Лекция 1

1. Экстремумы функций нескольких переменных

1.1. Функции нескольких переменных

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. Множество

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$$

называется (*открытым*) *шаром* с центром в точке x и радиусом r. Множество $B(x, \varepsilon)$ также называется ε-окрестностью точки x.

Множество $G \subset \mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если для любой точки $x \in G$ найдётся $\varepsilon > 0$ такое, что $B(x, \varepsilon) \subset G$. Шар $B(x, r)$ является открытым множеством.

Множество $F \subset \mathbb{R}^n$ называется *замкнутым*, если множество $\mathbb{R}^n \setminus F$ открыто.

Для множества $A \subset \mathbb{R}^n$ и точки $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ всегда должна осуществляться одна из трёх возможностей.

1. Существует такой открытый шар B, что $\boldsymbol{x} \in B \subset A$.
2. Существует такой открытый шар B, что $\boldsymbol{x} \in B \subset \mathbb{R}^n \setminus A$.
3. Всякий открытый шар B, содержащий $\boldsymbol{x}$, содержит как точки из A, так и точки из $\mathbb{R}^n \setminus A$.

Точки $\boldsymbol{x}$, обладающие свойством 1, образуют *внутренность* множества A, обладающие свойством 2 — *внешность* множества A, обладающие свойством 3 — *границу* множества A. Например, граница шара $B(x, r)$ является следующим множеством

$$S(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| = r\}.$$

Множество $S(\boldsymbol{x}, r)$ называется *сферой* с центром в точке x и радиусом r.

Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется *ограниченным*, если существует число $R > 0$ такое, что $A \subset B(0, R)$. Замкнутое ограниченное множество называется *компактом*.

Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется *связным*, если любые её две точки можно соединить ломаной, целиком лежащей в A. *Областью* в $\mathbb{R}^n$ называется открытое связное множество.

Функция f, определённая на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, называется непрерывной в точке $x^{(0)} \in E$ по множеству E, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in E$, удовлетворяющих условию $|x - x^{(0)}| < \delta$, выполняется неравенство

$$\left| f(x) - f(x^{(0)}) \right| < \varepsilon.$$

1.2. Необходимые условия экстремума

Пусть функция $f(x)$ определена в области $G \subset \mathbb{R}^n$. Точка $x_0 \in G$ называется точкой *локального максимума*, если существует такая окрестность $U(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$, что для всех $x \in U(x^{(0)})$ выполняется неравенство

$$f(x) \leq f(x_0). \tag{2.1}$$

Точка $x_0 \in G$ называется точкой *локального минимума*, если существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для всех $x \in U(x_0)$ выполняется неравенство

$$f(x) \geq f(x_0). \tag{2.2}$$

Если при $x \in U(x_0)\backslash\{x_0\}$ имеет место строгое неравенство $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$, то x_0 называется точкой *строгого локального максимума* (*строгого локального минимума*).

Точкой *локального экстремума* называется либо точка локального максимума, либо точка локального минимума.

Теорема 2.1. (Необходимые условия экстремума) *Пусть функция* $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$*, определённая в окрестности* $U(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ *точки* $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$*, имеет в точке* x_0 *частные производные по каждой из переменных* x^1*, ...,* x^n*.*

Тогда для того, чтобы функция f *имела в* x_0 *локальный экстремум, необходимо, чтобы в этой точке были выполнены равенства*

$$\frac{\partial f}{\partial x^1} = 0, \ \dots, \ \frac{\partial f}{\partial x^n} = 0. \tag{2.3}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(x^1) = f(x^1, \dots, x_0^n)$ одной переменной, определённую, в силу условий теоремы, в некоторой окрестности точки x_0^1. В точке x_0^1 функция $\varphi(x^1)$ имеет локальный экстремум. Так как

$$\varphi'(x_0^1) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1, \dots, x_0^n),$$

то $\dfrac{\partial f}{\partial x^1}(x_0) = 0$. Аналогично доказываются другие равенства (2.3). ■

Учитывая, что

$$\operatorname{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0)\right),$$

равенства (2.3) можно записать следующим образом

$$\operatorname{grad} f(x_0) = 0. \tag{2.4}$$

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Если в точке x_0 выполнены равенства (2.3), то x_0 называется *стационарной точкой функции* $f(x)$.

Теорема 2.2. (Теорема Вейерштрасса) *Если функция* f *непрерывна на замкнутом ограниченном множестве* $K \subset \mathbb{R}^n$*, то она достигает на этом множестве своих точных верхней и нижней граней.*

Пусть функция f дифференцируема на открытом ограниченном множестве G и непрерывна на его замыкании $\overline{G}$. По теореме 2.2 существуют наибольшее и наименьшее значения функции f на множестве $\overline{G}$. Для нахождения наибольшего и наименьшего значений f следует найти все стационарные точки f в G, вычислить в них значения функции и выбрать, если это возможно, точки, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения из всех значений в стационарных точках. После этого нужно найти наибольшее и наименьшее значения f на границе ∂G множества G. Сравнив наибольшее и наименьшее значения f в стационарных точках с наибольшим и наименьшим значениями f на границе множества G, найдём искомые максимум и минимум f на $\overline{G}$.

1.3. Достаточные условия экстремума

Напомним несколько определений из курса алгебры. Квадратичная форма

$$A(x) = A(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

$a_{ij} = a_{ji}$, i, $j = 1, \ldots, n$, называется *положительно определённой* (соответственно *отрицательно определённой*), если $A(x) > 0$ (соответственно $A(x) < 0$) для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.

Квадратичная форма, являющаяся положительно или отрицательно определённой, называется *знакоопределённой* квадратичной формой.

Квадратичная форма, принимающая как положительные, так и отрицательные значения, называется *неопределённой* или *знакопеременной.*

Теорема 3.1. (Достаточные условия строгого экстремума) *Пусть функция f определена и имеет непрерывные производные второго порядка в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$. Пусть $x^{(0)}$ является стационарной точкой функции f. Тогда если квадратичная форма*

$$A(dx_1, \ldots, dx_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} \, dx_i \, dx_j, \tag{3.1}$$

положительно определена (отрицательно определена), то $x^{(0)}$ является точкой строгого минимума (строгого максимума); если же квадратичная форма (3.1) *неопределена, то в точке $x^{(0)}$ нет экстремума.*

При практическом применении этой теоремы обычно пользуются так называемым *критерием Сильвестра.* Он состоит в следующем.

Пусть дана квадратичная форма

$$A(x) = A(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \tag{3.2}$$

$a_{ij} = a_{ji}$, i, $j = 1, \ldots, n$,

Матрицей квадратичной формы (3.2) называется следующая матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Отметим, что матрица (3.3) является симметричной.

Главными минорами симметричной матрицы (3.3) называются следующие определители:

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \; \ldots, \; \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Критерий Сильвестра формулируется в виде двух следующих утверждений.

1. Для того, чтобы квадратичная форма (3.2) с симметричной матрицей (3.3) являлась положительно определённой, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы (3.3) были положительны, т. е. чтобы были справедливы неравенства

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \ldots, \; \Delta_n > 0.$$

2. Для того, чтобы квадратичная форма (3.2) с симметричной матрицей (8.5) являлась отрицательно определённой, необходимо и достаточно, чтобы знаки главных миноры матрицы (3.3) чередовались, причём знак Δ_1 был отрицателен, т. е. чтобы были справедливы неравенства

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 < 0, \quad \Delta_4 > 0, \ \ldots .$$

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию трёх переменных:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z.$$

Решение. Найдём частные производные 1-го порядка

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y + 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z - 2.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ 2y - x = 0, \\ 2z - 2 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдём единственную стационарную точку

$$P_0\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right).$$

Вычислим частные производные 2-го порядка:

$$f_{xx} = 2, \quad f_{xy} = -1, \quad f_{xz} = 0, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{yz} = 0, \quad f_{zz} = 2.$$

Таким образом, матрица квадратичной формы (3.1) равна

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0.$$

Согласно критерию Сильвестра точка P_0 является точкой строгого минимума.

Сформулируем теперь теорему 3.1 для случая двух переменных, выразив условия, накладываемые на квадратичную форму (3.1), в явном виде через вторые частные производные.

Теорема 3.2. *Пусть функция $f(x, y)$ определена и имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), которая является стационарной для $f(x, y)$. Тогда если в (x_0, y_0)*

$$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0, \tag{3.4}$$

то она является точкой строгого экстремума, а именно строгого максимума, если в ней

$$f_{xx} < 0,$$

и строгого минимума, если

$$f_{xx} > 0.$$

Если же в точке (x_0, y_0)

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0, \tag{3.5}$$

то экстремума нет.

Наконец, когда

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0, \tag{3.6}$$

в точке (x_0, y_0)*, то может случиться, что экстремум в ней есть, а может случиться, что экстремума нет.*

П р и м е р 2. Функция двух переменных

$$f(x, y) = x^4 + y^4$$

имеет единственную стационарную точку $(0, 0)$, в которой $f_{xx} = f_{xy} = f_{yy} = 0$. Тем самым выполнено равенство (3.6). При этом очевидно, что $(0, 0)$ — точка строгого минимума.

П р и м е р 3. Функция двух переменных

$$f(x, y) = xy^3$$

имеет единственную стационарную точку $(0, 0)$, в которой $f_{xx} = f_{xy} = f_{yy} = 0$. Следовательно, выполнено равенство (3.6). Однако в силу того, что в формулу, задающую эту функцию, переменные x и y входят в нечётных степенях, функция меняет знак в любой окрестности нуля, значит, $(0, 0)$ не является точкой экстремума.