Лекция 3

2. Обыкновенные дифференциальные уравнения

2.1. Общие понятия. Примеры

Обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) называется уравнение вида

$$F\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right). \tag{1.1}$$

Здесь F — известная функция, x — независимая переменная, $y(x)$ — неизвестная функция. *Порядком* дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной неизвестной функции $y(x)$. Функция $y(x)$ называется *решением* (или *интегралом*) дифференциального уравнения (1.1), если она n раз непрерывно дифференцируема на некотором интервале I и при $x \in I$ удовлетворяет уравнению.

Примеры ОДУ.

$$y''' + 3y' + y = x^3; \qquad (y')^2 + 1 = 0;$$
$$y''' + (y')^5 = 0; \qquad (y^{\mathrm{IV}})^2 - 7y'' = 0.$$

Пример 1. Пусть $f(x)$ — непрерывная на интервале $I = (a, b)$. Рассмотрим ОДУ:

$$y'(x) = f(x). \tag{1.2}$$

Уравнение (1.2) имеет бесконечно много решений:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + C \quad (x_0 \in I), \tag{1.3}$$

где C — произвольная постоянная. Чтобы выделить единственное решение уравнения (1.2), достаточно задать значение $y(x)$ в какой-либо точке, например, $y(x) = y_0$. Тогда решение единственно и равно

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt. \tag{1.4}$$

Пример 2. Пусть материальная точка массы m движется по оси x и $x(t)$ — её абсцисса в момент времени t. Тогда функция $x(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению 2-го порядка:

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right).$$

Пусть точка движется в трёхмерном пространстве и $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ — её радиус-вектор. Тогда

$$m\,\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}\left(t, x, \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right). \tag{1.5}$$

Чтобы определить положение точки в момент времени t, необходимо знать её положение и скорость в некоторый момент времени t_0. Таким образом, чтобы выделить единственное решение уравнения (1.3), необходимо задать начальные данные

$$\boldsymbol{r}(t_0) = \boldsymbol{r}_0, \qquad \frac{d\boldsymbol{r}(t_0)}{dt} = \boldsymbol{v}_0. \tag{1.6}$$

Если задачу об отыскании всех решений дифференциального уравнения удаётся свести к вычислению конечного числа интегралов и производных от известных функций и алгебраическим операциям, то говорят, что *уравнение интегрируется в квадратурах.*

2.2. Дифференциальные уравнения первого порядка

1. Теорема существования и единственности. Общий вид обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка следующий:

$$F\left(x, y, y'\right) = 0. \tag{2.1}$$

Частным случаем уравнения (2.1) является уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{2.2}$$

ОДУ вида (2.2) называется уравнение в *нормальной форме*, или уравнением, *разрешённым относительно производной.*

Поставим следующую задачу: найти решение уравнения (2.2) такое, что

$$y(x_0) = y_0, \tag{2.3}$$

где x_0, y_0 — заданные числа. Задача (2.2), (2.3) называется *задачей Коши.* Условия (2.3) называются *начальными данными* или *данными Коши.*

Пусть $y = \varphi(x)$ — решение уравнения (2.2) на интервале I оси x. График этой функции называется *интегральной кривой* уравнения (2.2). Задачу Коши можно сформулировать так: найти интегральную кривой уравнения (2.2), проходящую через точку (x_0, y_0).

Теорема существования и единственности. *Пусть функция* $f(x, y)$ *и частная производная* $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ *непрерывны в некоторой области* D *плоскости* (x, y)*, точка* (x_0, y_0) *лежит в* D*. Тогда*

1. Существование. *В некоторой окрестности* $U = \{x : \ |x - x_0| < \delta\}$ *точки* x_0 *существует решение задачи Коши* (2.2), (2.3).

2. Единственность . *Если* $y = \varphi_1(x)$*,* $y = \varphi_2(x)$ *— два решения задачи Коши* (2.2), (2.3), *то* $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ *в некоторой окрестности точки* x_0.

Уравнение (2.2) можно формально записать в виде

$$dy - f(x, y)dx = 0. \tag{2.4}$$

Обобщением (2.4) является уравнение

$$P(x, y)dy + Q(x, y)dx = 0. \tag{2.5}$$

Выражение $P(x, y)dy + Q(x, y)dx$ называется *дифференциальной формой первого порядка.*

2. Уравнения с разделяющимися переменными. Дифференциальные уравнения вида

$$f_2(y)dy = f_1(x)dx. \tag{2.6}$$

называются *уравнениями с разделёнными переменными.* Функции $f_1(x)$ и $f_2(y)$ будем считать непрерывными. Уравнение (2.6) легко интегрируется:

$$\int f_2(y)dy = \int f_1(x,y)dx + C, \tag{2.7}$$

где C — произвольная постоянная.

Мы получили уравнение (2.7), которому удовлетворяют все решения уравнения (2.6), причём каждое решение уравнения (2.7) является решением уравнения (2.6), так как если некоторая функция $y(x)$ при подстановке обращает уравнение (2.7) в тождество, то, дифференцируя это тождество, обнаружим, что $y(x)$ удовлетворяет и уравнению (2.6).

Уравнение $\Phi(x,y) = 0$, которое определяет решение $y(x)$ дифференциального уравнения как неявную функцию x, называется *интегралом* рассматриваемого дифференциального уравнения.

Если это уравнение определяет все без исключения решения данного дифференциального уравнения, то оно называется *общим интегралом* рассматриваемого дифференциального уравнения. Следовательно, уравнение (2.7) является общим интегралом уравнения (2.6). Для того чтобы уравнение (2.7) определяло y как неявную функцию x, достаточно потребовать, чтобы $f_2(y) \neq 0$.

Если надо выделить частное решение, удовлетворяющее условию $y(x_0)$, то оно определится из уравнения

$$\int_{y_0}^{y} f_2(y)dy = \int_{x_0}^{x} f_1(x)dx.$$

П р и м е р 1. Рассмотрим ОДУ

$$xdx + ydy = 0.$$

Переменные разделены. Интегрируя, получим

$$\int x\,dx + \int y\,dy = C \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = C_1^2.$$

— семейство окружностей с центром в начале координат.

П р и м е р 2. Рассмотрим ОДУ

$$\mathrm{e}^{x^2}dx = 2ydy.$$

Переменные разделены. Интегрируя, получим

$$\int \mathrm{e}^{x^2}\,dx = y^2 + C.$$

Интеграл не берётся в элементарных функциях, тем не менее исходное уравнение считается проинтегрированным, так как задача доведена до квадратур.

Уравнения вида

$$\varphi_1(x)\psi_1(y)dx = \varphi_2(x)\psi_2(y)dy \tag{2.8}$$

называются *дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными*, так как путём деления на $\psi_1(y)\varphi_2(x)$ они приводятся к уравнению с разделёнными переменными:

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\,dx = \frac{\psi_1(y)}{\psi_2(y)}\,dy.$$

Заметим, что деление на $\psi_1(y)\varphi_2(x)$ может привести к потере частных решений, обращающих в нуль произведение $\psi_1(y)\varphi_2(x)$.

Пример 3. Рассмотрим ОДУ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}.$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C. \quad C > 0.$$

Потенцируя, получим $|y| = C|x|$. Это уравнение эквивалентно уравнению $y = \pm Cx$ или $y = C_1 x$, где $C_1 \neq 0$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Так как при делении на y было потеряно решение $y = 0$, то общим решением является функция

$$y = C_1 x. \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Решению $y = 0$ соответствует $C_1 = 0$.

3. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными. Многие дифференциальные уравнения путём замены переменных могут быть приведены к уравнениям с разделяющимися переменными.

Рассмотрим дифференциальные уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by), \tag{2.9}$$

где a и b — постоянные величины.

Сделаем в (2.9) замену $z = ax + by$. Тогда

$$\frac{dz}{dx} = a + b\,\frac{dy}{dx} = a + bf(z),$$

или

$$\frac{dz}{a + bf(z)} = dx,$$

и переменные разделились. Интегрируя, получим

$$x = \int \frac{dz}{a + bf(z)} + C.$$

Пример 4. Рассмотрим ОДУ

$$\frac{dy}{dx} = 2x + y.$$

Полагая $z = 2x + y$, будем иметь

$$\frac{dz}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx} = 2 + z.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим общее решение

$$z + 2 = Ce^x, \quad 2x + y + 2 = Ce^x.$$

Дифференциальные уравнения вида
$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2.10}$$
называются *однородными уравнениями.* После подстановки $z = \dfrac{y}{x}$ или $y = xz$ получим
$$\frac{dy}{dx} = x\,\frac{dz}{dx} + z, \quad x\,\frac{dz}{dx} = f(z) - z.$$
Т. е. получили уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 5. Рассмотрим однородное ОДУ
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}.$$
Полагая $z = 2x + y$, будем иметь
$$\frac{dz}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx} = 2 + z.$$
Полагая $y = xz$, $\dfrac{dy}{dx} = x\,\dfrac{dz}{dx} + z$ и подставляя в исходное уравнение, получим
$$x\,\frac{dz}{dx} + z = z + \operatorname{tg} z, \quad x\,\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} z.$$
Разделяя переменные и интегрируя, получим общее решение
$$\sin z = Cx, \quad \sin\frac{y}{x} = Cx.$$

2.3. Линейные уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение линейное относительно неизвестной функции и её производной. Линейное уравнение имеет вид
$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x), \tag{3.1}$$
где $p(x)$ и $f(x)$ будем считать непрерывными функциями.

Если $f(x) = 0$, то уравнение (3.1) называется *линейным однородным.* В линейном однородном уравнении переменные разделяются:
$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0, \quad \text{откуда} \quad \frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$
Интегрируя, получим
$$\ln|y| = -\int p(x)\,dx + \ln C_1, \quad C_1 > 0,$$
$$y = C\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}, \quad C \neq 0. \tag{3.2}$$
При делении на y мы потеряли решение $y = 0$, однако оно может быть включено в найденное семейство решений (3.2), если считать что C может принимать и нулевое значение.

Для интегрирования неоднородного линейного уравнения (3.1) применяют *метод вариации постоянной*. Ищем решение уравнения (3.1) в виде

$$y = C(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx},$$

где $C(x)$ — неизвестная функция.

Вычисляя производную

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC}{dx}\,e^{-\int p\,dx} - Cp\mathrm{e}^{-\int p\,dx},$$

и подставляя в (3.1), получим

$$\left\{\frac{dC}{dx}\,e^{-\int p\,dx} - Cp\,\mathrm{e}^{-\int p\,dx}\right\} + p\,C\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx} = f$$

или

$$\frac{dC}{dx} = f\,e^{\int p\,dx}.$$

Интегрируя, находим

$$C(x) = \int f(x)\,e^{\int p(x)\,dx} + C_1.$$

Следовательно,

$$y = C(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx} = C_1\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx} + \mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}\int f(x)\,e^{\int p(x)\,dx} \tag{3.3}$$

Итак, общее решение неоднородного линейного уравнения сумме общего решения соответствующего однородного уравнения

$$y = C_1\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}$$

и частного решения неоднородного уравнения

$$\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}\int f(x)\,e^{\int p(x)\,dx},$$

получающегося из (3.3) при $C_1 = 0$.

Пример 1. Рассмотрим линейное ОДУ

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2.$$

Функция $y = Cx$ является общим решением соответствующего однородного уравнения (см. пример 2.3). Следовательно, решение ищем в виде $y = C(x)x$. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = x\,\frac{dC}{dx} + C$$

и, подставляя в исходное уравнение, получим

$$x\,\frac{d}{dx} = x^2, \quad \frac{dC}{dx} = x, \quad C(x) = \frac{x^2}{2} + C_1.$$

В результате получаем общее решение

$$y = \frac{x^3}{2} + C_1 x.$$