1. Линейный оператор. Определение, примеры.

Линейным оператором в векторном пространстве V (эндоморфизмом пространства V) называется отображение , удовлетворяющее условиям:

1. для любых ;

2. для любых .

Пример:

а) Нулевой оператор O: переводит любой вектор любого пространства в нулевой;

б) Тождественный оператор E: переводит любой вектор любого пространства в себя; в) «Растяжение» , : переводит любой вектор x в вектор ;

г) Поворот на угол α — линейный оператор в плоскости ;

д) Пусть V = U⊕W, тогда проектор на U параллельно W является линейным оператором в V;

1. Структура множества

Множество всех линейных операторов в пространстве будем обозначать

Линейные операторы в одном векторном пространстве можно складывать и умножать на скаляры как обычные функции: (A + B) x = Ax + Bx, (λA) x = λ(Ax). Относительно этих операций они образуют векторное пространство. Далее, если A, B ∈ End (V), то их произведение (композиция) AB также является линейным оператором. Умножение линейных операторов ассоциативно. Легко понять, что EA = AE = A для любого A ∈ End (V). Столь же легко понять, что в общем случае AB ≠BA (приведите пример). То есть операторы со сложением и умножением являются ассоциативным кольцом с единицей. Векторное пространство + кольцо + ((λa) b = a(λb) = λ(ab)) = алгебра.

1. Образ и ядро оператора. Определение, примеры.

Для линейного оператора A определяется его образ и ядро .

Образ и ядро являются подпространствами в соответствующем векторном пространстве, то есть замкнуты относительно сложения векторов и умножения на скаляры.

Примеры:

а) в любом пространстве V;

б) в любом пространстве V;

в) в любом пространстве V,

г) Образ оператора поворота в — вся плоскость , его ядро — только нулевой вектор.

1. Теорема о базисе ядра и образа. Следствия.

.

Доказательство. Выберем базис e1, e2, . . ., ek подпространства Ker A и дополним его векторами ek+1, . . ., en до базиса всего пространства V. Достаточно показать, что векторы A(ek+1), . . ., A(en) составляют базис Im A. Они порождают образ, так как для любого имеем Векторы ,…, линейно независимы, так как из равенства следует, что и является комбинацией векторов e1 , e2 ,…, ek , что возможно только если все равны 0.

Следствие. Следующие свойства линейного оператора A эквивалентны:

1. A – изоморфизм.
2. .
3. Матрица линейного оператора. Определение, примеры.

Матрицей линейного оператора A в базисе , , . . ., называется матрица A = (­aij), определяемая из равенств .

То есть в j-том столбце матрицы A стоят координаты образа j-того базисного вектора в базисе e1, e­2, …, en. Можно записать определение матрицы линейного оператора как (Ae1, Ae­2, . . ., Aen) = (e1, e2, . . ., en) A.

Примеры:

а) Матрицей нулевого оператора O является нулевая матрица O;

б) Матрицей тождественного оператора E является единичная матрица E;

в) Матрицей оператора «растяжения» является скалярная матрица ;

г) Матрица оператора поворота на угол в плоскости в ортонормированном базисе:

1. Изоморфность .

Пусть – соответственно их матрицы в базисе Тогда , следовательно, матрица оператора есть где , то есть . Таким образом, кольцо изоморфно кольцу

1. Преобразование матрицы оператора при смене базиса.

Пусть и – два базиса векторного пространства . И пусть тогда Следовательно, если - матрица оператора в базисе то

При смене базиса в линейном пространстве с матрицей оператора A выражается через формулу подобия матриц: если C - матрица перехода от старого базиса к новому, то матрица оператора A' в новом базисе связана с матрицей A в старом базисе следующим образом: .

1. Определитель линейного оператора. Критерий обратимости.

Определитель линейного оператора – это определитель его матрицы в каком-либо базисе.

1. Линейный оператор действующий в линейном пространстве , обратим тогда и только тогда, когда его матрица в каком-либо базисе невырожденная ().
2. Линейный оператор , действующий в линейном пространстве , обратим тогда и только тогда, когда его образ совпадает со всем пространством .
3. Линейный оператор , действующий в линейном пространстве , обратим тогда и только тогда, когда его ядро тривиально, т. е. .
4. Инвариантное относительно оператора подпространство. Определение, примеры.

Подпространство называется инвариантным относительно оператора ( -инвариантным), если , то есть для любого его образ .

Примеры: Пусть оператор — осевая симметрия относительно оси абсцисс в декартовой системе координат на плоскости. Тогда  **и**  инвариантны, а — нет.

1. Матрица оператора в базисе, согласованном с инвариантным подпространством. Блочно-диагональный вид матрицы оператора.

Ограничение (сужение) линейного оператора A на инвариантное подпространство U является линейным оператором в U. Если выбрать базис пространства V так, чтобы инвариантное подпространство U было линейной облочкой первых k базисных векторов, то матрица оператора в этом базисе будет иметь вид , где B — матрица оператора в базисе . Обратно, если матрица оператора A имеет такой блочный вид (где B — квадратная матрица размера k × k, а под ней матрица из нулей), то — инвариантное подпространство. Если удаётся разложить V в прямую сумму инвариантных подпространств , то в базисе пространства , составленном из базисов этих подпространств, матрица оператора имеет блочно-диагональный вид

где – матрица оператора .

1. Собственные значения и собственные векторы. Определения, примеры.

Ненулевой вектор называется собственным вектором оператора , если . Число называется при этом собственным значением (собственным числом) оператора A, отвечающим собственному вектору x.

Примеры:

а) Для нулевой оператора каждый вектор является собственным с собственным значением 0;

б) Для тождественного оператора каждый вектор является собственным с собственным значением 1;

в) Для оператора «растяжения» каждый вектор является собственным с собственным значением λ;

1. Собственное подпространство. – инвариантность собственного подпространства. Геометрическая кратность.

Подпространство называется собственным подпространством оператора , соответствующим собственному значению и обозначается . Помимо собственных векторов, оно содержит нулевой. Любое собственное подпространство оператора является – инвариантным.

Геометрической кратностью собственного значения называется размерность соответствующего ему собственного подпространства: .

1. Характеристический полином. Инвариантность характеристического полинома. Алгебраическая кратность.

Многочлен называется характеристическим многочленом оператора A. Корни характеристического многочлена называются спектром оператора A.

Алгебраической кратностью собственного значения называется его кратность как корня характеристического многочлена.

1. Геометрическая и алгебраическая кратности. Связь этих величин.

Геометрическая кратность собственного значения не превосходит его алгебраической кратности.

Доказательство. Рассмотрим собственное подпространство , оно инвариантно, следовательно, в согласованном базисе матрица оператора имеет вид

матрица квадратная размера . Тогда характеристический многочлен имеет вид . Так как у многочлена может быть корень , то

1. Линейная независимость подпространств. Линейная независимость собственных подпространств.

Подпространства ,…, называются линейной независимыми, если равенства следует, что

Собственные подпространства, отвечающие попарно различным собственным значениями λ1, λ2, . . ., λ­n оператора A линейно независимы.

1. Оператор с простым спектром. Диагонализуемость оператора с простым спектром.

Оператор имеет простой спектр, если у него нет кратных собственных значений. Это означает, что каждое собственное значение имеет только одномерное собственное подпространство.

Линейный оператор в конечномерном векторном пространстве называется диагонализируемым, если существует базис, в котором матрицам этого оператора имеет диагональный вид. Другими словами, диагонализируемость оператора эквивалентна существованию собственного базиса.

1. Проектор на подпространство. Свойства проекторов. Спектральное разложение диагонализуемого оператора.

Линейный оператор в конечномерном векторном пространстве называется диагонализируемым, если существует базис, в котором матрицам этого оператора имеет диагональный вид. Другими словами, диагонализируемость оператора эквивалентна существованию собственного базиса.

Пусть оператор A диагонализируем и Рассмотрим проектор на подпространство параллельного прямой сумме оставшихся подпространств. Тогда при и . Легко проверяется, что оператор A действует на любой вектор так же, как оператор . Выражение называется спектральным разложением оператора A.

1. Критерий диагонализуемости.

Теорема (критерий диагонализируемости). Оператор диагонализируем тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

1) Характеристический многочлен раскладывается на линейные сомножители (то есть все его корни лежат в поле F);

2) Геометрическая кратность каждого собственного значения равна его алгебраической кратности.

Доказательство. Диагонализируемость эквивалента наличию собственного базиса, откуда следует, что (объединение базисов собственных подпространств — собственный базис V), но тогда Но , а Отсюда следует, что тогда и только тогда, когда .

1. Корневые векторы. Определение, примеры.

Вектор называется корневым вектором оператора A, отвечающим собственному значению , если существует такое целое неотрицательное число k, что . Наименьшее такое k называется высотой корневого вектора x.

Пример:

а) Корневые векторы высоты 0 — нулевые векторы;

б) Корневые векторы высоты 1 — собственные векторы;

в) Каждый многочлен есть корневой вектор с собственным числом 0 оператора дифференцирования пространства многочленов, причём высота многочлена как корневого вектора равна n + 1, где n — степень этого многочлена;

1. Корневое подпространство. Цепочка подпространств

Корневые векторы, отвечающие собственному значению , высоты — это . Возникает цепочка подпространств

где – корневое подпространство с собственным значением

1. Свойства корневых подпространств.

1) – инвариантно;

2) — нильпотентный оператор, то есть существует такое неотрицательное целое , то ;

3) невырожден при ;

4) dim (геометрический смысл алгебраической кратности).

Доказательство.

1) Пусть , тогда . Заметим, что . То есть, инвариантно относительно , следовательно, и -инвариантно. Это верно и для .

2) Выберем в базис, согласованный с цепочкой подпространств — базис — базис и т.д., — базис . (положим ). Из этого следует, что следовательно где .

3) В базисе матрица оператора верхнетреугольная с нулями на главной диагонали (верхненильтреугольная), тогда матрица оператора верхнетреугольная с -ми на главной диагонали, а матрица оператора верхнетреугольная с − на главной диагонали. Следовательно (так как ) она невырожденная и, значит, оператор тоже невырожден.

4) Дополним базис до базиса всего пространства V. В этом базисе матрица оператора A имеет блочно-треугольный вид:

Тогда . Нужно показать, что не является собственным значением оператора в пространстве с матрицей **.** Пусть существует такой вектор **,** что Это означает, что . Следовательно, – корневой вектор, но тогда и – корневой вектор, что противоречит определению .

1. Нильпотентный оператор. Циклическое подпространство.

Нильпотентным называется линейный оператор на векторном пространстве , если существует такое натуральное число , что-то , где 0 – это нулевой оператор. Другими словами, для нильпотентного оператора A существует такое число , что применение оператора к вектору раз подряд даёт нулевой вектор.

Подпространство то называется циклическим подпространством нильпотентного оператора N, порожденным вектором x.

1. Структура нильпотентного оператора. Жорданова цепочка. Диаграмма Юнга.

Циклическое подпространство – наименьшее -инвариантное подпространство, содержащее где – высота вектора

Базис где Такой базис называется жордановой цепочкой: , то есть первый вектор переходит при действии в нулевой, второй — в первый и т.д., последний — в предпоследний. Следовательно, матрица оператора в базисе имеет вид

Называемый нильпотентной жордановой клеткой порядка

Диаграммы Юнга:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Квадратики — векторы жорданова базиса, нильпотентный оператор действует на них сверху вниз.

• Высота строки соответствует высоте базисного вектора, а высота произвольного вектора (линейной комбинации базисных) определяется как наибольшая высота базисного вектора, входящего в эту линейную комбинацию с ненулевым коэффициентом.

• – тый столбец соответствует жордановой цепочке — базису циклического пространства .

• Ядро оператора — линейная оболочка векторов, стоящих в строках высоты не больше k.

• Векторы, лежащие в нижней строке, при действии оператора переходят в нулевые.

1. Жорданова клетка. Жорданова нормальная форма. Основная теорема о структуре оператора.

Жордановой клеткой называется квадратная матрица порядка вида

в которой на главной диагонали стоит одно и то же число , над главной диагональю — всюду число 1, а все остальные элементы матрицы — нулевые.

Жордановой матрицей называется блочно-диагональная матрица

Жорданова матрица также называется жордановой нормальной формой (ЖНФ) для оператора A.

Матрица любого оператора над полем комплексных чисел приводится к ЖНФ.

Теорема (Основная теорема о структуре оператора). Если характеристический многочлен раскладывается на линейные сомножители, то существует базис, в котором матрица оператора A жорданова. Она определена однозначно, с точностью до перестановки жордановых клеток.

1. Алгоритм построения жорданова базиса и жордановой нормальной формы.

Есть два подхода для нахождения жорданов базис:

• Начать с собственных векторов и подниматься вверх

• Начать с корневых векторов наибольшей высоты и спускаться вниз

Алгоритм построения Жорданова базиса и Жордановой нормальной формы используется для анализа и преобразования линейных операторов и матриц. Вот основные шаги этого алгоритма:

1. \*\*Нахождение собственных значений и собственных векторов: \*\* Сначала находятся собственные значения оператора или матрицы.
2. \*\*Построение Жорданова базиса: \*\* Для каждого собственного значения находится Жорданов базис, состоящий из собственных векторов и обобщенных собственных векторов. Обобщенные собственные векторы помогают учесть кратность собственного значения.
3. \*\*Формирование Жордановой нормальной формы: \*\* Жорданов базис позволяет представить матрицу или оператор в форме, где блоки на диагонали представляют собой Жордановы клетки. Это нормальная форма, которая позволяет легче анализировать структуру оператора или матрицы.
4. \*\*Приведение к Жордановой нормальной форме: \*\* Применяются преобразования, чтобы привести матрицу или оператор к Жордановой нормальной форме. Это может включать в себя нахождение жорданова базиса, затем применение подходящих линейных преобразований.