Семинар по теме “ Свободные механические колебания. Примеры колебательных движений различной физической природы. Идеальный гармонический осциллятор. Уравнение идеального осциллятора и его решение. Амплитуда, частота и фаза колебания. Энергия колебаний. Математический маятник. Физический маятник. ”

Теория:

Колебательные системы, гармонический осциллятор.

Колебания — повторяющийся в той или иной степени во времени процесс изменения состояний системы около точки равновесия.

Осциллятор— система, совершающая колебания.

Механический гармонический осциллятор — система, которая при выведении её из положения равновесия испытывает действие возвращающей силы F, пропорциональной смещению x:

$$F = -kx$$

Потенциальная энергия гармонического осциллятора:

$$U = -\int F\,dx = \frac{kx^2}{2}$$

Уравнение движения такой системы

$$F = ma = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Любая физическая система, эволюция которой во времени описывается таким уравнением, является гармоническим осциллятором.

Вблизи точки устойчивого равновесия (Рисунок 1).

$$U(x) = U(x_0) + U'(x_0)x + \frac{U''(x_0)}{2}x^2 + \ldots$$

Можем сделать $U(x_0) = 0$ за счёт выбора начала отсчёта U.

$U'(x_0) = 0$, т.к. это точка минимума U.

$$U(x) = \frac{U''(x_0)}{2}x^2$$

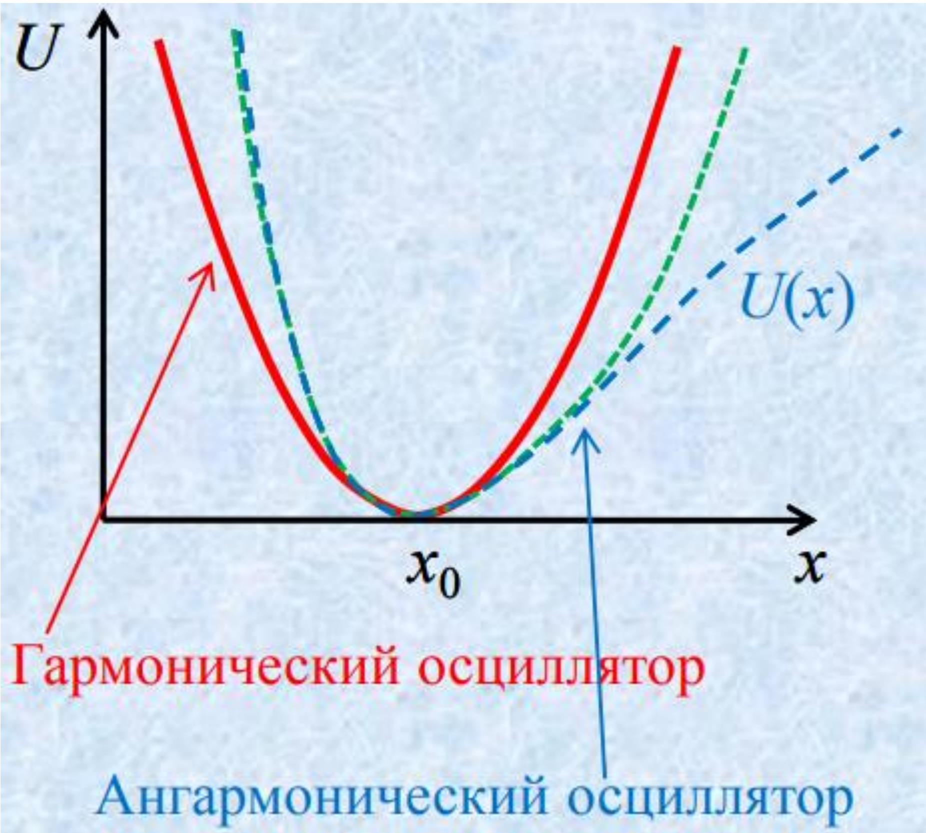

Рисунок 1. Гармонический и ангармонический осциллятор.

Вблизи точки равновесия любая система ведет себя подобно гармоническому осциллятору.

Решение уравнения гармонического осциллятора. Амплитуда, частота и фаза колебания.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Решениями этого уравнения будут

$$x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$$

$$x = A \cos \ \omega_0 t + \varphi_0$$

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{C_2}{C_1}$$

где C_1, C_2 – некие постоянные, ω_0 - **собственная частота (круговая) осциллятора**, A – **амплитуда**, $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ – фаза, φ_0- начальная фаза, $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ – **период колебаний**, $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$ – **частота**.

Скорость и ускорение осциллятора.

$$x = A \cos \ \omega_0 t + \varphi_0$$

$$v = \dot{x} = -A\omega_0 \sin \ \omega_0 t + \varphi_0 \ = -v_0 \sin \ \omega_0 t + \varphi_0 \ = v_0 \cos \ \omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2$$

$$a = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos \ \omega_0 t + \varphi_0 \ = -a_0 \cos \ \omega_0 t + \varphi_0 \ = a_0 \cos \ \omega_0 t + \varphi_0 + \pi$$

Начальные условия.

$$x = A\cos \;\; \omega_0 t + \varphi_0$$

$$v = -v_0 \sin \;\; \omega_0 t + \varphi_0$$

При $\varphi_0 = 0$: $x(0) = A, v(0) = 0$ (рисунок 2);

При $\varphi_0 = \pi/2$: $x(0) = 0, v(0) = v_0$ (рисунок 3)

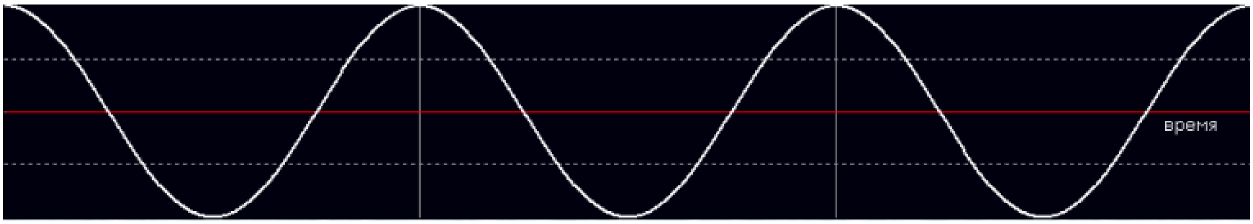

Рисунок 2. Гармонический осциллятор при $\varphi_0 = 0$.

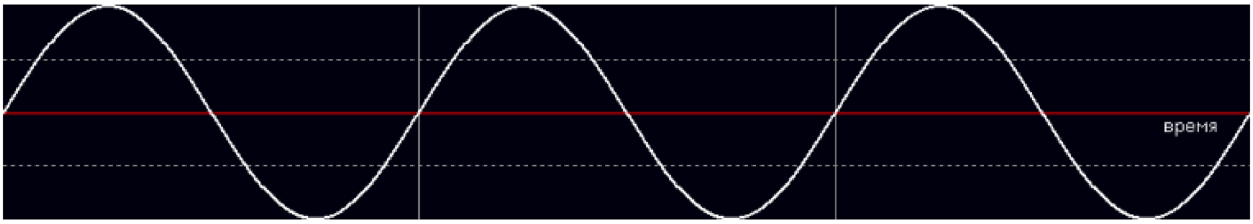

Рисунок 3. Гармонический осциллятор при $\varphi_0 = \pi/2$.

Энергия осциллятора

Потенциальная энергия

$$E_{\text{пот}} = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2\cos^2 \omega_0 t}{2} = \frac{kA^2 \;\; 1 + \cos 2\omega_0 t}{4}$$

Кинетическая энергия

$$E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2 \;\; 1 - \cos 2\omega_0 t}{4}$$

Полная энергия

$$E = E_{пот} + E_{к} = \frac{kA^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Потенциальная и кинетическая энергия меняется с удвоенной частотой,

полная энергия постоянна. Среднее значение потенциальной и кинетической энергии одинаково

$$\bar{E}_{пот} = \bar{E}_{к} = \frac{kA^2}{4} = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}$$

Математический маятник

Математический маятник (рисунок 4) — осциллятор, представляющий собой механическую систему, состоящую из материальной точки на конце невесомой нерастяжимой нити или лёгкого стержня и находящуюся в однородном поле сил тяготения.

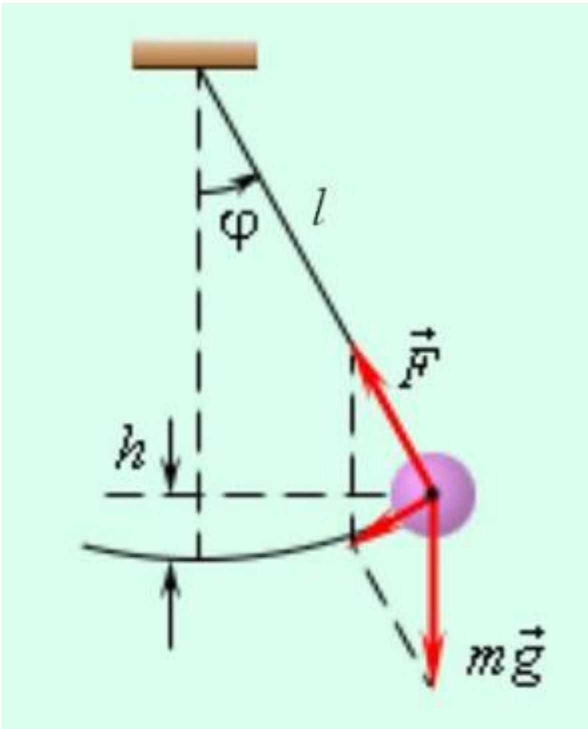

Рисунок 4. Математический маятник.

$$U = mgh = mgl\ \ 1 - \cos\varphi$$

При малых углах отклонения:

$$\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$$

$$U = \frac{mgl\varphi^2}{2}$$

$$x \to \varphi$$

$$k \to mgl$$

$$m \to I = ml^2$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\alpha}{2} + \ldots\right\}$$

При малых углах α

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Физический маятник

Физический маятник (рисунок 5)— осциллятор, представляющий собой твёрдое тело, совершающее колебания в поле каких-либо сил относительно точки, не являющейся центром масс этого тела, или неподвижной оси, перпендикулярной направлению действия сил и не проходящей через центр масс этого тела.

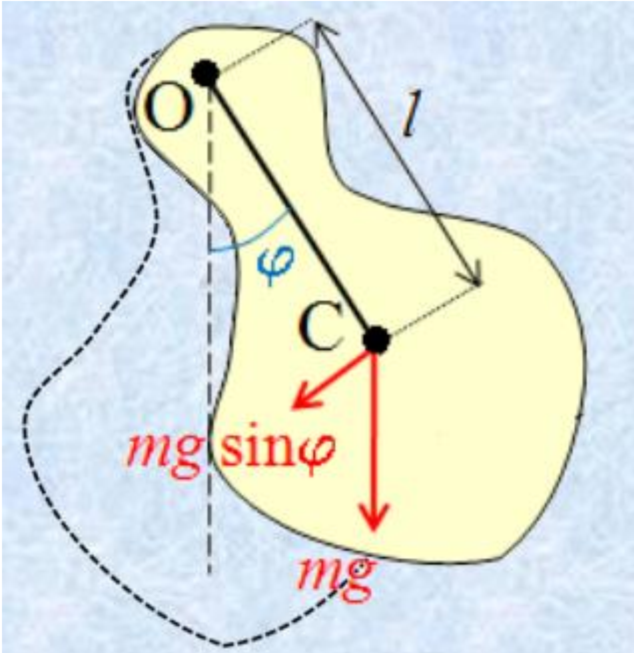

Рисунок 5. Физический маятник.

Пусть O – точка подвеса, а C – центр инерции. Тогда возвращающий момент (момент возвращающей силы) будет равен

$$M = -mgl\sin\varphi$$

$$I\varepsilon = I\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi$$

где I – момент инерции относительно точки подвеса.

При малых углах отклонения:

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{I}\varphi = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mlg}}$$

$$I = I_0 + ml^2$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + ml^2}{mlg}}$$

Центр качания — точка, в которой надо сосредоточить всю массу физического маятника, чтобы его период колебаний не изменился.

Приведенная длина $\boldsymbol{l}_{\text{пр}}$ (рисунок 6) - длина математического маятника, период которого равен периоду данного физического маятника.

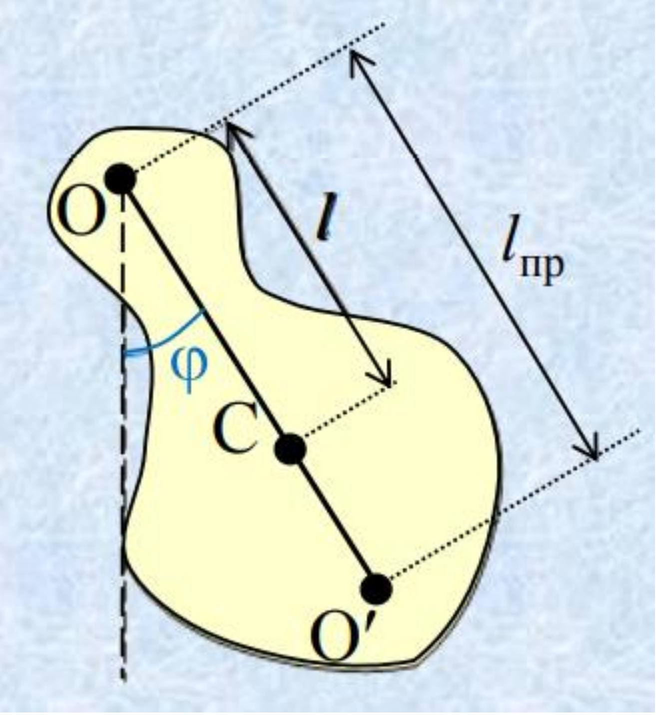

Рисунок 6. Приведенная длина физического маятника (O’ – центр качания).

$$l_{\text{пр}} = \frac{I_0}{ml} + l$$

$$T \;\; l \;\; {}_{l\to\infty} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad T \;\; l \;\; {}_{l\to 0} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mgl}}$$

Минимальный период:

$$T_{\min} = 2\pi\sqrt{\frac{2l_{\min}}{g}}$$

при

$$l_{\min} = \sqrt{I_0/m}$$

Фазовое пространство

Фазовое пространство — пространство, на котором представлено множество всех состояний системы, так, что каждому возможному состоянию системы соответствует точка фазового пространства.

Для механических систем, координатами фазового пространства являются обычные пространственные координаты частиц системы и их импульсы

Задачи:

1. Ракета движется вдоль оси x по закону $x = asin^2(\omega \times t - \pi/4)$.

Найти: а) амплитуду и период колебаний; изобразить график x(0); б) проекцию скорости υ_x как функцию координаты x; изобразить график υ_x (x).

2. Противник в видеоигре совершает гармонические колебания вдоль некоторой прямой с периодом $\mathrm{T} = 0.7$ с и амплитудой $A = 20$ см. Найти среднюю скорость противника за время, в течение которого он приходит путь $A/2$: а) из крайнего положения; б) из положения равновесия.

3. Какова длина математического маятника, совершающего гармонические колебания с частотой 0.7 Гц на поверхности Марса? Ускорение свободного падения на поверхности Марса 3.86 м/с^2.

4. Представим себе шахту, пронизывающую Луну по ее оси вращения. Считая Луну за однородный шар, найти: а) закон движения тела, упавшего в шахту; б) сколько времени понадобится этому телу, чтобы достигнуть противоположного конца шахты; в) скорость тела в центре Луны.

5. Найти зависимость от времени угла отклонения математического маятника длины 70 см, если в начальный момент маятник:

а) отклонили на угол 5° и без толчка отпустили;

б) находился в состоянии равновесия и его нижнему концу сообщили горизонтальную скорость 0.33 м/с;

в) отклонили на 5° и его нижнему концу сообщили скорость 0.33 м/с, направленную к положению равновесия.