Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Вычислительная математика

Лабораторная работа № 5

Улучшенный метод Эйлера

Выполнила:

Гафурова Фарангиз Фуркатовна

Группа P3220

Преподаватель:

Перл Ольга Вячеславовна

г. Санкт-Петербург

2025

Оглавление

Описание численного метода

Улучшенный метод Эйлера — это численный метод для решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка с начальным условием. Он представляет собой усовершенствование классического метода Эйлера, обеспечивая более точное приближенное решение.

Постановка задачи

Имеем ОДУ первого порядка $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$. Цель – найти приближенное решение $y(x)$ на отрезке $[x_0,\ x_n]$, разбивая этот отрезок на n части с шагом $h = \frac{x_n - x_0}{n}$, где $x_{i+1} = x_i + h$ для $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Алгоритм метода

1. *Начальные условия*: Задаем начальную точку (x_0, y_0), шаг h и конечную точку x_n.

2. *Расчет промежуточного изменения:*
   - Используя текущие значения y_n и x_n, вычисляем промежуточное приближенное значение производной $f(x_n, y_n)$.
   - С помощью этого значения производной оцениваем изменение Δy на шаге h (обычно небольшом).

3. *Вычисление следующего приближения:*

Считаем следующее приближенное значение y_{n+1} по формуле:

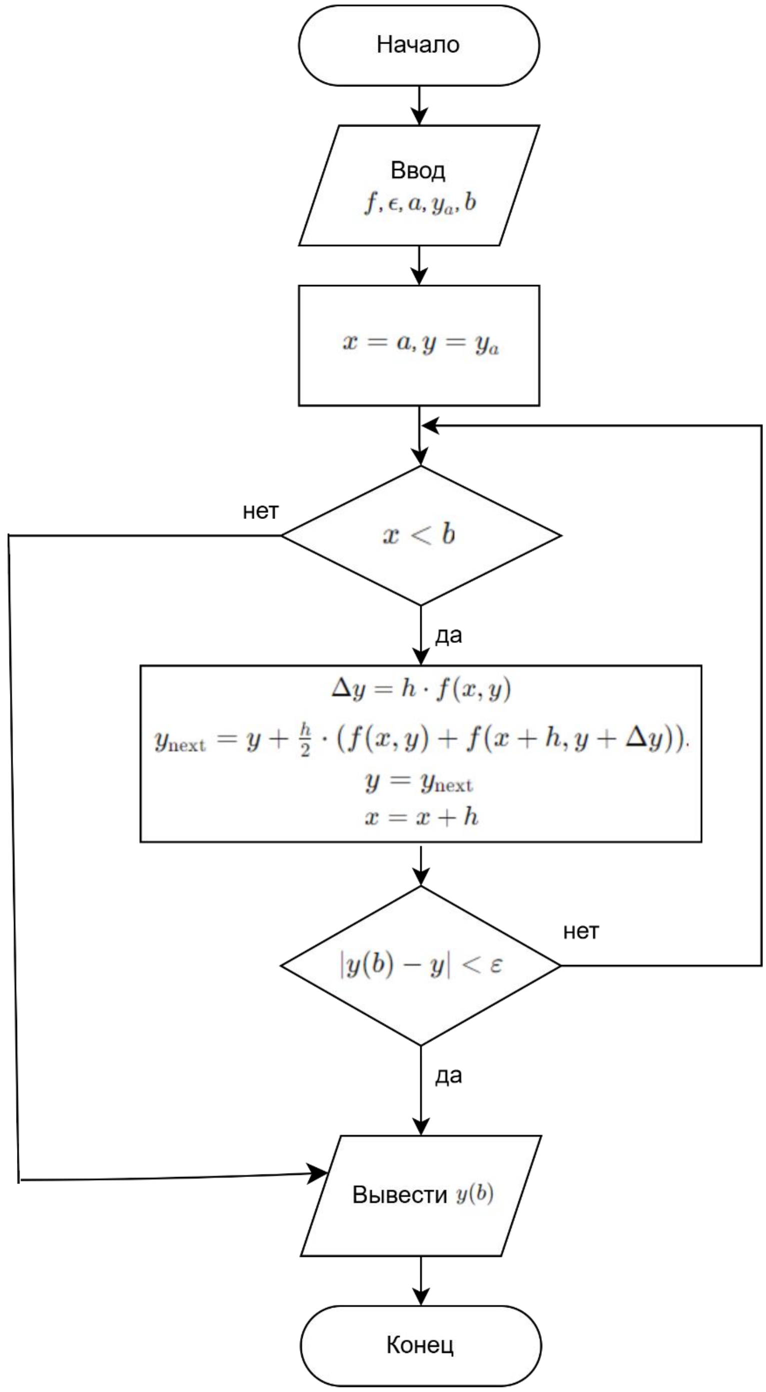
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\big(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + \Delta y)\big), \text{где } x_{n+1} = x_n + h$$

4. *Итерации:* Повторяем шаги 2 и 3 до достижения желаемого значения x или определенного количества итераций.

Сравнение с простым методом Эйлера

Простой метод Эйлера имеет ошибку порядка $O(h)$, то есть ошибка решения прямоугольников уменьшается линейно с уменьшением шага h. В то время как улучшенный метод Эйлера имеет ошибку порядка $O(h^2)$, что означает, что при уменьшении шага в два раза ошибка уменьшается в четыре раза. Это делает улучшенный метод Эйлера более предпочтительным для решения ОДУ при том, чтобы обеспечить более высокую точность с заданным шагом интегрирования.

Блок-схема



Начало
Ввод
f, ϵ, a, y_a, b
$x = a, y = y_a$
$x < b$
нет
да
$\Delta y = h \cdot f(x, y)$
$y_{\text{next}} = y + \frac{h}{2} \cdot (f(x, y) + f(x + h, y + \Delta y))$.
$y = y_{\text{next}}$
$x = x + h$
$|y(b) - y| < \varepsilon$
нет
да
Вывести $y(b)$
Конец

Код численного метода

```
class Result:

  def first_function(x: float, y: float):
    return math.sin(x)

  def second_function(x: float, y: float):
    return (x * y)/2

  def third_function(x: float, y: float):
    return y - (2 * x)/y

  def fourth_function(x: float, y: float):
    return x + y

  def default_function(x:float, y: float):
    return 0.0

  def get_function(n: int):
    if n == 1:
      return Result.first_function
    elif n == 2:
      return Result.second_function
    elif n == 3:
      return Result.third_function
    elif n == 4:
      return Result.fourth_function
    else:
      return Result.default_function

  def solveByEulerImproved(f, epsilon, a, y_a, b):
    selected_function = Result.get_function(f)
    step_size = 0.01
    current_x = a
    current_y = y_a

    while current_x < b:
      k1 = step_size * selected_function(current_x, current_y)
      k2 = step_size * selected_function(current_x + step_size, current_y + k1)
      current_y = current_y + (k1 + k2) / 2
      current_x = current_x + step_size
    return current_y
```

Примеры работы программы

1.

Входные данные	Выходные данные
1 0.002 2 1 1	1.0

2.

Входные данные	Выходные данные
1 0.005 0 1 3	2.991337579303062

3.

Входные данные	Выходные данные
4 0.01 0 0 1	0.7182368625599581

4.

Входные данные	Выходные данные
3 0.003 0 1 4	3.018353865028335

5.

Входные данные	Выходные данные
4 0.001 5 -5 6	-4.264444856971325

Выводы

В рамках данной работы были исследованы возможности улучшенного метода Эйлера для численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка.

Метод представляет собой усовершенствование простого метода Эйлера, что позволяет повысить точность приближенного решения. Простой метод Эйлера имеет ошибку порядка $O(h)$, в то время как улучшенный метод Эйлера имеет ошибку порядка $O(h^2)$. Это означает, что при уменьшении шага h в два раза, ошибка улучшенного метода уменьшается в четыре раза, что делает его более предпочтительным для численного решения уравнений.

Примеры запуска и работы метода могут различаться в зависимости от выбранных параметров уравнения, уровня точности и интервала интегрирования. В некоторых случаях для достижения нужной точности нужно увеличить число итераций, а повышение точности часто приводит к уменьшению шага, что увеличивает общее время расчёта. Кроме того, при повышенной точности также возрастает требуемое количество итераций для нахождения решения.

Сравнение с другими методами:

Метод Рунге - Кутты, в отличие от улучшенного метода Эйлера, менее чувствителен к правильному выбору шага. Однако его структура более сложна, и на каждом шаге требуется больше вычислительных ресурсов. Например, метод Рунге - Кутты четвертого порядка требует четыре вычисления значения функции на каждом шаге, в то время как улучшенный метод Эйлера требует только два. Метод Адамса может показывать нестабильность при больших шагах или для некоторых типов уравнений. Кроме того, он требует хранения нескольких предыдущих значений функции, что увеличивает затраты памяти. Улучшенный метод Эйлера проще в реализации, но может уступать по точности, особенно при больших шагах или сложных уравнениях.

Улучшенный метод Эйлера является хорошим инструментом для первичного анализа и решения ОДУ на небольших интервалах. Его простота реализации и эффективность делает его подходящим для быстрого получения приближенного решения. Однако, для задач с высокими требованиями к точности, особенно на больших интервалах интегрирования или при сложных функциях правой части уравнения, целесообразно применять более сложные алгоритмы, такие как методы Рунге - Кутты или Адамса.

На каждом шаге улучшенного метода Эйлера требуется два вычисления значения функции $f(x, y)$, что соответствует сложности $O(1)$ на отдельный шаг. Если количество шагов интегрирования равно n, то общая сложность алгоритма будет $O(n)$. Сравнивая с методом Рунге - Кутты четвертого порядка, который имеет сложность $O(n)$ по количеству шагов, но на каждом шаге требует четыре вычисления функции $f(x, y)$, улучшенный метод Эйлера требует меньше вычислительных ресурсов на каждом отдельном шаге.

Численные ошибки улучшенного метода Эйлера связаны с приближённым вычислением производных функции. Поскольку производная $f(x, y)$ оценивается на основе значений функции в двух точках, при резких изменениях функции между узлами может возникать неточность. Кроме того, накопление ошибок округления при большом числе шагов может серьезно повлиять на результат. Важно учитывать, что ошибка имеет порядок $O(h^2)$, и уменьшение шага позволит уменьшить ошибку, но при этом увеличится общее время расчёта.

Таким образом, улучшенный метод Эйлера представляет собой простой и эффективный способ решения ОДУ первого порядка на начальном этапе анализа. Но для более сложных задач с высокими требованиями к точности и эффективности лучше использовать более совершенные методы численного решения.