Лекция 15

6.4. Каноническая задача ЛП

Далее будем будем рассматривать только каноническую задачу ЛП. Напомним её формулировку.

Каноническая задача ЛП заключается в следующем: минимизировать линейную форму (целевую функцию)

$$< \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} >= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{4.1}$$

переменные которой подчинены следующим линейным ограничениям

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \quad j = 1, \ldots, n, \tag{4.2}$$

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}. \tag{4.3}$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

причём $m < n$ и $b_i \geq 0$.

Обозначим через $\boldsymbol{P}_j$ j-й столбец матрицы A. Таким образом,

$$\boldsymbol{P}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Используя $\boldsymbol{P}_j$, условия (4.3) записывается в виде

$$x_1\boldsymbol{P}_1 + x_2\boldsymbol{P}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{P}_n = \boldsymbol{P}_0 = \boldsymbol{b}. \tag{4.4}$$

Планом задачи ЛП называется вектор $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$, удовлетворяющий условиям (4.2) и (4.3).

План $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$ называется *опорным*, если векторы $\boldsymbol{P}_i$, входящие в разложение (4.4) с положительными коэффициентами x_i, являются линейно независимыми. Непосредственно из определения опорного плана следует, что число положительных компонент не может превышать m.

Опорный план называется *невырожденным*, если он содержит ровно m положительных компонент.

Оптимальным планом или *решением* задачи ЛП называется план, минимизирующий линейную форму (4.1).

Теорема 4.1. *Множество всех планов задачи линейного программирования X выпукло и замкнуто.*

Доказательство. В случае, если X пусто или состоит из единственного элемента утверждение теоремы тривиально. Допустим, что X содержит по крайней мере два плана: $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$. Тогда

$$\boldsymbol{x}_i \geq \mathbf{0}, \quad A\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{b}, \quad 1 = 1, 2.$$

Пусть $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}_1 + (1 - \alpha)\boldsymbol{x}_2$ произвольная выпуклая комбинация $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$. Очевидно, что $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$. Далее

$$A\boldsymbol{x} = A(\alpha\boldsymbol{x}_1 + (1 - \alpha)\boldsymbol{x}_2) = \alpha A\boldsymbol{x}_1 + (1 - \alpha)A\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}.$$

Таким образом, $\boldsymbol{x} \in X$. Выпуклость X доказано.

Пусть последовательность $\{\boldsymbol{x}_k\} \subset X$ сходится к некоторой точке $\boldsymbol{x}$. Очевидно, что $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$. Так как матрица A является непрерывной функцией $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, то

$$A\boldsymbol{x} = A\left(\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k\right) = \lim_{k\to\infty} A\boldsymbol{x}_k = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}.$$

Следовательно, $\boldsymbol{x} \in X$, т. е. множество X замкнуто. Теорема доказана. ■

Точка $\boldsymbol{x}$ называется выпуклой комбинацией точек $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$, если

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \boldsymbol{x}_i, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1.$$

Теорема 4.2. *Выпуклое множество X содержит все выпуклые комбинации своих точек.*

Доказательство. Требуется показать, что для любого $m \in \mathbb{N}$ из условий

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \boldsymbol{x}_i, \quad \boldsymbol{x}_i \in X, \quad \alpha_i \geq 0 \ (i = \overline{1, m}), \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1, \tag{4.5}$$

следует $\boldsymbol{x} \in X$. Проведём индукцию по m. Если $m = 1$, то высказывание тривиально. Предположим, что оно уже доказано для $m = k$, и пусть (4.5) выполняется при $m = k + 1$. Если $\alpha_{k+1} = 1$, то $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$ и, значит $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{k+1} \in X$. Если же $\alpha_{k+1} < 1$, то мы можем записать

$$\boldsymbol{x} = (1 - \alpha_{k+1})\boldsymbol{x}' + \alpha_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}, \quad \boldsymbol{x}' = \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{k+1}} \boldsymbol{x}_i. \tag{4.6}$$

Ясно, что $\boldsymbol{x}'$ — выпуклая комбинация точек $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$. Тогда, по индукционному предположению, $\boldsymbol{x}' \in X$. Поэтому из (4.6) с учётом выпуклости X следует $\boldsymbol{x} \in X$. ■

Точка $\boldsymbol{x}$ выпуклого множества C называется*крайней* (или *угловой*), если она не может быть выражена в виде выпуклой комбинации каких-либо двух различных точек этого множества.

Выпуклой оболочкой $C(S)$ множества S называется совокупность всевозможных выпуклых комбинаций, составленных из точек множества S. Множество $C(S)$ является наименьшим выпуклым множеством, содержащим S. Если S состоит из восьми вершин куба, то $C(S)$ совпадает со всем кубом; если S — окружность, то $C(S)$ — полный круг.

Если множество S состоит из конечного числа точек, его выпуклая оболочка $C(S)$ называется *выпуклым многогранником.*

Теорема 4.3. (*Теорема о представлении*) *Любая точка выпуклого, компактного множества может быть представлена в виде выпуклой комбинаций конечного числа крайних точек этого множества.*

Множество планов задачи линейного программирования X может быть либо пустым множеством, либо выпуклым многогранником, либо выпуклой многогранной областью, уходящей в бесконечность.

Теорема 4.4. *Пусть X — выпуклый многогранник. Линейная форма (4.1) достигает минимума в крайней точке. Если линейная форма принимает минимальное значение более чем в одной крайней точке, то она достигает того же значения в любой точке, являющейся выпуклой комбинацией этих точек.*

Доказательство. По предположению X — выпуклый многогранник и, следовательно, имеет конечное число крайних точек.

Обозначим крайние точки через $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p$, а оптимальный план через $\boldsymbol{x}_0$. Предположим, что $\boldsymbol{x}_0$ не является крайней точкой, тогда мы можем записать

$$\boldsymbol{x}_0 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \boldsymbol{x}_i, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1.$$

Так как $f(\boldsymbol{x}) =< \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} >$ — линейный функционал, то

$$f(\boldsymbol{x}_0) = f\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \boldsymbol{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(\boldsymbol{x}_i) = m, \tag{4.7}$$

где $m = \min\limits_{\boldsymbol{x} \in X} f(\boldsymbol{x})$. Пусть $f(\boldsymbol{x}_s) = \min\limits_{i} f(\boldsymbol{x}_i)$. Отсюда, учитывая равенство $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$, получаем

$$f(\boldsymbol{x}_0) \geq \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(\boldsymbol{x}_s) = f(\boldsymbol{x}_s).$$

Так как по предположению, $f(\boldsymbol{x}_0) \leq f(\boldsymbol{x})$ для всех $\boldsymbol{x} \in X$, то $f(\boldsymbol{x}_0) = f(\boldsymbol{x}_s) = m$.

Итак, существует крайняя точка $\boldsymbol{x}_s$, в которой линейная форма $f(\boldsymbol{x})$ принимает минимальное значение.

Для доказательства второй части теоремы допустим, что $f(\boldsymbol{x})$ принимает минимальное значение более чем в одной крайней точке, например в $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_q$. Тогда

$$f(\boldsymbol{x}_1) = f(\boldsymbol{x}_2) = \ldots = f(\boldsymbol{x}_q) = m.$$

Пусть

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \boldsymbol{x}_i, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{q} \alpha_i = 1.$$

Тогда

$$f(\boldsymbol{x}_0) = f\left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \boldsymbol{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i f(\boldsymbol{x}_i) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i m = m.$$

Доказательство закончено. ■

Согласно теореме (4.4), поиски оптимального плана задачи ЛП можно ограничить перебором конечного числа крайних точек X.

Теорема 4.5. *Если известно, что система векторов $\boldsymbol{P}_1, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ линейно независима и такова, что*

$$x_1 \boldsymbol{P}_1 + x_2 \boldsymbol{P}_2 + \ldots + x_k \boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{P}_0,$$

где все $x_i \geq 0$*, то точка* $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ *является крайней точкой множества* X.

Доказательство. Предположим, что $\boldsymbol{x}$ не является крайней точкой. В этом случае можно записать

$$\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{x}_1 + (1 - \alpha)\boldsymbol{x}_2, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Так как компоненты векторов $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ неотрицательны, $0 < \alpha < 1$ и последние $n - k$ компонент вектора $\boldsymbol{x}$ равны нулю, соответствующие компоненты векторов $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ также равняются нулю, т. е.

$$\boldsymbol{x}_1 = (x_1^1, \ldots, x_k^1, 0, \ldots, 0), \quad \boldsymbol{x}_2 = (x_1^2, \ldots, x_k^2, 0, \ldots, 0).$$

Поскольку $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ являются планами, получаем

$$A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{b}, \quad A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{b}.$$

Перепишем эти уравнения в векторной форме

$$\begin{aligned} x_1^1 \boldsymbol{P}_1 + x_2^1 \boldsymbol{P}_2 + \ldots + x_k^1 \boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{P}_0, \\ x_1^2 \boldsymbol{P}_1 + x_2^2 \boldsymbol{P}_2 + \ldots + x_k^2 \boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{P}_0. \end{aligned}$$

Векторы $\boldsymbol{P}_1, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ линейно независимы, и, следовательно, $\boldsymbol{P}_0$ выражается через них единственным образом. Поэтому $x_i^1 = x_i^2 = x_i$. Итак, $\boldsymbol{x}$ невозможно представить в виде выпуклой комбинации двух различных точек из X. Следовательно, $\boldsymbol{x}$ — крайняя точка X. ■

Теорема 4.6. *Если* $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *является крайней точкой из* X*, то векторы, соответствующие положительным* x_i*, образуют линейно независимую систему.*

Доказательство. Пусть не равными нулю являются первые k компонент вектора $\boldsymbol{x}$, так что $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i \boldsymbol{P}_i = \boldsymbol{P}_0$.

Допустим, что система $\boldsymbol{P}_1, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ линейно зависима. Тогда существует линейная комбинация её векторов, равная нулевому вектору

$$d_1 \boldsymbol{P}_1 + d_2 \boldsymbol{P}_2 + \ldots + d_k \boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{0}, \tag{4.8}$$

где по крайней мере один из коэффициентов $d_i \neq 0$. По условию теоремы

$$x_1 \boldsymbol{P}_1 + x_2 \boldsymbol{P}_2 + \ldots + x_k \boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{P}_0. \tag{4.9}$$

Умножим обе части равенства (4.8) на $d > 0$. Прибавляя и вычитая полученный результат из (4.9), имеем

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \boldsymbol{P}_i + d \sum_{i=1}^{k} d_i \boldsymbol{P}_i = \boldsymbol{P}_0$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \boldsymbol{P}_i - d \sum_{i=1}^{k} d_i \boldsymbol{P}_i = \boldsymbol{P}_0.$$

Таким образом, система уравнений (4.9) имеет два решения:

$$\boldsymbol{x}_1 = (x_1 + dd_1, \ldots, x_k + dd_k, 0, \ldots, 0),$$

$$\boldsymbol{x}_2 = (x_1 - dd_1, \ldots, x_k - dd_k, 0, \ldots, 0)$$

(заметим, что они могут и не быть планами). Поскольку все $x_i > 0$, d можно выбрать настолько малым, чтобы первые k компонент векторов $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ были положительными. Тогда $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ станут планами. При этом

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_2,$$

что противоречит предположению о том, что $\boldsymbol{x}$ — крайняя точка. Значит система векторов $\boldsymbol{P}_1, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ линейно независима. ■

Поскольку каждая система из $m+1$ векторов в m-мерном пространстве линейно зависима, среди компонент крайней точки множества планов X не может быть более чем m положительных.

Следствие. *Каждой крайней точке из X соответствует m линейно независимых векторов из данной системы $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_n$,*

Доказательство. Теорема 4.6 утверждает, что имеется $k \leq m$ таких векторов. При $k = m$ следствие доказано. Пусть $k < m$ и существует не более $r - k$ таких векторов $\boldsymbol{P}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{P}_r$, что

$$\boldsymbol{P}_1, \ldots, \boldsymbol{P}_k, \boldsymbol{P}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{P}_r$$

— линейно независимая система. Если $r < m$, то остальные $n - r$ векторов зависят от $\boldsymbol{P}_1, \ldots, \boldsymbol{P}_r$. Но это противоречит предположению о существовании m линейно независимых векторов в данной системе $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_n$. Поэтому $r = m$.

Итак, каждой крайней точке $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ соответствует m линейно независимых векторов $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_m$ таких, что

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \boldsymbol{P}_i + \sum_{i=k+1}^{m} 0\,\boldsymbol{P}_i = \boldsymbol{P}_0.$$

Следствие доказано. ■

Теоремы 4.5 и 4.6 могут быть объединены в следующем утверждении:

Теорема 4.7. $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *является крайней точкой множества планов X в том и только в том случае, если положительные компоненты x_j являются коэффициентами при линейно независимых векторах $\boldsymbol{P}_j$ в разложении*

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{P}_j = \boldsymbol{P}_0.$$

Лекция 16

6.5. Симплекс-метод

5.1. С помощью симплекс-метода решить задачу ЛП:

$$z = x_2 - 3x_3 + 2x_5 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7, \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ -4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,6}.$$

Перепишем задачу в векторном виде: $\sum_{j=1}^{6} x_j \boldsymbol{P}_j = \boldsymbol{P}_0$, где

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{P}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{P}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{P}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_0 = \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Запишем симплекс-таблицу №1.

				0	1	−3	0	2	0
i	BS	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_1	0	7	1	3	−1	0	2	0
2	P_4	0	12	0	−2	$\boxed{4}$	1	0	0
3	P_6	0	10	0	−4	3	0	8	1
4			0	0	−1	3	0	−2	0

Симплекс-таблица №2.

				0	1	−3	0	2	0
i	BS	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_1	0	10	1	$\boxed{5/2}$	0	1/4	2	0
2	P_3	−3	3	0	−1/2	1	1/4	0	0
3	P_6	0	1	0	−5/2	0	−3/4	8	1
4			−9	0	1/2	0	−3/4	−2	0

Симплекс-таблица №3.

i	BS	c	P_0	0 P_1	1 P_2	−3 P_3	0 P_4	2 P_5	0 P_6
1	P_2	1	4	2/5	1	0	1/10	4/5	0
2	P_3	−3	5	1/5	0	1	3/10	2/5	0
3	P_6	0	11	1	0	0	−1/2	10	1
4			−11	−1/5	0	0	−4/5	−12/5	0

В результате

$$\boldsymbol{x} = (0, 4, 5, 0, 0, 11), \quad z_{min} = -11.$$

5.2. С помощью симплекс-метода решить задачу ЛП:

$$z = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 + x_6 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 - 3x_5 - 2x_6 = 5, \\ x_2 + 3x_4 - 2x_5 + 4x_6 = 6, \\ x_3 - 4x_4 - x_5 + 2x_6 = 3, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,6}.$$

Перепишем задачу в векторном виде: $\sum_{j=1}^{6} x_j \boldsymbol{P}_j = \boldsymbol{P}_0$, где

$$\boldsymbol{P}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_5 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_6 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Запишем симплекс-таблицу.

i	BS	c	P_0	1 P_1	−1 P_2	−1 P_3	1 P_4	−2 P_5	1 P_6
1	P_1	1	5	1	0	0	2	−3	−2
2	P_2	−1	6	0	1	0	3	−2	4
3	P_3	−1	3	0	0	1	−4	−1	2
4			−4	0	0	0	2	2	−9

Из таблицы видно, что план $\boldsymbol{x} = (5, 6, 3, 0, 0, 0)$ не оптимален и его можно улучшить за счёт включения в базис вектора $\boldsymbol{P}_4$ или $\boldsymbol{P}_5$. Рассмотрим $\boldsymbol{P}_5$. Имеем

$$\begin{aligned} 5\boldsymbol{P}_1 + 6\boldsymbol{P}_2 + 3\boldsymbol{P}_3 &= \boldsymbol{P}_0, \\ -3\boldsymbol{P}_1 - 2\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_3 &= \boldsymbol{P}_5. \end{aligned}$$

Умножим второе уравнение на $\theta > 0$ и вычтем из первого. Получим

$$(5+3\theta)\boldsymbol{P}_1 + (6+2\theta)\boldsymbol{P}_2 + (3+\theta)\boldsymbol{P}_3 = \boldsymbol{P}_0 - \theta\boldsymbol{P}_5.$$

Обозначим

$$\boldsymbol{x}(\theta) = (5+3\theta, 6+2\theta, 3+\theta, 0, \theta).$$

Очевидно, что $\boldsymbol{x}(\theta)$ является планом (не опорным) для любого $\theta > 0$. Далее

$$z(\theta) = <\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}(\theta)> = (5+3\theta) - (6+2\theta) - (3+\theta) - 2\theta = -4 - 2\theta.$$

Отсюда видно, что целевая функция данной задачи не ограничена снизу.

5.3. Решить задачи ЛП симплекс-методом с использованием искусственного базиса

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}.$$

Добавим в ограничения искусственные переменные $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$, $y_3 \geq 0$:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 + y_1 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 + y_2 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_5 + y_3 = 2. \end{cases}$$

Будем искать минимум новой целевой функции:

$$w = y_1 + y_2 + y_3.$$

Перепишем задачу в векторном виде: $\sum_{j=1}^{5} x_j \boldsymbol{P}_j + \sum_{j=1}^{3} y_j \boldsymbol{Q}_j = \boldsymbol{P}_0$, где

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{P}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{P}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{Q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{Q}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{P}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Запишем симплекс-таблицу №1.

				0	0	0	0	0	1	1	1
i	BS	w	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Q_1	Q_2	Q_3
1	Q_1	1	2	−1	$\boxed{2}$	1	0	0	1	0	0
2	Q_2	1	8	4	1	1	2	1	0	1	0
3	Q_3	1	2	1	1	0	0	1	0	0	1
4			12	4	4	2	2	2	0	0	0

Симплекс-таблица №2.

i	BS	w	P_0	0 P_1	0 P_2	0 P_3	0 P_4	0 P_5	1 Q_1	1 Q_2	1 Q_3
1	P_2	0	1	$-1/2$	1	$1/2$	0	0	$1/2$	0	0
2	Q_2	1	7	$9/2$	0	$1/2$	2	1	$-1/2$	1	0
3	Q_3	1	1	$3/2$	0	$-1/2$	0	$\boxed{1}$	$-1/2$	0	1
4			8	6	0	0	2	2	-2	0	0

Симплекс-таблица №3.

i	BS	w	P_0	0 P_1	0 P_2	0 P_3	0 P_4	0 P_5	1 Q_1	1 Q_2	1 Q_3
1	P_2	0	1	$-1/2$	1	$1/2$	0	0	$1/2$	0	0
2	Q_2	1	6	3	0	1	$\boxed{2}$	0	0	1	-1
3	P_5	0	1	$3/2$	0	$-1/2$	0	1	$-1/2$	0	1
4			6	3	0	1	2	0	-1	0	-2

Симплекс-таблица №4.

i	BS	w	P_0	0 P_1	0 P_2	0 P_3	0 P_4	0 P_5	1 Q_1	1 Q_2	1 Q_3
1	P_2	0	1	$-1/2$	1	$1/2$	0	0	$1/2$	0	0
2	P_4	0	3	$3/2$	0	$1/2$	1	0	0	$1/2$	$-1/2$
3	P_5	0	1	$3/2$	0	$-1/2$	0	1	$-1/2$	0	1
4			0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1

Запишем симплекс-таблицу №1 исходной задачи.

i	BS	c	P_0	-5 P_1	-1 P_2	1 P_3	-1 P_4	-2 P_5
1	P_2	-1	1	$-1/2$	1	$1/2$	0	0
2	P_4	-1	3	$3/2$	0	$1/2$	1	0
3	P_5	-2	1	$\boxed{3/2}$	0	$-1/2$	0	1
4			-6	1	0	-1	0	0

Симплекс-таблица №2 исходной задачи.

i	BS	c	P_0	-5 P_1	-1 P_2	1 P_3	-1 P_4	-2 P_5
1	P_2	-1	$4/3$	0	1	$1/3$	0	$1/3$
2	P_4	-1	2	0	0	1	1	-1
3	P_1	-5	$2/3$	1	0	$-1/3$	0	$2/3$
4			$-20/3$	0	0	$-2/3$	0	$-2/3$

Условия оптимальности выполнено. В результате

$$f_{\max} = f(\mathbf{x}_*) = \frac{20}{3}, \quad \boldsymbol{x}_* = (2/3, 4/3, 0, 2, 0)^t.$$

5.4. Рассмотрим задачу ЛП:

$$z = x_1 - x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 + x_2 = 2, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Очевидно, что эта задача имеет пустое множество планов.

Добавим в ограничения искусственные переменные $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + y_1 = 3, \\ x_1 + x_2 + y_2 = 2, \end{cases}$$

Будем искать минимум новой целевой функции:

$$w = y_1 + y_2.$$

Запишем задачу в векторном виде: $x_1\boldsymbol{P}_1 + x_2\boldsymbol{P}_2 + y_1\boldsymbol{Q}_1 + y_2\boldsymbol{Q}_2 = \boldsymbol{P}_0$, где

$$\boldsymbol{P}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем симплекс-таблицу.

				0	0	1	1
i	BS	w	P_0	P_1	P_2	Q_1	Q_2
1	Q_1	1	3	1	1	1	0
2	Q_2	1	2	$\boxed{1}$	1	0	1
4			5	2	2	0	0

Из таблицы видно, что план $\boldsymbol{x} = (0, 0, 3, 2)$ не оптимален и его можно улучшить за счёт включения в базис вектора $\boldsymbol{P}_1$ или $\boldsymbol{P}_2$. Рассмотрим $\boldsymbol{P}_1$. Имеем

$$\begin{aligned} 3\boldsymbol{Q}_1 + 2\boldsymbol{Q}_2 &= \boldsymbol{P}_0, \\ \boldsymbol{Q}_1 + \boldsymbol{Q}_2 &= \boldsymbol{P}_1. \end{aligned}$$

Умножим второе уравнение на $\theta > 0$ и вычтем из первого. Получим

$$(3 - \theta)\boldsymbol{Q}_1 + (2 - \theta)\boldsymbol{Q}_2 + \theta\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{P}_0.$$

Симплекс-таблица №2.

				0	0	1	1
i	BS	w	P_0	P_1	P_2	Q_1	Q_2
1	Q_1	1	1	0	0	1	−1
2	P_1	0	2	1	1	0	1
4			1	0	0	0	−2

План $\boldsymbol{x} = (2, 0, 1, 0)$ является оптимальным и $w_{min} = 1$. В результате, получается, что исходная задача имеет пустое множество планов.