1. Дайте определение линейной форме.

Пусть V – линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Определение 1.1. **Линейной формой** на пространстве V называется такая функция $f : V \to \mathbb{K}$, что $\forall v, v_1, v_2 \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ выполняется:

(а) Аддитивность: $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$.

(б) Однородность: $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

2. Как находятся коэффициенты линейной формы?

Определение 1.2. **Коэффициентами** φ_i линейной формы f называются значения этой линейной формы на базисных векторах пространства.

$$f(e_i) = \varphi_i$$

3. Как найти значение линейной формы на векторе в заданном базисе?

Теорема 1.1. *Задание линейной формы эквивалентно заданию ее значений на базисных формах, т.е. заданию ее коэффициентов.*

Доказательство. Пусть в выбранном базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ линейного пространства V линейная форма f задана набором коэффициентов $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$. Тогда $\forall v = \sum_{i=1}^n v^i e_i \in V$:

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^n v^i e_i\right) = \sum_{i=1}^n f(v^i e_i) = \sum_{i=1}^n v^i f(e_i) = \sum_{i=1}^n v^i \varphi_i$$

Таким образом получаем, что образ любого вектора однозначно определен координатами этого векторами и коэффициентами линейной формы, где оба набора чисел найдены *в одном и том же базисе.*

4. Что такое сопряженное пространство?

Теорема 2.1. *Множество линейных форм V^*, заданных на линейном пространстве V образует линейное (сопряженное) пространство.*

5+6. Как определяется базис сопряженного пространства? Каким соотношением связаны сопряженные базисы?

Рассмотрим некоторый базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ в пространстве V. Введем набор линейных форм $\{f^j\}_{j=1}^n$ следующим образом:

$$f^j(v) = v_j,$$

которая возвращает j-ю координату вектора $v \in V$ в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$.

Очевидно, что для линейных форм из этого набора справедливо

$$f^j(e_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = j, \\ 0, & \text{если} \quad i \neq j \end{cases}$$

Лемма 2.2. *Набор линейных форм $\{f^j\}_{j=1}^n$ является базисом в сопряженном пространстве V^*.*

7. Как преобразуется базис сопряженного пространства при изменении базиса исходного пространства?

Теорема 2.2. *Пусть* $\{f^i\}_{i=1}^n$ *и* $\{\widetilde{f}^l\}_{l=1}^n$ *– базисы* V^**, сопряженные соответственно базисам* $\{e^j\}_{j=1}^n$ *и* $\{\widetilde{e}^k\}_{k=1}^n$*. Тогда*

$$\widetilde{f}^l = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^l f^i$$

где $(\sigma_i^l) = S$ *– элементы обратной матрицы перехода, полагая* $(\tau_k^j) = T$ *– матрица перехода из* $\{e^j\}_{j=1}^n$ *в* $\{\widetilde{e}^k\}_{k=1}^n$.

8. Как преобразуются коэффициенты линейной формы при изменении базиса исходного пространства?

Теорема 2.3. *Преобразование координат формы в* V^* *при переходе от базиса* $\{f^i\}_{i=1}^n$ *к базису* $\{\widetilde{f}\}_{l=1}^n$ *имеет вид*

$$\widetilde{\eta}_l = \sum_{i=1}^{n} \tau_l^i \eta_i \qquad (\widetilde{\eta}^1, \widetilde{\eta}^2, \ldots, \widetilde{\eta}^n) = (\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n) \cdot T$$

9. Что такое канонический изоморфизм?

Определение 3.1. Вторым сопряженным пространством называют $V^{**} = (V^*)^*$.

Элементами второго сопряженного пространства являются функции, также обладающие линейностью, от линейных форм.

Теорема 3.1. *Между пространствами* V *и* V^{**} *можно установить изоморфизм без использования базиса (канонический изоморфизм).*

10. Что такое билинейная форма?

Пусть V – линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Определение 1.1. **Билинейной формой** на пространстве V называется такая функция $b : V \times V \to \mathbb{K}$, что $\forall x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in V$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ выполняется:

(а) Линейность по первому аргументу:

$$b(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 b(x_1, y) + \lambda_2 b(x_2, y)$$

(б) Линейность по второму аргументу:

$$b(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 b(x, y_1) + \lambda_2 b(x, y_2)$$

11. Как найти значение линейной формы на паре векторов в заданном базисе?

Замечание 1.1. Билинейная форма при фиксировании одного из аргументов есть ничто иное как линейная форма согласно определению, которое было введено ранее.

Пример 1.1. Пусть $f, g \in V^*$ – линейные формы в пространстве $V(\mathbb{K})$. Билинейная форма может быть задана как

$$b : V \times V \to \mathbb{K}, \qquad b(x, y) = f(x) \cdot g(y)$$

12+13. Какая билинейная форма называется симметричной + Какая билинейная форма называется антисимметричной?

Лемма 1.2. *Множество* $\mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ *наделено структурой линейного пространства.*

Доказательство. Можно убедиться путем прямой проверки аксиом линейного пространства.

Определение 1.2. Билинейная форма $b \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ называется **симметричной**, если выполняется $b(x, y) = b(y, x)$.

Определение 1.3. Билинейная форма $b \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ называется **антисимметричной**, если выполняется $b(x, y) = -b(y, x)$.

14 + 15. Как построить симметричную билинейную форму из произвольной? Как построить антисимметричную билинейную форму из произвольной?

Из каждой билинейной формы может быть изготовлена симметричная форма:

$$b^S(x, y) = \frac{1}{2}(b(x, y) + b(y, x)), \qquad b^S \in \mathrm{Bil}^S_{\mathbb{K}}(V)$$

Аналогично может быть изготовлена антисимметричная форма:

$$b^{AS}(x, y) = \frac{1}{2}(b(x, y) - b(y, x)), \qquad b^{AS} \in \mathrm{Bil}^{AS}_{\mathbb{K}}(V)$$

16. Что называется коэффициентами билинейной формы?

Определение 2.1. Коэффициентами β_{ij} билинейной формы $b(x, y)$ называются значения этой линейной формы на базисных векторах пространства.

$$b(e_i, e_j) = \beta_{ij}$$

17. Как выглядит закон преобразования матрицы билинейной формы при замене базиса?

Теорема 2.2. *Матрицы B и B' билинейной формы $b(x, y)$, заданные в базисах $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{e'_j\}_{j=1}^n$ связаны соотношением*

$$B' = C^T B C,$$

где $C = (c^i_j)$ - матрица перехода от базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ к базису $\{e'_j\}_{j=1}^n$.

18. Что такое квадратичная форма?

Определение 1.1. Квадратичной формой на линейном пространстве V называется отображение $q(v)$, построенное из билинейной формы $b(x, y)$ следующим образом:

$$q : V \to \mathbb{K}, \qquad q(v) = b(v, v), \qquad \forall x \in V$$

19. Какая функция называется однородным полиномом степени 2?

Лемма 1.1. *Квадратичная форма является однородным полиномом степени 2 от координат вектора.*

20. Как найти билинейную форму из квадратичной?

Лемма 1.2. *По квадратичной форме $q(v)$ однозначно восстанавливается симметричная компонента билинейной формы $b(x, y)$.*

Откуда

$$b(x, y) + b(y, x) = q(x + y) - q(x) - q(y)$$

21. Какие векторы называют ортогональными относительно билинейной формы?

Определение 2.1. Векторы $u, v \in V$ называются ортогональными относительно билинейной формы b (b-ортогональными), если $b(u, v) = 0$.

22+23+24+25. Что такое нормальный вид билинейной формы? Что такое сигнатура квадратичной формы? Какая квадратичная форма называется положительно определенной? Какая квадратичная форма называется отрицательно определенной? $a_i = q(e_i)$

Лемма 2.1. *В поле $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ любая квадратичная форма может быть приведена к виду*

$$q(v) = (\widetilde{v}^1)^2 + \ldots + (\widetilde{v}^r)^2,$$

где r – количество ненулевых a_i.

Следовательно в $\mathbb{R}$ квадратичная форма может быть приведена только к виду

$$q(v) = \sum_{i=1}^{r_+} (\widetilde{v}^i)^2 - \sum_{j=r_+ + 1}^{r_-} (\widetilde{v}^j)^2$$

Определение 2.3. Указанные виды квадратичной формы в $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$ называются **нормальным видом** квадратичной формы, а числа r_+ и r_- – **положительным и отрицательными индексами инерции** вещественной квадратичной функции. Набор этих чисел (r_+, r_-) также называют **сигнатурой** квадратичной формы.

26. Сформулируйте критерий Сильвестра.

Теорема 2.2. *(Критерий Сильвестра) Вещественная квадратичная форма q, имеющая матрицу A_q в некотором базисе, положительно определена тогда и только тогда, когда все угловые миноры матрицы A_q положительны.*

27. Что такое оператор присоединенный к билинейной форме?

Пусть E_V – евклидово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Определим также в этом пространстве линейный оператор $\varphi \in \mathrm{End}(V)$. Определим при помощи него билинейную функцию b_φ

$$b_\varphi(u, v) = \langle u, \varphi(v) \rangle, \qquad \forall u, v \in V$$

28. Что такое полилинейная форма типа (p,q)?

Пусть X - конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

> Полилинейной формой, типа (p, q) на X назовем полилинейное отображение вида
>
> $$U : \underbrace{X \times \ldots \times X}_{p} \times \underbrace{X^* \times \ldots \times X^*}_{q} \to \mathbb{K}$$
>
> иными словами функцию U, определенную на p векторах пространства X и q линейных формах пространства X^*, которая линейна по каждому из аргументов

29. Как вводится операция умножения полилинейных форм?

Произведением полилинейных форм $U \in \Omega_{q_1}^{p_1}$ и $V \in \Omega_{q_2}^{p_2}$ называют отображение $W = U \cdot V$ вида

$$W(x_1, \dots, x_{p_1}, x_{p_1+1}, \dots x_{p_1+p_2}; \varphi^1, \dots, \varphi^{q_1}, \varphi^{q_1+1}, \dots \varphi^{q_1+q_2}) =$$
$$U(x_1, \dots, x_{p_1}; \varphi^1, \dots, \varphi^{q_1}) \cdot V(x_{p_1+1}, \dots x_{p_1+p_2}; \varphi^{q_1+1}, \dots \varphi^{q_1+q_2})$$

30. Как можно ввести базис полилинейных форм?

Помимо определения компонент тензора в выбранной паре базисов можно также задать набор тензоров $\left\{{}^{s_1,s_2,\dots,s_p}_{t_1,t_2,\dots,t_q}W\right\}$, которые действуют на набор аргументов следующим образом

$${}^{s_1,s_2,\dots,s_p}_{t_1,t_2,\dots,t_q}W(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) = \xi_1^{s_1}\xi_2^{s_2}\dots\xi_p^{s_p}\eta_{t_1}^1\eta_{t_2}^2\dots\eta_{t_q}^q$$

Иными словами, тензор ${}^{s_1,s_2,\dots,s_p}_{t_1,t_2,\dots,t_q}W$ определим как отображение возвращающее произведение t_1-ой координаты первого вектора, на t_2-ю координату второго вектора и т.д.

Теорема 4.4. *Набор тензоров* $\left\{{}^{s_1,s_2,\dots,s_p}_{t_1,t_2,\dots,t_q}W\right\}$ *является базисом пространства* Ω_q^p.

31. Как определяется тензор полилинейной формы?

Тензором полилинейной формы W валентности (p, q) называется набор из n^{p+q} скаляров, определяемые как

$$\omega_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = W(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}; f^{j_1}, f^{j_2}, \dots, f^{j_q}),$$

где индексы $i_1, i_2, \dots, i_p$ и $j_1, j_2, \dots, j_q$ принимают значения $1, .., n$, где $n = \dim X$ - размерность пространства X.

32. Как преобразуется тензор при замене базиса?

Покажем связь компонент тензора в новом базисе $\omega'^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}$ с компонентами тензора в старом базисе $\omega_{k_1 k_2 \dots k_p}^{l_1 l_2 \dots l_q}$

$$\omega'^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} = W(e'_{i_1}, e'_{i_2}, \dots, e'_{i_p}; f'^{j_1}, f'^{j_2}, \dots, f'^{j_q}) =$$
$$= W(e_{k_1}\tau_{i_1}^{k_1}, e_{k_2}\tau_{i_2}^{k_2}, \dots, e_{k_p}\tau_{i_p}^{k_p}; f^{l_1}\sigma_{l_1}^{j_1}, f^{l_2}\sigma_{l_2}^{j_2}, \dots, f^{l_q}\sigma_{l_q}^{j_q}) =$$
$$= \tau_{i_1}^{k_1}\tau_{i_2}^{k_2}\dots\tau_{i_p}^{k_p}\sigma_{l_1}^{j_1}\sigma_{l_2}^{j_2}\dots\sigma_{l_q}^{j_q} W(e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_p}; f^{l_1}, f^{l_2}, \dots, f^{l_q}) =$$
$$= \tau_{i_1}^{k_1}\tau_{i_2}^{k_2}\dots\tau_{i_p}^{k_p}\sigma_{l_1}^{j_1}\sigma_{l_2}^{j_2}\dots\sigma_{l_q}^{j_q}\omega_{k_1 k_2 \dots k_p}^{l_1 l_2 \dots l_q}$$

33. Что такое свертка тензора?

> Сверткой полилинейной формы $W \in \Omega^p_q$ называется отображение, результатом которого является функция $\tilde{W}$ от $p-1$ векторного аргумента и $q-1$ ковекторного аргумента, определяемое как
>
> $$\tilde{W}(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots x_p; \varphi^1, \ldots, \varphi^q) = \\ = W(x_1, \ldots, x_{k-1}, \mathbf{e_r}, x_{k+1}, \ldots, x_p; \varphi^1, \ldots, \varphi^{l-1}, \mathbf{f^r}, \varphi^{l+1}, \ldots, \varphi^q)$$
>
> полагая, что в правой части производится суммирование по немому индексу r.

34. Чему равно количество различных полных сверток тензора валентности (p,p)?

Nota bene Количество различных полных сверток полилинейной формы валентности (p,p) равно $p!$.

35. Как выполняется операция транспонирования тензора?

> Транспонированием полилинейной формы W по (r,s)-м аргументам называется операция, позволяющая получить полилинейную форму $W^{T_{rs}}$ вида
>
> $$W^{T_{rs}}(\ldots, x_s, \ldots, x_r, \ldots; \varphi^1, \ldots, \varphi^q) = \\ = W(\ldots, x_r, \ldots, x_s, \ldots; \varphi^1, \ldots, \varphi^q)$$

(я так понял перестановка просто компонентов x)

36. Какая полилинейная форма называется симметричной?

> Полилинейная форма $U \in \Omega^p_0$ называется симметричной, если ее значения не зависят от порядка следования аргументов, т.е.
>
> $$U(x_1, x_2, \ldots, x_p) = U(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)}), \qquad \sigma \in S_n$$

\

37. Какая полилинейная форма называется антисимметричной?

> Полилинейная форма $U \in \Omega^p_0$ называется антисимметричной, если она меняет знак при любой транспозиции любых двух ее аргументов, т.е.
>
> $$V(x_1, x_2, \ldots, x_p) = (-1)^{N(\sigma)} V(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)}), \qquad \sigma \in S_n$$

38. Как вводится операция симметризации?

> Операцией симметризации называется отображение $V = \operatorname{Sym} U$, действующее как
>
> $$V(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} U(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)})$$

39. Как вводится операция альтернирования?

> Операцией альтернирования (асимметризации) называется отображение $W = \operatorname{Asym} U$, действуюшее как
>
> $$W(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} (-1)^{N(\sigma)} U(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)})$$