Семинар по теме “ Динамика вращения твердого тела. Момент инерции твердого тела. Момент импульса твердого тела. Формула Гюйгенса-Штейнера. Кинетическая энергия вращающегося твердого тела. Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела с закрепленной осью вращения. Гироскопический эффект. Прецессия. Применение гироскопов.”

Теория:

Абсолютно твёрдое тело — модельное понятие классической механики, обозначающее совокупность точек, расстояния между текущими положениями которых не изменяются, каким бы воздействиям данное тело в процессе взаимодействия с другими твёрдыми объектами ни подвергалось (поэтому абсолютно твёрдое тело не изменяет свою форму и сохраняет неизменным распределение масс).

Момент инерции — скалярная физическая величина, мера инертности во вращательном движении вокруг оси, подобно тому, как масса тела является мерой его инертности в поступательном движении.

Момент инерции тела относительно оси – физическая величина, равная сумме произведений масс материальных точек, из которых состоит тело, на квадрат расстояния их до оси:

$$J = \sum_i m_i r_i^2$$

В случае непрерывного распределения в пространстве массы тела, расчет момента инерции тела сводится к вычислению интеграла:

$$J = \int r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV$$

где r - расстояние от элемента тела объёмом dV и массой dm, ρ- плотность тела.

Теорема Гюйгенса-Штейнера

Момент инерции тела J относительно произвольной оси равен его моменту инерции J_0 относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, сложенному с величиной md^2? где d - расстояние между осями.

$$J = J_C + md^2.$$

Или в др. формулировке:

Если для какого-либо тела известен его момент инерции J_0 относительно оси, проходящей через центр масс, то момент инерции относительно любой оси, параллельной первой, может быть найден по теореме Штейнера

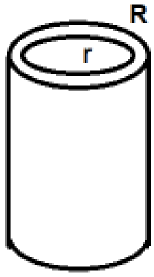
$$J = J_0 + md^2$$

где d - расстояние между осями.

Примеры моментов инерции простых тел:

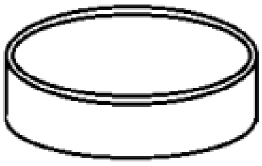
Полый толстостенный цилиндр (труба) с внешним радиусом R и внутренним радиусом r

$$J = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2)$$



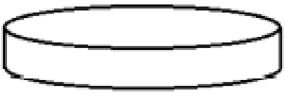
Тонкостенный цилиндр (обруч, кольцо с радиусом R)

$$J = mR^2$$



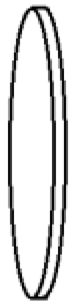
Сплошной цилиндр (диск) радиусом R

$$J = \int_{-L/2}^{L/2}\int_0^R\int_0^{2\pi} r^2\rho d\varphi dr dz = \frac{1}{2}mR^2$$



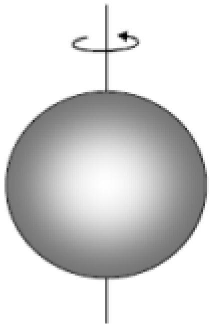
Тонкий диск радиуса R

$$J = \frac{1}{4}mR^2$$



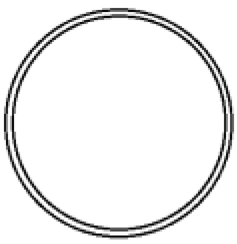
Сплошной шар радиусом R

$$J = \int_0^{\pi}\int_0^{R}\int_0^{2\pi}(rsin\theta)^2\rho r^2 sin\theta d\varphi dr d\theta = \frac{2}{5}mR^2$$



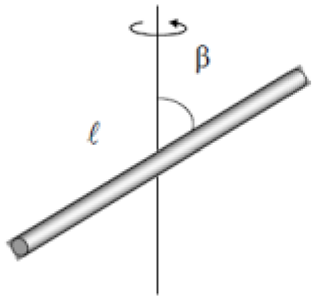
Сферическая оболочка (тонкий шаровой слой) радиусом R

$$J = \frac{2}{3}mR^2$$



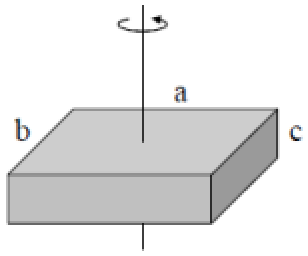
Тонкий стержень длины l

$$J = \frac{1}{12} m l^2 sin^2 \beta$$



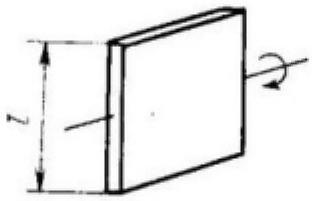
Прямоугольный параллелепипед

$$J = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$



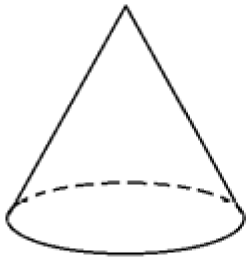
Прямоугольный параллелепипед

$$J = \frac{1}{12} m l^2$$



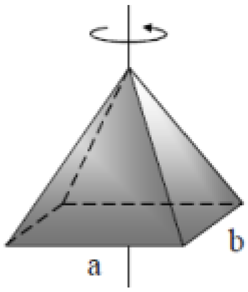
Конус

$$J = \frac{3}{10} mR^2$$



Пирамида

$$J = \frac{1}{20} m(a^2 + b^2)$$



Плоское движение абсолютно твердого тела

Если в качестве оси вращения выбрать ось n , проходящую через центр масс абсолютно твердого тела, то его уравнениями движения будут: -уравнение движения центра масс

$$m\vec{a}_{\text{ц.м.}} = \vec{F}^{ex}$$

-уравнение моментов относительно оси n, проходящей через центр масс

$$J_{0,n} \frac{d\omega}{dt} = M_{0,n}^{ex}$$

Здесь m масса тела, $\vec{a}_{\text{ц.м.}}$ - ускорение центра масс тела, $\vec{F}^{ex}$ - сумма всех внешних сил, действующих на тело, $J_{0,n}$ - момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости движения, ω - угловая скорость вращения тела относительно этой оси, $M_{0,n}^{ex}$ - сумма моментов внешних сил, действующих на тело, относительно той же оси.

Вращательное движение абсолютно твердого тела

В случае вращательного движения абсолютно твердого тела вокруг неподвижной относительно инерциальной системы отсчета оси уравнением движения тела будет уравнение моментов для этого тела относительно данной оси, которое принимает вид:

$$J_n \frac{d\omega}{dt} = M_n^{ex}$$

где J_n - момент инерции тела относительно оси, ω - угловая скорость вращения тела, M_n^{ex} - сумма моментов внешних сил, действующих на тело.

Заметим, что при рассмотрении плоского движения абсолютно твердого тела в ряде случаев удобно записывать уравнение моментов относительно неподвижной оси, совпадающей в данный момент времени с мгновенной осью вращения.

Основной закон динамики вращательного движения имеет вид:

$$\vec{M}dt = d(J\vec{\omega})$$

где $\vec{M}$ суммарный момент сил, приложенных к телу, J - момент инерции тела, ω - угловая скорость вращения тела.

Если J=const, и ось вращения остаётся неподвижной, то уравнение можно

представить в скалярном виде:

$$M = J\frac{d\omega}{dt} = J\varepsilon$$

где ε - угловое ускорение, приобретаемое телом под действием вращательного момента M относительно оси вращения.

Кинетическая энергия тела, относительно неподвижной оси равна:

$$E_{k1} = \frac{J\omega^2}{2}$$

где J - осевой момент инерции тела, ω - угловая скорость вращения.

Полная кинетическая энергия твердого тела при плоском движении:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{J_c\omega^2}{2}$$

где v скорость поступательного движения, J_c - момент инерции тела относительно оси, проходящией через центр масс.

Положение равновесия механической системы определяется двумя условиями:

1) Сумма внешних сил, действующих на покоящуюся систему, равна нулю (это гранатирует сохранение состояния покоя центра масс)

$$\sum_i \vec{F_i} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + ... = 0$$

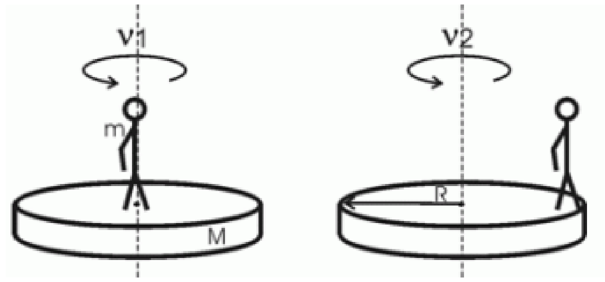
2) Сумма моментов внешних сил, действующих на систему, равна нулю (это гарантирует отсутствие вращения вокруг какой-либо оси)

$$\sum_i \vec{M_i} = \vec{M_1} + \vec{M_2} + ... = 0$$

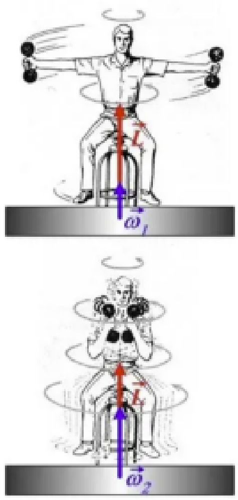
Задачи:

1. Найдите моменты инерции Земли, Луны и Марса, и сравните их.

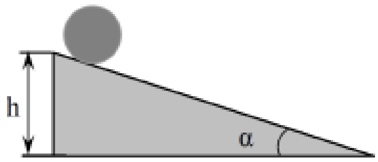
2. На краю платформы в виде диска, вращающейся по инерции вокруг вертикальной оси с частотой ω_2, стоит человек массой m. Когда человек перешёл в центр платформы, она стала вращаться с частотой ω_1. Определить массу M платформы. Момент инерции человека J_2 рассчитывать как для материальной точки.



3. Горизонтальная платформа массой m и радиусом R вращается с частотой ν_1 об/мин. В центре платформы стоит человек и держит в расставленных руках гири. С какой частотой ω_2 будет вращаться платформа, если человек, опустив руки, уменьшит свой момент инерции от J_1 до J_2? Считать платформу однородным диском. Трения нет.



4. Найти с каким ускорением будут скатываться без скольжения с наклонной плоскости, составляющей угол с горизонтом однородные: а) обруч; б) диск; в) шар.



5. Рассчитать момент инерции J тонкой прямоугольной пластинки массой m размером a*b относительно оси O_1O_2, проходящей через одну из вершин пластинки перпендикулярно её плоскости (см рис)