Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Вычислительная математика

Лабораторная работа № 4

Метод трапеций

Выполнила:

Гафурова Фарангиз Фуркатовна

Группа P3220

Преподаватель:

Перл Ольга Вячеславовна

г. Санкт-Петербург

2025

Описание численного метода

Метод трапеций — это метод численного интегрирования, применяемый для приближенного вычисления определенного интеграла.

Основная идея

Основная идея метода заключается в замене подынтегральной функции на линейную функцию на каждом подинтервале и вычислении площади под этой линейной функцией (в виде трапеции), а затем суммировании площадей всех трапеций для приближенного вычисления определенного интеграла.

Формула

Пусть необходимо вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

1. Одноинтервальный случай:

В самом простом случае, когда интегрируем на одном интервале $[a,b]$, формула метода трапеций имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big)$$

Геометрически это соответствует вычислению площади трапеций, образованной линией, соединяющей точки $\big(a,f(a)\big)$ и $\big(b,f(b)\big)$, с осями координат.

2. Многоинтервальный случай (разделение на n равных подинтервалов):

Разделим интервал $[a,b]$ на n равных подинтервалов для $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, где $x_i = a + i\Delta x, i = 0, 1, \dots, n$ $(x_0 = a, x_n = b)$. Тогда формула метода трапеций принимает вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{2}\Big(f(x_0) + 2\Sigma_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\Big)$$

Здесь каждому подинтервалу $[x_i, x_{i+1}]$ соответствует своя трапеция, а суммирование позволяет получить более точную оценку интеграла.

Происхождение формулы

Для вывода формулы для многоинтервального случая рассмотрим площадь S_i, $i-$й трапеции на подинтервале $[x_i, x_{i+1}]$. Поскольку высота трапеции равна Δx, а основания равны $f(x_i)$ и $\mathrm{f}(x_{i+1})$, то по формуле для площади трапеции $S = \frac{1}{2}(б_1 + б_2)h$ (где $б_1, б_2$ – основания, h - высота) имеем:

$$S_i = \frac{\Delta x}{2}(\mathrm{f}(x_i) + \mathrm{f}(x_{i+1}))$$

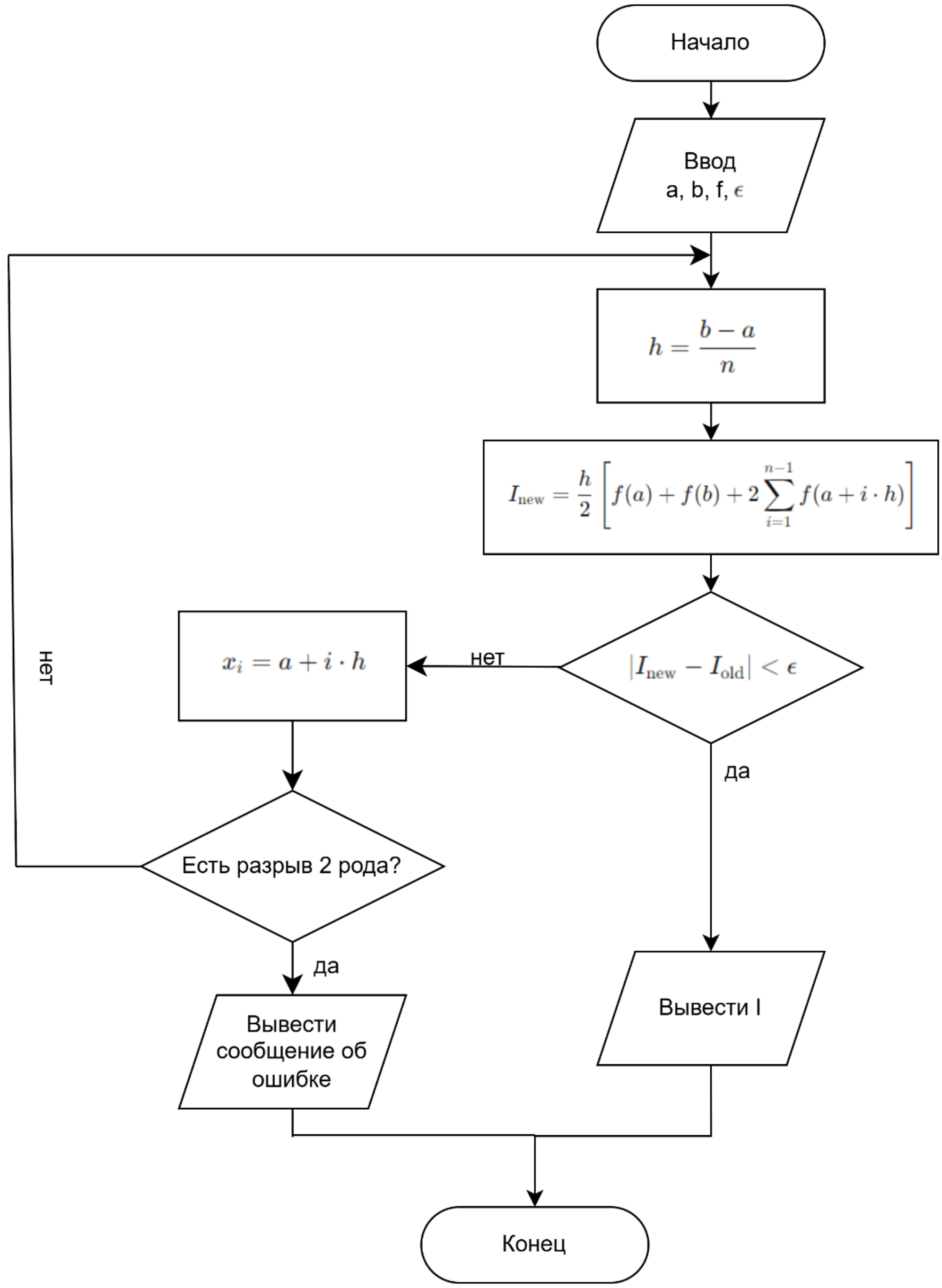
Суммируя площади всех n трапеций, получим вышеуказанную формулу для многоинтервального случая. $I \approx \Sigma_{i=1}^{n} S_i$

Ошибка метода

Ошибка метода трапеций для определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$, приближенно вычисленного с помощью формулы, имеет следующий вид: $E = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$, где $\xi \in (a,b)$ и требуется, чтобы функция $f(x)$ имела непрерывную вторую производную на интервале $[a,b]$.

Из формулы ошибки видно, что чем меньше длина интервала интегрирования $b-a$, тем меньше ошибка метода. Также можно уменьшить ошибку, увеличив количество подинтервалов n (т. к. $\Delta x = \frac{b-a}{n}$).

Блок-схема


Начало
Ввод
a, b, f, ϵ
$h = \frac{b-a}{n}$
$I_{\text{new}} = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a + i \cdot h)\right]$
$|I_{\text{new}} - I_{\text{old}}| < \epsilon$
нет
$x_i = a + i \cdot h$
да
Есть разрыв 2 рода?
нет
да
Вывести сообщение об ошибке
Вывести I
Конец

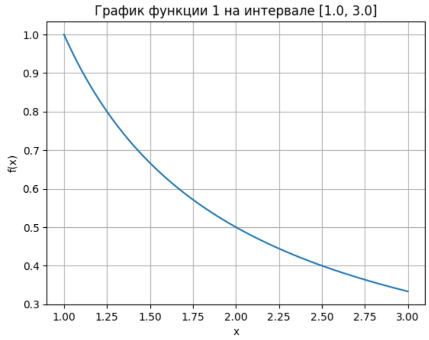
Код численного метода

```
import math
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

class Result:
    error_message = ""
    has_discontinuity = False
    small_epsilon = 0.000001  # Добавляем небольшое значение eps для обработки случая sin(x)/x при x = 0

    def reciprocal_function(x: float):
        return 1 / x

    def sinc_function(x: float):
        if x == 0:
            return (math.sin(Result.small_epsilon) / Result.small_epsilon + math.sin(-Result.small_epsilon) / -Result.small_epsilon) / 2
        return math.sin(x) / x

    def quadratic_function(x: float):
        return x * x + 2

    def linear_function(x: float):
        return 2 * x + 2

    def logarithmic_function(x: float):
        return math.log(x)

    def get_function(n: int):
        if n == 1:
            return Result.reciprocal_function
        elif n == 2:
            return Result.sinc_function
        elif n == 3:
            return Result.quadratic_function
        elif n == 4:
            return Result.linear_function
        elif n == 5:
            return Result.logarithmic_function
        else:
            raise NotImplementedError(f"Функция {n} не определена.")

    def calculate_integral(a, b, f, epsilon):
        selected_function = Result.get_function(f)
```

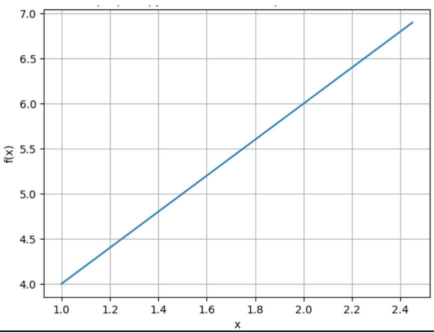
```
        # Проверка на наличие разрыва в функции на заданном интервале
        if (f == 1 and (a <= 0 or b <= 0)) or (f == 5 and (a <= 0 or b <= 0)):
            Result.has_discontinuity = True
            Result.error_message = "Integrated function has discontinuity or does not defined in current interval"
            return 0

        # Метод трапеций
        number_of_subintervals = 1
        integral_value = 0.5 * (b - a) * (selected_function(a) + selected_function(b))
        difference_between_iterations = float('inf')

        while difference_between_iterations >= epsilon:
            number_of_subintervals *= 2
            subinterval_length = (b - a) / number_of_subintervals
            new_integral_value = 0.5 * (selected_function(a) + selected_function(b))
            for i in range(1, number_of_subintervals):
                new_integral_value += selected_function(a + i * subinterval_length)
            new_integral_value *= subinterval_length

            difference_between_iterations = abs(new_integral_value - integral_value)
            integral_value = new_integral_value

        if a > b:
            integral_value = -integral_value

        return integral_value

if __name__ == '__main__':
    a = float(input().strip())
    b = float(input().strip())
    f = int(input().strip())
    epsilon = float(input().strip())

    result = Result.calculate_integral(a, b, f, epsilon)
    if not Result.has_discontinuity:
        print(str(result) + '\n')
    else:
        print(Result.error_message + '\n')

    Result.plot_function(a, b, f, epsilon)
```

Примеры работы программы

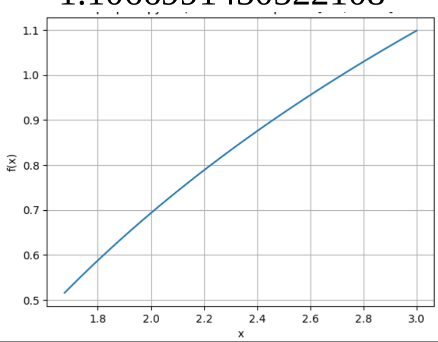
1.

Входные данные	Выходные данные
1 3 1 0.001	1.098901515168459 

2.

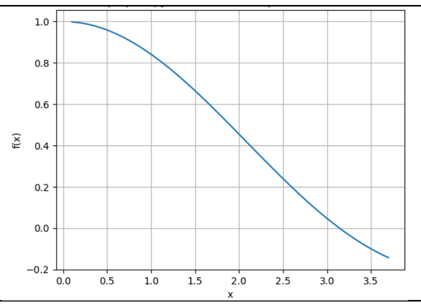
Входные данные	Выходные данные
1 2.45 4 0.0002	7.9025 

3.

Входные данные	Выходные данные
3 1.675 5 0.001	1.1066991450522108 

4.

Входные данные	Выходные данные
0.1	1.7060236943130052

3.7 2 0.01	

5.

Входные данные	Выходные данные
0 4 5 0.001	Integrated function has discontinuity or does not defined in current interval

Выводы

В рамках данной работы был рассмотрен метод трапеций для численного интегрирования определенных интегралов. Сделанные исследования позволяют сделать следующие выводы:

1. Теоретические аспекты:

- Метод трапеций имеет ясную и простую в понимании основную идею, заключающуюся в замене подынтегральной функции на линейную на каждом подинтервале интегрирования и суммировании площадей соответствующих трапеций. Это дает приближенное значение интеграла, которое может быть использовано в тех случаях, когда аналитическое решение интеграла слишком сложно или невозможно получить.
- Формула ошибки метода трапеций $E = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$ показывает, что ошибка зависит от длины интервала интегрирования $b - a$, а также от второго производной функции $f(x)$. Чем меньше длина интервала и менее вариативна вторая производная на этом интервале, тем меньше ошибка метода. Также увеличение количества подинтервалов n позволяет уменьшить ошибку, так как $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ становится меньше.

2. Реализация и результаты:

- В лабораторной работе метод был успешно реализован на практике. Результаты показывают, что для непрерывных функций на заданном интервале метод сходится к правильному значению интеграла при достаточно малом значении точности ε. Однако, если функция имеет разрыв второго рода или не определена на части интервала, метод выдает соответствующее сообщение об ошибке и вычисление интеграла становится невозможным.
- Алгоритмическая сложность метода оценивается как $O(nm)$, где n - количество разбиений интервала, а m - сложность вычисления функции в одной точке. Это означает, что с увеличением количества подинтервалов для более точного приближения интеграла, вычислительная сложность метода также увеличивается.

3. Сравнение с другими методами:

- Сравнение метода трапеций с методом прямоугольников и методом Симпсона. Метод прямоугольников обычно требует большого числа подинтервалов для достижения той же точности, что и метод трапеций, также он менее точен, чем метод трапеций для большинства функций. Метод Симпсона требует большие вычислительные ресурсы из-за сложности вычисления квадратных интерполяционных полиномов, сложнее в реализации, чем метод трапеций. Метод прямоугольников является наиболее простым в реализации, но обычно менее точным по сравнению с методом трапеций и методом Симпсона. В целом метод

Симпсона обеспечивает более высокую точность, чем метод трапеций, но требует большие вычислительные ресурсы. Метод трапеций обеспечивает баланс между простотой реализации и точностью. Он обычно более точен, чем метод прямоугольников, но менее точен, чем метод Симпсона.

4. Ограничения и применимость:

- Анализ применимости метода: метод трапеций хорошо работает для непрерывных функций. Если функция имеет разрывы, особенно разрывы второго рода, метод может потребовать дополнительной обработки или давать неточные результаты, при наличии устранимых разрывов первого рода метод трапеций может быть применен с некоторыми оговорками. Он все равно будет сходиться к правильному значению интеграла, но может потребоваться больше итераций для достижения заданной точности.
- Во время численных вычислений могут возникать ошибки округления, особенно при использовании чисел с плавающей точкой. Эти ошибки могут накапливаться и влиять на конечный результат. Поэтому при использовании метода трапеций необходимо учитывать и управлять этими ошибками.

В целом, метод трапеций представляет собой ценный инструмент в численном анализе для приближенного вычисления определенных интегралов. Его простота и универсальность делает его пригодным для широкого круга практических задач, но при этом необходимо учитывать его ограничения и особенности для обеспечения точности и надежности результатов.