Университет ИТМО
Физико-технический мегафакультет
Физический факультет

ИТМО

Группа 3220 К работе допущен
Студент Гафурова Ф. Ф. Работа выполнена
Преподаватель Пулькин Н. С. Отчет принят

Рабочий протокол и отчет по лабораторной работе №1.01

«Исследование распределения случайной величины»

1. Цель работы.

Исследование распределения случайной величины на примере многократных измерений батончика «Степ».

2. Задачи, решаемые при выполнении работы.

1) Провести многократные измерения батончика «Степ».
2) Построить гистограмму распределения результатов измерения.
3) Вычислить среднее значение и дисперсию полученной выборки.
4) Сравнить гистограмму с графиком функции Гаусса с такими же, как и у экспериментального распределения средним значением и дисперсией.

3. Объект исследования.

Длина батончиков «Степ»

4. Метод экспериментального исследования.

1) Анализ
2) Лабораторный эксперимент

5. Рабочие формулы и исходные данные.

$\rho(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(a-\langle a\rangle)^2}{2\sigma^2}\right)$ - функция Гаусса для нормального распределения

$\langle a\rangle_N = \frac{1}{N}(a_1 + a_2 + \cdots + a_N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} a_i$ - математическое ожидание или среднеарифметическое всех результатов измерений

$\sigma_N = \sqrt{\frac{1}{(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(a_i - \langle a\rangle_N)^2}$ - выборочное среднеквадратичное отклонение

$\rho_{max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ - максимальная высота гистограммы

$P\ (a_1 < \ a \ < a\ ) \approx \frac{N_{12}}{N}$ – вероятность при условии реализации нормального распределения случайной величины

$t \in [\langle a\rangle - \sigma, \langle a\rangle + \sigma], P_\sigma \cong 0{,}683$

$t \in [\langle a\rangle - 2\sigma, \langle a\rangle + 2\sigma], P_{2\sigma} \cong 0{,}954$ - стандартные доверительные интервалы для нахождения приближённых значений вероятности

$t \ \in [\langle a\rangle - 3\sigma, \langle a\rangle + 3\sigma], P_{3\sigma} \cong 0{,}997$

$[\langle a\rangle_N - \ \sigma_N, \langle a\rangle_N + \ \sigma_N],$
$[\langle a\rangle_N - \ 2\sigma_N, \langle a\rangle_N + \ 2\sigma_N],$ - промежутки для нахождения приближённых значений границ интервалов
$[\langle a\rangle_N - \ 3\sigma_N, \langle a\rangle_N + \ 3\sigma_N]$

$\sigma_{\langle a\rangle} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(a_i - \langle a\rangle_N)^{\ 2}}$ - среднеквадратичное отклонения среднего значения

$\Delta a = \ a_{\alpha,N} * \ \sigma_{\langle a\rangle}$ - доверительный интервал для измеряемого в работе промежутка

σ_N - среднеквадратичное отклонение

$\rho(a)$ - плотность вероятности

N - полное количество измерений

$\langle a\rangle$ - математическое ожидание

$\sigma_{\langle a\rangle}$ - среднеквадратичное отклонение среднего значения

6. Измерительные приборы.

№ п/п	*Наименование*	*Тип прибора*	*Используемый диапазон*	*Погрешность прибора*
1	*Линейка 15 см*	*Измерительный*	*[10;13]*	*0,1 мм*

7. Результаты прямых измерений и их обработки (*таблицы, примеры расчетов*).

Таблица 1: Результаты прямых измерений

№	a_i, *см*	$a_i - \langle a \rangle_N$, *см*	$(a_i - \langle a \rangle_N)^2$, *см*^{2}
1	10,2	-1,16	1,35
2	11,2	-0,16	0,03
3	11,6	0,24	0,06
4	10,8	-0,56	0,32
5	11,3	-0,06	0,00
6	11,4	0,04	0,00
7	11,5	0,14	0,02
8	11,7	0,34	0,11
9	10,9	-0,46	0,21
10	11,1	-0,26	0,07
11	11,9	0,54	0,29
12	11	-0,36	0,13
13	11,3	-0,06	0,00
14	11,6	0,24	0,06
15	10,8	-0,56	0,32
16	11,8	0,44	0,19
17	11,4	0,04	0,00
18	12	0,64	0,41
19	12,1	0,74	0,54
20	11,2	-0,16	0,03
21	11,1	-0,26	0,07
22	10,7	-0,66	0,44
23	11,8	0,44	0,19
24	11,2	-0,16	0,03
25	10,7	-0,66	0,44
26	11,5	0,14	0,02
27	11,6	0,24	0,06
28	12,3	0,94	0,88
29	11,2	-0,16	0,03
30	11	-0,36	0,13
31	11,5	0,14	0,02
32	10,9	-0,46	0,21
33	11,6	0,24	0,06
34	10,7	-0,66	0,44
35	12,4	1,04	1,08
36	12	0,64	0,41
37	11,8	0,44	0,19
38	11,7	0,34	0,11
39	11,6	0,24	0,06
40	11,4	0,04	0,00
41	11,5	0,14	0,02
42	11,2	-0,16	0,03
43	11	-0,36	0,13
44	10,7	-0,66	0,44

45	10,8	-0,56	0,32
46	10,9	-0,46	0,21
47	11,9	0,54	0,29
48	12,1	0,74	0,54
49	11,2	-0,16	0,03
50	11,3	-0,06	0,00
	$\langle a\rangle_N$ = 11,36 см	$\sum_{i=1}^{N}(a_i - \langle a\rangle_N)$ = 0,00 см	σ_N = 0,47 см P_{max} = 1,05 см^{-1}

$\sum_{i=1}^{N} a_i$ = 568,1 см – сумма всех полных измерений

$\langle a\rangle_N = \frac{568,1}{50}$ = 11,36 см – математическое ожидание для представленных измерений

$\sum_{i=1}^{N}(a_i - \langle a\rangle_N)^2$ = 11,00 см – сумма разницы полных измерений и математических ожиданий в соответствии с данными из таблицы

$\sigma_N = \sqrt{\frac{1}{50-1}} * \sqrt{\sum_{i=1}^{N}(a_i - \langle a\rangle_N)^2}$ = 0,47 см - среднеквадратичное отклонение

$p_{max} = \frac{1}{0,47 * \sqrt{2\pi}}$ = 0,85 см^{-1} – максимальная высота гистограммы при соотношении a = ⟨a⟩

8. Расчет результатов косвенных измерений (*таблицы, примеры расчетов*)

Таблица 2: Данные для построения гистограммы и функции Гаусса.
Интервалов взято 7, приближённое к $\sqrt{50} \approx 7$. Для удобства было выделено такое количество интервалов, чтобы разница между всеми была одинакова и была равна 0,3. В последнем интервале взята разница 0,4, чтобы уместить все измерения в 7 интервалов.

Границы интервалов, см	ΔN	$\frac{\Delta N}{N\Delta a}$, см^{-1}	a, см	p, см^{-1}
[10,2 10,5)	1	0,1	10,4	0,10
[10,5 10,8)	4	0,3	10,7	0,32
[10,8 11,1)	7	0,5	10,9	0,52
[11,1 11,4)	12	0,8	11,3	0,84
[11,4 11,7)	11	0,7	11,6	0,75
[11,7 12,0)	7	0,5	11,9	0,44

[12,0 12,4)	6	0,3	12,3	0,12

Δa (во втором столбце) = $(a_{max} - a_{min})$/7 = 0,3 см – разница между максимальным и минимальным значением измерений для представленных в таблице интервалов

Рассчитаем опытное значение плотности вероятности на примере первого значения

$\frac{\Delta N}{N\Delta a} = \frac{1}{0,3*50}$ = 0,1 см

Рассчитаем плотность вероятности на примере первого значения

$\rho(a)_1 = \frac{1}{0,47*\sqrt{2*3,14}} \exp\left(-\frac{(10,4-\langle 11,36\rangle)^2}{2*(0,47)^2}\right) \approx$ 0,10 см

Таблица 3: Стандартные доверительные интервалы. Проверка выполнения в измерениях соотношения между вероятностями.

	Интервал, см		ΔN	$\frac{\Delta N}{N}$	*P*
	от	до			
$\langle a\rangle_N \pm \sigma_N$	10,89	11,83	34	0,68	0,683
$\langle a\rangle_N \pm 2\sigma_N$	10,42	12,30	48	0,96	0,954
$\langle a\rangle_N \pm 3\sigma_N$	9,95	12,77	50	1	0,997

Значения «P» взяты из приложенного методического пособия

10. Расчет погрешностей измерений (*для прямых и косвенных измерений*).

$a_{\alpha,N}$ (при α = 0,95) = 2.01 – коэффициент Стьюдента

$\Delta a = a_{\alpha,N} \cdot \sigma_{\langle a\rangle}$ – доверительный интервал для измеряемого в работе промежутка температуры

$\sigma_{\langle a\rangle}$ = 0,07 см – среднеквадратичное отклонение среднего значения

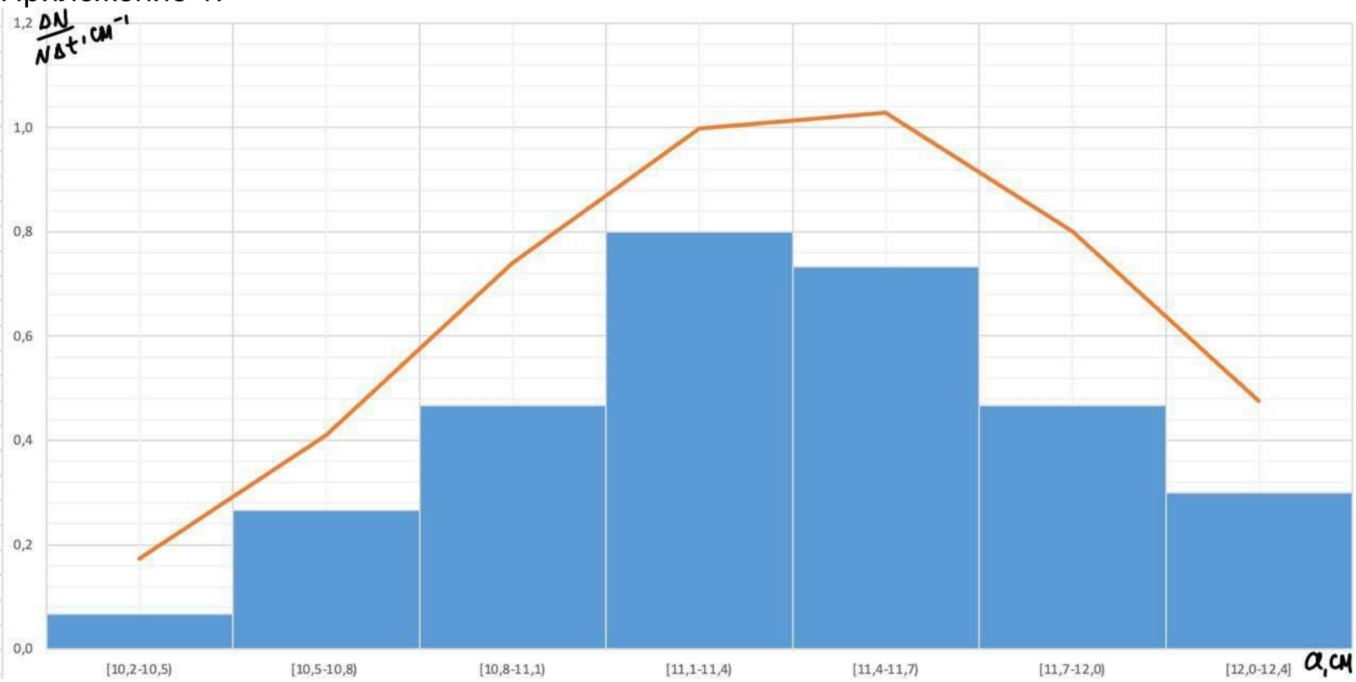
Δa = 2,01*0,07 = 0,1407 см ≈ 0,14 см

11. Графики (*перечень графиков, которые составляют Приложение 2*).

12. Окончательные результаты.

$a = (11,36 \pm 0,14)$ см

Приложение 1:



13. Выводы и анализ результатов работы.

В процессе проведенных исследований и повторных измерений батончиков «Степ» были рассчитаны среднее значение и дисперсия полученных данных. Были построены гистограмма и функция плотности вероятности (Гаусса), основанные на математическом ожидании и стандартном отклонении. При сравнении гистограммы с функцией Гаусса было выявлено, что кривая проходит чуть выше столбцов, но рядом с ними по их высоте.

Анализ таблицы стандартных доверительных интервалов позволил обнаружить некоторые различия в соотношении количества измерений, входящих в каждый из этих интервалов, к общему числу измерений и нормальному распределению вероятностей P. Сравнение показало, что во всех трех интервалах соотношение незначительно отличается от нормального распределения на несколько тысячных, что подтверждает правильность проведенных расчетов, практически приближенных к значениям из методического пособия.

14. Замечания преподавателя (*исправления, вызванные замечаниями преподавателя, также помещают в этот пункт*).