Лекция 5

3. Вариационное исчисление

3.1. Введение

Пусть дан некоторый класс M функций $y(x)$. Если каждой функции $y \in M$ поставлено в соответствие число $J[y]$, то говорят, что задан *функционал* на M.

Пример 1. Пусть $M = C[0,1]$ — множество всех непрерывных функций $y(x)$, заданных на отрезке $[0,1]$. Рассмотрим

$$J[y] = \int_0^1 y(x)\,dx. \tag{1.1}$$

Тогда $J[y]$ есть функционал на $C[0,1]$. Подставляя в (1.1) вместо $y(x)$ конкретные функции, будем получать соответствующие значения $J[y]$. Так, если $y(x) = x^2$, то

$$J[y] = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3};$$

если $y(x) = \mathrm{e}^x$, то

$$J[y] = \int_0^1 \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e} - 1.$$

Вариационное исчисление изучает методы, позволяющие находить максимальные и минимальные значения функционалов. Задачи, в которых требуется исследовать функционал на максимум или минимум, называются *вариационными задачами.*

Вариационное исчисление начало развиваться с 1696 года и оформилось в самостоятельную математическую дисциплину с собственными методами исследования после фундаментальных работ действительного члена Петербургской Академии наук Леонарда Эйлера (1707 – 1783 г.), которого с полным основанием можно считать создателем вариационного исчисления.

Большое влияние на развитие вариационного исчисления оказали следующие три задачи:

1. Задача о брахистохроне. В 1696 году Иоганн Бернулли опубликовал письмо, в котором предлагал вниманию математиков задачу о линии быстрейшего ската — *брахистохроне.* В этой задаче требуется определить линию, соединяющую две заданные точки A и B, не лежащие на одной вертикальной прямой, и обладающую тем свойством, что материальная точка скатится по этой линии из точки A в точку B в кратчайшее время. Решение задачи о брахистохроне было дано И. Бернулли, Я. Бернулли, Г. Лейбницем, И. Ньютоном и Г. Лопиталем. Оказалось, что линией быстрейшего ската является циклоида.

2. Задача о геодезических линиях. Требуется определить линию наименьшей длины, соединяющую две заданные точки на некоторой поверхности

$$\varphi(x, y, z) = 0.$$

Такие кратчайшие линии называются *геодезическими.* Эта задача была решена в 1698 году Я. Бернулли, но общий метод решения задач такого типа был дан лишь в работах Л. Эйлера и Ж. Лагранжа.

3. Изопериметрическая задача. Требуется найти замкнутую линию заданной длины L, ограничивающую максимальную площадь S. Такой линией, как было известно ещё в древней Греции, является окружность. В этой задаче требуется определить экстремум функционала S при наличии своеобразного дополнительного условия — длина кривой должна быть постоянна, т. е. функционал L сохраняет постоянное значение. Условия такого типа называются изопериметрическими. Общие методы решения задач с изопериметрическими условиями были разработаны Л. Эйлером.

3.2. Функциональные пространства

Линейным или *векторным пространством* называется совокупность R элементов x, y, z, ... произвольной природы, для которых определены операции сложения и умножения их на числа, причём выполнены следующие аксиомы:

L1. $x + y = y + x$.

L2. $(x + y) + z = x + (y + z)$.

L3. Существует такой элемент $0 \in R$ (нулевой элемент), что для любого $x \in R$ выполняется равенство

$$x + 0 = x.$$

L4. Для каждого $x \in R$ существует такой элемент $-x \in R$, называемый *противоположным* к элементу x, что

$$x + (-x) = 0.$$

L5. $1 \cdot x = x$.

L6. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.

L7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

L8. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Линейное пространство R называется нормированным, если каждому элементу $x \in R$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\|x\|$ — норма этого элемента так, что

N1. $\|x\| = 0$ только при $x = 0$.

N2. $\|\alpha x\| = \alpha\|x\|$.

N2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

В линейном нормированном пространстве можно говорить о расстоянии между элементами, понимая под расстоянием между x и y величину $d(x, y) = \|x - y\|$.

Последовательность элементов $\{y_n\}$ в линейном нормированном пространстве R *сходится* к элементу $y \in R$, если

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - y\| = 0. \tag{2.1}$$

Последовательность $\{y_n\} \subset R$ называется *сходящейся*, если она сходится к какому-нибудь элементу из R.

Последовательность элементов $\{y_n\}$ в линейном нормированном пространстве R называется *фундаментальной*, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для любых $n \geq N$, $m \geq N$ выполняется неравенство $\|y_n - y_m\| < \varepsilon$. Линейное нормированное пространство называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность является сходящейся. Полное линейное нормированное пространство называется *банаховым пространством.*

Приведём основные примеры банаховых пространств, которые мы будем рассматривать.

1. Пространство $C[a,b]$. Это пространство всех непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций с нормой

$$\|y\|_C = \max_{z\in[a,b]} \left|y(x)\right|. \tag{2.2}$$

Сходимость по норме в пространстве $C[a,b]$ — это равномерная сходимость на отрезке $[a,b]$.

2. Пространство $C^1[a,b]$ — это пространство всех непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций. Норма вводится так:

$$\|y\|_1 = \max_{x\in[a,b]} \left|y(x)\right| + \max_{x\in[a,b]} \left|y'(x)\right|. \tag{2.3}$$

Пусть последовательность $y_n(x) \to y(x)$ в норме C^1, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - y\|_1 = 0.$$

Тогда равномерно по $x \in [a,b]$ сходятся последовательности $y_n(x)$, $y'_n(x)$:

$$y_n(x) \rightrightarrows y(x), \quad y'_n(x) \rightrightarrows y'(x);$$

верно и обратное.

3. Пространство $C^n[a,b]$ — это пространство всех функций на отрезке $[a,b]$, имеющих непрерывные производные до n-го порядка включительно. Норма определяется формулой

$$\|y\|_n = \sum_{k=0}^{n} \max_{x\in[a,b]} \left|y^{(k)}(x)\right|. \tag{2.4}$$

Пример 1. Найдём расстояние между функциями

$$f(x) = x, \quad g(x) = x^2,$$

заданных на отрезке $[0,1]$, в пространствах $C[0,1]$ и $C^1[0,1]$. Имеем

$$y(x) = |f(x) - g(x)| = x - x^2.$$

Так как $y'(x) = 1 - 2x$, то $y'(1/2) = 0$. Далее $y(0) = y(1) = 0$ и $y(1/2) = 1/4$. Следовательно, $\max y(x) = 1/4$.

Рассмотрим функцию

$$y_1 = f'(x) - g'(x) = 1 - 2x.$$

Очевидно, что $\max |y_1(x)| = 1$

В результате

$$d_C(f,g) = \|f-g\|_C = \frac{1}{4}, \quad d_1(f,g) = \|f-g\|_1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}.$$

Пример 2. Рассмотрим последовательность функций

$$y_n(x) = \frac{\sin n^2 x}{n},$$

заданных на отрезке $[0,\pi]$. Так как

$$|y_n(x)| = \left|\frac{\sin n^2 x}{n}\right| \le \frac{1}{n},$$

то $\|y_n\|_C \le 1/n$. Следовательно, $y_n \to 0$ в пространстве $C[0,\pi]$.

Далее

$$|y_n'(x)| = n\left|\cos n^2 x\right|.$$

В точках $x_n = \dfrac{\pi}{n^2}$ имеем $|y_n(x_n)| = n|\cos\pi| = n$. Следовательно,

$$\|y_n\|_1 \ge \max_{x\in[0,\pi]}\left|y'(x)\right| \ge n.$$

Таким образом, последовательность y_n не сходится в пространстве $C^1[0,\pi]$.

Функционал $J[y]$ называется *непрерывным* в точке $y_0 \in R$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\left|J[y] - J[y_0]\right| < \varepsilon$, как только $\|y - y_0\| < \delta$.

Пример 3. Покажем, что функционал

$$J[y] = \int_0^1 \left[y(x) + 2y'(x)\right]\,dx,$$

в каждой точке пространства $C^1[0,1]$. Пусть $y_0(x)$ — произвольный элемент $C^1[0,1]$. Имеем

$$J[y] - J[y_0] = \int_0^1 \left[(y(x) - y_0(x)) + 2(y'(x) - y_0'(x))\right]\,dx.$$

Так как

$$\left|(y(x) - y_0(x) + 2(y'(x) - y_0'(x))\right| \le 2\,\|y - y_0\|_1,$$

то

$$\left|J[y] - J[y_0]\right| \le \int_0^1 2\,\|y - y_0\|_1\,dx = 2\,\|y - y_0\|_1.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу доказанного неравенства, достаточно взять $\delta = \varepsilon/2$.

3.3. Вариация функционала. Необходимые условия экстремума

Пусть функционал $\varphi(h)$ определён на банаховом пространстве R. Этот функционал называется *линейным*, если он

1) непрерывен на R;

2) для любых элементов h_1, $h_2 \in R$ и для любых чисел α_1, α_2, удовлетворяет условию

$$\varphi(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) = \alpha_1\varphi(h_1) + \alpha_2\varphi(h_2).$$

Приведём примеры.

Пример 1. Положим

$$\varphi(h) = \int_a^b a(x)h(x)\,dx,$$

где $a(x) \in C[a,b]$ — фиксированная функция. Это линейный функционал в пространстве $C[a,b]$.

П р и м е р 2. Пусть

$$\varphi(h) = \int_a^b [a(x)h(x) + b(x)h'(x)]\, dx,$$

где $a(x)$, $b(x) \in C[a,b]$ — фиксированные функции. Это линейный функционал в пространстве $C^1[a,b]$.

П р и м е р 3. Поставим в соответствие каждой функции $h \in C[a,b]$ её значение в фиксированной точке $x_0 \in [a,b]$, т. е. зададим функционал $\varphi(h)$ равенством Пусть

$$\varphi(h) = h(x_0).$$

Это линейный функционал в пространстве $C[a,b]$.

Рассмотрим некоторый функционал $J[y]$ и его приращение

$$\Delta J(h) = J[y+h] - J[y],$$

отвечающее приращению h его *независимой переменной* y. Если y фиксировано, то ΔJ представляет собой функционал (вообще говоря нелинейный) от h.

Функционал $J[y]$ называется *дифференцируемым* в точке y, если

$$\Delta J(h) = J[y+h] - J[y] = \varphi(h) + \alpha \|h\|, \tag{3.1}$$

где $\varphi(h)$ — линейный функционал, а $\alpha \to 0$ при $\|h\| \to 0$.

Функционал $\varphi(h)$ называется дифференциалом или *вариацией* функционала $J[y]$ в точке y и обозначается так: $\varphi(h) = \delta J$.

Т е о р е м а 1. *Предположим, что функционал $J[y]$ дифференцируемым в точке y. Тогда вариация δJ определяется единственным образом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что если $\varphi(h)$ — линейный функционал и

$$\frac{\varphi(h)}{\|h\|} \to 0, \quad \text{при } \|h\| \to 0,$$

то $\varphi(h) \equiv 0$. Действительно, пусть $\varphi(h_0) = \lambda \neq 0$. Положим $h_n = \dfrac{h_0}{n}$. Имеем $h_n \to 0$, но

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(h_n)}{\|h_n\|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\varphi(h_0)}{n\|h_0\|} = \lambda \neq 0.$$

Допустим теперь, что дифференциал функционала определяется не единственным образом, т. е. пусть

$$\delta J(h) = \varphi_1(h) + \alpha_1 \|h\|$$

и

$$\delta J(h) = \varphi_2(h) + \alpha_2 \|h\|,$$

где $\varphi_1(h)$ и $\varphi_2(h)$ — линейные функционалы, а α_1, $\alpha_2 \to 0$ при $\|h\| \to 0$. Тогда

$$\varphi_1(h) - \varphi_2(h) = \alpha_1 \|h\| - \alpha_2 \|h\|.$$

Следовательно, $\varphi_1(h) - \varphi_2(h)$ есть бесконечно малая порядка выше первого относительно h. Но так как $\varphi_1(h) - \varphi_2(h)$ — линейный функционал, то он в силу сделанного выше замечания равен нулю. ■

Пример 4. Покажем, что функционал

$$J[y] = \int_a^b y^2(x)\,dx,$$

определённый в пространстве $C[a, b]$, дифференцируем в каждой точке $y(x)$.

Имеем

$$\Delta J = J[y + \delta y] - J[y] = \int_a^b \left[y(x) + \delta y(x)\right]^2\,dx - \int_a^b y^2(x)\,dx =$$
$$= \int_a^b 2y(x)\,\delta y(x)\,dx + \int_a^b (\delta y(x))^2\,dx.$$

Первый интеграл в правой части при каждой фиксированной функции $y(x)$ является линейным относительно $\delta y(x)$ функционалом. Оценим второй интеграл в правой части. Имеем

$$\int_a^b (\delta y(x))^2\,dx = \int_a^b |\,\delta y(x)\,|^2\,dx \leq$$
$$\big[\max_{a\leq x\leq b}|\,\delta y(x)\,|\big]^2 \int_a^b dx = (b-a)\,\|\,\delta y\,\|_C^2 = ((b-a)\,\|\,\delta y\,\|_C)\cdot\|\,\delta y\,\|_C.$$

При $\|\,\delta y\,\|_C \to 0$ величина

$$(b-a)\,\|\,\delta y\,\|_C \to 0.$$

Таким образом, приращение ΔJ функционала представимо в виде (3.1). Следовательно, рассматриваемый функционал дифференцируем в точке $y(x)$ и его вариация

$$\delta J = 2\int_a^b y(x)\,\delta y(x)\,dx.$$

Теорема 2. *Если функционал $J[y]$ дифференцируем в точке y, то его вариацию можно посчитать по формуле*:

$$\delta J[h] = \frac{d}{dt}\,J[y + th]\Big|_{t=0}. \tag{3.2}$$

Доказательство. Действительно, положим $\psi(t) = J[y + th]$, где элемент h фиксирован. Тогда в силу (3.1) имеем

$$\psi(t) = \psi(0) + t\varphi(h) + o(t), \quad t \to 0,$$

так что $\psi'(0) = \varphi(h)$. ■

Пример 5. Рассмотрим функционал из примера 4. Как было показано, этот функционал дифференцируем. Поэтому вариацию этого функционала можно найти по формуле (3.2). Имеем

$$\frac{d}{dt}\,J[\,y + th\,] = \frac{d}{dt}\int_a^b [\,y(x) + th(x)\,]^2\,dx = 2\int_a^b [\,y(x) + th(x)\,]\,h(x)\,dx.$$

Полагая в этом выражении $t = 0$, получим

$$\delta J[h] = 2\int_a^b y(x)\,h(x)\,dx.$$

Мы будем рассматривать функционалы, определённые на некотором банаховом пространстве R. Точка y_0 называется *точкой минимума* функционала $J[y]$, если

$$J[y] \geq J[y_0], \tag{3.3}$$

для всех y из достаточно малой окрестности точки y_0.

Точка y_0 называется *точкой максимума* функционала $J[y]$, если

$$J[y] \leq J[y_0], \tag{3.4}$$

для всех y из достаточно малой окрестности точки y_0.

Точка y_0 называется *точкой экстремума* функционала $J[y]$, если является точкой минимума или максимума.

Теорема 3. *Пусть функционал $J[y]$ дифференцируем в точке y_0. Для того, чтобы функционал $J[y]$ при $y = y_0$ достигал экстремума, необходимо, чтобы его вариация обращалась в нуль при $y = y_0$, т. е.*

$$\delta J \equiv 0, \tag{3.5}$$

при $y = y_0$.

Доказательство. Рассмотрим для определённости случай минимума. Если $J[y]$ при $y = y_0$ достигает минимума, то это значит, что

$$J[y_0 + h] - J[y_0] \geq 0$$

для всех h, для которых $\|h\|$ достаточно мала. Но по определению вариации,

$$J[y_0 + h] - J[y_0] = \delta J[h] + \alpha\|h\|$$

и $\alpha \to 0$ при $\|h\| \to 0$. Если $\delta J[h] \neq 0$, то при достаточно малых h знак выражения

$$\delta J[h] + \alpha\|h\| \tag{3.6}$$

определяется знаком первого члена. Но δJ — линейный функционал, поэтому

$$\delta J[-h] = -\delta J[h],$$

и, следовательно, при $\delta J \neq 0$ выражение (3.6) может быть как положительным, так и отрицательным при сколь угодно малых h, т. е. экстремум в этом случае невозможен. Теорема доказана. ■

Лекция 6

3.4. Простейшая задача вариационного исчисления

Пусть $F(x, y, z)$ — функция, имеющая непрерывные частные производные по всем переменным до второго порядка включительно. Среди всех функций $y(x) \in C^1[a, b]$, удовлетворяющих условиям

$$y(a) = A, \quad y(b) = B, \tag{4.1}$$

найти ту функцию, которая доставляет экстремум функционалу

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')\, dx. \tag{4.2}$$

Сформулированная выше задача называется *простейшей задачей вариационного исчисления.*

Дадим функции $y(x)$ некоторое приращение $h(x)$. Для того, чтобы функция

$$y(x) + h(x)$$

по-прежнему удовлетворяла граничным условиям (4.1), нужно, чтобы

$$h(a) = h(b) = 0. \tag{4.3}$$

Вычислим приращение функционала (4.2). Оно равно

$$\begin{aligned} \Delta J &= \int_a^b F(x, y + h, y' + h')\, dx - \int_a^b F(x, y, y')\, dx = \\ &= \int_a^b \left[F_y(x, y, y')h + F_{y'}(x, y, y')h'\right]\, dx + \ldots, \end{aligned}$$

где многоточие обозначает члены порядка выше первого относительно h и h'. Выражение

$$\int_a^b \left[F_y(x, y, y')h + F_{y'}(x, y, y')h'\right]\, dx$$

представляет собой главную линейную часть приращения ΔJ функционала J, т. е. дифференциал.

Преобразуем второе слагаемое. Интегрируя по частям, получим

$$\int_a^b F_{y'} h'\, dx = F_{y'} h\Big|_a^b - \int_a^b h \frac{d}{dx} F_{y'}\, dx.$$

В силу условий (4.3), получаем

$$\delta J = \int_a^b \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\right] h(x)\, dx \tag{4.4}$$

Согласно теореме 2.1. необходимым условием экстремума является равенство $\delta J = 0$.

Л е м м а 1. (Основная лемма вариационного исчисления). *Если $a(x)$ — непрерывная функция и*

$$\int_a^b a(x) h(x)\, dx = 0$$

для любой функции $h \in C^1[a,b]$, *удовлетворяющей условию* $h(a) = h(b) = 0$, *то* $a(x) \equiv 0$.

Доказательство. Пусть в некоторой точке c имеем $a(c) \neq 0$, например, $a(c) > 0$. Тогда найдётся интервал $\xi_1 < c < \xi_2$, содержащийся в (x_1, x_2), в котором $a(x) > 0$. Положим

$$h(x) = \begin{cases} (x-\xi_1)^2(\xi_2 - x)^2, & x \in (\xi_1, \xi_2), \\ 0, & x \notin (\xi_1, \xi_2) \end{cases}$$

Функция $h(x)$ удовлетворяет условиям леммы. В то же время

$$\int_a^b a(x)h(x)\,dx = \int_{\xi_1}^{\xi_2} a(x)h(x)\,dx > 0,$$

так как под интегралом стоит положительная непрерывная функция. Полученное противоречие доказывает лемму. ■

В силу основной леммы вариационного исчисления получаем

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0. \tag{4.5}$$

Выражение (4.5) называется *уравнением Эйлера.*

Таким образом, установлена следующая

Теорема 1. *Для того чтобы функционал* (4.2), *определённый на множестве функций* $y \in C^1[a,b]$, *удовлетворяющих условиям* (4.1), *достигал на данной функции* $y(x)$ *экстремума, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера* (4.5).

Интегральные кривые уравнения Эйлера называются *экстремалями.*

Уравнение Эйлера представляет собой, вообще говоря, дифференциальное уравнение второго порядка, так что его общее решение должно зависеть от двух произвольных постоянных. Значения этих постоянных определяются из граничных условий (4.1).

Краевая задача

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B, \tag{4.6}$$

не всегда имеет решение, а если решение существует, то оно может быть не единственным.

Пример 1. На каких кривых может достигать экстремума функционал

$$J[y] = \int_1^2 (y'^2 - 2xy)\,dx, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = -1?$$

Решение. Здесь $F(x, y, y') = y'^2 - 2xy$. Имеем

$$F_y = -2x, \quad F_{y'} = 2y'.$$

Следовательно, уравнение Эйлера имеет вид

$$y'' + x = 0.$$

Общее решение есть

$$y(x) = -\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2.$$

Так как $y(1) = -1/6 + C_1 + C_2$ и $y(2) = -8/6 + 2C_1 + C_2$, то получаем систему линейных уравнений для определения C_1 и C_2:

$$C_1 + C_2 = \frac{1}{6}, \quad 2C_1 + C_2 = \frac{2}{6}.$$

Отсюда $C_1 = \frac{1}{6}$, $C_2 = 0$. Таким образом, экстремум может достигаться лишь на кривой

$$y(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{x}{6} = \frac{x}{6}(1 - x^2).$$

П р и м е р 2. Найти экстремали функционала

$$J[y] = \int_1^3 (3x - y)y\,dx,$$

удовлетворяющие граничным условиям $y(1) = 1$, $y(3) = \frac{9}{2}$.

Р е ш е н и е. Здесь $F(x, y, y') = 3xy - y^2$. Так как

$$F_y = 3x - 2y, \quad F_{y'} = 0,$$

то уравнение Эйлера имеет вид

$$3x - 2y = 0,$$

откуда $y(x) = \frac{3}{2}x$.

Так как экстремаль $y(x) = \frac{3}{2}x$ не удовлетворяет условию $y(1) = 1$, то данная вариационная задача решения не имеет.

П р и м е р 3. Найти экстремали функционала

$$J[y] = \int_0^{2\pi} (y'^2 - y^2)\,dx,$$

удовлетворяющие граничным условиям $y(0) = 1$, $y(2\pi) = 1$.

Р е ш е н и е. Здесь $F(x, y, y') = y'^2 - y^2$. Так как

$$F_y = -2y, \quad F_{y'} = -2y',$$

то уравнение Эйлера имеет вид

$$y'' + y = 0.$$

Его общим решением является

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Так как $y(0) = C_1$ и $y(2\pi) = C_1$, то получаем $C_1 = 1$ и $C_2 = C$, где C — произвольная константа. В результате

$$y(x) = \cos x + C \sin x.$$

Таким образом, поставленная вариационная задача имеет бесчисленное множество решений.

Как уже было сказано выше, уравнение Эйлера представляет собой, вообще говоря, дифференциальное уравнение второго порядка. Укажем некоторые частные случаи, в которых это уравнение может сведено к уравнению первого порядка или даже полностью проинтегрировано в квадратурах.

3.5. Интегрирование уравнения Эйлера

Рассмотрим различные случаи интегрируемости уравнения Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \tag{5.1}$$

с краевыми условиями

$$y(a) = A, \quad y(b) = B. \tag{5.2}$$

1. Функция F не зависит от y: $F = F(x, y')$. В этом случае уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{d}{dx} F_{y'}(x, y') = 0. \tag{5.3}$$

Следовательно,

$$F_{y'}(x, y') = C, \tag{5.4}$$

где C — произвольная константа.

Уравнение (5.4) есть дифференциальное уравнение первого порядка. Интегрируя его, находим экстремали задачи.

Пример 1. Среди кривых, соединяющих $(1, 3)$ и $(2, 5)$, найти ту, на которой может достигаться экстремум функционала

$$J[y] = \int_1^2 y'(x)(1 + x^2 y'(x))\, dx.$$

Решение. Из (5.4) получаем

$$1 + 2x^2 y' = C.$$

Тогда $y' = \dfrac{C-1}{2x^2}$, так что $y = \dfrac{1-C}{2x} + C_2$. Обозначим $C_1 = (1-C)/2$. В результате получаем

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные константы. Таким образом, экстремалями является семейство гипербол.

Выделим экстремаль, проходящую через заданные точки. Для определения постоянных C_1 и C_2 получим систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3, \\ \dfrac{C_1}{2} + C_2 = 5, \end{cases}$$

откуда $C_1 = -4$, $C_2 = 7$. Искомая экстремаль $y(x) = 7 - \dfrac{4}{x}$.

2. Функция F не зависит от x: $F = F(y, y')$. В этом случае уравнение Эйлера имеет вид

$$F_y - F_{y'y'} y'' - F_{y'y} y' = 0. \tag{5.5}$$

Умножив (5.5) на y', получим уравнение, которое можно записать в виде

$$\frac{d}{dx}(F - y' F_{y'}) = 0,$$

откуда получаем, что

$$F - y'F_{y'} = C, \tag{5.6}$$

где C — произвольная константа.

Уравнение (5.6) есть дифференциальное уравнение первого порядка. Интегрируя его, находим экстремали задачи.

Пример 2. Найти экстремаль функционала

$$J[y] = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\, dx,$$

проходящую через заданные точки (a, A) и (b, B), лежащие в верхней полуплоскости.

Решение. Так как подынтегральная функция не содержит явно x, то из (5.6) получаем

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} - y'\,\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C.$$

Откуда

$$y\sqrt{1+y'^2} = C_1,$$

где $C_1 = 1/C$. Выражая из этого уравнения y', получим

$$\pm yy' = \sqrt{C_1^2 - y^2}.$$

Следовательно,

$$\pm\int \frac{yy'\,dx}{\sqrt{C_1^2-y^2}} = \int dx.$$

Или

$$\mp\sqrt{C_1^2-y^2} = x + C_2.$$

Возведём обе части квадрат. Получим

$$(x+C_2)^2 + y^2 = C_1^2.$$

— семейство окружностей с центром на оси Ox. Искомой будет экстремаль, которая проходит через две заданные точки. Задача имеет единственное решения, так как через любые две точки, лежащие в верхней полуплоскости, проходит одна и только одна полуокружность с центром на оси Ox.

3. Функция F не зависит от y': $F = F(x, y)$. В этом случае уравнение Эйлера имеет вид

$$F_y(x, y) = 0. \tag{5.7}$$

Решение этого уравнения не содержит элементов произвола и поэтому, вообще говоря, не удовлетворяет граничным условиям (5.2).

Лишь в исключительных случаях, когда кривая (5.7) проходит через через граничные точки (a, A) и (b, B), существует кривая, на которой может достигаться экстремум.

Пример 3. Найти экстремали функционала

$$J[y] = \int_0^{\pi/2} y(2x-y)\,dx, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Р е ш е н и е. Здесь $F = y(2x - y)$ и уравнение Эйлера имеет вид

$$2x - 2y = 0.$$

Получаем $y = x$. Так как граничные условия выполняются, то на прямой $y = x$ функционал $J[y]$ может достигать экстремума. При других граничных условиях, например $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 1$ экстремаль $y = x$не проходит через граничные точки $(0,0)$ и $(\pi/2, 1)$, так что при этих граничных условиях вариационная задача не имеет решения.

4. В различных задачах часто встречаются функционалы вида

$$\int_a^b v(x,y)\,\sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{5.8}$$

В этом случае уравнение Эйлера может быть преобразовано следующим образом:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = v_y\,\sqrt{1+y'^2} - \frac{d}{dx}\left[\frac{v\,y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right] =$$

$$= v_y\,\sqrt{1+y'^2} - \frac{v_x y'}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{v_y y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{v\,y''}{(1+y'^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\left[v_y - v_x y' - v\,\frac{y''}{1+y'^2}\right] = 0.$$

Таким образом,

$$v_y - v_x y' - v\,\frac{y''}{1+y'^2} = 0. \tag{5.9}$$

Задача о брахистохроне.

Определить кривую, соединяющую заданные точки A и B, при движении по которой материальная точка скатится из точки A в точку B в кратчайшее время (трением и сопротивлением среды пренебрегаем).

Р е ш е н и е. Поместим начало координат в точку A, ось Ox направим горизонтально, ось Oy — вертикально вниз. Таким образом, точка A имеет координаты $(0,0)$, а точка B — (x_1, y_1), причём $x_1 > 0$, $y_1 > 0$.

Скорость движения материальной точки найдём из закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} - mgy = 0.$$

Имеем

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy},$$

где ds — элемент дуги. Учитывая, что $ds = \sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$, находим время затрачиваемое на перемещение точки из положения A в положение B:

$$T[y] = \frac{1}{2g}\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{y(x)}}\,dx.$$

Так как подынтегральная функция не содержит явно x, то уравнение Эйлера имеет первый интеграл (5.6):

$$F - y'F_{y'} = C,$$

или в данном случае

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C,$$

откуда после сокращений будем иметь

$$y(1+y'^2) = C_1,$$

где $C_1 = 1/C^2$ новая константа. Введём параметр t, полагая $y' = \operatorname{ctg} t$. Получим

$$y = C_1 \sin^2 t = \frac{C_1}{2}(1-\cos 2t);$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2C_1 \sin t \cos t}{\operatorname{ctg} t} = 2C_1 \sin^2 t\, dt = C_1(1-\cos 2t)\, dt;$$

$$x = C_1\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right) + C_2 = \frac{C_1}{2}(2t - \sin 2t) + C_2.$$

Следовательно, в параметрической форме уравнение искомой линии имеет вид

$$x = \frac{C_1}{2}(2t-\sin 2t) + C_2, \quad y = \frac{C_1}{2}(1-\cos 2t).$$

Так как $x = 0$ при $y = 0$, то $C_2 = 0$. Введём новый параметр $t_1 = 2t$. В результате получаем уравнение семейства циклоид

$$x = \frac{C_1}{2}(t_1 - \sin t_1), \quad y = \frac{C_1}{2}(1-\cos t_1).$$

Константа C_1 определяется из условия прохождения циклоиды через точку $B(x_1, y_1)$. Итак, брахистохроной является циклоида. $\square$