Семинар по теме “ЗСИ. Обобщение закона сохранения импульса для системы материальных точек. Теорема о движении центра масс. Движение тел с переменной массой. Реактивное движение. Уравнение Мещерского. Формула Циолковского. Импульс силы.

Теория:

Удар (соударение) – это кратковременное взаимодействие тел при непосредственном соприкосновении, при котором изменением положения этих тел в пространстве за время их соударения можно пренебречь.

Абсолютно упругий удар (соударение) – удар, в результате которого суммарная кинетическая энергия тел до соударения равна суммарной кинетической энергии тел после соударения.

Абсолютно неупругий удар (соударение) – удар, при котором соударяющиеся тела приобретают одинаковую скорость после со- ударения.

Неупругий удар (соударение) – удар, в результате которого часть суммарной кинетической энергии тел переходит в их внутреннюю энергию.

Центральный удар (соударение) – удар, при котором силы упругости, действующие между соударяющимися телами, направ- лены вдоль прямой, соединяющей центры масс тел.

Лобовой удар (соударение) – удар, при котором скорости соударяющихся тел лежат на прямой, соединяющей центры масс тел.

Импульс механической системы $\vec{p}$ – физическая величина, равная сумме

импульсов материальных точек, из которых состоит система:

$$\vec{p} = \sum \vec{p_i} = \sum m_i \vec{v_i}$$

Закон сохранения импульса: Полный импульс изолированной системы материальных точек остается неизменным :

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + ... + m_n\vec{v}_n = const$$

Закон изменения импульса механической системы (Второй закон Ньютона)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}.$$

Центр масс системы материальных точек:

Рассмотрим систему МТ с массами m_1, m_2,..., m_N. Пусть $\vec{\mathbf{r}}_1$, $\vec{\mathbf{r}}_2$,..., $\vec{\mathbf{r}}_N$ — радиус-векторы этих МТ. Определим центр масс системы, как точку, чей радиус-вектор равен взвешенной сумме радиус-векторов отдельных МТ, причем в качестве веса возьмем отношение массы данной МТ к полной массе системы:

$$\vec{\mathbf{r}}_c = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{m} \vec{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\mathbf{r}}_i .$$

Здесь $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$ — полная масса системы. Как станет понятно из дальнейшего, центр масс играет важную роль при описании системы МТ.

Легко показать, что относительный радиус-вектор $\vec{\mathbf{r}}_{ci} = \vec{\mathbf{r}}_c - \vec{\mathbf{r}}_i$ центра масс по отношению к каждой из точек системы не изменяется при изменении положения начала отсчета системы координат.

Для системы из двух материальных точек (рис.) центр масс расположен на отрезке, соединяющем точки, и делит этот отрезок в отношении обратном отношению масс:

$$\frac{\left|\vec{\mathbf{r}}_{c1}\right|}{\left|\vec{\mathbf{r}}_{c2}\right|} = \frac{m_2}{m_1} .$$

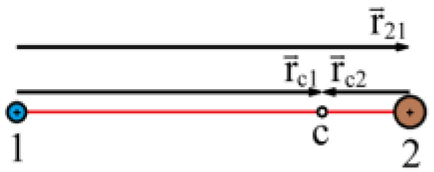


Рис. . К определению положения центра масс системы из двух материальных точек

Можно доказать, что для тела с симметричным распределением массы центр масс находится в центре симметрии тела. Например, для однородного тонкого стержня центр масс находится в его середине, для однородного шара — в его центре.

Найдем скорость, с которой движется центр масс:

$$\vec{\mathbf{v}}_c = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_c}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{\mathbf{r}}_i}{dt}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\mathbf{v}}_i}{m} = \frac{\vec{\mathbf{P}}}{m}.$$

Как видим, скорость центра масс определяется полным импульсом $\vec{\mathbf{P}}$ системы.

Соотношение в виде

$$\vec{\mathbf{P}} = m\vec{\mathbf{v}}_c$$

позволяет находить полный импульс системы через скорость центра масс.

Из уравнения для скорости центра масс следует, что ускорение центра масс системы связано с производной полного импульса системы:

$$\vec{\mathbf{a}}_c = \frac{d\vec{\mathbf{v}}_c}{dt} = \frac{1}{m}\frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt}.$$

Выражая эту производную из основного закона динамики системы , находим

$$m\vec{\mathbf{a}}_c = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_i^{(\text{ex})}.$$

Это уравнение по форме совпадает с уравнением второго закона Ньютона для одной материальной точки, что позволяет сформулировать следующее утверждение. *Центр масс системы движется при заданных начальных условиях так, как двигалась бы при таких же начальных условиях одна материальная точка с массой m системы под действием результирующей внешних сил.* Под начальными условиями подразумеваются начальный радиус-вектор и начальная скорость центра масс.

Движение тела с переменной массой. Реактивное движение. Уравнение Мещерского.

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt}\vec{u}.$$

Реактивная сила – сила, действующая на тело со стороны отделяющихся от него частиц:

$$F(t) = -\frac{dm}{dt}\vec{u}(t)$$

Формула Циолковского - зависимость скорости тела v , движущегося под действием постоянной реактивной силы, от его массы M:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 - u \cdot ln(\frac{M_0}{M(t)})$$

где u – скорость отделяющихся частиц относительно тела, M_0 и $\vec{v}_0$ – начальные (в момент времени $t = t_0$) масса и скорость тела.

Формула Циолковского определяет скорость, которую развивает летательный аппарат под воздействием тяги ракетного двигателя, неизменной по направлению, при отсутствии всех других сил. Эта скорость называется характеристической скоростью:

$$\vec{v} = Iln(\frac{M_1}{M_2})$$

где $\vec{v}$ — конечная скорость летательного аппарата, которая для случая маневра в космосе при орбитальных манёврах и межпланетных перелетах часто обозначается ΔV, также именуется характеристической скоростью;

I — удельный импульс ракетного двигателя (отношение тяги двигателя к секундному расходу массы топлива);

M_1 — начальная масса летательного аппарата (полезная нагрузка + конструкция аппарата + топливо);

M_2— конечная масса летательного аппарата (полезная нагрузка + конструкция аппарата).

Для многоступенчатой ракеты конечная скорость рассчитывается как сумма скоростей, полученных по формуле Циолковского отдельно для каждой ступени, причем при расчёте характеристической скорости каждой ступени к её начальной и конечной массе добавляется суммарная начальная масса всех последующих ступеней.

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{N} I_i ln(\frac{M_0 + \sum_{j=i}^{N} M_{1j}}{M_0 + M_{2i} + M_{1i} + \sum_{j=i}^{N} M_{1j}})$$

M_{1i} — масса заправленной i-й ступени ракеты;

M_{2i} — масса i-й ступени без топлива;

I_i — удельный импульс двигателя i-й ступени;

M_0 — масса полезной нагрузки;

N — число ступеней ракеты.

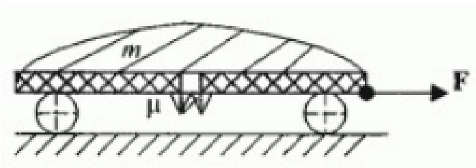
Задачи:

1. Вы описываете физику объектов в видеоигре; на краю покоящейся подвижной платформы массой 100 кг стоят два игрока, масса каждого из которых равна 75 кг. Пренебрегая трением, найти скорость платформы после того, как оба игрока спрыгнут с одной и той же горизонтальной скоростью v_0 относительно платформы: 1) одновременно; 2) друг за другом. В каком случае скорость платформы будет больше и во сколько раз?

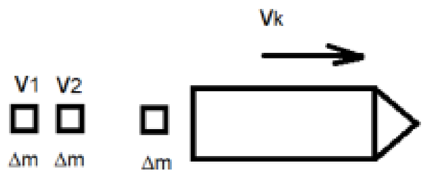
2. Бильярдный шар массой 330 г испытал абсолютно упругое столкновение с таким же покоившемся бильярдным шаром. Какую относительную часть кинетической энергии потерял бильярдный шар, если: а) он отскочил под углом 30 градусов к своему первоначальному направлению движения; б) столкновение лобовое?

3. Ракета "Falcon-9" выпускает непрерывную струю топлива, имеющую скорость 1700 м/с относительно ракеты. Расход топлива составляет 5300 кг/с. Найти уравнение движения ракеты, связывающее массу ракеты, её ускорение и действие внешней силы.

4. Тележка с песком движется по горизонтальной плоскости под действием постоянной силы $\vec{F}$, совпадающей по направлению с её вектором скорости. При этом песок высыпается через отверстие в дне с постоянной скоростью u кг/с. Найти ускорение a и скорость v тележки в момент t, если в момент $t = 0$ тележка с песком имела массу m_0 и её скорость была равна нулю. Трением пренебречь.



5. Пусть ракета выбрасывает вещество не непрерывно, а конечными дискретными порциями одной и той же массы Δm. Пусть при каждом выбрасывании порция вещества Δm получает одну и ту же скорость $v_{\text{отн}}$ относительно ракеты, направленную назад. Определить скорость ракеты v_N, которую она достигнет после N выбрасываний, если начальная масса ракеты равна m_0. Ограничиться нерелятивистскими скоростями. Показать, что в предельном случае $\Delta m \to 0$, $\Delta N \to$, но произведение $N\Delta m$ остаётся постоянным, выражение для скорости v_N переходит в формулу Циолковского.



6. Двухступенчатая ракета состоит из двух одинаковых ракет с одним и тем же отношением массы топлива $M_{\text{топл}}$ к массе конструкции $M_{\text{констр}}$, равном

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{M_{\text{топл}}}{M_{\text{констр}}} = 10$$

При каком отношеии масс α одноступенчатая ракета достигнет той же конечной скрости, что и двухступенчатая? Скорости истечения газов относительно ракет считать равными.