TP cours 3. Conversion de signaux analogiques en numériques. Échantillonnage

I. Principe

I.1. Définition

On dispose d'un signal physique à mesurer ou à transmettre. Cette grandeur (pression sonore, température, champ électromagnétique,...ou directement une tension électrique) est convertie dans les cas étudiés ici en signal électrique par un capteur. Le signal obtenu ainsi est une tension électrique fonction du temps $s(t)$. Ce signal est *analogique*, c'est-à-dire une fonction continue du temps.

La *numérisation* consiste à remplacer ce signal analogique par un ensemble dénombrable de valeurs numériques, qui sont codées sous forme de bits.

Avantages de la numérisation

- diminution des erreurs dues aux bruits: pour un bruit de faible niveau, le codage en 0-1 permet de supprimer totalement le bruit; pour un bruit de niveau important lors d'une transmission ou lecture du signal numérisé, le choix du codage permet de limiter les erreurs (en utilisant des bits supplémentaires de contrôle ou de redondance) pour obtenir un signal "robuste"
- possibilité de réaliser des copies d'excellente qualité grâce à la robustesse du signal numérique (CD versus vinyle, DVD versus VHS,..)
- traitement du signal par un calculateur au lieu d'un circuit électronique->on s'affranchit des problèmes de précision des composants, de leur dépendance par rapport à la température, etc.., possibilité de miniaturisation
- mises à jour du traitement du signal simplifiée (on modifie un programme au lieu de changer un circuit électrique)

La conversion analogique/numérique correspond à deux étapes:

- *l'échantillonnage* qui consiste à relever un ensemble discret de valeurs du signal analogique $s(t)$, étudiée dans I.2.
- *la quantification* qui consiste à attribuer à chaque échantillon une valeur numérique codée en bits

Le codage en bits de la tension échantillonnée se fait nécessairement avec approximation, puisqu'on dispose d'un nombre fini de bits. De la manière la plus simple, la valeur échantillonnée est approximée par la valeur la plus proche, codée en binaire sur N bits. Dans le cas d'un codage sur 8 bits, on peut ainsi coder $2^8 = 256$ valeurs différentes.

Si la tension échantillonnée peut varier par exemple de 0 à U volts, la plus petite différence de tension codée sera de $U/(2^N - 1)$ si le pas de quantification est uniforme. Pour un codage sur 8 bits par exemple, 0 volt correspond à 00000000 et Uvolts à 11111111, et la plus petite différence de tension codée est $U/255$.

I.2. Échantillonnage

a. Condition de Nyquist-Shannon

Pour décrire l'échantillonnage, introduisons la fonction du temps périodique w de période $T_e = \frac{1}{f_e}$ constituée d'impulsions de durée τ. Dans le cas idéal τ tend vers 0.

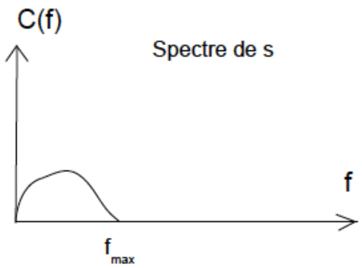
Le résultat de l'échantillonnage est la fonction $g = s.w.$ dont les valeurs à coder sont $g(0), g(T_e), g(2T_e), ...$

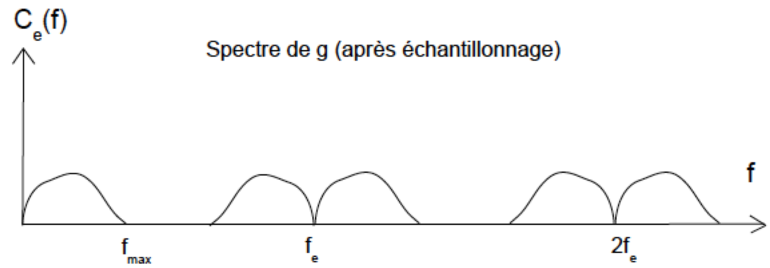
Supposons que s est une fonction périodique. La fonction w, également périodique, est décomposable en série de Fourier $w(t) = w_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k cos(k2\pi f_e t)$. Le spectre de la fonction g est donc plus riche que celui de s.

Exemple: Supposons que $s(t) = s_0 cos(2\pi f_0 t)$. Le produit de $s(t)$ par l'harmonique de rang k de w est: $s_0 a_k cos(2\pi f_0 t) cos(k2\pi f_e t) = \frac{1}{2} s_0 a_k \left[cos(2\pi(kf_e + f_0)t) + cos(2\pi(kf_e - f_0)t)\right]$.

Il y a décalage de la fréquence initiale f_0 et dédoublement autour de kf_e.

Ce résultat se généralise quelle que soit la forme du signal $s(t)$, que son spectre soit discret ou continu, de fréquence maximale f_{max}. Multiplier $s(t)$ par $cos(k2\pi f_e t)$ décale le spectre de $s$et le dédouble autour de kf_e.





Pour que l'opération d'échantillonnage se fasse sans perte d'information, c'est-à-dire, pour que l'on puisse, à partir du signal échantillonné retrouver simplement ensuite le signal $s(t)$, il faut qu'il n'y ait pas chevauchement des différents motifs fréquentiels sur le graphe ci-dessus. On aboutit ainsi à la condition de Nyquist-Shannon:

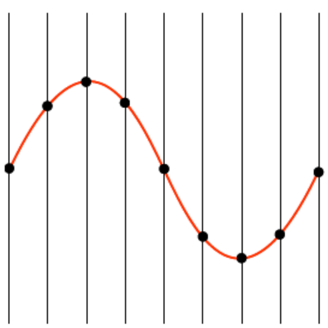
$$f_e >> 2f_{max}$$

Remarque: Cela suppose qu'il existe une fréquence maximale f_{max}, ce qui n'est pas le cas des signaux de durée limitée dans le temps (Voir : Notions sur la transformée de Fourier)! Dans ce cas, on utilise un filtre passe-bas (filtre "anti-repliement") qui limite les fréquences du signal à échantillonner.

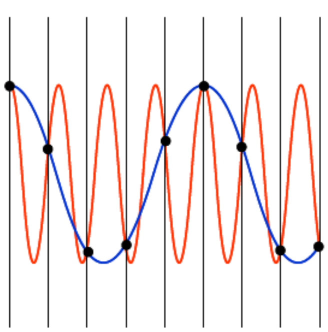
b. Exemple. Repliement de spectre

Supposons que la fonction à échantillonner soit une fonction sinusoïdale de fréquence f. Quel est le spectre obtenu pour le signal échantillonné ?

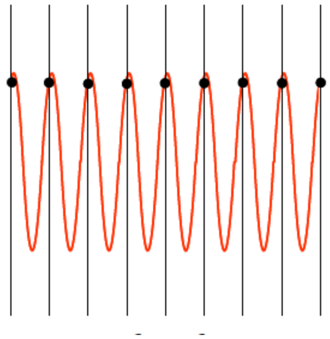
- Sur les graphes ci-dessous sont représentés le signal s (en rouge sur la présentation) et les points "échantillons" en noir dans plusieurs cas:
  - Cas 1: $f_e > 2f$:



  - Cas 2: $f_e < 2f$:



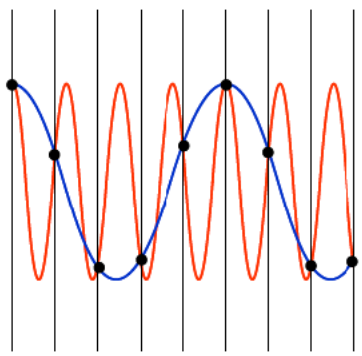
– Cas 3: $fe = f$:

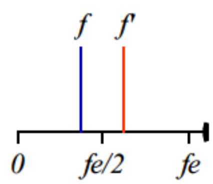


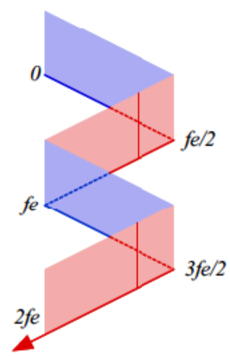
Dans les deux derniers cas, il n'est pas possible de reconstituer le signal d'origine à partir du signal échantillonné.

- Pour le cas 2 la courbe sinusoïdale (celle de plus grande période sur le schéma) de fréquence $f' = f_e - f$ donne les mêmes points échantillons que s .

En effet , soit $s_1(t) = cos(2\pi ft)$ et $s_2(t) = cos(2\pi(f_e - f)t)$. Pour $t = pT_e = p/f_e$, avec p entier, $s_1(t) = s_2(t)$.
Cet effet est appelé "*repliement de spectre*". Ajouter nf_e à f ou à f' ne change pas non plus les échantillons







Remarque: on observe ce phénomène lorsqu'on regarde un vieux film dans lequel tourne une roue de chariot. La roue peut sembler tourner à une vitesse surprenante, parfois même à l'envers. La fréquence d'échantillonnage du film est en général de 24 images par seconde; donc tous les phénomènes périodiques dont la fréquence est supérieure à 12Hz vont subir ce repliement de fréquence

Pour vous familiariser avec le repliement de spectre:
Utilisez le tutoriel de Jean-Marie Biansan pour le calcul de spectres: http://jeanmarie.biansan.free.fr/tuto_fourier.html
Comparez TF d'une fonction fenêtrée et TF d'une fonction fenêtrée échantillonnée en fonction de la fréquence d'échantillonnage

- pour une sinusoïde avec fenêtre sur 10 périodes
- pour un train d'impulsions.

II. Application en TP. Utilisation de la FFT d'un oscillo numérique

Le but de ces manipulations est de se rendre compte du repliement de spectre dans l'utilisation de la fonction FFT d'un oscillo numérique, et des conséquences du non-respect de la condition de Nyquist-Shannon.

Le signal analogique fourni par un GBF est échantillonné par l'oscilloscope numérique AGILENT. On en réalise le spectre grâce à la fonction FFT.

Manipulation 1

- Régler le GBF pour qu'il délivre un signal sinusoïdal pur (sans composante continue) d'amplitude quelques V et de fréquence f =45 kHz. Vérifier sur l'oscillo numérique les valeurs de l'amplitude, la fréquence.
- Afficher un grand nombre de périodes sur l'écran et afficher le spectre. La fréquence d'échantillonnage peut être réglée en modifiant la base de temps car le nombre de points échantillons est fixe pour une plage en fréquence déterminée. Choisir par exemple une fréquence centrale de 25 kHz et une plage de 100 kHz
- Afficher une fréquence d'échantillonnage f_e (indiquée en Sa/s=samples/s) de 100 kSa/s=100kHz/s et mesurer la fréquence donnée par la FFT. Est-ce bien cohérent?
- Augmenter progressivement la fréquence du GBF. Qu'observez-vous? Pour quelle nouvelle valeur de f l'oscillo indique-t-il une composante spectrale à 45 kHz? Justifiez.
- Comment se débarrasser du problème de repliement?

Manipulation 2

- Recommencer l'expérience précédente avec un signal créneau de valeur moyenne nulle d'amplitude quelques volts et de fréquence f =45 kHz. Quelles sont les valeurs théoriques des fréquences du spectre de ce signal?
- Mesurer les fréquences indiquées par la FFT pour une fréquence d'échantillonnage de l'ordre du $f_e = 1$ MSa/s (=MHz). Puis abaisser progressivement f_e. À partir de quelle fréquence d'échantillonnage environ observe-t-on le repliement ? Interpréter.
- Recommencer l'expérience avec un signal triangle. Interpréter.

Annexe : FFT avec l'oscilloscope numérique Agilent

- Pour obtenir la FFT d'un signal (transformée de Fourier d'un signal échantillonné):

- appuyer sur la touche [*Maths*] sur le panneau de droite de l'oscillo. S'affiche en bas de l'écran un menu.
- Sélectionner sur la touche [*fonction*] : f(t), puis sur la touche [*opérateur*]: FFT
- Sélectionner sur la touche [*Source*1] la voie de l'oscillo correspondant au signal du GBF. Quand la fonction FFT est activée, le spectre apparaît sur l'écran avec en ordonnées les amplitudes des composantes en dB et en abscisses la fréquence
- [*Plage*] définit la largeur totale du spectre FFT (diviser par 10 pour avoir le nombre de Hz par division) et [*Centre*]définit le milieu du domaine de fréquences souhaité. Ces paramètres peuvent être modifiés en tournant le bouton de réglage
- Appuyer sur [*AutreFFT*] pour accéder aux autres paramètres. Le choix de [*Fenêtre*] dépend du type de mesure souhaitée: choisir "Hanning" ou bien si vous voulez des mesures précises d'amplitudes relatives "Sommet Plat". Le choix de [*Echelle*] permet de choisir entre dB et Volts

- Pour faire des mesures (de fréquences!) par curseurs: appuyer sur [*Cursors*], puis sur [*Source*], choisir Math: f(t). Pour faire d'autres mesures, appuyer sur [*Meas*], puis sur [*Source*], choisir Math: f(t). Pour repasser des mesures sur le signal fourni par le GBF, il suffit de changer la source.