Семинар по теме " Момент силы и момент импульса. Уравнение моментов для одной материальной точки и для системы материальных точек. Момент импульса и сил относительно неподвижной оси."

Теория:

Для описания динамики вращения нам потребуется новые понятий, а именно: момент импульса и момент силы. Каждый из указанных моментов может быть двух видов: момент относительно центра и относительно оси.

Момент импульса и момент силы относительно центра

Пусть $\vec{\mathbf{r}}$ – радиус-вектор материальной точки m , движущейся с импульсом $\vec{\mathbf{p}}$ (см. рис. 1а). Момент импульса $\vec{\ell}$ этой материальной точки относительно центра (точки) O определим соотношением

$$\vec{\ell} = \vec{\mathbf{r}};\vec{\mathbf{p}} \ . \qquad (1)$$

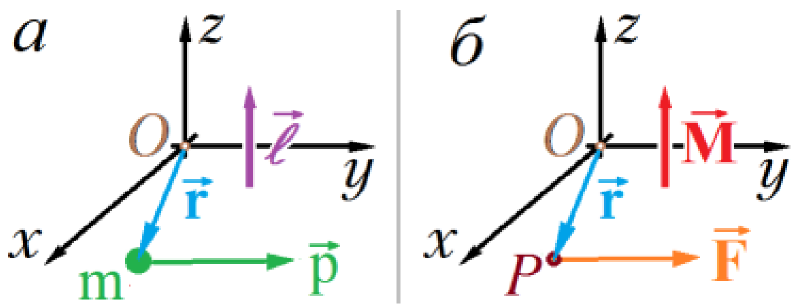

Рис. **1**. К определению моментов относительно центра O: а) $\vec{\ell}$ – момент импульса материальной точки m; б) $\vec{\mathbf{M}}$ – момент силы $\vec{\mathbf{F}}$, приложенной в точке P.

Момент импульса $\vec{\mathbf{L}}$ относительно центра O для системы из N материальных точек с радиус-векторами $\vec{\mathbf{r}}_i$ и импульсами $\vec{\mathbf{p}}_i$ (i=1, 2, ..., N) складывается из моментов импульса отдельных точек:

$$\vec{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\ell}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{r}}_i;\vec{\mathbf{p}}_i \ . \qquad (2)$$

По аналогии с моментом импульса введем момент силы. Пусть сила $\vec{\mathbf{F}}$ приложена в точке P с радиус-вектором $\vec{\mathbf{r}}$ (см. рис. 1б). Тогда момент силы относительно центра O – вектор

$$\vec{\mathbf{M}} = \left[\vec{\mathbf{r}};\vec{\mathbf{F}}\right] \qquad (3)$$

Если на некоторое тело действует несколько сил: $\vec{\mathbf{F}}_j$ (j = 1, 2, ..., n), то главным моментом сил называется векторная сумма моментов отдельных сил:

$$\vec{\mathbf{M}} = \sum_{j=1}^{n} \vec{\mathbf{M}}_j = \sum_{j=1}^{n} \left[\vec{\mathbf{r}}_j ; \vec{\mathbf{F}}_j \right]. \qquad (\ 4)$$

Здесь $\vec{\mathbf{r}}_j$ – радиус-вектор точки приложения силы $\vec{\mathbf{F}}_j$.

2 Законы изменения и сохранения момента импульса материальной точки относительно центра

Пусть $\vec{\mathbf{F}}$ – результирующая сила, приложенная к материальной точке m . Рассмотрим производную по времени от момента (5) импульса точки:

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} ; \vec{\mathbf{p}} \right] + \left[\vec{\mathbf{r}} ; \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} \right] \qquad (\ 5)$$

Первый сомножитель в первом слагаемом правой части этого уравнения – скорость материальной точки: $\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \vec{\mathbf{v}}$. Импульс – вектор, сонаправленный со скоростью. Векторное произведение сонаправленных векторов, равно нулю, следовательно,

$$\left[\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} ; \vec{\mathbf{p}} \right] = \ \vec{\mathbf{v}} ; \vec{\mathbf{p}} \ = 0 \qquad (\ 6)$$

По второму закону Ньютона $\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}}$. Учитывая это и определение момента силы, преобразуем уравнения (5) к виду

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \left[\vec{\mathbf{r}} ; \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} \right] = \left[\vec{\mathbf{r}} ; \vec{\mathbf{F}} \right] = \vec{\mathbf{M}} \qquad (\ 7)$$

Таким образом, *производная по времени от момента импульса точки равна моменту результирующей силы* (закон изменения момента импульса материальной точки).

В том случае, когда момент результирующей силы равен нулю, из закона (7) следует, что момент импульса точки должен сохраняться:

$$\vec{\mathbf{M}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{\ell}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \vec{\ell} = \text{const} . \qquad (\ 8)$$

3 Законы изменения и сохранения момента импульса системы МТ

Моментом импульса $\vec{\mathbf{L}}$ относительно центра (точки) O для системы МТ называется векторная сумма моментов отдельных МТ относительно O:

$$\vec{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\ell}_i = \sum_{i=1}^{N} [\vec{\mathbf{r}}_i ; \vec{\mathbf{p}}_i] . \qquad (9)$$

Здесь индекс $i = 1, 2, ..., N$ нумерует МТ, $\vec{\mathbf{r}}_i$ и $\vec{\mathbf{p}}_i$ – радиус-векторы и импульсы отдельных МТ.

Продифференцировав уравнение (9), получим:

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{\ell}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{\mathbf{M}}_{ij} + \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{M}}_i^{(\mathrm{ex})} \qquad (10)$$

Здесь $\vec{\mathbf{M}}_{ij}$ – момент силы, действующей на i-тую МТ со стороны j-той, $\vec{\mathbf{M}}_i^{(\mathrm{ex})}$ – момент результирующей внешних сил, действующий на i-тую МТ.

Двойная сумма $\sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{\mathbf{M}}_{ij}$ в уравнении (10) может быть разбита на суммы пар моментов сил $\vec{\mathbf{M}}_{ij} + \vec{\mathbf{M}}_{ji}$, с которыми i-тая и j-тая МТ действуют друг на друга. Пара моментов $\vec{\mathbf{M}}_{ij}$ и $\vec{\mathbf{M}}_{ji}$ с учетом третьего закона Ньютона ($\vec{\mathbf{F}}_{ij} = -\vec{\mathbf{F}}_{ji}$) при сложении обращается в нуль:

$$\vec{\mathbf{M}}_{ij} + \vec{\mathbf{M}}_{ji} = \left[\vec{\mathbf{r}}_i ; \vec{\mathbf{F}}_{ij}\right] + \left[\vec{\mathbf{r}}_j ; \vec{\mathbf{F}}_{ji}\right] = \left[\vec{\mathbf{r}}_j - \vec{\mathbf{r}}_i ; \vec{\mathbf{F}}_{ji}\right] = \left[\vec{\mathbf{r}}_{ji} ; \vec{\mathbf{F}}_{ji}\right] = 0. \qquad (11)$$

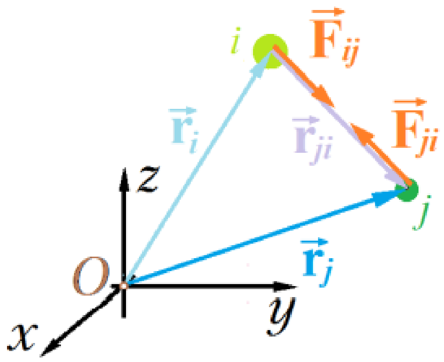

Рис. 2 Силы взаимодействия i-той и j-той МТ $\vec{\mathbf{F}}_{ij}$ и $\vec{\mathbf{F}}_{ji}$ коллинеарны вектору, соединяющему МТ.

Как правило, между МТ действуют центральные силы, в этом случае последнее векторное произведение в формуле (11) равно нулю, т.к. вектор $\vec{\mathbf{F}}_{ji}$ коллинеарен вектору $\vec{\mathbf{r}}_{ji}$, соединяющему i-тую и j-тую МТ (см рис. 2). Из (11) следует

$$\sum_{i-1}^{N}\sum_{\substack{j-1\\ j\neq i}}^{N}\vec{\mathbf{M}}_{ij}=0, \qquad (12)$$

поэтому окончательно из уравнения (10) получаем

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\vec{\mathbf{M}}_i^{(\mathrm{ex})}. \qquad (13)$$

Сумма моментов внешних сил в правой части равенства называется главным моментом сил относительно центра (точки) О. Уравнение выражает *закон изменения момента импульса относительно центра (точки) О для системы МТ*: *скорость изменения момента импульса системы равна главному моменту сил*.

В том случае, если главный момент сил отсутствует, из уравнения следует *закон сохранения момента импульса*:

$$\vec{\mathbf{L}}=\mathrm{const}\ \text{при условии}\ \vec{\mathbf{M}}^{\mathrm{ex}}=0. \qquad (14)$$

4 Момент импульса МТ и момент силы относительно оси

Рассмотрим МТ m, движущуюся с импульсом $\vec{\mathbf{p}}$ (см. рис. 3). Моментом импульса l_z МТ относительно оси Oz (осевым моментом импульса МТ) называется проекция вектора момента импульса $\vec{\ell}$ на ось Oz . Эта проекция может быть вычислена по формуле

$$l_z = \left(\vec{\ell}\right)_z = \pm p_\perp d_p, \qquad (15)$$

где $p_\perp$ – проекция импульса на плоскость, перпендикулярную оси, d_p – расстояние от оси Oz до прямой, проходящей через МТ в направлении $p_\perp$ (линии действия импульса $p_\perp$). Расстояние d_p называется *плечом импульса*. Знак в формуле (15) определяется следующим образом: если вращению МТ вокруг оси Oz по правилу правого винта соответствует поступательное движение в направлении оси Oz , то выбирается знак «+», иначе выбирается знак «–».

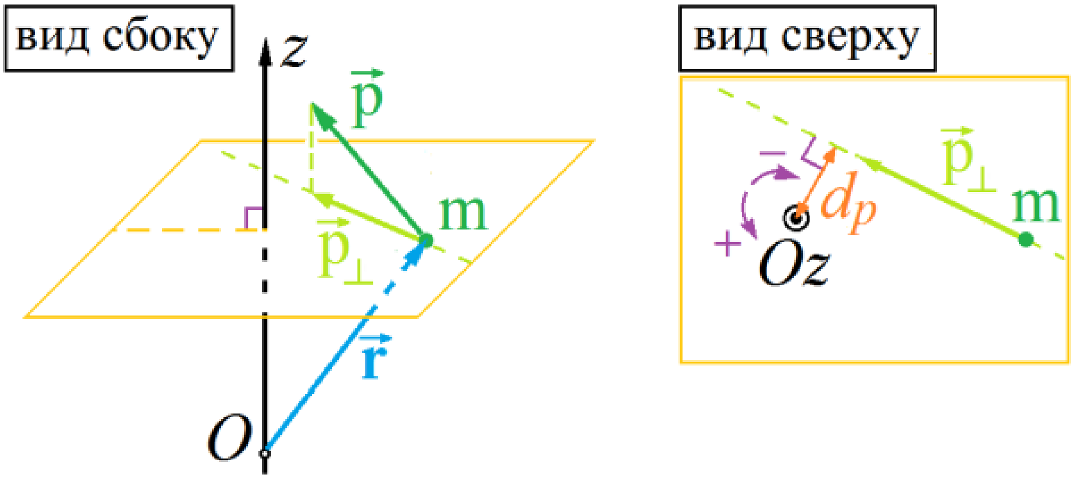

Рис. 3 К определению момента импульса МТ относительно оси Oz .

Аналогично вводится момент силы относительно оси (осевой момент силы). Для силы $\vec{\mathbf{F}}$, приложенной в точке A, момент силы относительно оси Oz (см. рис. 4) вычисляется по формуле

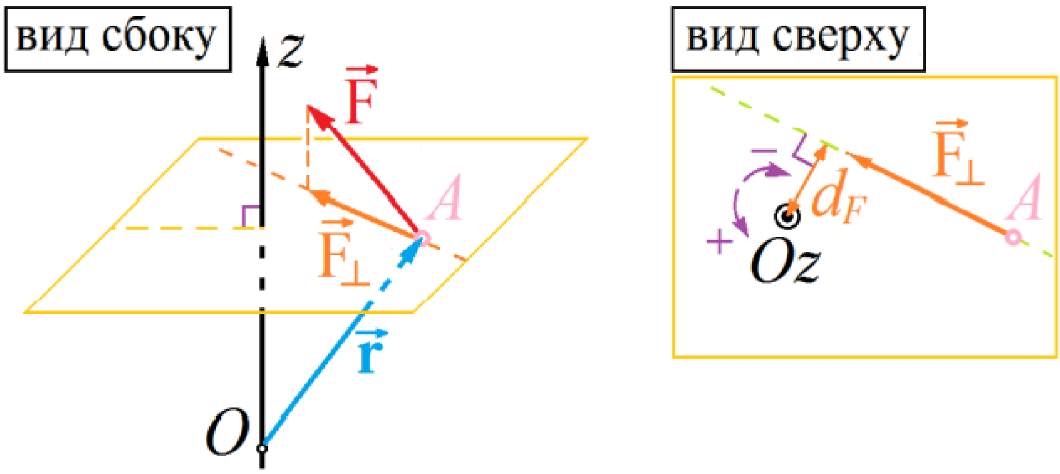

Рис. 4 К определению момента силы $\vec{\mathbf{F}}$ относительно оси Oz .

$$M_z = \vec{\mathbf{M}}_z = \pm F_\perp d_F , \qquad (16)$$

где $F_\perp$ – проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси, d_F – расстояние от оси Oz до прямой, проходящей через точку A в направлении действия $F_\perp$ (линии действия силы $F_\perp$). Расстояние d_F называется *плечом силы*. Если вращению под действием силы $F_\perp$ вокруг оси Oz по правилу правого винта соответствует поступательное движение в направлении оси Oz, то выбирается знак «+», иначе выбирается знак «–». Заметим, что перенос точки приложения силы вдоль линии действия силы не изменяет осевого момента силы.

Из закона изменения вектора момента импульса МТ следует закон изменения осевого момента импульса:

$$\frac{dl_z}{dt} = M_z . \qquad (17)$$

Задачи:

1. Центрифуга ЦФ-18 в Гагаринском центре для подготовки космонавтов имеет длину плеча 18 метров и массу вращающейся части 300 тонн. Её скорость может достигать 70 оборотов в минуту. Найдите момент импульса этой центрифуги относительно её оси вращения.

2. Момент силы, необходимый при закручивании гайки относительно оси вращения О, равен 10 Н *м. На каком расстоянии (5 см или 10 см) от оси вращения О нужно приложить силу к рукоятке гаечного ключа, чтобы сила при закручивании гайки была меньше (и какова будет величина этой силы)?

3. Планета движется вокруг Солнца по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце. Доказать, что момент импульса (момент количества движения) $\vec{L}$ планеты относительно Солнца есть величина постоянная.

4. Небольшой шарик массы m, привязанный на нити длины l к потолку в точке О, движется по горизонтальной окружности с постоянной угловой скоростью ω. Относительно каких точек момент импульса М шарика остается постоянным? Найти модуль приращения вектора момента импульса шарика относительно точки О за половину оборота.

5. Шарик массы m, двигавшийся со скоростью v_0, испытал упругое лобовое соударение с одним из шариков покоившейся жесткой гантели. Масса каждого шарика гантели равна $m/2$, расстояние между ними — l. Пренебрегая размерами шариков, найти собственный момент импульса М гантели после соударения, т.е. момент импульса в поступательно движущейся системе отсчета, связанной с центром инерции гантели.