $X$  от времени:**

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t \quad (1)$$

Где  $v_{0x}$  - проекция скорости на ось  $0x$  в момент времени  $t = 0$ ,  $a_x$  - ускорение тела.

**Формула зависимости координаты тела от времени:**

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2} \quad (2)$$

Где  $x_0$  - начальная координата.

**Формула зависимости координаты тела от времени через ускорение:**

$$x_2 - x_1 = \frac{a}{2} (t_2^2 - t_1^2) \quad (3)$$

**Второй закон Ньютона, описывающий движение тележки:**

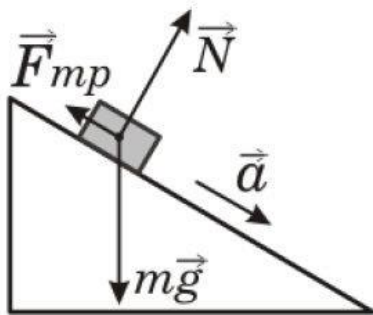


Рис.1 Схема, описывающая второй закон Ньютона.

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} \quad (4)$$

Где  $a$  - ускорение тележки,  $N$  - сила реакции опоры, а сила трения, возникающая при скольжении, по модулю равна произведению коэффициента трения на силу нормальной реакции:  $F_{тр} = \mu N$

**Проекция уравнения (4) на координатные оси  $X$  и  $Y$ :**

$$\begin{cases} \text{оY: } 0 = N - mg \cos \alpha \\ \text{оX: } ma = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha \end{cases} \quad (5)$$

Где  $\alpha$  - угол между наклонной плоскостью и горизонталью

**Формула модуля ускорения:**

$$a = g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha \quad (6)$$

Ввиду малости угла, его косинус в уравнении (6) можно заменить единицей:

$$a = g(\sin \alpha - \mu) \quad (7)$$

Формулы нахождения ускорения и его среднеквадратичного отклонения из графика:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N z_i Y_i}{\sum_{i=1}^N z_i^2}$$

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - a Z_i)^2}{(N-1) \sum_{i=1}^N Z_i^2}} \quad (8)$$

Формула абсолютной погрешности коэффициента  $a$  для доверительной вероятности

$\alpha = 0,90$ :

$$\Delta a = 2\sigma_a \quad (9)$$

Формула относительной погрешности ускорения:

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta a}{a} \cdot 100\% \quad (10)$$

Формула синуса угла наклона рельса к горизонту:

$$\sin \alpha = \frac{(h_0 - h) - (h_0' - h')}{x' - x} \quad (11)$$

Формула значения ускорения:

$$\langle a \rangle = \frac{2(x_2 - x_1)}{\langle t_2 \rangle^2 - \langle t_1 \rangle^2} \quad (12)$$

Формула погрешности ускорения для каждой из серии измерений:

$$\Delta a = \langle a \rangle \sqrt{\frac{(\Delta x_{n2})^2 + (\Delta x_{n1})^2}{(x_2 - x_1)^2} + 4 \frac{(\langle t_1 \rangle \Delta t_1)^2 + (\langle t_2 \rangle \Delta t_2)^2}{(\langle t_2 \rangle^2 - \langle t_1 \rangle^2)^2}} \quad (13)$$

Формула коэффициента линейной зависимости  $B$  по методу наименьших квадратов (МНК) из формулы (7):

$$B = g = \frac{\sum_{i=1}^N a_i \sin \alpha_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i \sum_{i=1}^N \sin \alpha_i}{\sum_{i=1}^N \sin^2 \alpha_i - \frac{1}{N} (\sum_{i=1}^N \sin \alpha_i)^2} \quad (14)$$

Формула коэффициента линейной зависимости  $A$ :

$$A = \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N a_i - B \sum_{i=1}^N \sin \alpha_i \right) \quad (15)$$

Формула среднеквадратичного отклонения для ускорения свободного падения:

$$\sigma_g = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{D(N-2)}} \quad (16)$$

Где

$$d_i = a_i - (A + B \sin \alpha_i) \quad (17)$$

$$D = \sum_{i=1}^N \sin^2 \alpha_i - \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N \sin \alpha_i \right)^2 \quad (18)$$

Формула абсолютной погрешности  $g$  для доверительной вероятности  $\alpha = 0,90$ :

$$\Delta g = 2\sigma_g \quad (19)$$

Формула относительной погрешности ускорения свободного падения:

$$\varepsilon_g = \frac{\Delta g}{g} \cdot 100\% \quad (20)$$

## 6. Измерительные приборы.

Таблица 1. Измерительные приборы

| №<br>п/п | Наименование               | Предел<br>измерений | Цена<br>деления | Класс<br>точности | Погрешность |
|----------|----------------------------|---------------------|-----------------|-------------------|-------------|
| 1        | Линейка на рельсе          | 1,3 м               | 1 см/дел        | —                 | 5,0 мм      |
| 2        | Линейка на угольнике       | 250 мм              | 1 мм/дел        | —                 | 0,5 мм      |
| 3        | ПКЦ-3 в режиме секундомера | 100с                | 0,1 с           | —                 | 0,1 с       |

## 7. Схема установки.

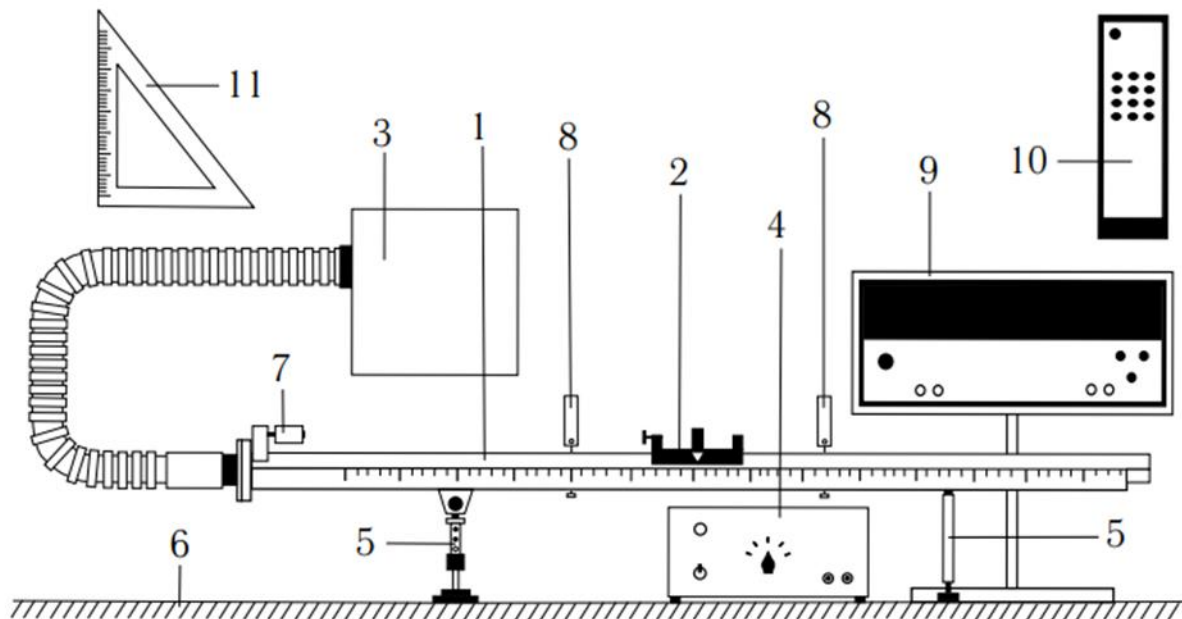


РИС. 2. Общий вид экспериментальной установки

1. Рельс с сантиметровой шкалой на лицевой стороне
2. Тележка
3. Воздушный насос
4. Источник питания насоса ВС 4-12
5. Опоры рельса
6. Опорная плоскость (поверхность стола)
7. Фиксирующий электромагнит
8. Оптические ворота
9. Цифровой измерительный прибор ПКЦ-3
10. Пульт дистанционного управления прибором ПКЦ-3
11. Линейка — угольник

## 8. Результаты прямых измерений и их обработки.

**Задание 1.** Измерение времени движения тележки по рельсу с фиксированным углом наклона.

Таблица 2: Характеристика лабораторной установки

| $x, \text{ м}$   | $x', \text{ м}$  | $h_o, \text{ мм}$ | $h'_o, \text{ мм}$ |
|------------------|------------------|-------------------|--------------------|
| $0,22 \pm 0,005$ | $1,00 \pm 0,005$ | $205 \pm 0,5$     | $206 \pm 0,5$      |

Где  $x$  и  $x'$  это координаты, в которых измерялись высоты, на которых находится наклонная плоскость.

Таблица 3: Результаты прямых измерений (Задание 1)

| № | Измеренные величины |                  |                  |                  | Рассчитанные величины  |  |
|---|---------------------|------------------|------------------|------------------|------------------------|--|
|   | $x_1, \text{ м}$    | $x_2, \text{ м}$ | $t_1, \text{ с}$ | $t_2, \text{ с}$ | $x_2 - x_1, \text{ м}$ | $\frac{t_2^2 - t_1^2}{2}, \text{ с}^2$ |
| 1 | 0,15                | 0,40             | 1,30             | 2,30             | 0,25                   | 1,8                                    |
| 2 | 0,15                | 0,50             | 1,20             | 2,50             | 0,35                   | 2,405                                  |
| 3 | 0,15                | 0,70             | 1,20             | 3,10             | 0,55                   | 4,085                                  |
| 4 | 0,15                | 0,90             | 1,30             | 3,40             | 0,75                   | 4,935                                  |
| 5 | 0,15                | 1,10             | 1,30             | 4,00             | 0,95                   | 7,155                                  |

**Задание 2:** Измерение времени движения тележки по рельсу при разных углах наклона рельса к горизонту

Таблица 4: Результаты прямых измерений (Задание 2)

| $N_{\text{пл}}$ | $h, \text{ мм}$ | $h', \text{ мм}$ | № | $t_1, \text{ с}$ | $t_2, \text{ с}$ |
|-----------------|-----------------|------------------|---|------------------|------------------|
| 1               | 212             | 205              | 1 | 1,3              | 4,3              |
|                 |                 |                  | 2 | 1,4              | 4,8              |
|                 |                 |                  | 3 | 1,4              | 4,7              |
|                 |                 |                  | 4 | 1,5              | 5,0              |
|                 |                 |                  | 5 | 1,5              | 4,9              |
| 2               | 222             | 205              | 1 | 1,0              | 3,3              |
|                 |                 |                  | 2 | 1,2              | 3,4              |
|                 |                 |                  | 3 | 1,2              | 3,4              |

|   |     |     |   |     |     |
|---|-----|-----|---|-----|-----|
|   |     |     | 4 | 1,2 | 3,4 |
|   |     |     | 5 | 1,2 | 3,5 |
| 3 | 232 | 205 | 1 | 0,8 | 2,8 |
|   |     |     | 2 | 0,8 | 2,7 |
|   |     |     | 3 | 0,9 | 2,8 |
|   |     |     | 4 | 0,8 | 2,7 |
|   |     |     | 5 | 0,9 | 2,8 |
| 4 | 241 | 204 | 1 | 0,8 | 2,2 |
|   |     |     | 2 | 0,8 | 2,2 |
|   |     |     | 3 | 0,8 | 2,2 |
|   |     |     | 4 | 0,8 | 2,2 |
|   |     |     | 5 | 0,8 | 2,2 |
| 5 | 251 | 204 | 1 | 0,7 | 1,9 |
|   |     |     | 2 | 0,7 | 1,9 |
|   |     |     | 3 | 0,7 | 2,0 |
|   |     |     | 4 | 0,7 | 2,0 |
|   |     |     | 5 | 0,6 | 2,0 |

$N_{\text{пл}}$  – количество пластин

$h$  – высота на координате  $x = 0,22$  м

$h'$  – высота на координате  $x' = 1,00$  м

## 9. Расчет результатов косвенных измерений (таблицы, примеры расчетов).

### Задание 1

Посчитаем ускорение по МНК:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N Z_i \cdot Y_i}{\sum_{i=1}^N Z_i^2} \cong 0,139 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Посчитаем среднеквадратичное отклонение ускорения по формуле (9):

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - a \cdot Z_i)^2}{(N - 1) \cdot \sum_{i=1}^N Z_i^2}} \cong 0,004 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

### Задание 2

**Таблица 5: Результаты расчетов (Задание 2)**

| $N_{\text{пл}}$  | $\sin \alpha$ | $\langle t_1 \rangle \pm \Delta t_1, \text{с}$ | $\langle t_2 \rangle \pm \Delta t_2, \text{с}$ | $\langle a \rangle \pm \Delta a, \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ |
|--|---------------|--|--|---|
| 1  | -0,0102       | $1,42 \pm 0,067$                               | $4,74 \pm 0,153$                               | $0,024 \pm 0,007$   |
| 2  | -0,023        | $1,16 \pm 0,069$                               | $3,4 \pm 0,063$                                | $0,069 \pm 0,008$   |
| 3  | -0,036        | $0,84 \pm 0,058$                               | $2,76 \pm 0,058$                               | $0,16 \pm 0,013$  |
| 4  | -0,049        | $0,8 \pm 0,05$                                 | $2,2 \pm 0,05$                                 | $0,357 \pm 0,025$   |
| 5  | -0,062        | $0,68 \pm 0,055$                               | $1,96 \pm 0,058$                               | $0,281 \pm 0,04$  |
| $N_{\text{пл}}$ – количество пластин<br><br>$\langle t_{1,2} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_{1i,2i}$ |               |  |  |   |

Найдем коэффициенты линейной зависимости а от sinα по МНК, коэффициент В равен:

$$B \equiv g = \frac{\sum_{i=1}^N (a_i \cdot \sin \alpha_i) - \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N a_i \cdot \sum_{i=1}^N \sin \alpha_i}{\sum_{i=1}^N \sin^2 \alpha_i - \frac{1}{N} \cdot (\sum_{i=1}^N \sin \alpha_i)^2} = 9,4 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Коэффициент А равен:

$$A = \frac{1}{N} \cdot (\sum_{i=1}^N a_i - B \cdot \sum_{i=1}^N \sin \alpha_i) = 0,302 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$$

Найдем среднеквадратичное отклонение σg:

$$\sigma_g = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (a_i - (A + B \cdot \sin \alpha_i))^2}{(\sum_{i=1}^N \sin^2 \alpha_i - \frac{1}{N} \cdot (\sum_{i=1}^N \sin \alpha_i)^2) \cdot (N - 2)}} = 0,92 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Найдем разницу посчитанного g от gтабл:

$$|g - g_{\text{табл}}| = 0,41 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

А также посчитаем в процентах отклонение от табличного значения:

$$\varepsilon_{g_{\text{табл}}} = \frac{|g - g_{\text{табл}}|}{g_{\text{табл}}} \cdot 100\% = 4,12 \%$$

## 10. Расчет погрешностей измерений.

Абсолютная погрешность ускорения при доверительной вероятности  $\alpha = 0,90$  по формуле (10):

$$\Delta_a = 2\sigma_a = 0,008 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$$

Найдем относительную погрешность для а:

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta_a}{a} \cdot 100\% = 5,75 \%$$

Найдем абсолютную погрешность для  $\Delta g$ :

$$\Delta_g = 2\sigma_g = 1,84 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Найдем относительную погрешность для g:

$$\varepsilon_g = \frac{\Delta_g}{g} \cdot 100\% = 19,6 \%$$

Абсолютная погрешность Y и Z равны:

Где

$$Y = x_2 - x_1, \text{ м}$$

$$Z = \frac{t_1^2 - t_2^2}{2}, \text{ с}^2$$

$$\Delta Y = \sqrt{\left(\frac{df_1}{dx_1} \cdot \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{df_1}{dx_2} \cdot \Delta x_2\right)^2} = 0,72 \text{ см}$$

$$\Delta Z_i = \sqrt{\left(\frac{df_2}{dt_{1i}} \cdot \Delta t_{1i}\right)^2 + \left(\frac{df_2}{dt_{2i}} \cdot \Delta t_{2i}\right)^2} = 0,8 \text{ с}^2$$

Вычислим погрешность ускорения для первого случая по формуле (14):

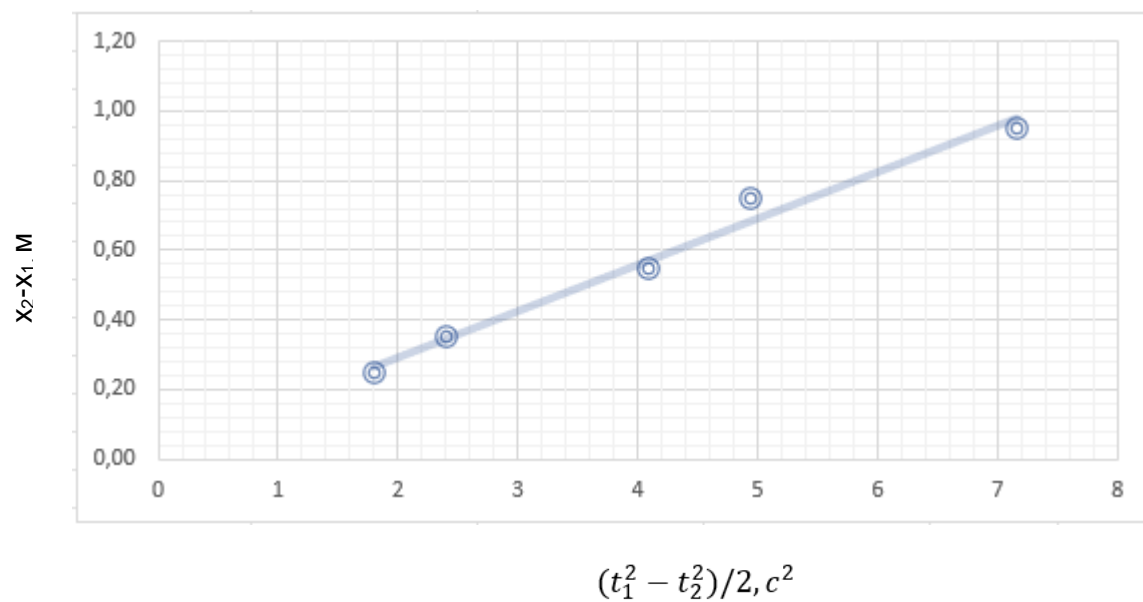
$$\Delta a_i = \langle a \rangle_i \cdot \sqrt{\frac{(\Delta x_{i2})^2 + (\Delta x_{i1})^2}{(x_2 - x_1)^2} + 4 \cdot \frac{(\langle t_1 \rangle_i \Delta t_1)^2 + (\langle t_2 \rangle_i \Delta t_2)^2}{(\langle t_2 \rangle_i^2 - \langle t_1 \rangle_i^2)^2}} = 0,21 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$$

## 11. Графики.

### Задание 1

График 1. График зависимости  $Y(Z) = aZ$

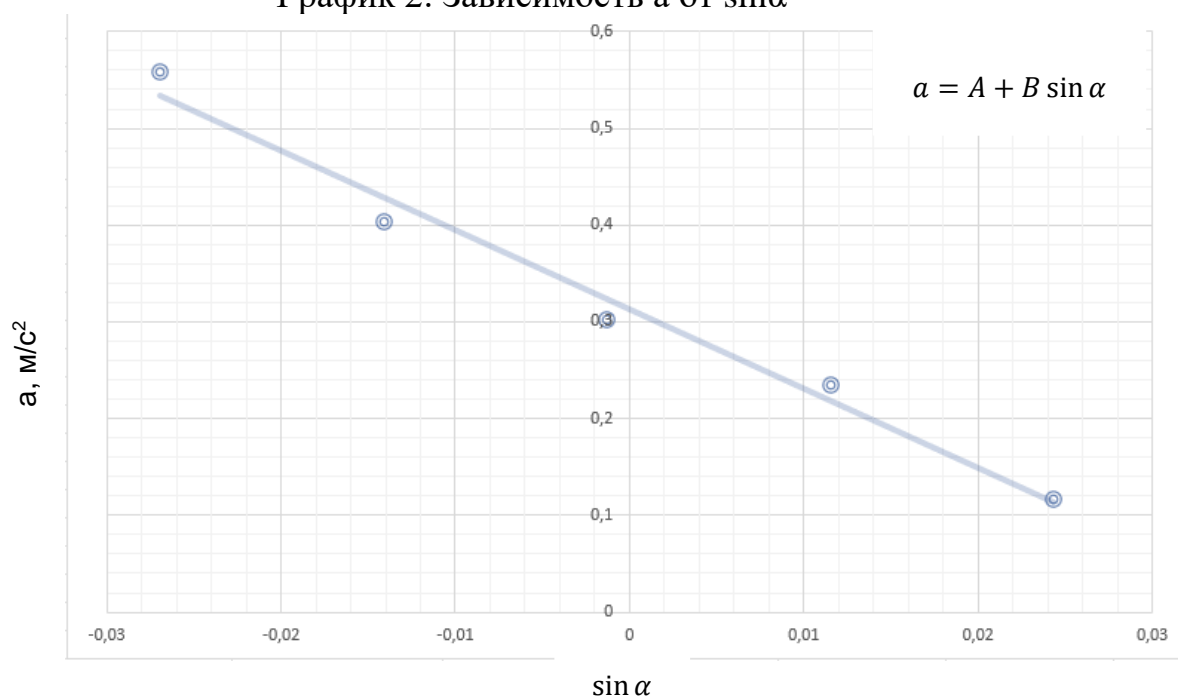




Экспериментальные значения Y  
 Аппроксимация Y

## Задание 2

График 2. Зависимость  $a$  от  $\sin \alpha$



Экспериментальные значения  $a$   
 Аппроксимация  $a$

## 12. Окончательные результаты.

Доверительный интервал и относительная погрешность ускорения тележки равны:

$$a = 0,139 \pm 0,003 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \quad \varepsilon_a = 5,75\%$$

Доверительный интервал и относительная погрешность ускорения свободного падения:

$$g = 9,4 \pm 2,0358 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \quad \varepsilon_g = 19,6\%$$

Абсолютное и относительное отклонение экспериментального значения ускорения свободного падения от табличного:

$$|g - g_{\text{табл}}| = 0,41 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \quad \varepsilon_{g_{\text{табл}}} = 4,2\%$$

## 13. Выводы и анализ результатов работы.

В ходе проведения лабораторной работы было исследовано движение тележки по наклонной плоскости под разными углами и с разными расстояниями. Были собраны данные и построены таблицы и графики.

График 1 представляет зависимость времени движения тележки от пройденного пути. Данный график получился линейным, что позволило убедиться в равноускоренности движения тележки.

График 2 отображает зависимость ускорения  $a$  от  $\sin \alpha$ . Найдя угловой коэффициент по МНК, было рассчитано значение ускорения свободного падения  $g = 9,4 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ . Полученное значение разнится с табличным значением ускорения свободного падения на 4,2% без учета погрешности.

Исходя из данных и результатов анализа графиков, можно сделать вывод о равноускоренности движения тележки по наклонной плоскости и расчете ускорения свободного падения.