Розрахункова робота

з теорії ймовірностей

студентки групи КА-92

Катасанової Карини

Варіант 35

Завдання №1

Дискретний випадковий вектор $\overrightarrow{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ задано таблицею розподілу (таблиця1).

Таблиця 1 - таблиця розподілу вектора ξ:

ξ_1 \ ξ_2	-5	-3	2	3
-4	0,02	0,14	0,06	0,03
-2	0,1	0,09	0,11	0,1
2	0,11	0,03	0,01	0,2

Бачимо, що:

$$n = 3, \quad x_1 = -4, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 2$$
$$m = 4, \quad y_1 = -5, \quad y_2 = -3, \quad y_3 = 2, \quad y_4 = 3$$

Значення $p_{kj} = P\left\{\xi_1 = x_k, \xi_2 = y_j\right\}, \quad k = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,4}$ занесені у таблицю 1.

РЯДИ РОЗПОДІЛУ КООРДИНАТ ξ_1 ТА ξ_2

$P\{\xi_1 = x_k\} = P\left(A_k\right), \quad k = \overline{1,3}$. Подія A_k відбувається разом з гіпотезами $B_j = \{\xi_2 = y_j\}, \quad j = \overline{1,4}$, при чому $B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4$ утворюють повну групу подій, тобто $\cup_{j=1}^{4} B_j = U$, $B_{j_1} \cap B_{j_2} = \varnothing$, при $j_1 \neq j_2$.
За формулою повної ймовірності:

$$P\{\xi_1 = x_k\} = P\left(A_k\right) = \sum_{j=1}^{4} P\left(B_j\right) P\left(A_k/B_j\right) = \sum_{j=1}^{4} P\left(A_k \cap B_j\right) = \sum_{j=1}^{4} p_{kj} \quad (1.1)$$

Аналогічно для другої координати:

$$P\{\xi_2 = y_j\} = P\left(B_j\right) = \sum_{k=1}^{3} P\left(A_k\right) P\left(B_j/A_k\right) = \sum_{k=1}^{3} P\left(A_k \cap B_j\right) = \sum_{k=1}^{3} p_{kj} \quad (1.2)$$

Отримали формули (1.1) та (1.2).
За формулою (1.1):

$$P\{\xi_1 = -4\} = 0,02 + 0,14 + 0,06 + 0,03 = 0,25$$

$$P\{\xi_1 = -2\} = 0,1 + 0,09 + 0,11 + 0,1 = 0,4$$

$$P\{\xi_1 = \ 2\} = 0,11 + 0,03 + 0,01 + 0,2 = 0,35$$

Для перевірки скористаємось наступним:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{kj} = \sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{j=1}^{m} p_j = 1 \quad (1.3)$$

$$\sum_{k=1}^{3} p_k = P\{\xi_1 = -4\} + P\{\xi_1 = -2\} + P\{\xi_1 = \ 2\} = 0,25 + 0,4 + 0,35 = 1$$

За формулою (1.2):

$$P\{\xi_2 = -5\} = 0,02 + 0,1 + 0,11 = 0,23$$

$$P\{\xi_2 = -3\} = 0,14 + 0,09 + 0,03 = 0,26$$

$$P\{\xi_2 = 2\} = 0,06 + 0,11 + 0,01 = 0,18$$

$$P\{\xi_2 = 3\} = 0,03 + 0,1 + 0,2 = 0,33$$

Перевірка (за формулою (1.3)):

$$\sum_{j=1}^{4} p_j = P\{\xi_2 = -5\} + P\{\xi_2 = -3\} + P\{\xi_2 = 2\} + \{\xi_2 = 3\} = 0,23 + 0,26 + 0,18 + 0,33 = 1$$

Отримали ряди розподілу:

Таблиця 2 - ряд розподілу ξ_1:

ξ_1	-4	-2	2
p	0,25	0,4	0,35

Таблиця 3 - ряд розподілу ξ_2:

ξ_2	-5	-3	2	3
p	0,23	0,26	0,18	0,33

ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ КООРДИНАТ ξ_1 та ξ_2

За означенням $F_{\xi_i}(x) = P\{\xi_i < x\} \quad (i = 1, 2),\ x \in \mathbb{R}$.
Для першої координати:

ξ_1	-4	-2	2
p	0,25	0,4	0,35

$$F_{\xi_1}(x) = P\{\xi_1 < x\} = \begin{cases} P(\varnothing) = 0, & x \le -4 \\ P\{\xi_1 = -4\} = 0,25, & -4 < x \le -2 \\ P\{\{\xi_1 = -4\} \cup \{\xi_1 = -2\}\} = & \\ = P\{\xi_1 = -4\} + P\{\xi_1 = -2\} = & \\ = 0,25 + 0,4 = 0,65, & -2 < x \le 2 \\ P\{\{\xi_1 = -4\} \cup \{\xi_1 = -2\} \cup \{\xi_1 = 2\}\} = & \\ = P\{\xi_1 = -4\} + P\{\xi_1 = -2\} + P\{\xi_1 = 2\} = & \\ = 0,25 + 0,4 + 0,35 = 1, & x > 2 \end{cases}$$

Отримали **функцію розподілу першої координати**:

$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le -4 \\ 0,25, & \text{при } -4 < x \le -2 \\ 0,65, & \text{при } -2 < x \le 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

Рисунок 1 - графік функції розподілу $F_{\xi_1}(x)$:

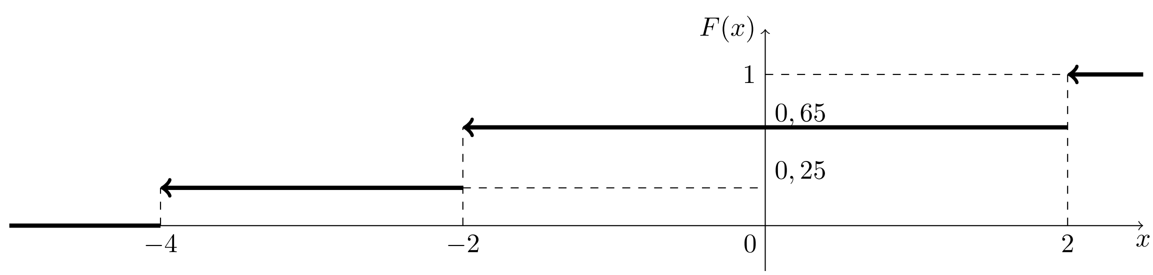

Рисунок 1

Анлогічно для другої координати:

ξ_2	-5	-3	2	3
p	0,23	0,26	0,18	0,33

$$F_{\xi_2}(y) = P\{\xi_2 < y\} = \begin{cases} P(\varnothing) = 0, & y \le -5 \\ P\{\xi_2 = -5\} = 0,23, & -5 < y \le -3 \\ P\{\{\xi_2 = -5\} \cup \{\xi_2 = -3\}\} = & \\ = P\{\xi_2 = -5\} + P\{\xi_2 = -3\} = & \\ = 0,23 + 0,26 = 0,49, & -3 < y \le 2 \\ P\{\{\xi_2 = -5\} \cup \{\xi_2 = -3\} \cup \{\xi_2 = 2\}\} = & \\ = P\{xi_2 = -5\} + P\{\xi_2 = -3\} + P\{\xi_2 = 2\} = & \\ = 0,23 + 0,26 + 0,18 = 0,67, & 2 < y \le 3 \\ P\{\{\xi_2 = -5\} \cup \{\xi_2 = -3\} \cup \{\xi_2 = 2\} \cup \{\xi_2 = 3\}\} = & \\ = P\{\xi_2 = -5\} + P\{\xi_2 = -3\} + & \\ +P\{\xi_2 = 2\} + P\{\xi_2 = 3\} = & \\ = 0,23 + 0,36 + 0,18 + 0,33 = 1, & y > 3 \end{cases}$$

Отримали **функцію розподілу другої координати**:

$$F_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0, & \text{при } y \le -5 \\ 0,23, & \text{при } -5 < y \le -3 \\ 0,49, & \text{при } -3 < y \le 2 \\ 0,67, & \text{при } 2 < y \le 3 \\ 1, & \text{при } y > 3 \end{cases}$$

Рисунок 2 - графік функції розподілу $F_{\xi_2}(y)$:

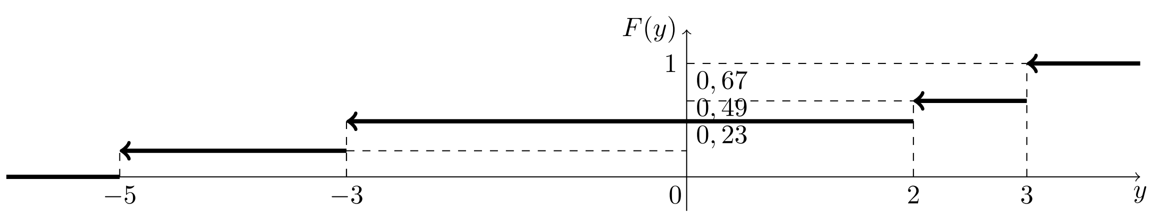

Рисунок 2

СУМІСНА ФУНКЦІЯ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВОГО ВЕКТОРА $\overrightarrow{\xi}$

Скористаємось геометричною інтерпретацією:

$F_{\overrightarrow{\xi}}(x, y) = P\{\xi_1 < x, \xi_2 < y\}$ - ймовірність потрапляння випадкового вектора всередину нескінченного квадарата з вершиною в т. (x, y)

Використаємо формулу:

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \sum_{k: x_k < x} \sum_{j: y_j < y} p_{kj}$$

Для зручності, намалюємо в декартовій системі координат усі точки, що відповідають значенню вектора $\vec{\xi}$ (рисунок 3):

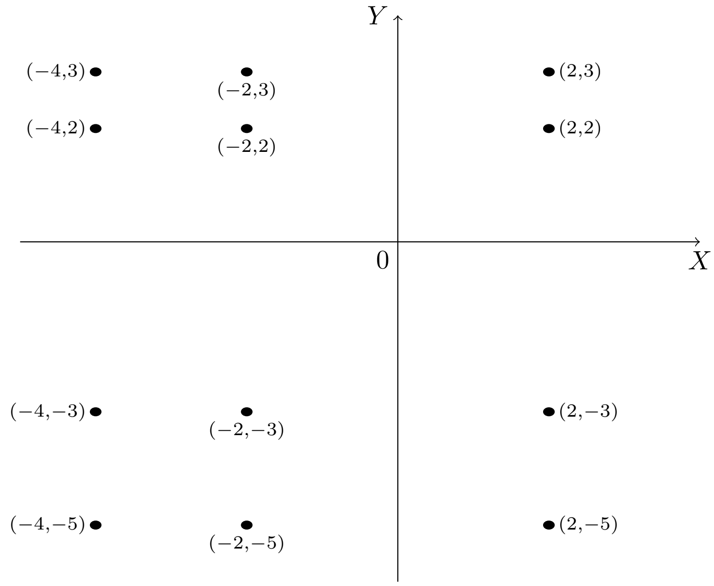

Рисунок 3

Обчислимо значення сумісної функції розподілу в кожній області $D_{k,j}$, $k = \overline{1,3},\ j = \overline{1,4}$. Для наочності кожен випадок супроводжується малюнком (рис. 4 - 16).

1. $(x \leq -4) \vee (y \leq -5)$

$F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0$

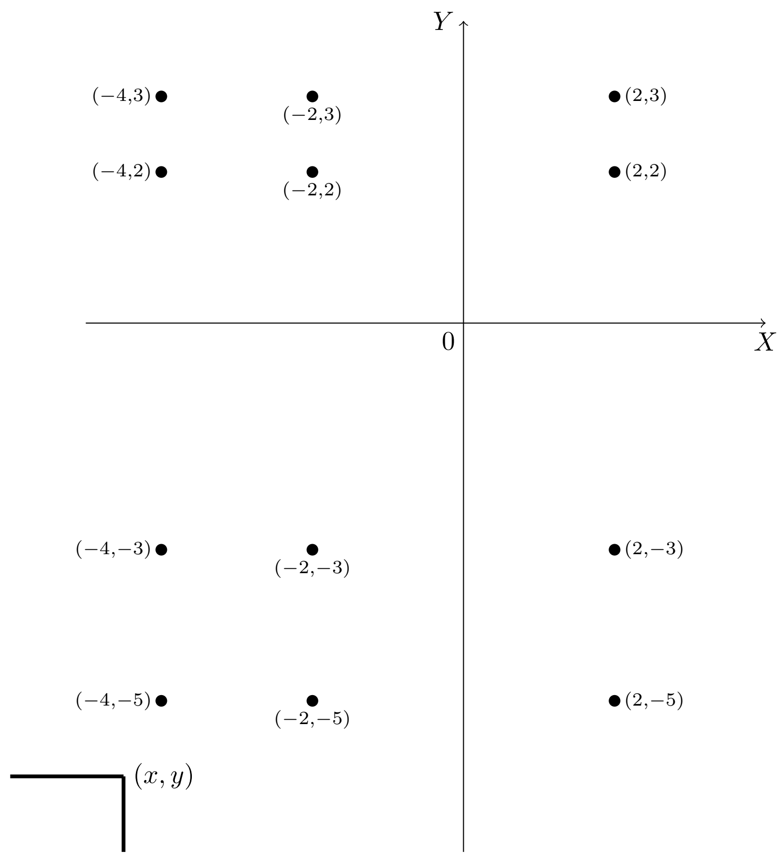

Рисунок 4

2. $D_{1,1} = \left\{ \text{(x,y)} \;\middle|\; \begin{array}{l} -4 < x \leq -2, \\ -5 < y \leq -3. \end{array} \right\}$

$F_{\vec{\xi}}(x, y) = P\{\xi_1 = -4,\ \xi_2 = -5\} = 0,02$

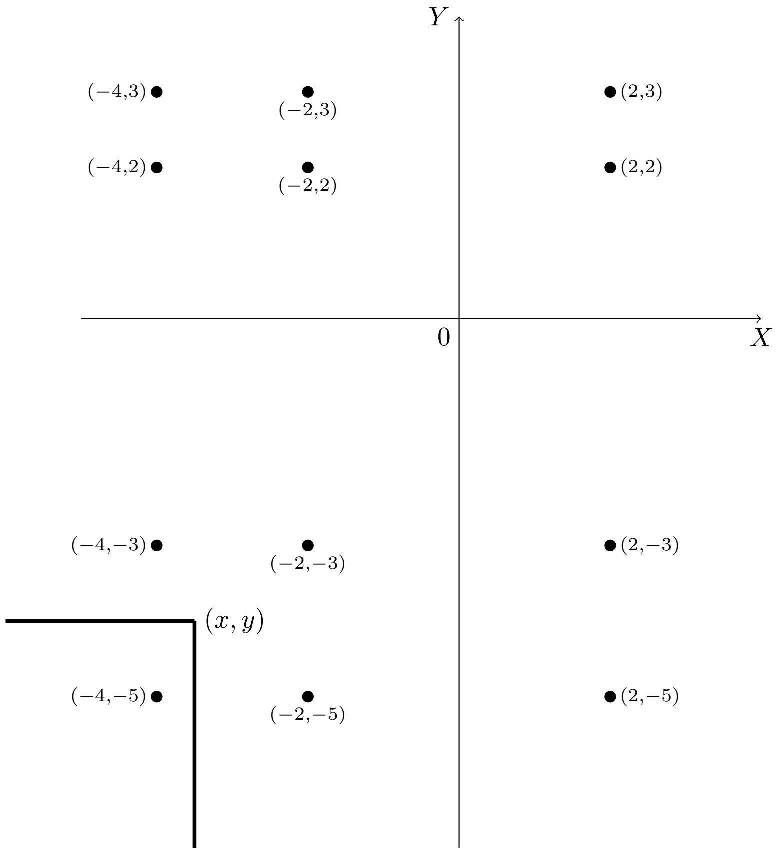

Рисунок 5

3. $D_{2,1} = \left\{ \text{(x,y)} \;\middle|\; \begin{array}{c} -2 < x \leq 2, \\ -5 < y \leq -3. \end{array} \right\}$

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = -4,\ \xi_2 = -5\} + P\{\xi_1 = -2,\ \xi_2 = -5\} =$$
$$= 0,02 + 0,1 = 0,12$$

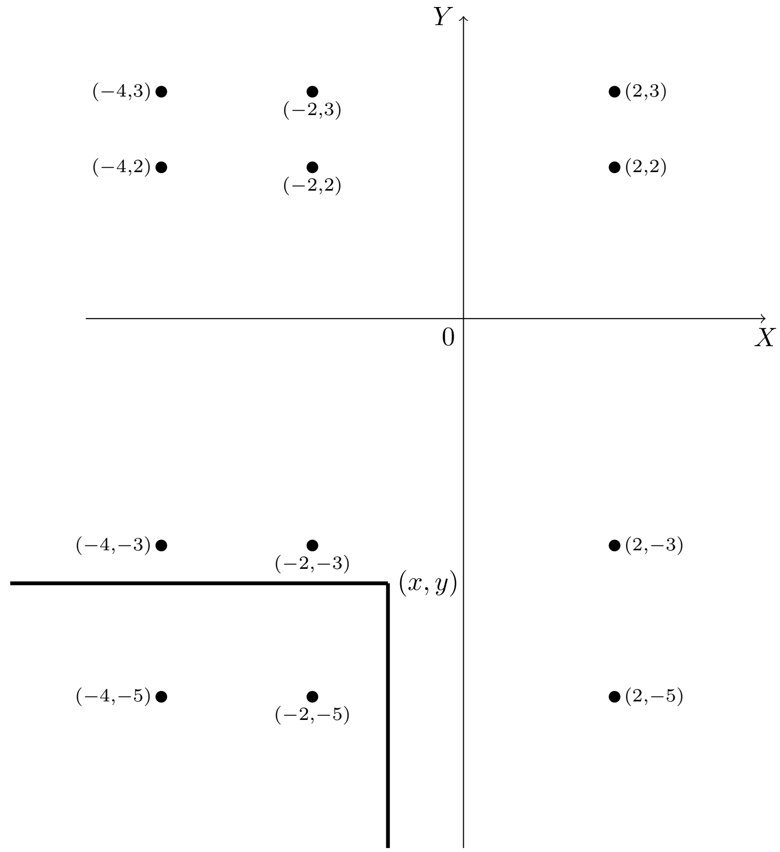

Рисунок 6

4. $D_{3,1} = \left\{ \text{(x,y)} \;\middle|\; \begin{array}{c} x > 2, \\ -5 < y \leq -3. \end{array} \right\}$

$F_{\vec{\xi}}(x, y) = P\{\xi_1 = -4,\ \xi_2 = -5\} + P\{\xi_1 = -2,\ \xi_2 = -5\}+$
$P\{\xi_1 = 2,\ \xi_2 = -5\} = 0,02 + 0,1 + 0,11 = 0,23$

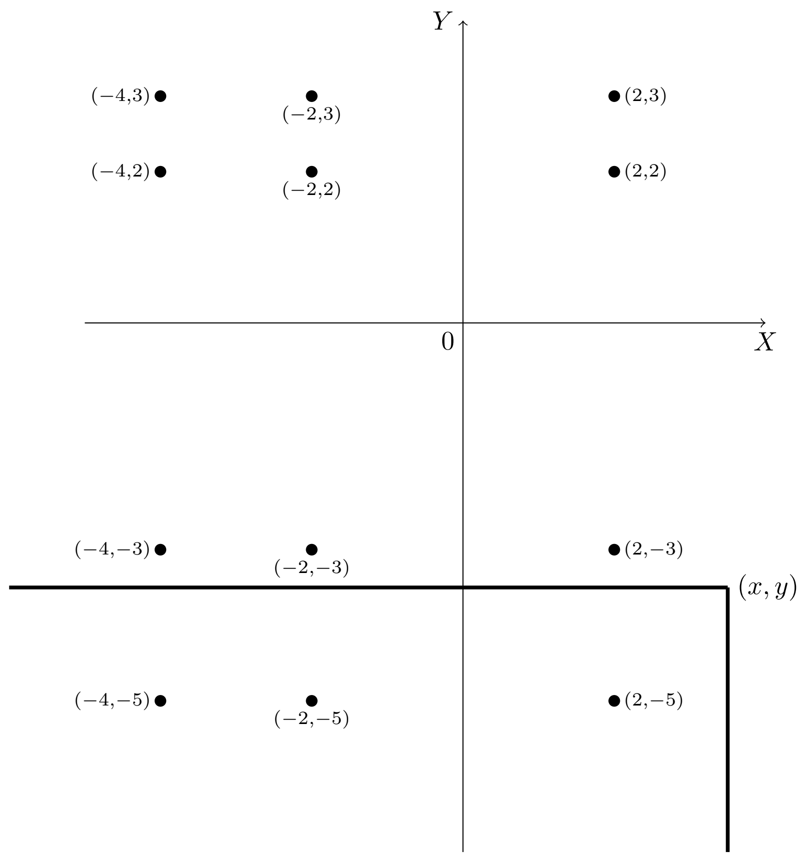

Рисунок 7

5. $D_{1,2} = \left\{ \text{(x,y)} \;\middle|\; \begin{array}{c} -4 < x \leq -2, \\ -3 < y \leq 2. \end{array} \right\}$

$F_{\vec{\xi}}(x, y) = P\{\xi_1 = -4,\ \xi_2 = -5\} + P\{\xi_1 = -4,\ \xi_2 = -3\} =$
$= 0,02 + 0,14 = 0,16$

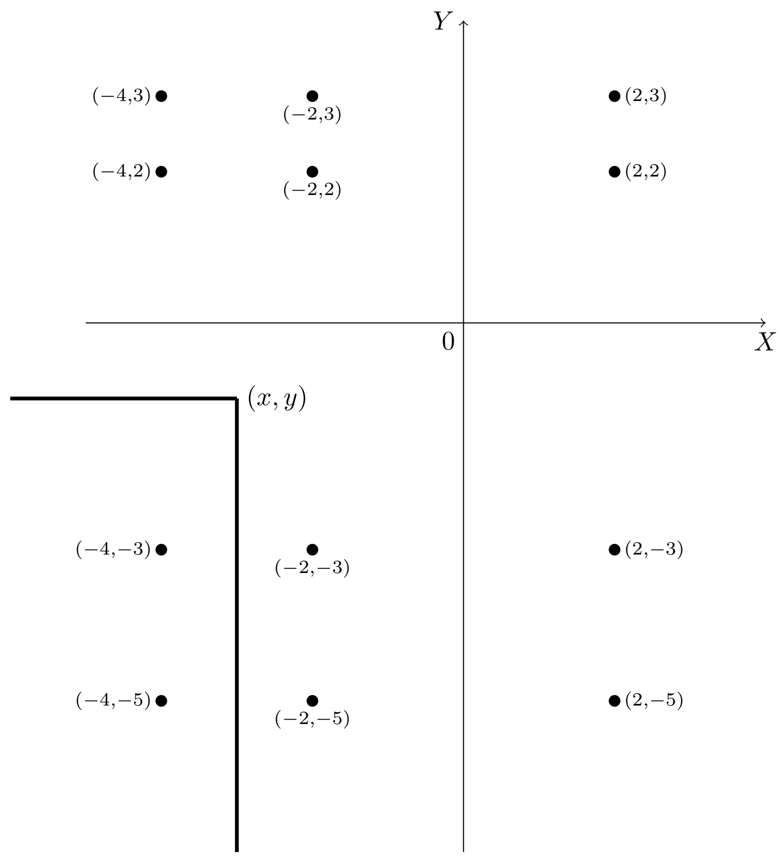

Рисунок 8

6. $D_{2,2} = \left\{ \text{(x,y)} \;\middle|\; \begin{array}{l} -2 < x \leq 2, \\ -3 < y \leq 2. \end{array} \right\}$

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = P\{\xi_1 = -4,\ \xi_2 = -5\} + P\{\xi_1 = -4,\ \xi_2 = -3\} +$$
$$+ P\{\xi_1 = -2,\ \xi_2 = -5\} + P\{\xi_1 = -2,\ \xi_2 = -3\} =$$
$$= 0,02 + 0,14 + 0,1 + 0,09 = 0,35$$

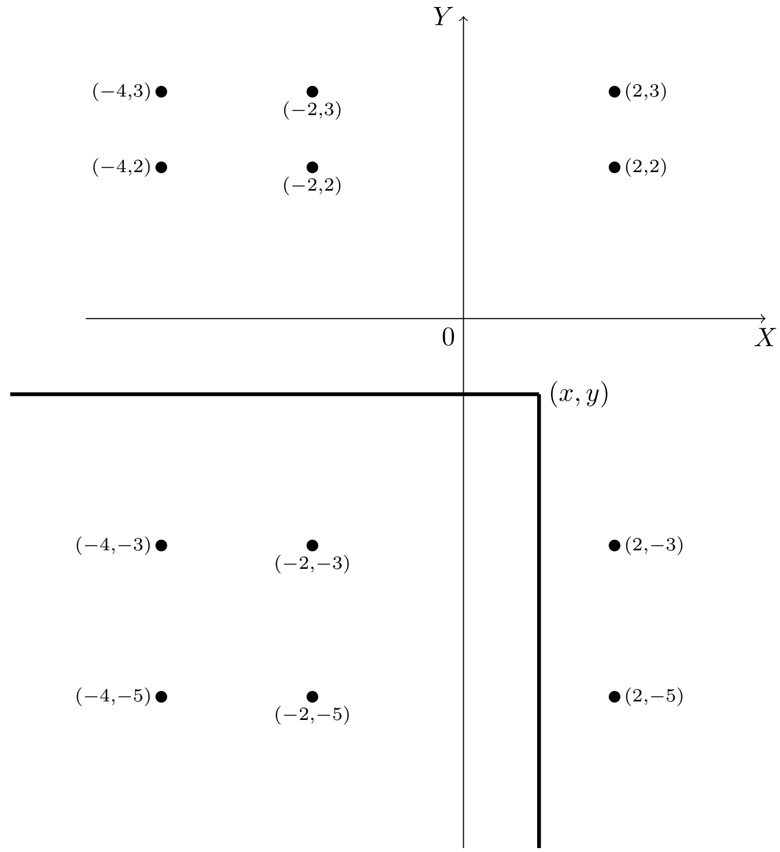

Рисунок 9

7. $D_{3,2} = \left\{ \begin{array}{c|c} \text{(x,y)} & \begin{array}{c} x > 2, \\ -3 < y \leq 2. \end{array} \end{array} \right\}$

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = P\{\xi_1 = -4,\ \xi_2 = -5\} + P\{\xi_1 = -4,\ \xi_2 = -3\}+$$
$$+P\{\xi_1 = -2,\ \xi_2 = -5\} + P\{\xi_1 = -2,\ \xi_2 = -3\}+$$
$$+P\{\xi_1 = 2,\ \xi_2 = -5\} + P\{\xi_1 = 2,\ \xi_2 = -3\} =$$
$$= 0,02 + 0,14 + 0,1 + 0,09 + 0,11 + 0,03 = 0,49$$

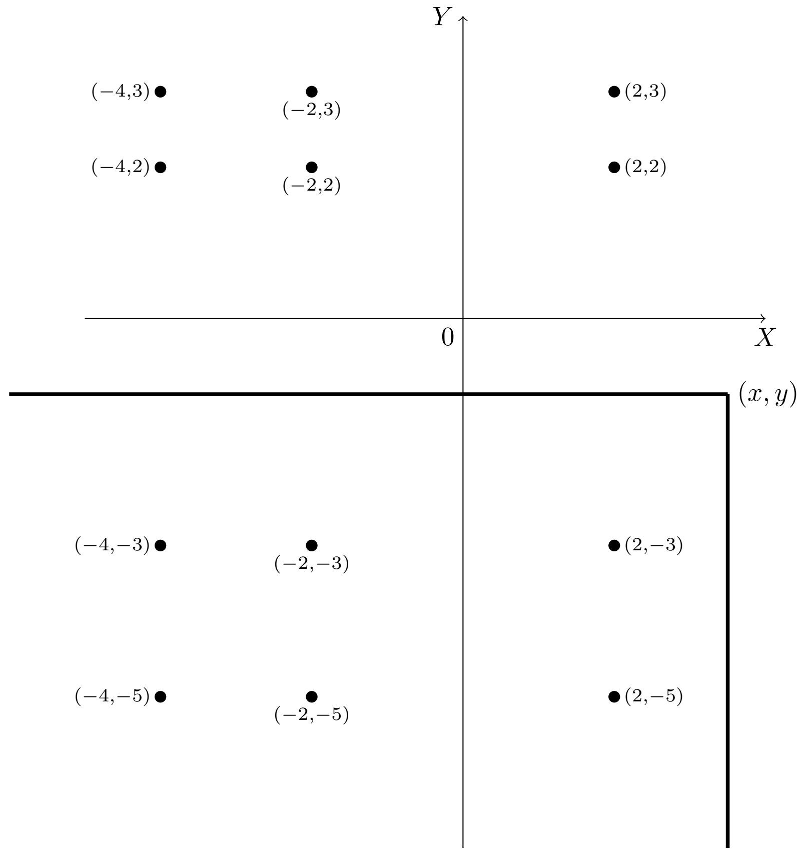

Рисунок 10

8. $D_{1,3} = \left\{ \text{(x,y)} \;\middle|\; \begin{matrix} -4 < x \leq -2, \\ 2 < y \leq 3. \end{matrix} \right\}$

$$
\begin{aligned}
&F_{\vec{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = -4,\ \xi_2 = -5\} + P\{\xi_1 = -4,\ \xi_2 = -3\}+ \\
&+P\{\xi_1 = -4,\ \xi_2 = 2\} = \\
&= 0,02 + 0,14 + 0,06 = 0,22
\end{aligned}
$$

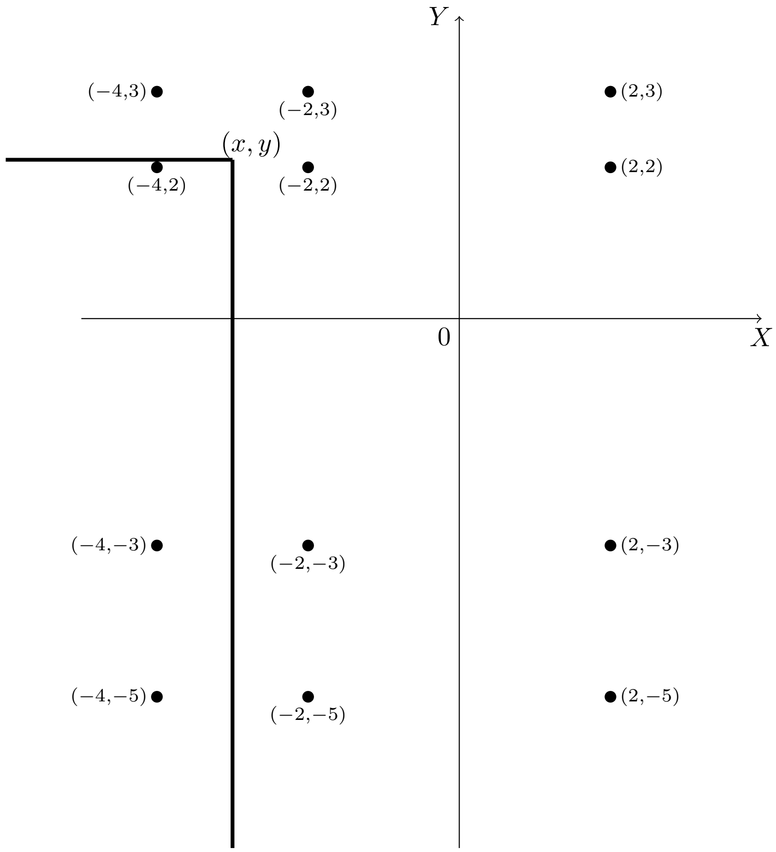

Рисунок 11

9. $D_{2,3} = \left\{ \text{(x,y)} \;\middle|\; \begin{array}{c} -2 < x \leq 2, \\ 2 < y \leq 3. \end{array} \right\}$

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = P\{\xi_1 = -4,\ \xi_2 = -5\} + P\{\xi_1 = -4,\ \xi_2 = -3\} +$$
$$+ P\{\xi_1 = -4,\ \xi_2 = 2\} + P\{\xi_1 = -2,\ \xi_2 = -5\} +$$
$$+ P\{\xi_1 = -2,\ \xi_2 = -3\} + P\{\xi_1 = -2,\ \xi_2 = 2\} =$$
$$= 0,02 + 0,14 + 0,06 + 0,1 + 0,09 + 0,11 = 0,52$$

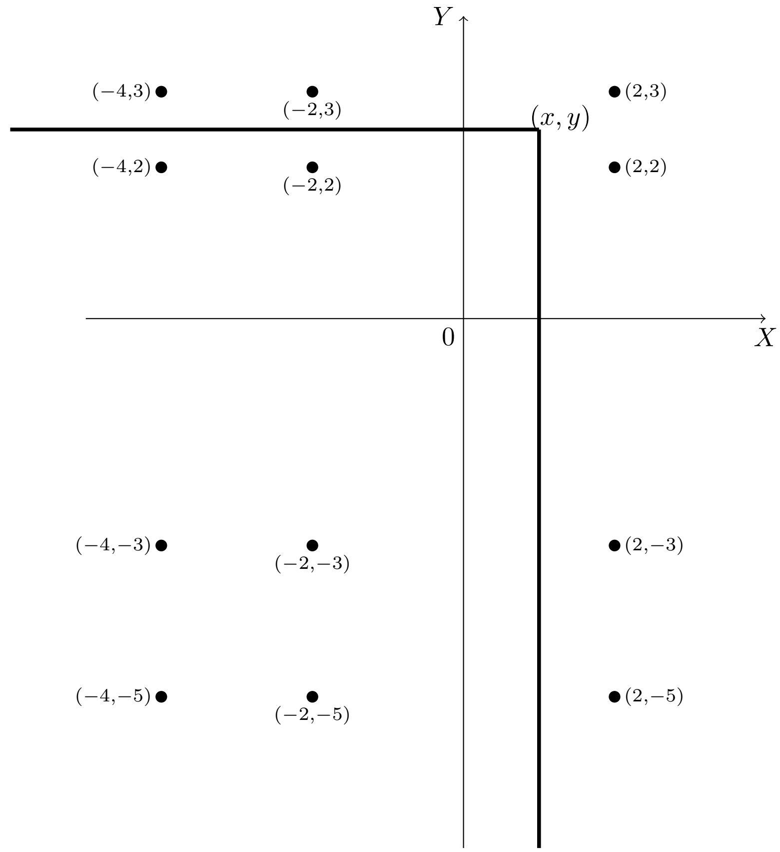

Рисунок 12

10. $D_{3,3} = \left\{ \begin{array}{c|c} \text{(x,y)} & \begin{array}{c} x > 2, \\ 2 < y \leq 3. \end{array} \end{array} \right\}$

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = -4,\ \xi_2 = -5\} + P\{\xi_1 = -4,\ \xi_2 = -3\} +$$
$$+ P\{\xi_1 = -4,\ \xi_2 = 2\} + P\{\xi_1 = -2,\ \xi_2 = -5\} +$$
$$+ P\{\xi_1 = -2,\ \xi_2 = -3\} + P\{\xi_1 = -2,\ \xi_2 = 2\} +$$
$$+ P\{\xi_1 = 2,\ \xi_2 = -5\} + P\{\xi_1 = 2,\ \xi_2 = -3\} +$$
$$+ P\{\xi_1 = 2,\ \xi_2 = 2\} = 0,02 + 0,14 + 0,06 + 0,1 + 0,09 + 0,11 + 0,11 +$$
$$0,03 + 0,01 = 0,67$$

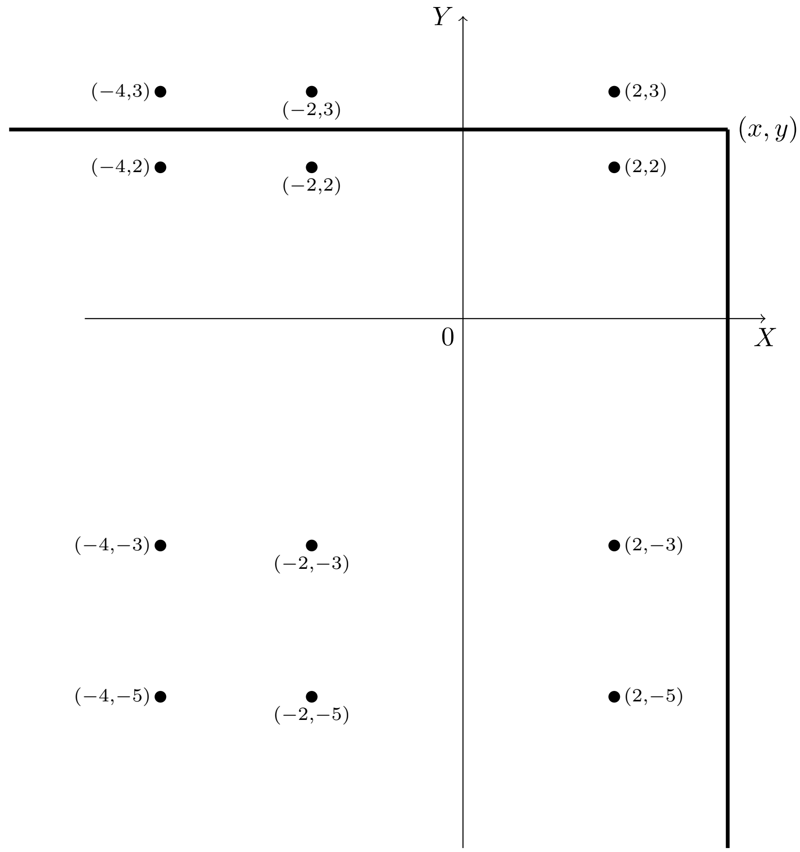

Рисунок 13

11. $D_{1,4} = \left\{ \text{(x,y)} \;\middle|\; \begin{array}{c} -4 < x \leq -2, \\ y > 3. \end{array} \right\}$

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = -4,\ \xi_2 = -5\} + P\{\xi_1 = -4,\ \xi_2 = -3\}+$$
$$+P\{\xi_1 = -4,\ \xi_2 = 2\} + P\{\xi_1 = -4,\ \xi_2 = 3\} =$$
$$= 0,02 + 0,14 + 0,06 + 0,03 = 0,25$$

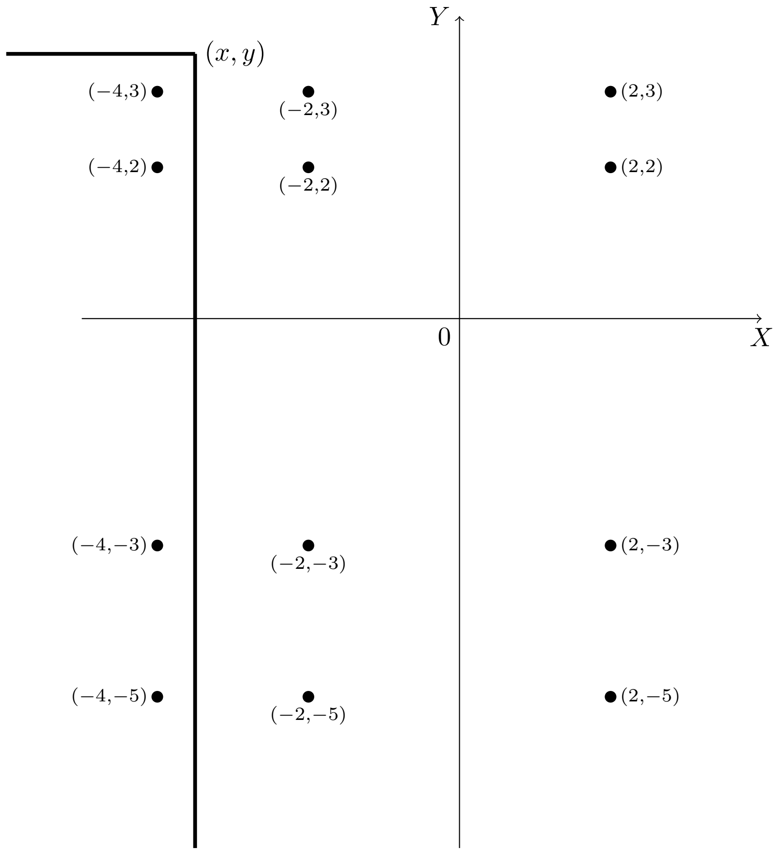

Рисунок 14

12. $D_{2,4} = \left\{ \begin{array}{c|c} \text{(x,y)} & \begin{array}{c} -2 < x \leq 2, \\ y > 3. \end{array} \end{array} \right\}$

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = -4,\ \xi_2 = -5\} + P\{\xi_1 = -4,\ \xi_2 = -3\} +$$
$$+ P\{\xi_1 = -4,\ \xi_2 = 2\} + P\{\xi_1 = -4,\ \xi_2 = 3\} +$$
$$+ P\{\xi_1 = -2,\ \xi_2 = -5\} + P\{\xi_1 = -2,\ \xi_2 = -3\} +$$
$$+ P\{\xi_1 = -2,\ \xi_2 = 2\} + P\{\xi_1 = -2,\ \xi_2 = 3\} =$$
$$= 0,02 + 0,14 + 0,06 + 0,03 + 0,1 + 0,09 + 0,11 + 0,1 = 0,65$$

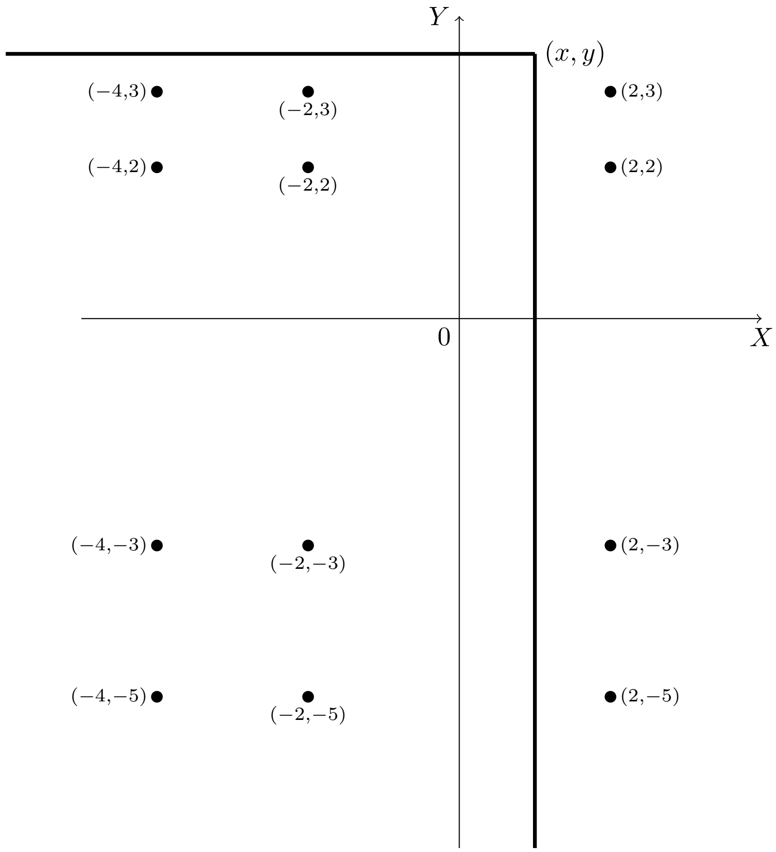

Рисунок 15

13. $D_{3,4} = \left\{ \begin{array}{c|c} \text{(x,y)} & \begin{array}{l} x > 2, \\ y > 3. \end{array} \end{array} \right\}$

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = -4,\ \xi_2 = -5\} + P\{\xi_1 = -4,\ \xi_2 = -3\}+$$
$$+P\{\xi_1 = -4,\ \xi_2 = 2\} + P\{\xi_1 = -4,\ \xi_2 = 3\}+$$
$$+P\{\xi_1 = -2,\ \xi_2 = -5\} + P\{\xi_1 = -2,\ \xi_2 = -3\}+$$
$$+P\{\xi_1 = -2,\ \xi_2 = 2\} + P\{\xi_1 = -2,\ \xi_2 = 3\}+$$
$$+P\{\xi_1 = 2,\ \xi_2 = -5\} + P\{\xi_1 = 2,\ \xi_2 = -3\}+$$
$$+P\{\xi_1 = 2,\ \xi_2 = 2\} + P\{\xi_1 = 2,\ \xi_2 = 3\} =$$
$$= 0,02 + 0,14 + 0,06 + 0,03 + 0,1 + 0,09 + 0,11 + 0,1 + 0,11 + 0,03 +$$
$$0,01 + 0,2 = 1$$

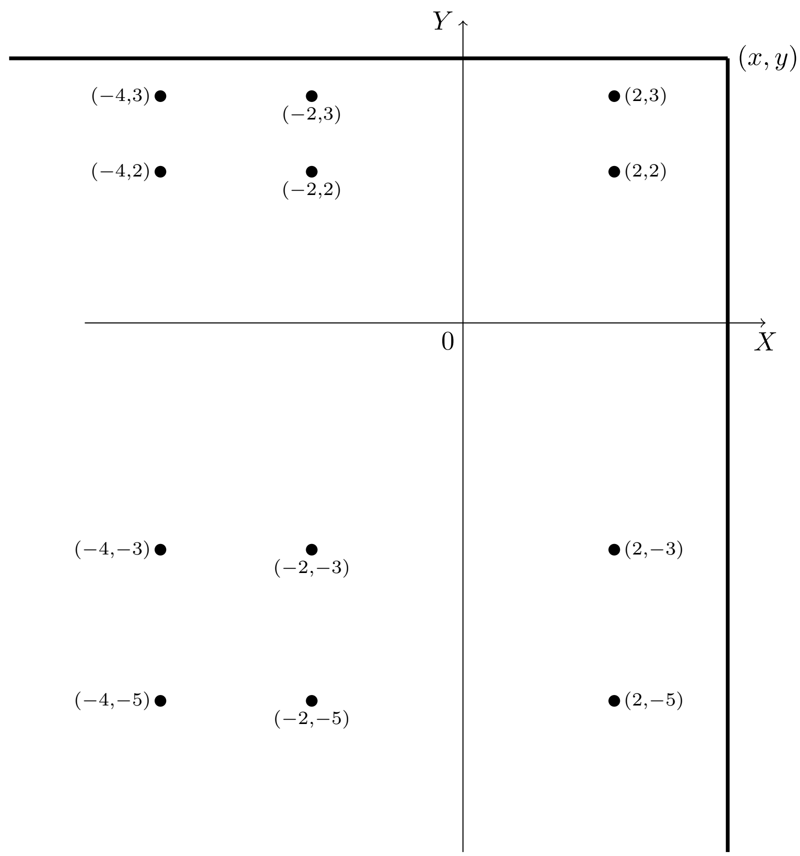

Рисунок 16

Отримали сумісну функцію розподілу, яку можна записати у вигляді таблиці 4.

Таблиця 4 - функція $F_{\vec{\xi}}(x, y)$:

$y \setminus x$	$x \leq -4$	$-4 < x \leq -2$	$-2 < x \leq 2$	x>2
$y \leq -5$	0	0	0	0
$-5 < y \leq -3$	0	0,02	0,12	0,23
$-3 < y \leq 2$	0	0,16	0,35	0,49
$2 < y \leq 3$	0	0,22	0,52	0,67
$y > 3$	0	0,25	0,65	1

Або

$$F_{\vec{\xi}}(x,y)=\begin{cases}0, & (x\le -4)\wedge(y\le -5)\\ 0,02, & (-4<x\le -2)\wedge(-5<y\le -3)\\ 0,12, & (-2<x\le 2)\wedge(-5<y\le -3)\\ 0,23, & (x>2)\wedge(-5<y\le -3)\\ 0,16, & (-4<x\le -2)\wedge(-3<y\le 2)\\ 0,35, & (-2<x\le 2)\wedge(-3<y\le 2)\\ 0,49, & (x>2)\wedge(-3<y\le 2)\\ 0,22, & (-4<x\le -2)\wedge(2<y\le 3)\\ 0,52, & (-2<x\le 2)\wedge(2<y\le 3)\\ 0,67, & (x>2)\wedge(2<y\le 3)\\ 0,25, & (-4<x\le -2)\wedge(y>3)\\ 0,65, & (-2<x\le 2)\wedge(y>3)\\ 1, & (x>2)\wedge(y>3)\end{cases}$$

Перевіримо умови узгодженості:$\lim_{x\to+\infty}F_{\vec{\xi}}(x,y)=F_{\xi_2}(y)$, $\lim_{y\to+\infty}F_{\vec{\xi}}(x,y)=F_{\xi_1}(x)$

$$-5<y\le -3:\lim_{x\to+\infty}F_{\vec{\xi}}(x,y)=0,23=F_{\xi_2}(y)$$

$$-3<y\le 2:\lim_{x\to+\infty}F_{\vec{\xi}}(x,y)=0,49=F_{\xi_2}(y)$$

$$2<y\le 3:\lim_{x\to+\infty}F_{\vec{\xi}}(x,y)=0,67=F_{\xi_2}(y)$$

$$y>3:\lim_{x\to+\infty}F_{\vec{\xi}}(x,y)=1=F_{\xi_2}(y)$$

Дійсно, $\lim_{x\to+\infty}F_{\vec{\xi}}(x,y)=F_{\xi_2}(y)$

$$-4<x\le -2:\lim_{y\to+\infty}F_{\vec{\xi}}(x,y)=0,25=F_{\xi_1}(x)$$

$$-2<x\le 2:\lim_{y\to+\infty}F_{\vec{\xi}}(x,y)=0,65=F_{\xi_1}(x)$$

$$x>2:\lim_{y\to+\infty}F_{\vec{\xi}}(x,y)=0,25=F_{\xi_1}(x)$$

Дійсно, $\lim_{y\to+\infty}F_{\vec{\xi}}(x,y)=F_{\xi_1}(x)$

МАТЕМАТИЧНІ СПОДІВАННЯ КООРДИНАТ. КОРЕЛЯЦІЙНА ТА НОРМОВАНА КОРЕЛЯЦІЙНА МАТРИЦІ

а)Знайдемо математичне сподівання координати ξ_1. Її ряд розподілу:

ξ_1	-4	-2	2
p	0,25	0,4	0,35

$$E\xi_1 = \sum_{k=1}^{3} x_k p_k = (-4 \cdot 0,25) + (-2 \cdot 0,4) + (2 \cdot 0,35) = -1 - 0,8 + 0,7 = -1,1$$

Аналогічно для ξ_2.

ξ_2	-5	-3	2	3
p	0,23	0,26	0,18	0,33

$$E\xi_2 = \sum_{j=1}^{4} y_j p_j = (-5 \cdot 0,23) + (-3 \cdot 0,26) + (2 \cdot 0,18) + (3 \cdot 0,33) = -1,15 - 0,78 + 0,36 + 0,99 = -0,58$$

Центр розсіювання вектора $\vec{\xi}$ - точка $(-1,1; -0,58)$

б) Будуємо кореляційну матрицю

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} D\xi_1 & K(\xi_1,\xi_2) \\ \\ K(\xi_1,\xi_2) & D\xi_2 \end{pmatrix}$$

$D\xi_i$ - дисперсія випадкової величини $\xi_i \quad (i = 1, 2)$

$K(\xi_1, \xi_2)$ - кореляційний момент ξ_1 та ξ_2

$$K(\xi_1,\xi_2) = E(\xi_1 - E\xi_1)(\xi_2 - E\xi_2) = E\xi_1\xi_2 - E\xi_1 E\xi_2 = \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} x_k y_j p_{kj} - E\xi_1 E\xi_2 =$$

$$= (-4)\cdot(-5)\cdot 0,02 + (-4)\cdot(-3)\cdot 0,14 + (-4)\cdot 2\cdot 0,06 + (-4)\cdot 3\cdot 0,03 +$$

$$+ (-2)\cdot(-5)\cdot 0,1 + (-2)\cdot(-3)\cdot 0,09 + (-2)\cdot 2\cdot 0,11 + (-2)\cdot 3\cdot 0,1 +$$

$$+ 2\cdot(-5)\cdot 0,11 + 2\cdot(-3)\cdot 0,03 + 2\cdot 2\cdot 0,01 + 2\cdot 3\cdot 0,2 -$$

$$-(-1,1)\cdot(-0,58) = 0,4 + 1,68 - 0,48 - 0,36 + 1 + 0,54 - 0,44 - 0,6 -$$

$$-1,1 - 0,18 + 0,04 + 1,2 - 0,638 = 1,062$$

$$D\xi_1 = E(\xi_1 - E\xi_1) = E\xi_1^2 - (E\xi_1)^2 = \sum_{k=1}^{3} x_k^2 p_k - (E\xi_1)^2 =$$

$$= 16 \cdot 0,25 + 4 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,35 - (-1,1)^2 = 7 - 1,21 = 5,79$$

$$D\xi_2 = E(\xi_2 - E\xi_2) = E\xi_2^2 - (E\xi_2)^2 = \sum_{j=1}^{4} y_j^2 p_j - (E\xi_2)^2 =$$

$$= 25 \cdot 0,23 + 9 \cdot 0,26 + 4 \cdot 0,18 + 9 \cdot 0,33 - (-0,58)^2 = 11,78 - 0,3364 = 11,4436$$

Отримуємо кореляційну матрицю:

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} 5,79 & 1,062 \\ 1,062 & 11,4436 \end{pmatrix}$$

Оскільки $K(\xi_1, \xi_2) \neq 0$, випадкові величини ξ_1 та ξ_2 є корельованими. Перевіримо додатну визначеність $\mathbb{K}(det\mathbb{K} > 0)$:

$$det\mathbb{K} = 5,79 \cdot 11,4436 - (1,062)^2 = 66,258444 - 1,127844 = 65,1306 > 0$$

Побудуємо нормовану кореляційну матрицю:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r(\xi_1, \xi_2) \\ r(\xi_1, \xi_2) & 1 \end{pmatrix}$$

де коефіцієнт кореляції $r(\xi_1, \xi_2) = \frac{K(\xi_1,\xi_2)}{\sqrt{D\xi_1\xi_2}} = \frac{1,062}{\sqrt{5,79 \cdot 11,4436}} = 0,1304679686 \approx 0,1305$ Отримуємо:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0,1305 \\ 0,1305 & 1 \end{pmatrix}$$

УМОВНІ РЯДИ РОЗПОДІЛУ ДЛЯ КОЖНОЇ КООРДИНАТИ

Обчислюємо умовні ймовірності $P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = y_j\}$ та $P\{\xi_2 = y_j/\xi_1 = x_k\}$

$$\begin{cases} P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = y_j\} = \frac{P\{\xi_1 = x_k,\ \xi_2 = y_j\}}{P\{\xi_2 = y_j\}} = \frac{p_{kj}}{p_k} \qquad (1.4) \\ \\ P\{\xi_2 = y_j/\xi_1 = x_k\} = \frac{P\{\xi_1 = x_k,\ \xi_2 = y_j\}}{P\{\xi_1 = x_j\}} = \frac{p_{kj}}{p_j} \qquad (1.5) \end{cases} ,(k = \overline{1,3},\ j = \overline{1,4})$$

З формули (1.4):

$$P\{\xi_1 = -4 \ / \ \xi_2 = -5\} = \frac{0,02}{0,23} = \frac{2}{23}$$

$$P\{\xi_1 = -4 \ / \ \xi_2 = -3\} = \frac{0,14}{0,26} = \frac{14}{26}$$

$$P\{\xi_1 = -4 \ / \ \xi_2 = 2\} = \frac{0,06}{0,18} = \frac{6}{18}$$

$$P\{\xi_1 = -4 \ / \ \xi_2 = 3\} = \frac{0,03}{0,33} = \frac{3}{33}$$

$$P\{\xi_1 = -2 \ / \ \xi_2 = -5\} = \frac{0,1}{0,23} = \frac{10}{23}$$

$$P\{\xi_1 = -2 \ / \ \xi_2 = -3\} = \frac{0,09}{0,26} = \frac{9}{26}$$

$$P\{\xi_1 = -2 \ / \ \xi_2 = 2\} = \frac{0,11}{0,18} = \frac{11}{18}$$

$$P\{\xi_1 = -2 \ / \ \xi_2 = 3\} = \frac{0,1}{0,33} = \frac{10}{33}$$

$$P\{\xi_1 = 2 \ / \ \xi_2 = -5\} = \frac{0,11}{0,23} = \frac{11}{23}$$

$$P\{\xi_1 = 2 \ / \ \xi_2 = -3\} = \frac{0,03}{0,26} = \frac{3}{26}$$

$$P\{\xi_1 = 2 \ / \ \xi_2 = 2\} = \frac{0,01}{0,18} = \frac{1}{18}$$

$$P\{\xi_1 = 2 \ / \ \xi_2 = -5\} = \frac{0,2}{0,33} = \frac{20}{33}$$

Для зручності скрізь залишили однаковий знаменник.
Таблиця 5 - умовні ряди розподілу ξ_1 :

ξ_1	-4	-2	2
$P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = -5\}$	$\frac{2}{23}$	$\frac{10}{23}$	$\frac{11}{23}$
$P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = -3\}$	$\frac{14}{26}$	$\frac{9}{26}$	$\frac{3}{26}$
$P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = 2\}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{1}{18}$
$P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = 3\}$	$\frac{3}{33}$	$\frac{10}{33}$	$\frac{20}{33}$

Перевірка:

$$\sum_{k=1}^{3} P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = -5\} = \frac{2+10+11}{23} = 1$$

$$\sum_{k=1}^{3} P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = -3\} = \frac{14+9+3}{26} = 1$$

$$\sum_{k=1}^{3} P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = 2\} = \frac{6+11+1}{18} = 1$$

$$\sum_{k=1}^{3} P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = 3\} = \frac{3+10+20}{33} = 1$$

З формули (1.5):

$$P\{\xi_2 = -5 \ / \ \xi_1 = -4\} = \frac{0,02}{0,25} = \frac{2}{25}$$

$$P\{\xi_2 = -5 \ / \ \xi_1 = -2\} = \frac{0,1}{0,4} = \frac{10}{40}$$

$$P\{\xi_2 = -5 \ / \ \xi_1 = 2\} = \frac{0,11}{0,35} = \frac{11}{35}$$

$$P\{\xi_2 = -3 \ / \ \xi_1 = -4\} = \frac{0,14}{0,25} = \frac{14}{25}$$

$$P\{\xi_2 = -3 \ / \ \xi_1 = -2\} = \frac{0,09}{0,4} = \frac{9}{40}$$

$$P\{\xi_2 = -3 \ / \ \xi_1 = 2\} = \frac{0,03}{0,35} = \frac{3}{35}$$

$$P\{\xi_2 = 2 \ / \ \xi_1 = -4\} = \frac{0,06}{0,25} = \frac{6}{25}$$

$$P\{\xi_2 = 2 \ / \ \xi_1 = -2\} = \frac{0,11}{0,4} = \frac{11}{40}$$

$$P\{\xi_2 = 2 \ / \ \xi_1 = 2\} = \frac{0,01}{0,35} = \frac{1}{35}$$

$$P\{\xi_2 = 3 \ / \ \xi_1 = -4\} = \frac{0,03}{0,25} = \frac{3}{25}$$

$$P\{\xi_2 = 3 \ / \ \xi_1 = -2\} = \frac{0,1}{0,4} = \frac{10}{40}$$

$$P\{\xi_2 = 3 \ / \ \xi_1 = 2\} = \frac{0,2}{0,35} = \frac{20}{35}$$

Для зручності скрізь залишили однаковий знаменник.
Таблиця 6 - умовні ряди розподілу ξ_2 :

ξ_2	-5	-3	2	3
$P\{\xi_2 = y_j / \xi_1 = -4\}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{14}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{3}{25}$
$P\{\xi_2 = y_j / \xi_1 = -2\}$	$\frac{10}{40}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{11}{40}$	$\frac{10}{40}$
$P\{\xi_2 = y_j / \xi_1 = 2\}$	$\frac{11}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{20}{35}$

Перевірка:

$$\sum_{j=1}^{4} P\{\xi_2 = y_j \ / \xi_1 = -4\} = \frac{2+14+6+3}{25} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{4} P\{\xi_2 = y_j \ / \xi_1 = -2\} = \frac{10+9+11+10}{40} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{4} P\{\xi_2 = y_j \ / \xi_1 = 2\} = \frac{11+3+1+20}{35} = 1$$

УМОВНІ МАТЕМАТИЧНІ СПОДІВАННЯ ДЛЯ КОЖНОЇ КООРДИНАТИ З ПЕРЕВІРКОЮ

Умовне математичне сподівання дискретної випадкової величини ξ_1 відносно значення $\xi_2 = y_j, \ j = \overline{1,4}$ обчислюється за формулою

$$E(\xi_1 / \xi_2 = y_j) = \sum_{k=1}^{3} x_k P\{\xi_1 = x_k / \xi_2 = y_j\} = \varphi(y_j)$$

Далі розглядається випадкова величина $E(\xi_1/\xi_2) = \varphi(\xi_2)$, яка приймає значення $E(\xi_1/\xi_2) = y_j$ з ймовірностями $P\{\xi_2 = y_j\},\ j = \overline{1,4}$.

$$E(\xi_1\ /\xi_2 = -5) = (-4)\cdot\frac{2}{23} + (-2)\cdot\frac{10}{23} + 2\cdot\frac{11}{23} = \frac{22-20-8}{23} = -\frac{6}{23}$$

$$E(\xi_1\ /\xi_2 = -3) = (-4)\cdot\frac{14}{26} + (-2)\cdot\frac{9}{26} + 2\cdot\frac{3}{26} = \frac{6-18-56}{26} = -\frac{68}{26}$$

$$E(\xi_1\ /\xi_2 = 2) = (-4)\cdot\frac{6}{18} + (-2)\cdot\frac{11}{18} + 2\cdot\frac{1}{18} = \frac{2-22-24}{18} = -\frac{44}{18}$$

$$E(\xi_1\ /\xi_2 = 3) = (-4)\cdot\frac{3}{33} + (-2)\cdot\frac{10}{33} + 2\cdot\frac{20}{33} = \frac{40-20-12}{23} = \frac{8}{33}$$

Таблиця 7 - Ряд розподілу $E(\xi_1\ /\xi_2)$:

$E(\xi_1/\xi_2)$	$-\frac{68}{26}$	$-\frac{44}{18}$	$-\frac{6}{23}$	$\frac{8}{33}$
P	$0,26$	$0,18$	$0,23$	$0,33$

Перевірка:

$$E(E(\xi_1\ /\xi_2)) = -\frac{68}{26}\cdot 0,26 + (-\frac{44}{18})\cdot 0,18 + (-\frac{6}{23})\cdot 0,23 + \frac{8}{33}\cdot 0,33 = \frac{8-68-44-6}{100} = -\frac{110}{100} = -1,1 = E\xi_1$$

Аналогічно формула для обчислення умовного математичного сподівання ξ_2 відносно значення $\xi_1 = x_k,\ k = \overline{1,3}$ має вигляд

$$E(\xi_2/\xi_1 = x_k) = \sum_{k=1}^{4} y_j P\{\xi_2 = y_j/\xi_1 = x_k\} = \psi(x_k)$$

Далі розглядається випадкова величина $E(\xi_2/\xi_1) = \psi(\xi_1)$, що приймає значення $E(\xi_2/\xi_1 = x_k)$ з ймовірностями $P\{\xi_1 = x_k\},\ k = \overline{1,3}$.

$$E(\xi_2\ /\xi_1 = -4) = (-5)\cdot\frac{2}{25} + (-3)\cdot\frac{14}{25} + 2\cdot\frac{6}{25} + 3\cdot\frac{3}{25} = \frac{12+9-10-42}{25} = -\frac{31}{25}$$

$$E(\xi_2\ /\xi_1 = -2) = (-5)\cdot\frac{10}{40} + (-3)\cdot\frac{9}{40} + 2\cdot\frac{11}{40} + 3\cdot\frac{10}{40} = \frac{30+22-27-50}{40} = -\frac{25}{40}$$

$$E(\xi_2\ /\xi_1 = 2) = (-5)\cdot\frac{11}{35} + (-3)\cdot\frac{3}{35} + 2\cdot\frac{1}{35} + 3\cdot\frac{20}{35} = \frac{60+2-9-55}{35} = -\frac{2}{35}$$

Таблиця 8 - Ряд розподілу $E(\xi_2\ /\xi_1)$:

$E(\xi_2/\xi_1)$	$-\frac{31}{25}$	$-\frac{25}{40}$	$-\frac{2}{35}$
P	$0,25$	$0,4$	$0,35$

Перевірка:

$$E(E(\xi_2\ /\xi_1)) = -\frac{31}{25}\cdot 0,25 + (-\frac{25}{40})\cdot 0,4 + (-\frac{2}{35})\cdot 0,35 = \frac{-31-25-2}{100} = -\frac{58}{100} = -0,58 = E\xi_2$$

Завдання №2

Нехай неперервний випадковий вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ рівномірно розподілений в області G див. рис. 17.
Область G задана:

$$G = \left\{ \begin{array}{c|c} \text{(x,y)} & \begin{array}{c} (x+4)^2 + (y+1)^2 \leq 16, \\ y \geq x+4. \end{array} \end{array} \right\}$$

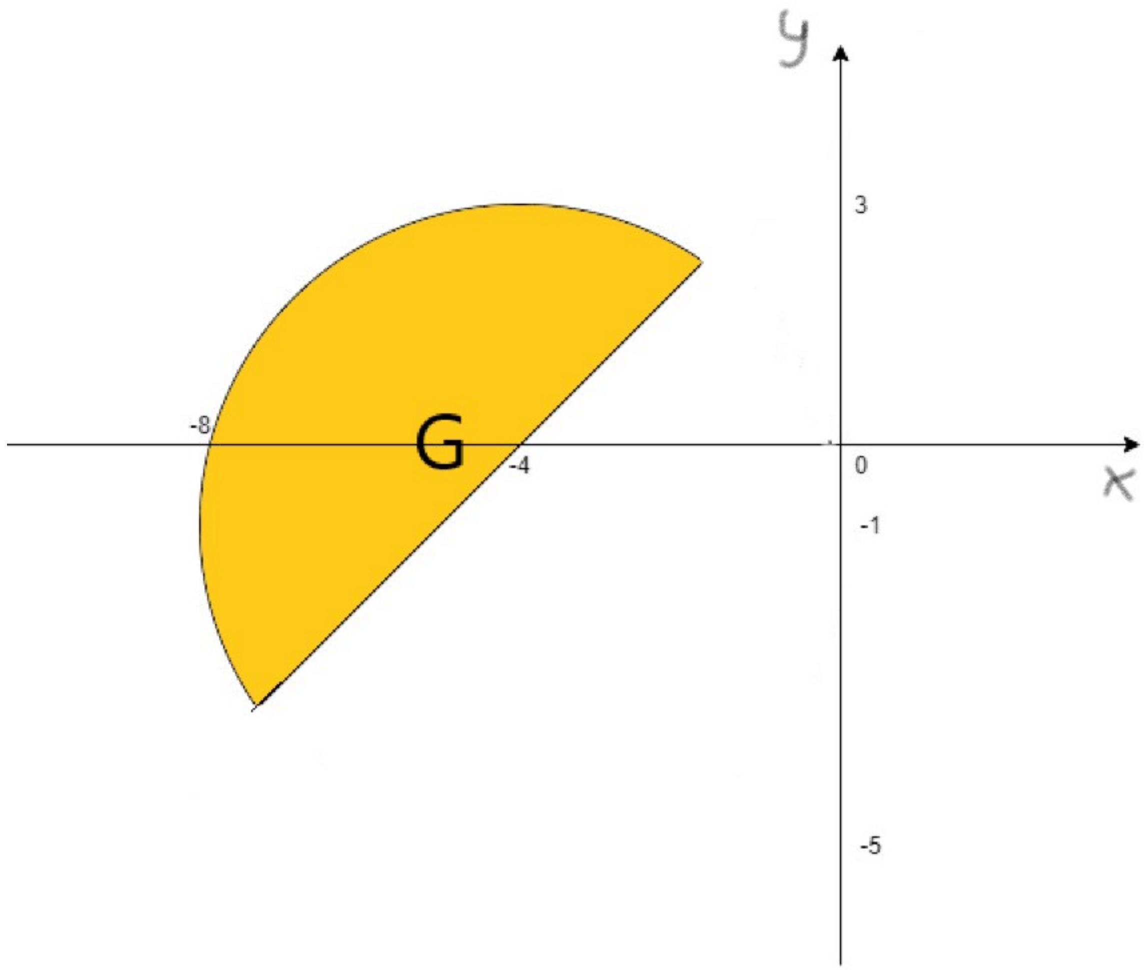

Рисунок 17

Оскільки деякі інтеграли будуть використовуватись при виконанні завдання кілька разів, їх обчислення (на проміжку $(a;b)$, вважаємо, що a та b відповідають умовам задачі) було записано окремо. Інтеграли $I_1 - I_{12}$ наведені у додатку. Також використаємо наступні формули для спрощення:

$$\sin(2\arcsin x) = 2\sin(\arcsin x \cos\arccos x) = 2x \cdot \sqrt{1-x^2}$$

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), \quad xy \leq 0, \;\; x^2+y^2 \leq 1$$

$$\arccos x = \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1;0]$$

ЩІЛЬНОСТІ РОЗПОДІЛУ КООРДИНАТ ξ_1 ТА ξ_2

Обчислимо площу G:

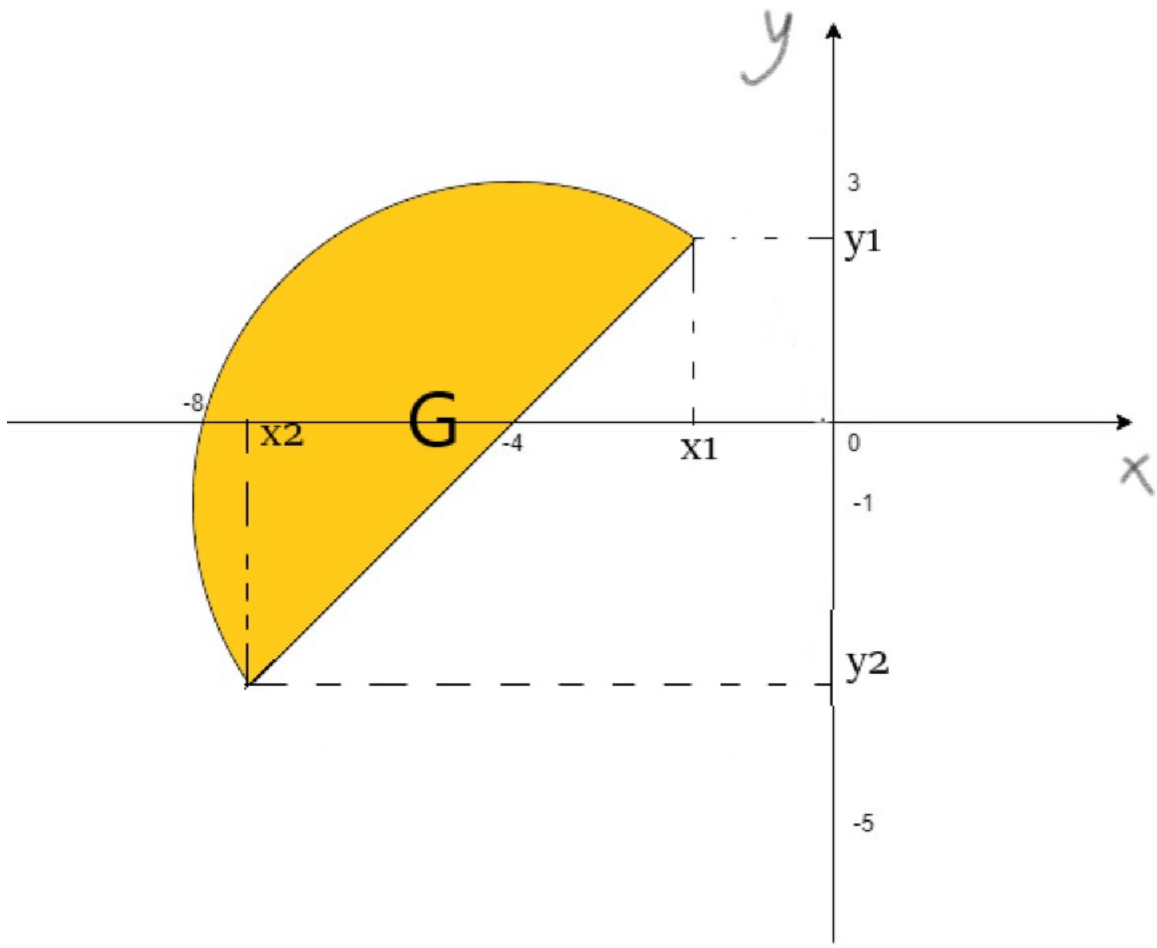

Рисунок 18

Знайдемо точки перетину:

$$\begin{cases} (x+4)^2 + (y+1)^2 = 16 \\ y = x + 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (x+4)^2 + (x+5)^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + 18x + 25 = 0$$

$$D = 324 - 200 = 124 = (2\sqrt{31})^2$$

$$x_1 = \frac{-18 + 2\sqrt{31}}{4} = \frac{-9 + \sqrt{31}}{2} \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{-9 + \sqrt{31}}{2} + 4 = \frac{-1 + \sqrt{31}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-18-2\sqrt{31}}{4} = \frac{-9-\sqrt{31}}{2} \quad \Rightarrow \quad y_2 = \frac{-9-\sqrt{31}}{2} + 4 = \frac{-1-\sqrt{31}}{2}$$

З рівняння кола виразимо y:

$$(x+4)^2+(y+1)^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad (y+1)^2 = 16-(x+4)^2 \quad \Rightarrow \quad y+1 = \pm\sqrt{16-(x+4)^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{16-(x+4)^2} - 1$$

З рівняння кола виразимо x:

$$(x+4)^2+(y+1)^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad (x+4)^2 = 16-(y+1)^2 \quad \Rightarrow \quad x+4 = \pm\sqrt{16-(y+1)^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{16-(y+1)^2} - 4$$

Тоді, площу можемо знайти так:

$$S_G = \int_{-8}^{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}} dx \int_{-\sqrt{16-(x+4)^2}-1}^{\sqrt{16-(x+4)^2}-1} dy + \int_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{\frac{-9+\sqrt{31}}{2}} dx \int_{x+4}^{\sqrt{16-(x+4)^2}-1} dy =$$

$$= \int_{-8}^{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}} 2(\sqrt{16-(x+4)^2})\, dx + \int_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{\frac{-9+\sqrt{31}}{2}} (\sqrt{16-(x+4)^2} - x - 5)\, dx =$$

$$= 2I_1 \Big|_{a=-8}^{b=\frac{-9-\sqrt{31}}{2}} + I_3 \Big|_{a=\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{b=\frac{-9+\sqrt{31}}{2}} =$$

$$= 16\left(\arcsin\frac{-1-\sqrt{31}}{8} + \frac{\pi}{2}\right) + 8\left(\sin\left(2\arcsin\frac{-1-\sqrt{31}}{4}\right)\right) +$$

$$+8\left(\arcsin\frac{-1+\sqrt{31}}{8} - \arcsin\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right) + 4\left(\sin\left(2\arcsin\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right) - \sin\left(2\arcsin\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{31} = 8\left(\arcsin\frac{-1+\sqrt{31}}{8} + \arcsin\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right) +$$

$$+4\left(\sin\left(2\arcsin\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right) + \sin\left(2\arcsin\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right) - \frac{1}{2}\sqrt{31} + 8\pi =$$

$$= 8\arcsin\left(-\frac{\sqrt{31}}{16}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{31} + 8\pi = 8\arccos\left(-\frac{15}{16}\right) - \frac{\sqrt{31}}{2}$$

Оскільки за умовою вектор розподілено рівномірно в області G, то його щільність розподілу:

$$f_{\vec{\xi}}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{S_G}, & (x,y) \in G \\ 0, & (x,y) \notin G \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{8\arccos\left(-\frac{15}{16}\right)-\frac{\sqrt{31}}{2}}, & (x,y) \in G \\ 0, & (x,y) \notin G \end{cases}$$

Для зручності, далі будемо позначати:

$$S_G = 8\arccos\left(-\frac{15}{16}\right) - \frac{\sqrt{31}}{2}$$

Обчислимо щільність першої координати:

$$f_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{\xi}}(x,y)\,dy = \begin{cases} 0, & x \leq -8 \\ \frac{1}{S_G}\int_{-\sqrt{16-(x+4)^2}-1}^{\sqrt{16-(x+4)^2}-1} dy = \frac{2}{S_G}\sqrt{16-(x+4)^2}, & x \in (-8; \frac{-9-\sqrt{31}}{2}) \\ \frac{1}{S_G}\int_{x+4}^{\sqrt{16-(x+4)^2}-1} dy = \frac{1}{S_G}(\sqrt{16-(x+4)^2} - x - 5), & x \in (\frac{-9-\sqrt{31}}{2}; \frac{-9+\sqrt{31}}{2}) \\ 0, & x > \frac{-9+\sqrt{31}}{2} \end{cases}$$

Отримали щільність розподілу ξ_1:

$$f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -8 \\ \frac{2}{S_G}\sqrt{16-(x+4)^2}, & x \in (-8; \frac{-9-\sqrt{31}}{2}) \\ \frac{1}{S_G}(\sqrt{16-(x+4)^2} - x - 5), & x \in (\frac{-9-\sqrt{31}}{2}; \frac{-9+\sqrt{31}}{2}) \\ 0, & x > \frac{-9+\sqrt{31}}{2} \end{cases}$$

Обчислимо маргінальну щільність другої координати:

$$f_{\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{\xi}}(x,y)\,dx = \begin{cases} 0, & y \leq \frac{-1-\sqrt{31}}{2} \\ \frac{1}{S_G}\int_{-\sqrt{16-(y+1)^2}-4}^{y-4} dx = \frac{1}{S_G}(y + \sqrt{16-(y+1)^2}), & y \in (\frac{-1-\sqrt{31}}{2}; \frac{-1+\sqrt{31}}{2}) \\ \frac{1}{S_G}\int_{-\sqrt{16-(y+1)^2}-4}^{\sqrt{16-(y+1)^2}-4} dx = \frac{2}{S_G}\sqrt{16-(y+1)^2}, & y \in (\frac{-1+\sqrt{31}}{2}; 3) \\ 0, & y > 3 \end{cases}$$

Отримали щільність розподілу ξ_2:

$$f_{\xi_2}(y)=\begin{cases} 0, & y\le \frac{-1-\sqrt{31}}{2} \\ \frac{1}{S_G}(y+\sqrt{16-(y+1)^2}), & y\in(\frac{-1-\sqrt{31}}{2};\frac{-1+\sqrt{31}}{2}) \\ \frac{2}{S_G}\sqrt{16-(y+1)^2}, & y\in(\frac{-1+\sqrt{31}}{2};3) \\ 0, & y>3 \end{cases}$$

Виконаємо перевірку умови нормування:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_2}(y)\,dy=1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x)\,dx=\int_{-8}^{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}\frac{2}{S_G}\sqrt{16-(x+4)^2}\,dx+\int_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{\frac{-9+\sqrt{31}}{2}}\frac{1}{S_G}(\sqrt{16-(x+4)^2}-x-5)\,dx=$$

$$=\frac{1}{S_G}\left(2\int_{-8}^{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}\sqrt{16-(x+4)^2}\,dx+\int_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{\frac{-9+\sqrt{31}}{2}}(\sqrt{16-(x+4)^2}-x-5)\,dx\right)=$$

$$=[\text{вираз в дужках був обчислений раніше}]=\frac{1}{S_G}\cdot S_G=1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_2}(y)\,dy=\int_{\frac{-1-\sqrt{31}}{2}}^{\frac{-1+\sqrt{31}}{2}}\frac{1}{S_G}(y+\sqrt{16-(y+1)^2})\,dy+\int_{\frac{-1+\sqrt{31}}{2}}^{3}\frac{2}{S_G}\sqrt{16-(y+1)^2}\,dy=$$

$$=\frac{1}{S_G}\left(\int_{\frac{-1-\sqrt{31}}{2}}^{\frac{-1+\sqrt{31}}{2}}(y+\sqrt{16-(y+1)^2})\,dy+2\int_{\frac{-1+\sqrt{31}}{2}}^{3}\sqrt{16-(y+1)^2}\,dy\right)=$$

$$=\frac{1}{S_G}\left(I_4\Big|_{a=\frac{-1-\sqrt{31}}{2}}^{b=\frac{-1+\sqrt{31}}{2}}+2I_2\Big|_{a=\frac{-1+\sqrt{31}}{2}}^{b=3}\right)=$$

$$=\frac{1}{S_G}[-\frac{\sqrt{31}}{2}+8\left(\arcsin\frac{1+\sqrt{31}}{8}-\arcsin\frac{1-\sqrt{31}}{8}\right)+$$

$$+4\left(\sin\left(2\arcsin\frac{1+\sqrt{31}}{8}\right)-\sin\left(2\arcsin\frac{1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)+$$

$$+16\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{1+\sqrt{31}}{8}\right)-8\sin\left(2\arcsin\frac{1+\sqrt{31}}{8}\right)]=$$

$$=\frac{1}{S_G}[-8\left(\arcsin\frac{1+\sqrt{31}}{8}+\arcsin\frac{1-\sqrt{31}}{8}\right)-4\left(\sin\left(2\arcsin\frac{1+\sqrt{31}}{8}\right)+\sin\left(2\arcsin\frac{1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{31}+8\pi] = \left[\begin{array}{l}\text{Оскільки арксинус та синус - непарні функції}\\ \arcsin(-x) = -\arcsin(x)\\ \sin(-x) = -\sin(x)\end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{S_G}[-8\left(\arcsin\frac{-(-1-\sqrt{31})}{8} + \arcsin\frac{-(-1+\sqrt{31})}{8}\right) -$$

$$-4\left(\sin\left(2\arcsin\frac{-(-1-\sqrt{31})}{8}\right) + \sin\left(2\arcsin\frac{-(-1+\sqrt{31})}{8}\right)\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{31}+8\pi] =$$

$$= \frac{1}{S_G}[8\left(\arcsin\frac{-1-\sqrt{31}}{8} + \arcsin\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right) +$$

$$+4\left(\sin\left(2\arcsin\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right) + \sin\left(2\arcsin\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right) - \frac{1}{2}\sqrt{31}+8\pi] =$$

$$= \frac{1}{S_G}\left(8\arccos\left(-\frac{15}{16}\right) - \frac{\sqrt{31}}{2}\right) = \frac{1}{S_G}\cdot S_G = 1$$

ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ КООРДИНАТ ξ_1 та ξ_2

Нехай $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(y)$ - функції розподілу координат вектора $\vec{\xi}$ Знайдемо функцію розподілу першої координати:

$$F_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{\xi_1}(t)\,dt$$

$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0, & x \le -8 \\ \int_{-\infty}^{-8} 0\,dt + \int_{-8}^{x} \frac{2}{S_G}\sqrt{16-(t+4)^2}\,dt = \frac{2}{S_G} I_1 \Big|_{a=-8}^{b=x} = \frac{1}{S_G}\Big(16\arcsin\left(\frac{x+4}{4}\right) & \\ +8\sin\left(2\arcsin\left(\frac{x+4}{4}\right)\right)+8\pi, & -8 < x \le \frac{-9-\sqrt{31}}{2} \\ \int_{-\infty}^{-8} 0\,dt + \int_{-8}^{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}} \frac{2}{S_G}\sqrt{16-(t+4)^2}\,dt + \int_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{x} \frac{1}{S_G}(\sqrt{16-(t+4)^2}-t-5)\,dt = & \\ = \frac{1}{S_G}\left(2I_1 \Big|_{a=-8}^{b=\frac{-9-\sqrt{31}}{2}} + I_3 \Big|_{a=\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{b=x}\right) = \frac{1}{S_G}\left(8\left(\arcsin\left(\frac{x+4}{4}\right)+\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)+\right. & \\ \left.+4\left(\sin\left(2\arcsin\left(\frac{x+4}{4}\right)\right)+\sin\left(2\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{4x^2-81-18\sqrt{31}-31}{4}\right)-\right. & \\ -5\left(\frac{2x+9+\sqrt{31}}{2}\right)+8\pi, & \frac{-9-\sqrt{31}}{2} < x \le \frac{-9+\sqrt{31}}{2} \\ \int_{-\infty}^{-8} 0\,dt + \int_{-8}^{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}} \frac{2}{S_G}\sqrt{16-(t+4)^2}\,dt + \int_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{\frac{-9+\sqrt{31}}{2}} \frac{1}{S_G}(\sqrt{16-(t+4)^2}-t-5)\,dt & \\ +\int_{\frac{-9+\sqrt{31}}{2}}^{x} 0\,dt = \frac{2}{S_G} I_1 \Big|_{a=-8}^{b=\frac{-9-\sqrt{31}}{2}} + \frac{1}{S_G} I_3 \Big|_{a=\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{b=\frac{-9+\sqrt{31}}{2}} = \frac{1}{S_G}\left(8\left(\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right)+\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)\right. & \\ \left.+4\left(\sin\left(2\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right)\right)+\sin\left(2\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{81-18\sqrt{31}+31-81-18\sqrt{31}-31}{4}\right)-\right. & \\ -5\left(\frac{-9+\sqrt{31}+9+\sqrt{31}}{2}\right)+8\pi = \frac{1}{S_G}\left(8\left(\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right)+\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)+\right. & \\ \left.+4\left(\sin\left(2\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right)\right)+\sin\left(2\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)\right) - \frac{1}{2}\sqrt{31}+8\pi = \right. & \\ = \frac{1}{S_G}\cdot S_G = 1, \quad x > \frac{-9+\sqrt{31}}{2} & \end{cases}$$

Отже, отримали **функцію розподілу першої координати**:

$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, & x \le -8 \\ \frac{1}{S_G}\left(16\arcsin\left(\frac{x+4}{4}\right) + (x+4)\sqrt{-x(x+8)} + 8\pi\right), & -8 < x \le \frac{-9-\sqrt{31}}{2} \\ \frac{1}{S_G}[8\left(\arcsin\left(\frac{x+4}{4}\right) + \arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right) + & \\ +\frac{-2x^2-20x+2(x+4)\sqrt{-x(x+8)}-49-\sqrt{31}}{4} + 8\pi], & \frac{-9-\sqrt{31}}{2} < x \le \frac{-9+\sqrt{31}}{2} \\ 1, & x > \frac{-9+\sqrt{31}}{2} \end{cases}$$

Аналогічно для другої координати:

$$F_{\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{s} f_{\xi_2}(s)ds$$

$$
F_{\xi_2}(y) = \begin{cases}
\int_{-\infty}^{y} 0\,ds = 0, & y \le \frac{-1-\sqrt{31}}{2} \\[2ex]
\int_{-\infty}^{\frac{-1-\sqrt{31}}{2}} 0\,ds + \int_{\frac{-1-\sqrt{31}}{2}}^{y} \frac{1}{S_G}(s+\sqrt{16-(s+1)^2})\,ds = \frac{1}{S_G} I_4 \,\Big|_{a=\frac{-1-\sqrt{31}}{2}}^{b=y} = & \\[2ex]
= \frac{1}{S_G}\Bigg(\frac{4y^2-1-2\sqrt{31}-31}{8} + 8\bigg(\arcsin\Big(\frac{y+1}{4}\Big) - \arcsin\Big(\frac{1-\sqrt{31}}{8}\Big)\bigg) + & \\[2ex]
+4\Bigg(\sin\bigg(2\arcsin\Big(\frac{y+1}{4}\Big)\bigg) - \sin\bigg(2\arcsin\Big(\frac{1-\sqrt{31}}{8}\Big)\bigg)\Bigg)\Bigg), & \frac{-1-\sqrt{31}}{2} < y \le \frac{-1+\sqrt{31}}{2} \\[2ex]
\int_{-\infty}^{\frac{-1-\sqrt{31}}{2}} 0\,ds + \int_{\frac{-1-\sqrt{31}}{2}}^{\frac{-1+\sqrt{31}}{2}} \frac{1}{S_G}(s+\sqrt{16-(s+1)^2})\,ds + \int_{\frac{-1+\sqrt{31}}{2}}^{y} \frac{2}{S_G}\sqrt{16-(s+1)^2}\,ds = & \\[2ex]
= \frac{1}{S_G} I_4 \,\Big|_{a=\frac{-1-\sqrt{31}}{2}}^{b=\frac{-1+\sqrt{31}}{2}} + \frac{2}{S_G} I_2 \,\Big|_{a=\frac{-1+\sqrt{31}}{2}}^{b=y} = \frac{1}{S_G}\Bigg(-\frac{\sqrt{31}}{2} - 8\bigg(\arcsin\Big(\frac{1+\sqrt{31}}{8}\Big) + \arcsin\Big(\frac{1-\sqrt{31}}{8}\Big)\bigg) - & \\[2ex]
-4\Bigg(\sin\bigg(2\arcsin\Big(\frac{1+\sqrt{31}}{8}\Big)\bigg) + \sin\bigg(2\arcsin\Big(\frac{1-\sqrt{31}}{8}\Big)\bigg)\Bigg) + 16\arcsin\Big(\frac{y+1}{4}\Big) + & \\[2ex]
+8\sin\bigg(2\arcsin\Big(\frac{y+1}{4}\Big)\bigg), & \frac{-1+\sqrt{31}}{2} < y \le 3 \\[2ex]
\int_{-\infty}^{\frac{-1-\sqrt{31}}{2}} 0\,ds + \int_{\frac{-1-\sqrt{31}}{2}}^{\frac{-1+\sqrt{31}}{2}} \frac{1}{S_G}(s+\sqrt{16-(s+1)^2})\,ds + \int_{\frac{-1+\sqrt{31}}{2}}^{3} \frac{2}{S_G}\sqrt{16-(s+1)^2}\,ds + & \\[2ex]
+\int_{3}^{+\infty} 0\,ds = c\frac{1}{S_G} I_4 \,\Big|_{a=\frac{-1-\sqrt{31}}{2}}^{b=\frac{-1+\sqrt{31}}{2}} + \frac{2}{S_G} I_2 \,\Big|_{a=\frac{-1+\sqrt{31}}{2}}^{b=3} = \frac{1}{S_G}\Bigg(-\frac{\sqrt{31}}{2} - 8\bigg(\arcsin\Big(\frac{1+\sqrt{31}}{8}\Big) + & \\[2ex]
+\arcsin\Big(\frac{1-\sqrt{31}}{8}\Big) - 4\Bigg(\sin\bigg(2\arcsin\Big(\frac{1+\sqrt{31}}{8}\Big)\bigg) + \sin\bigg(2\arcsin\Big(\frac{1-\sqrt{31}}{8}\Big)\bigg)\Bigg) + & \\[2ex]
+16\arcsin(1) + 8\sin\big(2\arcsin(1)\big) = & \\[2ex]
= \frac{1}{S_G}(8\bigg(\arcsin\Big(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\Big) + \arcsin\Big(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\Big)\bigg) + 4\Bigg(\sin\bigg(2\arcsin\Big(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\Big)\bigg) + & \\[2ex]
+\sin\bigg(2\arcsin\Big(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\Big)\bigg)\Bigg) - \frac{\sqrt{31}}{2} + 8\pi) = \frac{1}{S_G}\cdot S_G = 1 & y > 3
\end{cases}
$$

Отже, отримали **функцію розподілу другої координати**:

$$F_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq \frac{-1-\sqrt{31}}{2} \\ \frac{1}{S_G}[8\left(\arcsin\left(\frac{y+1}{4}\right) - \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{31}}{8}\right)\right) + & \\ +\frac{2y^2+2(y+1)\sqrt{15-y(y+2)}-1-\sqrt{31}}{4}], & \frac{-1-\sqrt{31}}{2} < y \leq \frac{-1+\sqrt{31}}{2} \\ \frac{1}{S_G}[-\frac{\sqrt{31}}{2} - 8\arcsin\left(\frac{\sqrt{31}}{16}\right) + 16\arcsin\left(\frac{y+1}{4}\right) + (y+1)\sqrt{15-y(y+2)}], & \frac{-1+\sqrt{31}}{2} < y \leq 3 \\ 1, & y > 3 \end{cases}$$

Перевіримо неперервність отриманих функцій:
Для $F_{\xi_1}(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} F_{\xi_1}(x) = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} F_{\xi_1}(x) = 0$$

$$\lim_{x\to-8-0} F_{\xi_1}(x) = 0$$

$$\lim_{x\to-8+0} F_{\xi_1}(x) = \frac{1}{S_G}\left(-8\pi + 0 + 8\pi\right) = 0$$

$$\lim_{x\to-\frac{-9-\sqrt{31}}{2}-0} F_{\xi_1}(x) = \frac{1}{S_G}\left(16\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right) - \frac{15}{2} + 8\pi\right)$$

$$\lim_{x\to-\frac{-9-\sqrt{31}}{2}+0} F_{\xi_1}(x) = \frac{1}{S_G}[16\left(\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right) + \right.$$

$$+\frac{-2\left(\frac{112+18\sqrt{31}}{4}\right) - 20\left(\frac{-9-\sqrt{31}}{2}\right) + 2(\frac{-1-\sqrt{31}}{2})\sqrt{\frac{9+\sqrt{31}}{2}(\frac{7-\sqrt{31}}{2})} - 49 - \sqrt{31}}{4} + 8\pi] =$$

$$= \frac{1}{S_G}[16\left(\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right) - \frac{15}{2} + 8\pi\right]$$

$$\lim_{x\to-\frac{-9+\sqrt{31}}{2}-0} F_{\xi_1}(x) = \frac{1}{S_G}[8\left(\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right) + \arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right) +$$

$$+\frac{-2\left((\frac{-9+\sqrt{31}}{2}\right)^2 - 20\left((\frac{-9+\sqrt{31}}{2}\right) + 2((\frac{-1+\sqrt{31}}{2})\sqrt{(\frac{9-\sqrt{31}}{2}(\frac{7+\sqrt{31}}{2})} - 49 - \sqrt{31}}{4} + 8\pi] =$$

$$= \frac{1}{S_G}\left(8\arccos\left(-\frac{15}{16}\right) - \frac{\sqrt{31}}{2}\right) = \frac{1}{S_G}\cdot S_G = 1$$

$$\lim_{x\to -\frac{-9+\sqrt{31}}{2}+0} F_{\xi_1}(x) = 1$$

Для $F_{\xi_2}(y)$:

$$\lim_{y\to+\infty} F_{\xi_2}(y) = 1 \qquad \lim_{y\to-\infty} F_{\xi_2}(y) = 0$$

$$\lim_{y\to \frac{-1-\sqrt{31}}{2}-0} F_{\xi_2}(y) = 0$$

$$\lim_{y\to \frac{-1-\sqrt{31}}{2}+0} F_{\xi_2}(y) = \frac{1}{S_G}[0+\frac{2\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{2}\right)^2 + 2(\frac{1-\sqrt{31}}{2})\sqrt{15-\frac{-1-\sqrt{31}}{2}(\frac{3-\sqrt{31}}{2})} - 1 - \sqrt{31}}{4}] = 0$$

$$\lim_{y\to \frac{-1+\sqrt{31}}{2}-0} F_{\xi_2}(y) = \frac{1}{S_G}[4\pi + \frac{15-\sqrt{31}}{2}]$$

$$\lim_{y\to \frac{-1+\sqrt{31}}{2}+0} F_{\xi_2}(y) = \frac{1}{S_G}[-\frac{\sqrt{31}}{2} - 8\arcsin\left(\frac{\sqrt{31}}{16}\right) + 16\arcsin\left(\frac{1+\sqrt{31}}{8}\right)+$$

$$+(\frac{1+\sqrt{31}}{2})\sqrt{15-(\frac{-1+\sqrt{31}}{2})(\frac{-1+\sqrt{31}}{2}+2)}] =$$

$$= 4\pi + \frac{15-\sqrt{31}}{2}$$

$$\lim_{y\to 3-0} F_{\xi_2}(y) = \frac{1}{S_G}[-\frac{\sqrt{31}}{2} - 8\arcsin\left(\frac{\sqrt{31}}{16}\right) + 8\pi] =$$

$$= \frac{1}{S_G}\left(\arccos\left(-\frac{15}{16}\right) - \frac{\sqrt{31}}{2}\right) = \frac{1}{S_G}\cdot S_G = 1$$

$$\lim_{y\to 3+0} F_{\xi_2}(y) = 1$$

СУМІСНА ФУНКЦІЯ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВОГО ВЕКТОРА $\vec{\xi}$

$F_{\vec{\xi}}(x, y) = P\{\xi_1 < x, \xi_2 < y\}$ - ймовірність потрапляння вектора всередину нескінченного квадранта з вершиною в точці (x, y). $F_{\vec{\xi}}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} dt \int_{-\infty}^{y} f_{\vec{\xi}}(t, s)\, ds$. Розіб'ємо координатну площину XOY на області $D_0, ..., D_{11}$, які між собою попарно не перетинаються та в об'єднанні дають $\mathbb{R}^2$ (рисунок 19). В подальшому на рисунках будуть використані позначення: $x_1 = \frac{-9+\sqrt{31}}{2}$, $x_2 = \frac{-9-\sqrt{31}}{2}$, $y_1 = \frac{-1+\sqrt{31}}{2}$, $y_2 = \frac{-1-\sqrt{31}}{2}$, $y_3 = \frac{-3+\sqrt{31}}{2}$, $x_3 = \frac{-11+\sqrt{31}}{2}$

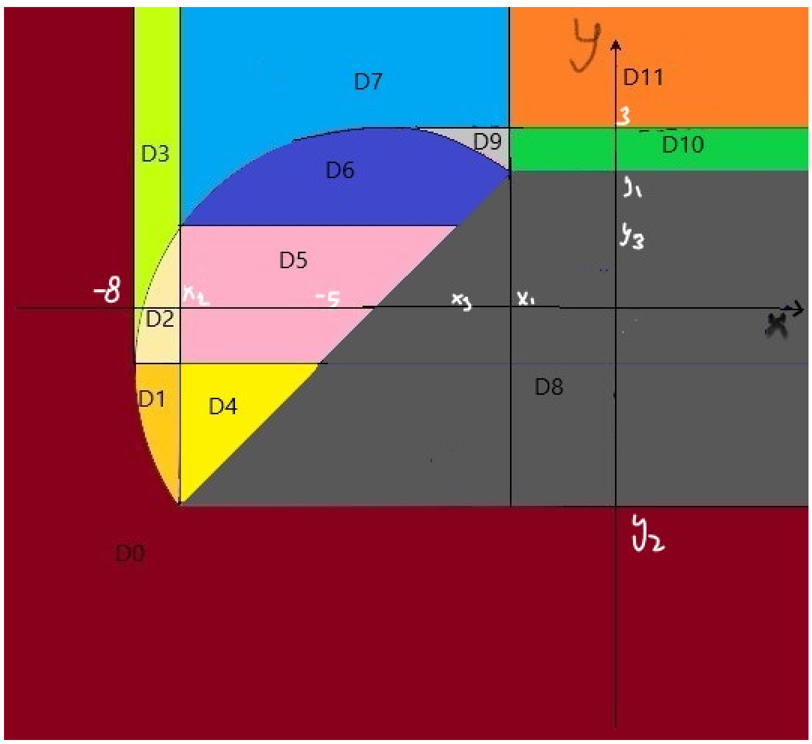

Рисунок 19

Опишемо їх у аналітичному вигляді:

$$\begin{cases} D_0 = \Big\{(x,y)|\ (x \le -8) \vee (-\sqrt{16-(x+4)^2}-1 \le y < \frac{-1-\sqrt{31}}{2}\Big\} \\ D_1 = \Big\{(x,y)|\ (-8 \le x < \frac{-9-\sqrt{31}}{2}) \wedge (-\sqrt{16-(y+1)^2}-1 \le y < -1)\Big\} \\ D_2 = \Big\{(x,y)|\ (-8 \le x < \frac{-9-\sqrt{31}}{2}) \wedge (-1 \le y < \sqrt{16-(x+4)^2}-1)\Big\} \\ D_3 = \Big\{(x,y)|\ (-8 \le x < \frac{-9-\sqrt{31}}{2}) \wedge (y > \sqrt{16-(x+4)^2}-1) \\ D_4 = \Big\{(x,y)|\ (\frac{-9-\sqrt{31}}{2} \le x < -5) \wedge (x+4 \le y < -1) \\ D_5 = \begin{matrix} \Big\{(x,y)|\ \Big((\frac{-9-\sqrt{31}}{2} \le x < -5) \wedge (-1 \le y < \frac{-3+\sqrt{31}}{2})\Big) \vee \\ \vee \Big((-5 \le x < \frac{-11+\sqrt{31}}{2}) \wedge (x+4 \le y < \frac{-3+\sqrt{31}}{2})\Big)\Big\} \end{matrix} \\ D_6 = \Big\{(x,y)|\ \Big((-\sqrt{16-(y+1)^2}-4 \le x < \frac{-9+\sqrt{31}}{2}) \wedge (\frac{-3+\sqrt{31}}{2} \le y < \frac{-1+\sqrt{31}}{2})\Big) \vee \\ \vee \Big((-\sqrt{16-(y+1)^2}-4 \le x < \sqrt{16-(y+1)^2}-4\Big) \wedge (\frac{-1+\sqrt{31}}{2} \le y < 3) \\ D_7 = \Big\{(x,y)|\ \Big((\frac{-9-\sqrt{31}}{2} \le x < -4) \wedge (y > \sqrt{16-(x+4)^2}-1)\Big) \vee \Big((-1 \le x < \frac{-9+\sqrt{31}}{2})\Big) \wedge (y > 3)\Big\} \\ D_8 = \Big\{(x,y)|\ (x > y-4) \wedge (\frac{-1-\sqrt{31}}{2} \le y < \frac{-1+\sqrt{31}}{2})\Big\} \\ D_9 = \Big\{(x,y)|\ (-4 \le x < \frac{-9+\sqrt{31}}{2}) \wedge (\frac{-1+\sqrt{31}}{2} \le y < 3)\Big\} \\ D_{10} = \Big\{(x,y)|\ (x > \frac{-9+31}{2}) \wedge (\frac{-1+\sqrt{31}}{2}) \le y < 3\Big\} \\ D_{11} = \{(x,y)|\ (x > \frac{-9+\sqrt{31}}{2}) \vee (y > 3)\} \end{cases}$$

Тепер, перейдемо до системи координат tOs, оскільки x та y тут є параметрами. Позначимо $G_i = G \cap \{(t,s)\ (t < x)c \wedge (s < y)\}$, коли $(x,y) \in D_i$, $\ i = \overline{0,11}$ та розглянемо усі ці випадки.

1. $(x,y) \in D_0, G_0 = \varnothing$

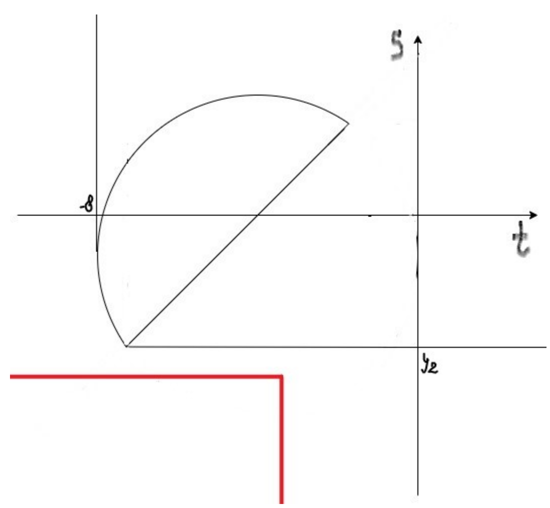

Рисунок 20

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} dt \int_{-\infty}^{y} 0\, ds = 0$$

2. $(x,y) \in D_1, G_1 = \left\{ \text{(t,s)} \;\middle|\; \begin{array}{c} -8 \le t < x, \\ -\sqrt{16-(t+4)^2} - 1 \le s < y \end{array} \right\}$

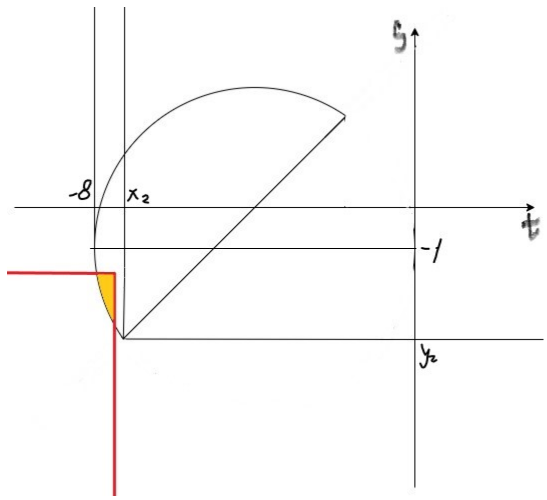

Рисунок 21

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{S_G} \iint\limits_{G_1} dt\, ds = \frac{1}{S_G} \int_{-8}^{x} dt \int_{-\sqrt{16-(t+4)^2}-1}^{y} ds = \frac{1}{S_G} \int_{-8}^{x} (y + \sqrt{16-(t+4)^2} + 1)\, dt =$$

$$= \frac{1}{S_G} \left(\int_{-8}^{x} y\, dt + I_1 \,|_{a=-8}^{b=x} + \int_{-8}^{x} dt \right) =$$

$$= \frac{1}{S_G} \left(\frac{2(y+1)(x+8) + (x+4)\sqrt{-x(x+8)}}{2} + 4\pi + 8 \left(\arcsin\left(\frac{x+4}{4} \right) \right) \right)$$

3. $(x,y) \in D_2, G_2 = G_{2.1} \,\cup\, G_{2.2} =$

$$= \begin{array}{l} \left\{ \text{(t,s)} \;\middle|\; \begin{array}{c} -8 \le t < -\sqrt{16-(y+1)^2} - 4, \\ -\sqrt{16-(t+4)^2} - 1 \le s < \sqrt{16-(t+4)^2} - 1 \end{array} \right\} \quad \cup \\ \cup \quad \left\{ \text{(t,s)} \;\middle|\; \begin{array}{c} -\sqrt{16-(y+1)^2} - 4 < t \le x, \\ -\sqrt{16-(t+4)^2} - 1 < s \le y \end{array} \right\} \end{array}$$

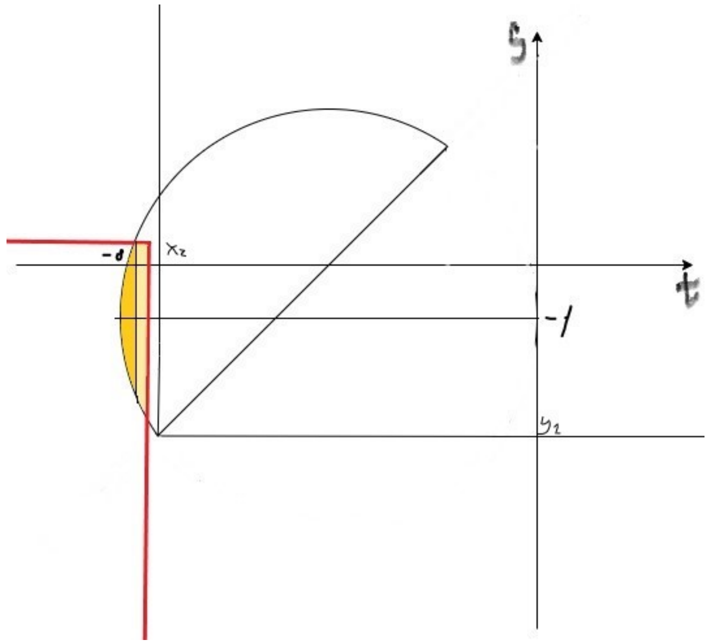

Рисунок 22

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{S_G}\left(\iint\limits_{G_{2.1}} dt\,ds + \iint\limits_{G_{2.2}} dt\,ds\right) =$$

$$= \frac{1}{S_G}\left(\int_{-8}^{-\sqrt{16-(y+1)^2}-4} dt \int_{-\sqrt{16-(t+4)^2}-1}^{\sqrt{16-(t+4)^2}-1} ds + \int_{-\sqrt{16-(y+1)^2}-4}^{x} dt \int_{-\sqrt{16-(t+4)^2}-1}^{y} ds\right) =$$

$$= \frac{1}{S_G}\left(\int_{-8}^{-\sqrt{16-(y+1)^2}-4} 2\sqrt{16-(t+4^2)}\,dt + \int_{-\sqrt{16-(y+1)^2}-4}^{x} (y+1+\sqrt{16-(t+4)^2})\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{S_G}\left(2I_1\,\Big|_{a=-8}^{b=-\sqrt{16-(y+1)^2}-4} + (y+1)t\,\Big|_{-\sqrt{16-(y+1)^2}-4}^{x} + I_1\,\Big|_{-\sqrt{16-(y+1)^2}-4}^{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{S_G}[16\left(\arcsin\left(\frac{-\sqrt{16-(y+1)^2}}{4}\right)+\frac{\pi}{2}\right)+8\left(\sin\left(2\arcsin\left(\frac{-\sqrt{16-(y+1)^2}}{4}\right)\right)\right)+$$

$$+(y+1)(x+\sqrt{16-(y+1)^2}+4)+8\left(\arcsin\left(\frac{x+4}{4}\right)-\arcsin\left(\frac{-\sqrt{16-(y+1)^2}}{4}\right)\right)+$$

$$+4\left(\sin\left(2\arcsin\left(\frac{x+4}{4}\right)\right)-\sin\left(2\arcsin\left(\frac{-\sqrt{16-(y+1)^2}}{4}\right)\right)\right)]=$$

$$= \frac{1}{S_G}[8\left(\arcsin\left(\frac{x+4}{4}\right)+\arcsin\left(\frac{-\sqrt{16-(y+1)^2}}{4}\right)\right)+$$

$$+\frac{2x(y+1)+(x+4)\sqrt{-x(x+8)}+2(y+1)\sqrt{16-(y+1)^2}+8(y+1)-\sqrt{16(y+1)^2-(y+1)^4}}{2}+8\pi]$$

4. $(x,y)\in D_3, G_3 == \left\{ \text{(t,s)} \;\middle|\; \begin{array}{c} -8<t\le x, \\ -\sqrt{16-(t+4)^2}-1<s\le\sqrt{16-(t+4)^2}-1 \end{array} \right\}$

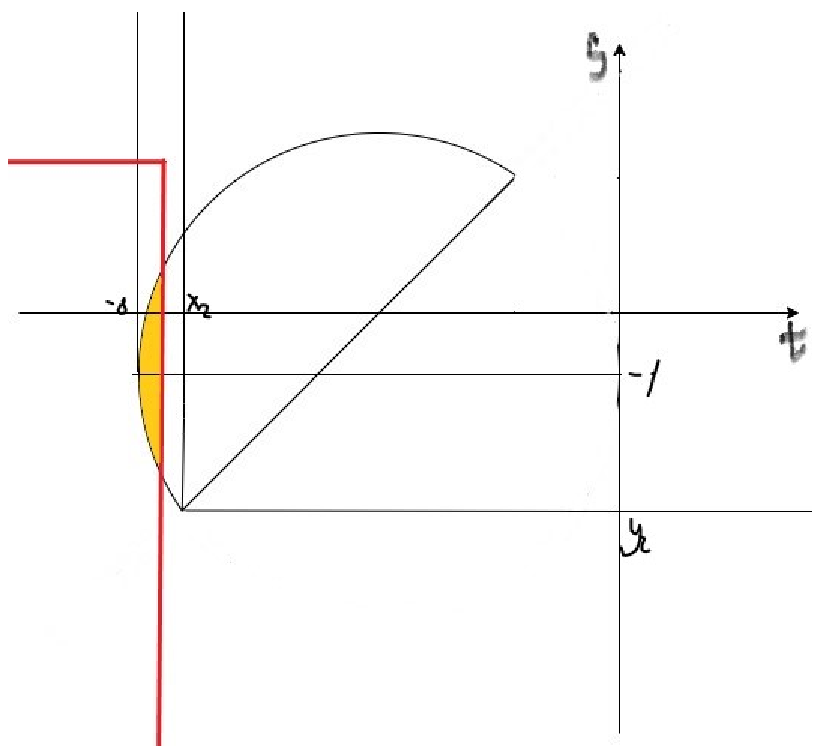

Рисунок 23

$$F_{\vec{\xi}}(x,y)=\frac{1}{S_G}\iint\limits_{G_3}dt\,ds=\frac{1}{S_G}\int_{-8}^{x}dt\int_{-\sqrt{16-(t+4)^2}-1}^{\sqrt{16-(t+4)^2}-1}ds=$$

$$\frac{1}{S_G}\int_{-8}^{x}2\sqrt{16-(t+4)^2}\,dt=\frac{2}{S_G}I_1\mid_{-8}^{x}=$$

$$= \frac{1}{S_G}[16\left(\arcsin\left(\frac{x+4}{4}\right)\right) + (x+4)\sqrt{-x(x+8)} + 8\pi]$$

Бачимо, що $F_{\vec{\xi}}(x,y) = F_{\xi_1}(x)$ на проміжку $(-8 \leq x < \frac{-9-\sqrt{31}}{2})$. Це означає, що при $y \to +\infty$ буде виконуватись умова узгодженості $\lim_{y\to+\infty} F_{\vec{\xi}}(x,y) = F_{\xi_1}(x)$

5.

$$(x,y) \in D_4, G_4 = G_{4.1} \ \cup \ G_{4.2} =$$

$$= \left\{ \text{(t,s)} \,\middle|\, \begin{array}{c} -8 < t \leq \frac{-9-\sqrt{31}}{2}, \\ -\sqrt{16-(t+4)^2} - 1 < s \leq y \end{array} \right\} \quad \cup \quad \left\{ \text{(t,s)} \,\middle|\, \begin{array}{c} \frac{-9-\sqrt{31}}{2} < t \leq x, \\ t+4 < s \leq y \end{array} \right\}$$

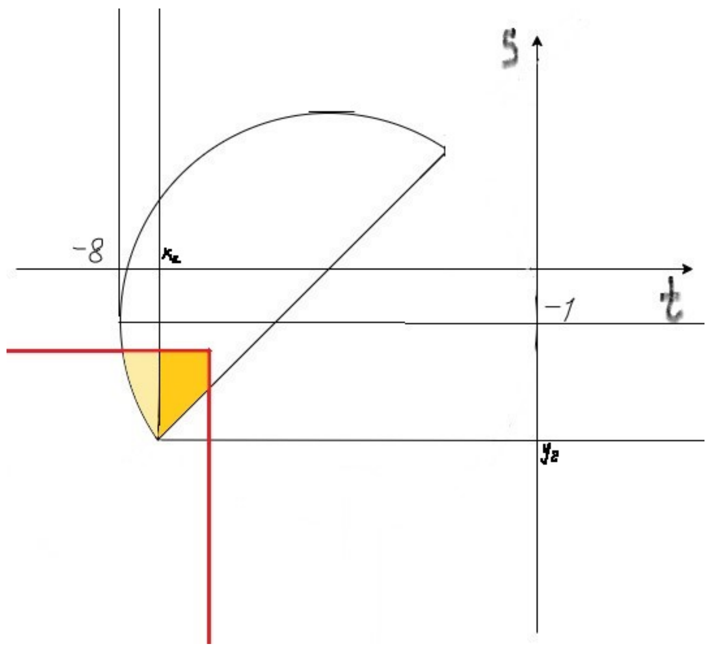

Рисунок 24

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{S_G}\left(\iint\limits_{G_{4.1}} dt\,ds + \iint\limits_{G_{4.2}} dt\,ds\right) =$$

$$= \frac{1}{S_G}\left(\int_{-8}^{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}} dt \int_{-\sqrt{16-(t+4)^2}-1}^{y} ds + \int_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{x} dt \int_{t+4}^{y} dt\right) =$$

$$= \frac{1}{S_G}\left(\int_{-8}^{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}} (y + \sqrt{16-(t+4)^2} + 1)\,dt + \int_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{x} (y - t - 4)\,ds\right) =$$

$$= \frac{1}{S_G}\left((y+1)t\,|_{-8}^{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}} + I_1\,|_{-8}^{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}} + (y-4)t\,|_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{x} - \frac{t^2}{2}\,|_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{S_G}[\frac{-2x^2+4xy-16x+32y-17-\sqrt{31}}{4} + 8\left(\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right) + 4\pi]$$

6.

$$(x,y) \in D_5 = G_{5.1} \cup G_{5.2} \cup G_{5.3} =$$

$$= \left\{ \text{(t,s)} \;\middle|\; \begin{array}{c} -8 < t \leq -\sqrt{16-(y+1)^2}-4, \\ -\sqrt{16-(t+4)^2}-1 < s \leq \sqrt{16-(t+4)^2}-1 \end{array} \right\} \cup$$
$$\cup \left\{ \text{(t,s)} \;\middle|\; \begin{array}{c} -\sqrt{16-(y+1)^2}-4, < t \leq \frac{-9-\sqrt{31}}{2}, \\ -\sqrt{16-(t+4)^2}-1 < s \leq y \end{array} \right\} \cup \left\{ \text{(t,s)} \;\middle|\; \begin{array}{c} \frac{-9-\sqrt{31}}{2}, < t \leq x, \\ t+4 < s \leq y \end{array} \right\}$$

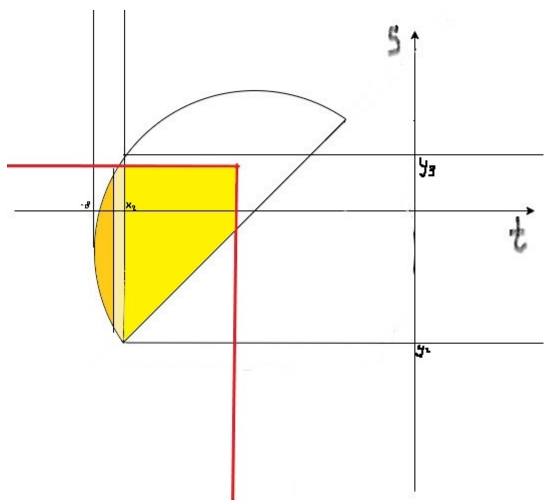

Рисунок 25

$$F_{\bar{\xi}}(x,y) = \frac{1}{S_G}\iint\limits_{G_{5.1}} dt\,ds + \iint\limits_{G_{5.2}} + \iint\limits_{G_{5.3}} = \frac{1}{S_G}[\int_{-8}^{-\sqrt{16-(y+1)^2}-4} dt \int_{-\sqrt{16-(t+4)^2}-1}^{\sqrt{16-(t+4)^2}-1} ds +$$

$$+ \int_{-\sqrt{16-(y+1)^2}-4}^{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}} dt \int_{-\sqrt{16-(t+4)^2}-1}^{y} ds + \int_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{x} dt \int_{t+4}^{y} ds] =$$

$$= \frac{1}{S_G}[\int_{-8}^{-\sqrt{16-(y+1)^2}-4} 2\sqrt{16-(t+4)^2}\,dt + \int_{-\sqrt{16-(y+1)^2}-4}^{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}} (y+1+\sqrt{16-(t+4)^2})\,dt +$$

$$+ \int_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{x} (y-t-4)\,dt] =$$

$$= \frac{1}{S_G}[2I_1 \,|_{-8}^{-\sqrt{16-(y+1)^2}-4} + I_1 \,|_{-\sqrt{16-(y+1)^2}-4}^{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}} + (y+1)t \,|_{-\sqrt{16-(y+1)^2}-4}^{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}} + (y-4)t \,|_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{x} - \frac{t^2}{2} \,|_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{x}] =$$

$$= \frac{1}{S_G}[8\left(\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right) + \arcsin\left(\frac{-\sqrt{16-(y+1)^2}}{4}\right)\right) +$$

$$+ \frac{-2x^2 + 4x(y-4) + 4(y+1)\sqrt{16-(y+1)^2} + 16y - 33 - \sqrt{31} - 2\sqrt{16(y+1)^2 - (y+1)^4}}{4} + 8\pi]$$

7. $(x, y) \in D_6, G_6 = G_{6.1} \cup G_{6.2} \cup D_{6.3} =$

$$\left\{ \text{(t,s)} \;\middle|\; \begin{array}{c} -8 < t \le \frac{-9-\sqrt{31}}{2}, \\ -\sqrt{16-(t+4)^2} - 1 \le s < \sqrt{16-(t+4)^2} - 1 \end{array} \right\} \cup$$

$$= \cup \left\{ \text{(t,s)} \;\middle|\; \begin{array}{c} \frac{-9-\sqrt{31}}{2} < t \le -\sqrt{16-(y+1)^2} - 4, \\ t + 4 < s \le \sqrt{16-(t+4)^2} - 1 \end{array} \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ \text{(t,s)} \;\middle|\; \begin{array}{c} -\sqrt{16-(y+1)^2} - 4 < t \le x, \\ t + 4 < s \le y \end{array} \right\}$$

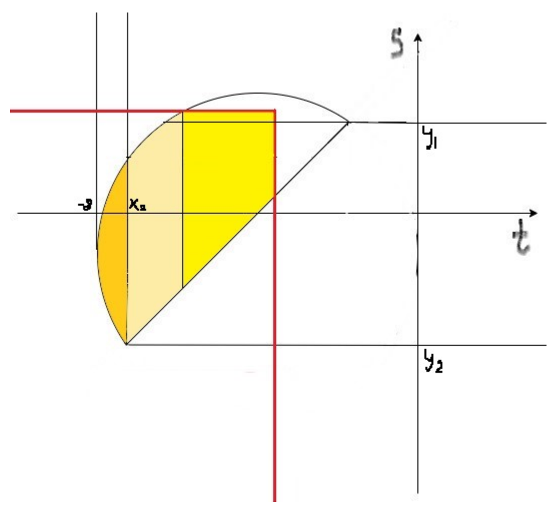

Рисунок 26

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \frac{1}{S_G}\left(\iint\limits_{G_{6.1}} dt\,ds + \iint\limits_{G_{6.2}} dt\,ds + + \iint\limits_{G_{6.3}} dt\,ds\right) =$$

$$= \frac{1}{S_G}[\int_{-8}^{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}} dt \int_{-\sqrt{16-(t+4)^2}-1}^{\sqrt{16-(t+4)^2}-1} ds + \int_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{-\sqrt{16-(y+1)^2}-4} dt \int_{t+4}^{\sqrt{16-(t+4)^2}-1} ds +$$

$$+\int_{-\sqrt{16-(y+1)^2}-4}^{x} dt\int_{t+4}^{y} ds] =$$

$$= \frac{1}{S_G}[\int_{-8}^{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}} 2\sqrt{16-(t+4)^2}\,dt + \int_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{-\sqrt{16-(y+1)^2}-4} (\sqrt{16-(t+4)^2} - t - 5)\,dt +$$

$$+\int_{-\sqrt{16-(y+1)^2}-4}^{x} (y-t-4)\,dt] =$$

$$= \frac{1}{S_G} = [2I_1 \mid_{-8}^{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}} + I_3 \mid_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{-\sqrt{16-(y+1)^2}-4} + (y-4)t \mid_{-\sqrt{16-(y+1)^2}-4}^{x} - \frac{t^2}{2} \mid_{-\sqrt{16-(y+1)^2}-4}^{x}] =$$

$$= \frac{1}{S_G}[8\left(\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right) + \arcsin\left(\frac{-\sqrt{16-(y+1)^2}}{4}\right)\right) +$$

$$+\frac{-2x^2+4x(y-4)+4(y+1)\sqrt{16-(y+1)^2}+16y-33-\sqrt{31}-2\sqrt{16(y+1)^2-(y+1)^4}}{4} + 8\pi]$$

8. $(x,y) \in D_7, G_7 = G_{7.1} \cup G_{7.2} =$

$$= \left\{ \text{(t,s)} \;\middle|\; \begin{array}{c} -8 < t \le \frac{-9-\sqrt{31}}{2}, \\ -\sqrt{16-(t+4)^2}-1 < s \le \sqrt{16-(t+4)^2}-1 \end{array} \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ \text{(t,s)} \;\middle|\; \begin{array}{c} \frac{-9-\sqrt{31}}{2} < t \le x, \\ t+4 < s \le \sqrt{16-(t+4)^2}-1 \end{array} \right\}$$

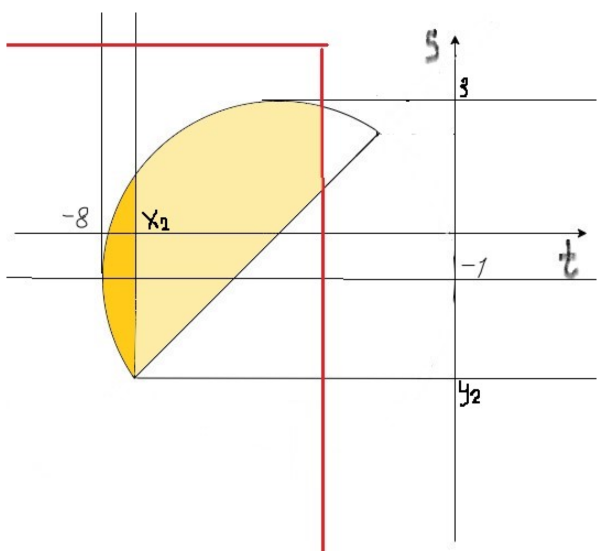

Рисунок 27

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{S_G}\left(\iint\limits_{G_{7.1}} dt\,ds + \iint\limits_{G_{7.2}} dt\,ds\right) =$$

$$= \frac{1}{S_G}\left(\int_{-8}^{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}} dt \int_{-\sqrt{16-(t+4)^2}-1}^{\sqrt{16-(t+4)^2}-1} ds + \int_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{x} dt \int_{t+4}^{\sqrt{16-(t+4)^2}-1} dt\right) =$$

$$= \frac{1}{S_G}\left(\int_{-8}^{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}} 2\sqrt{16-(t+4)^2}\,dt + \int_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{x} (\sqrt{16-(t+4)^2} - t - 5)\,ds\right) =$$

$$= \frac{1}{S_G}\left(2I_1 \mid_{-8}^{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}} + I_1 \mid_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{x} - (\frac{t^2}{2} + 5t) \mid_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{S_G}[8\left(\arcsin\left(\frac{x+4}{4}\right) + \arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right) +$$

$$+ \frac{-2x^2 - 20x + 2(x+4)\sqrt{-x(x+8)} - 49 - \sqrt{31}}{4} + 8\pi]$$

Бачимо, що $F_{\vec{\xi}}(x,y) = F_{\xi_1}(x)$ на проміжку $(\frac{-9-\sqrt{31}}{2} \leq x < \frac{-9-+\sqrt{31}}{2})$. Це означає, що при $y \to +\infty$ буде виконуватись умова узгодженості $\lim_{y\to+\infty} F_{\vec{\xi}}(x,y) = F_{\xi_1}(x)$

9.

$$(x,y) \in D_8, G_8 =$$

$$= \left\{ \text{(t,s)} \;\middle|\; \begin{array}{c} -\sqrt{16-(s+1)^2} - 4 < t \leq s - 4, \\ \frac{-1-\sqrt{31}}{2} \leq s < y \end{array} \right\}$$

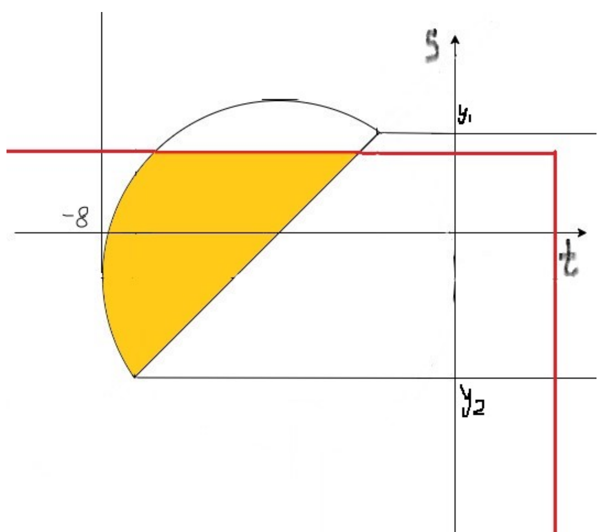

Рисунок 28

$$F_{\vec{\xi}} = \frac{1}{S_G}\iint\limits_{D_8} dt\,ds = \frac{1}{S_G}\int_{\frac{-1-\sqrt{31}}{2}}^{y} ds\int_{-\sqrt{16-(s+1)^2}-4}^{s-4} dt =$$

$$= \frac{1}{S_G}\int_{\frac{-1-\sqrt{31}}{2}}^{y}(s+\sqrt{16-(s+1)^2})\,ds = \frac{1}{S_G}I_4{}_{a=\frac{-1-\sqrt{31}}{2}}^{b=y} =$$

$$= \frac{1}{S_G}[8\left(\arcsin\left(\frac{y+1}{4}\right)-\arcsin\left(\frac{1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)+\frac{2y^2+2(y+1)\sqrt{15-y(y+2)}-1-\sqrt{31}}{4}]$$

Бачимо, що $F_{\vec{\xi}}(x,y) = F_{\xi_2}(y)$ на проміжку $(\frac{-1-\sqrt{31}}{2} \leq y < \frac{-1-+\sqrt{31}}{2})$. Це означає, що при $y \to +\infty$ буде виконуватись умова узгодженості $\lim_{x\to+\infty} F_{\vec{\xi}}(x,y) = F_{\xi_2}(y)$

10. $(x,y) \in D_9, G_9 = G_{9.1} \cup G_{9.2} \cup G_{9.3} \cup G_{9.4} =$

$$= \begin{array}{l} \left\{ \text{(t,s)} \;\middle|\; \begin{array}{c} -8 < t \leq \frac{-9-\sqrt{31}}{2}, \\ -\sqrt{16-(t+4)^2}-1 \leq s < \sqrt{16-(t+4)^2}-1 \end{array} \right\} \quad \cup \\ \cup \quad \left\{ \text{(t,s)} \;\middle|\; \begin{array}{c} \frac{-9-\sqrt{31}}{2} < t \leq -\sqrt{16-(y+1)^2}-4, \\ t+4 < s \leq \sqrt{16-(t+4)^2}-1 \end{array} \right\} \quad \cup \\ \cup \quad \left\{ \text{(t,s)} \;\middle|\; \begin{array}{c} -\sqrt{16-(y+1)^2}-4 < t \leq \sqrt{16-(y+1)^2}-4, \\ t+4 < s \leq y \end{array} \right\} \quad \cup \\ \cup \quad \left\{ \text{(t,s)} \;\middle|\; \begin{array}{c} \sqrt{16-(y+1)^2}-4 < t \leq x, \\ t+4 < s \leq \sqrt{16-(t+4)^2}-1 \end{array} \right\} \end{array}$$

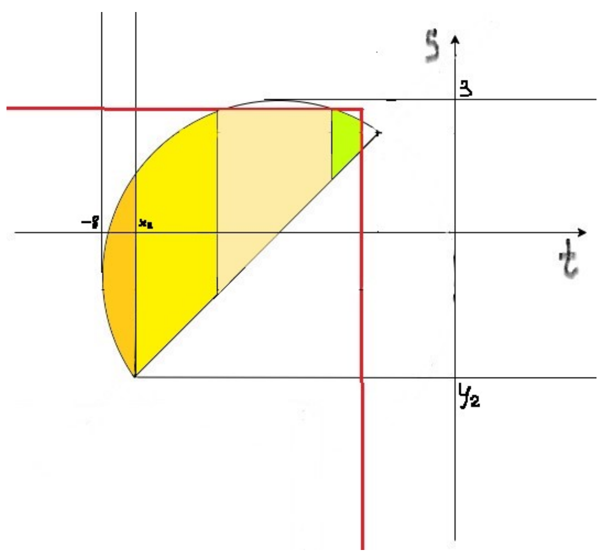

Рисунок 29

$$F_{\bar{\xi}}(x,y)=\frac{1}{S_G}\left(\iint\limits_{G_{9.1}}+\iint\limits_{G_{9.2}}+\iint\limits_{G_{9.3}}\,dt\,ds+\iint\limits_{G_{9.4}}\,dt\,ds\right)=$$

$$=\frac{1}{S_G}[\int_{-8}^{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}\,dt\int_{-\sqrt{16-(t+4)^2}-1}^{\sqrt{16-(t+4)^2}-1}\,ds+\int_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{-\sqrt{16-(y+1)^2}-4}\,dt\int_{t+4}^{\sqrt{16-(t+4)^2}-1}\,ds+$$

$$+\int_{-\sqrt{16-(y+1)^2}-4}^{\sqrt{16-(y+1)^2}-4}\,dt\int_{t+4}^{y}\,ds+\int_{16-(y+1)^2-4}^{x}\,dt\int_{t+4}^{\sqrt{16-(t+4)^2}-1}\,ds]=$$

$$=\frac{1}{S_G}[\int_{-8}^{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}2\sqrt{16-(t+4)^2}\,dt+\int_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{-\sqrt{16-(y+1)^2}-4}(\sqrt{16-(t+4)^2}-t-5)\,dt+$$

$$+\int_{-\sqrt{16-(y+1)^2}-4}^{\sqrt{16-(y+1)^2}-4}(y-t-4)\,dt+\int_{16-(y+1)^2-4}^{x}(\sqrt{16-(t+4)^2}-t-5)\,dt]=$$

$$=\frac{1}{S_G}[2I_1\,|_{a=-8}^{b=\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}+I_3\,|_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{-\sqrt{16-(y+1)^2}-4}+(y-4)t\,|_{-\sqrt{16-(y+1)^2}-4}^{\sqrt{16-(y+1)^2}-4}-\frac{t^2}{2}\,|_{-\sqrt{16-(y+1)^2}-4}^{\sqrt{16-(y+1)^2}-4}+$$

$$+I_3\,|_{16-(y+1)^2-4}^{x}]=$$

$$=\frac{1}{S_G}[8\left(\arcsin\left(\frac{x+4}{4}\right)+\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)+$$

$$+\frac{-2x^2-20x+8(y+1)\sqrt{16-(y+1)^2}-49-\sqrt{31}+2(x+4)\sqrt{-x(x+8)}}{4}+8\pi]$$

11.

$$(x,y)\in D_{10},G_{10}=G_{10.1}\ \cup\ G_{10.2}=$$

$$=\begin{array}{l}\left\{\ (\text{t,s})\ \middle|\ \begin{array}{c}-\sqrt{16-(s+1)^2}-4<t\le\frac{-9+\sqrt{31}}{2},\\ \frac{-1-\sqrt{31}}{2}<s\le\frac{-1+\sqrt{31}}{2}\end{array}\right\}\quad\cup\\ \cup\quad\left\{\ (\text{t,s})\ \middle|\ \begin{array}{c}-\sqrt{16-(s+1)^2}-4<t\le\sqrt{16-(s+1)^2}-4,\\ \frac{-1+\sqrt{31}}{2}<s\le y\end{array}\right\}\end{array}$$

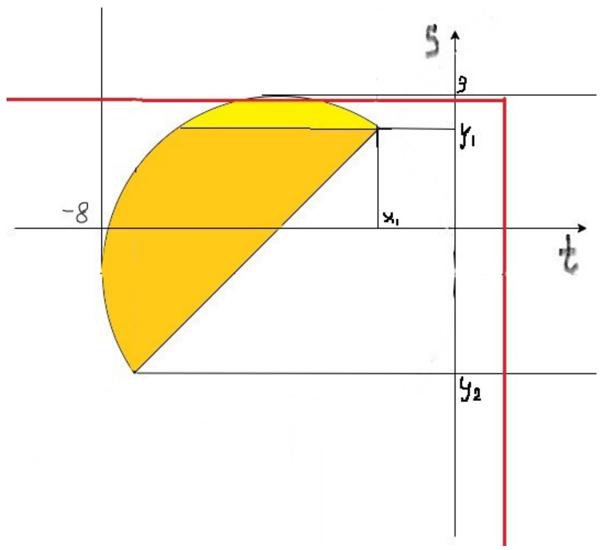

Рисунок 30

$$F_{\vec{\xi}}(x,y)=\frac{1}{S_G}\left(\iint\limits_{G_{10.1}} dt\,ds+\iint\limits_{G_{10.2}} dt\,ds\right)=$$

$$=\frac{1}{S_G}[\int_{\frac{-1-\sqrt{31}}{2}}^{\frac{-1+\sqrt{31}}{2}} ds\int_{-\sqrt{16-(s+1)^2}-4}^{\frac{-9+\sqrt{31}}{2}} dt+\int_{\frac{-1+\sqrt{31}}{2}}^{y} ds\int_{-\sqrt{16-(s+1)^2}-4}^{\sqrt{16-(s+1)^2}-4} dt]=$$

$$=\frac{1}{S_G}[\int_{\frac{-1-\sqrt{31}}{2}}^{\frac{-1+\sqrt{31}}{2}} (\frac{-1+\sqrt{31}}{2}+\sqrt{16-(s+1)^2})\,ds+\int_{\frac{-1+\sqrt{31}}{2}}^{y} 2\sqrt{16-(s+1)^2}\,ds]=$$

$$=\frac{1}{S_G}[\frac{-1+\sqrt{31}}{2}s+I_2\,|_{a=\frac{-1-\sqrt{31}}{2}}^{b=\frac{-1+\sqrt{31}}{2}}+2I_2\,|_{a=\frac{-1+\sqrt{31}}{2}}^{b=y}]=$$

$$=\frac{1}{S_G}[-\frac{\sqrt{31}}{2}-8\arcsin\left(\frac{\sqrt{31}}{16}\right)+16\arcsin\left(\frac{y+1}{4}\right)+(y+1)\sqrt{15-y(y+2)}]$$

Бачимо, що $F_{\vec{\xi}}(x,y)=F_{\xi_2}(y)$ на проміжку ($\frac{-1-+\sqrt{31}}{2}\le y<3$). Це означає, що при $y\to+\infty$ буде виконуватись умова узгодженості $\lim_{x\to+\infty}F_{\vec{\xi}}(x,y)=F_{\xi_2}(y)$

12.

$$(x,y)\in D_{11}, G_{11}=G_{11.1}\,\cup\,G_{11.2}=$$

$$=\begin{array}{l}\left\{ \text{(t,s)}\ \middle|\ \begin{array}{c} -8<t\le\frac{-9-\sqrt{31}}{2} \\ -\sqrt{16-(t+4)^2}-1<s\le\sqrt{16-(t+4)^2}-1 \end{array}\right\}\ \cup \\ \cup\ \left\{ \text{(t,s)}\ \middle|\ \begin{array}{c} \frac{-9-\sqrt{31}}{2}<t\le\frac{-9+\sqrt{31}}{2}, \\ t+4<s\le\sqrt{16-(t+4)^2}-1 \end{array}\right\}\end{array}$$

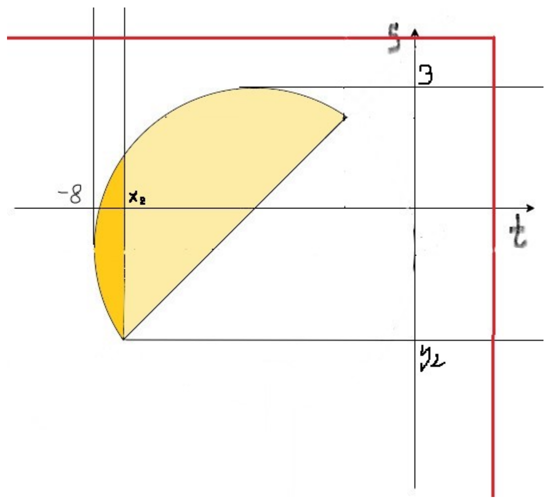

Рисунок 31

$$F_{\bar{\xi}}(x,y)=\frac{1}{S_G}\left(\iint_{G_{11.1}}dt\,ds+\iint_{G_{11.2}}dt\,ds\right)=$$

$$=\frac{1}{S_G}\left(\int_{-8}^{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}dt\int_{-\sqrt{16-(t+4)^2}-1}^{\sqrt{16-(t+4)^2}-1}ds+\int_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{\frac{-9+\sqrt{31}}{2}}dt\int_{t+4}^{\sqrt{16-(t+4)^2}-1}ds\right)=$$
$$\frac{1}{S_G}\left(\int_{-8}^{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}2\sqrt{16-(t+4)^2}\,dt+\int_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{\frac{-9+\sqrt{31}}{2}}(\sqrt{16-(t+4)^2}-t-5)\,dt\right)=$$
$$\frac{1}{S_G}\left(2I_1\,\Big|_{a=-8}^{b=\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}+I_1\,\Big|_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{\frac{-9+\sqrt{31}}{2}}-(\frac{t^2}{2}+5t)\,\Big|_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{\frac{-9+\sqrt{31}}{2}}\right)=$$
$$\frac{1}{S_G}[8\left(\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right)+(\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)+$$
$$4\left(\sin\left(2(\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right)\right)+\sin 2(\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)+8\pi-\frac{\sqrt{31}}{2}]=$$
$$\frac{1}{S_G}\cdot S_G=1$$

Запишемо відповідь:

$$F_{\vec{\xi}}(x,y)=\begin{cases} 0, & (x,y)\in D_0\\ \frac{1}{S_G}\left(\frac{2(y+1)(x+8)+(x+4)\sqrt{-x(x+8)}}{2}+4\pi+8\left(\arcsin\left(\frac{x+4}{4}\right)\right)\right), & (x,y)\in D_1\\ \frac{1}{S_G}[8\left(\arcsin\left(\frac{x+4}{4}\right)+\arcsin\left(\frac{-\sqrt{16-(y+1)^2}}{4}\right)\right)+ \\ +\frac{2x(y+1)+(x+4)\sqrt{-x(x+8)}+2(y+1)\sqrt{16-(y+1)^2}+8(y+1)-\sqrt{16(y+1)^2-(y+1)^4}}{2}+8\pi], & (x,y)\in D_2\\ \frac{1}{S_G}[16\left(\arcsin\left(\frac{x+4}{4}\right)\right)+(x+4)\sqrt{-x(x+8)}+8\pi], & (x,y)\in D_3\\ \frac{1}{S_G}[\frac{-2x^2+4xy-16x+32y-17-\sqrt{31}}{4}+8\left(\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)+4\pi], & (x,y)\in D_4\\ \frac{1}{S_G}[8\left(\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)+\arcsin\left(\frac{-\sqrt{16-(y+1)^2}}{4}\right)\right)+ \\ +\frac{-2x^2+4x(y-4)+4(y+1)\sqrt{16-(y+1)^2}+16y-33-\sqrt{31}-2\sqrt{16(y+1)^2-(y+1)^4}}{4}+8\pi], & (x,y)\in(D_5\ \cup\ D_6)\\ \frac{1}{S_G}[8\left(\arcsin\left(\frac{x+4}{4}\right)+\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)+\frac{-2x^2-20x+2(x+4)\sqrt{-x(x+8)}-49-\sqrt{31}}{4}+8\pi], & (x,y)\in D_7\\ \frac{1}{S_G}[8\left(\arcsin\left(\frac{y+1}{4}\right)-\arcsin\left(\frac{1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)+\frac{2y^2+2(y+1)\sqrt{15-y(y+2)}-1-\sqrt{31}}{4}]), & (x,y)\in D_8\\ \frac{1}{S_G}[8\left(\arcsin\left(\frac{x+4}{4}\right)+\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)+ \\ +\frac{-2x^2-20x+8(y+1)\sqrt{16-(y+1)^2}-49-\sqrt{31}+2(x+4)\sqrt{-x(x+8)}}{4}+8\pi], & (x,y)\in D_9\\ \frac{1}{S_G}[-\frac{\sqrt{31}}{2}-8\arcsin\left(\frac{\sqrt{31}}{16}\right)+16\arcsin\left(\frac{y+1}{4}\right)+(y+1)\sqrt{15-y(y+2)}]), & (x,y)\in D_{10}\\ 1, & (x,y)\in D_{11} \end{cases}$$

Перевіримо неперервність отриманої сумісної функції розподілу на деяких межових лініях, де потенційно можуть знаходитися точки розриву (на лініях, що не перевірялись, неперервність також перевірена, але не описувалась у роботі, так як занадто громіздко).

1. $D_0 \cap D_3$ Пряма: $x = -8, \ \ y \geq -1$

$$D_0 : \quad F_{\vec{\xi}}(-8, y) = 0$$

$$D_3 : \quad F_{\vec{\xi}}(-8, y) = \frac{1}{S_G}[-8\pi + 0 + 8\pi] = 0$$

Неперервність доведено.

2. $D_0 \cap D_8$ Пряма: $y = \frac{-1-\sqrt{31}}{2}, \quad x > \frac{-9-\sqrt{1}}{2}$

$$D_0 : \quad F_{\vec{\xi}}(x, \frac{-1-\sqrt{31}}{2}) = 0$$

$$D_8 : \quad F_{\vec{\xi}}(x, \frac{-1-\sqrt{31}}{2}) = \frac{1}{S_G}[8\left(\arcsin\left(\frac{1-\sqrt{31}}{8}\right) - \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{31}}{8}\right)\right) +$$

$$+\frac{2\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{2}\right)^2 + (1-\sqrt{31})\sqrt{15 + \frac{1+\sqrt{31}}{2}(\frac{3-\sqrt{31}}{2})} - 1 - \sqrt{31}}{4}]) = 0$$

Неперервність доведено.

3. $D_1 \cap D_2$ Пряма: $y = -1, \ \ -8 \leq x < \frac{-9-\sqrt{31}}{2}$

$$D_1 : \quad F_{\vec{\xi}}(x, -1) = \frac{1}{S_G}\left(\frac{(x+4)\sqrt{-x(x+8)}}{2} + 4\pi + 8\left(\arcsin\left(\frac{x+4}{4}\right)\right)\right)$$

$$D_2 : \quad F_{\vec{\xi}}(x, -1) = \frac{1}{S_G}[8\left(\arcsin\left(\frac{x+4}{4}\right) + \arcsin\left(\frac{-\sqrt{16}}{4}\right)\right) + \frac{(x+4)\sqrt{-x(x+8)}}{2} + 8\pi] =$$

$$= \frac{1}{S_G}\left(\frac{(x+4)\sqrt{-x(x+8)}}{2} + 4\pi + 8\left(\arcsin\left(\frac{x+4}{4}\right)\right)\right)$$

Неперервність доведено.

4. $D_1 \cap D_4$ Пряма: $x = \frac{-9-\sqrt{31}}{2}, \ \ \frac{-1-\sqrt{31}}{2} \leq y < -1$

$$D_1 : \quad F_{\vec{\xi}}(\frac{-9-\sqrt{31}}{2}, y) = \frac{1}{S_G}[\frac{(14-2\sqrt{31})y - 2\sqrt{31} - 1}{4} +$$

$$+4\pi + 8\left(\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)]$$

$$D_4: \quad F_{\bar{\xi}}(\frac{-9-\sqrt{31}}{2}, y) =$$

$$= \frac{1}{S_G}[\frac{-2\left(\frac{-9-\sqrt{31}}{2}\right)^2 + 2(-9-\sqrt{31})y - 8(-9-\sqrt{31}) + 32y - 17 - \sqrt{31}}{4} +$$

$$+8\left(\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right) + 4\pi] =$$

$$= \frac{1}{S_G}[\frac{(14-2\sqrt{31})y - 2\sqrt{31} - 1}{4} + 8\left(\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right) + 4\pi]$$

Неперервність доведено.

5. $D_2 \ \cap \ D_5$ Пряма: $x = \frac{-9-\sqrt{31}}{2}, \ -1 \leq y < \frac{-3+\sqrt{31}}{2}$

$$D_2: \quad F_{\bar{\xi}}(\frac{-9-\sqrt{31}}{2}, y) =$$

$$= \frac{1}{S_G}[8\left(\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right) + \arcsin\left(\frac{-\sqrt{16-(y+1)^2}}{4}\right)\right) +$$

$$+\frac{-2y(-2\sqrt{16-(y+1)^2} + \sqrt{31} + 1) + 4\sqrt{16-(y+1)^2} - 2\sqrt{-(y+1)^2(-16+(y+1)^2)} - 2\sqrt{31} - 17}{4} +$$

$$+8\pi]$$

$$D_5: \quad F_{\bar{\xi}}(\frac{-9-\sqrt{31}}{2}, y) =$$

$$= \frac{1}{S_G}[8\left(\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right) + \arcsin\left(\frac{-\sqrt{16-(y+1)^2}}{4}\right)\right) +$$

$$+\frac{-2y(-2\sqrt{16-(y+1)^2} + \sqrt{31} + 1) + 4\sqrt{16-(y+1)^2} - 2\sqrt{-(y+1)^2(-16+(y+1)^2)} - 2\sqrt{31} - 17}{4} +$$

$$+8\pi]$$

Неперервність доведено.

6. $D_7 \cap D_{11}$ Пряма: $x = \frac{-9+\sqrt{31}}{2}, \ > 3$

$$D_7: \quad F_{\bar{\xi}}(\frac{-9+\sqrt{31}}{2}, y) =$$

$$= \frac{1}{S_G}[8\left(\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right) + \arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right) +$$

$$+\frac{-2\left(\frac{-9+\sqrt{31}}{2}\right)^2-20\left(\frac{-9+\sqrt{31}}{2}\right)+2(\frac{-1+\sqrt{31}}{2})\sqrt{-\frac{-9+\sqrt{31}}{2}(\frac{7+\sqrt{31}}{2})}-49-\sqrt{31}}{4}+8\pi]=$$

$$=\frac{1}{S_G}\cdot S_G=1$$

$$D_{11}:\quad F_{\bar{\xi}}(\frac{-9+\sqrt{31}}{2},y)=1$$

Неперервність доведено.

7. $D_7\ \cap\ D_9$ Пряма: $y=3,\quad -4\le x<\frac{-9+\sqrt{31}}{2}$

$$D_7:\quad F_{\bar{\xi}}(x,3)=$$

$$=\frac{1}{S_G}[8\left(\arcsin\left(\frac{x+4}{4}\right)+\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)+$$

$$+\frac{-2x^2-20x+2(x+4)\sqrt{-x(x+8)}-49-\sqrt{31}}{4}+8\pi]$$

$$D_9:\quad F_{\bar{\xi}}(x,3)=$$

$$=\frac{1}{S_G}[8\left(\arcsin\left(\frac{x+4}{4}\right)+\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)+$$

$$+\frac{-2x^2-20x+32\sqrt{16-(4)^2}-49-\sqrt{31}+2(x+4)\sqrt{-x(x+8)}}{4}+8\pi]=$$

$$=\frac{1}{S_G}[8\left(\arcsin\left(\frac{x+4}{4}\right)+\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)+$$

$$+\frac{-2x^2-20x+2(x+4)\sqrt{-x(x+8)}-49-\sqrt{31}}{4}+8\pi]$$

Неперервність доведено.

8. $D_8\ \cap\ D_{10}$ Пряма:$y=\frac{-1+\sqrt{31}}{2},x>\frac{-9+\sqrt{31}}{2}$

$$D_8:\quad F_{\bar{\xi}}(x,\frac{-1+\sqrt{31}}{2})=$$

$$\frac{1}{S_G}[4\pi+\frac{15-\sqrt{31}}{2}]$$

$$D_{10}:\quad F_{\bar{\xi}}(x,\frac{-1+\sqrt{31}}{2})=$$

$$=\frac{1}{S_G}[-\frac{\sqrt{31}}{2}-8\arcsin\left(\frac{\sqrt{31}}{16}\right)+16\arcsin\left(\frac{1+\sqrt{31}}{8}\right)+\frac{1+\sqrt{31}}{2}\sqrt{15-\frac{-1+\sqrt{31}}{2}(\frac{3+\sqrt{31}}{2})}]=$$

$$= \frac{1}{S_G}[\frac{15-\sqrt{31}}{2} + 4\pi]$$

Неперервність доведено.

9. $D_{10} \cap D_{11}$ Пряма: $y = 3, \ > \frac{-9+\sqrt{31}}{2}$

$$D_{10}: \quad F_{\vec{\xi}}(x,3) =$$

$$= \frac{1}{S_G}[-\frac{\sqrt{31}}{2} - 8\arcsin\left(\frac{\sqrt{31}}{16}\right) + 8\pi] = \frac{1}{S_G} \cdot S_G = 1$$

$$D_{11}: \quad F_{\vec{\xi}}(x,3) = 1$$

Неперервність доведено.

МАТЕМАТИЧНІ СПОДІВАННЯ КООРДИНАТ. КОРЕЛЯЦІЙНА ТА НОРМОВАНА КОРЕЛЯЦІЙНА МАТРИЦІ

а) Обчислимо математичні сподівання координат:

$$E\xi_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi_1}(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{S_G}\left(2\int_{-8}^{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}} x\sqrt{16-(x+4)^2}\, dx + \int_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{\frac{-9+\sqrt{31}}{2}} x(\sqrt{16-(x+4)^2}-x-5)\, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{S_G}\left(2I_5 \,|_{a=-8}^{b=\frac{-9-\sqrt{31}}{2}} + I_6 \,|_{a=\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{b=\frac{-9+\sqrt{31}}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{S_G}[-\frac{2}{3}\left(\frac{16-\sqrt{31}}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - 64\left(\arcsin\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right) - 32\left(\sin\left(2\arcsin\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right) - 32\pi -$$

$$-\frac{1}{3}\left(\left(\frac{16+\sqrt{31}}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{16-\sqrt{31}}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right) - 32\left(\arcsin\frac{-1+\sqrt{31}}{8} - \arcsin\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right) -$$

$$-16\left(\sin\left(2\arcsin\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right) - \sin\left(2\arcsin\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right) - \frac{\sqrt{31}}{3}] =$$

$$= \frac{1}{S_G}[-\frac{1}{3}\left(\left(\frac{16+\sqrt{31}}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{16-\sqrt{31}}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right) - 32\left(\arcsin\frac{-1+\sqrt{31}}{8} + \arcsin\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right) -$$

$$-16\left(\sin\left(2\arcsin\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right) + \sin\left(2\arcsin\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right) - \frac{\sqrt{31}}{3} - 32\pi] =$$

$$= \frac{1}{S_G}[-32\left(\arcsin\frac{-1+\sqrt{31}}{8} + \arcsin\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right) -$$

$$-16\left(\sin\left(2\arcsin\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right) + \sin\left(2\arcsin\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right) - 19\sqrt{31}6 - 32\pi] =$$

$$= \frac{1}{S_G}[-32\left(\arcsin\frac{-1+\sqrt{31}}{8} + \arcsin\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right) -$$

$$-16\left(\sin\left(2\arcsin\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right) + \sin\left(2\arcsin\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right) - 2\sqrt{31} - 32\pi - \frac{7\sqrt{31}}{6}] =$$

$$= \frac{1}{S_G} \cdot (-4S_G) - \frac{7\sqrt{31}}{6S_G} = -4 - \frac{7\sqrt{31}}{6S_G} =$$

$$= -4 - \frac{7\sqrt{31}}{48\left(\arccos\left(-\frac{15}{16}\right)\right) - 3\sqrt{31}} \approx -4.33$$

$$E\xi_2 \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{\xi_2}(y)\, dy =$$

$$= \frac{1}{S_G}\left(\int_{\frac{-1-\sqrt{31}}{2}}^{\frac{-1+\sqrt{31}}{2}} y(y + \sqrt{16-(y+1)^2})\, dy + 2\int_{\frac{-1+\sqrt{31}}{2}}^{3} y\sqrt{16-(y+1)^2}\, dy\right) =$$

$$= \frac{1}{S_G}\left(I_8 \mid_{a=\frac{-1-\sqrt{31}}{2}}^{b=\frac{-1+\sqrt{31}}{2}} + 2I_7 \mid_{a=\frac{-1+\sqrt{31}}{2}}^{b=3}\right) =$$

$$= \frac{1}{S_G}[\frac{17\sqrt{31}+47}{6} -$$

$$-8\left(\arcsin\frac{1+\sqrt{31}}{8} - \arcsin\frac{1-\sqrt{31}}{8}\right) - 4\left(\sin\left(2\arcsin\frac{1+\sqrt{31}}{8}\right) - \sin\left(2\arcsin\frac{1-\sqrt{31}}{8}\right)\right) +$$

$$+\frac{17\sqrt{31}-47}{6} - 16\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1+\sqrt{31}}{8}\right) + 8\sin\left(2\arcsin\frac{1+\sqrt{31}}{8}\right)] =$$

$$= \frac{1}{S_G}[\frac{17\sqrt{31}}{3} - 8\pi + 8\left(\arcsin\frac{1+\sqrt{31}}{8} - \arcsin\frac{1-\sqrt{31}}{8}\right) +$$

$$+4\left(\sin\left(2\arcsin\frac{1+\sqrt{31}}{8}\right) - \sin\left(2\arcsin\frac{1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)] =$$

$$= \frac{1}{S_G}[8\left(\arcsin\frac{1+\sqrt{31}}{8} - \arcsin\frac{1-\sqrt{31}}{8}\right) + 4\left(\sin\left(2\arcsin\frac{1+\sqrt{31}}{8}\right) - \sin\left(2\arcsin\frac{1-\sqrt{31}}{8}\right)\right) -$$

$$= \frac{\sqrt{31}}{2} - 8\pi + \frac{37\sqrt{31}}{6}] = -1 + \frac{37\sqrt{31}}{6S_G} =$$

$$= -1 + \frac{37\sqrt{31}}{48\left(\arccos\left(-\frac{15}{16}\right)\right) - 3\sqrt{31}} \approx 0.76$$

Отже центр розсіювання вектора $\vec{\xi}$:

$$(E\xi_1, E\xi_2) = \left(-4 - \frac{7\sqrt{31}}{6S_G}; -1 + \frac{37\sqrt{31}}{6S_G}\right) \approx (-4.33; 0.76)$$

б) Побудуємо кореляційну та нормовану кореляційну матриці: $\mathbb{K} = \begin{pmatrix} D\xi_1 & K(\xi_1,\xi_2) \\ K(\xi_1,\xi_2) & D\xi_2 \end{pmatrix}$

$$E\xi_1^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{\xi_1}(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S_G}\left(2\int_{-8}^{\frac{-9-\sqrt{31}}{2})} x^2\sqrt{16-(x+4)^2}\,dx + \int_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2})}^{\frac{-9+\sqrt{31}}{2})} x^2(\sqrt{16-(x+4)^2}-x-5)\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{S_G}\left(2I_9\,|_{a=-8}^{b=\frac{-9-\sqrt{31}}{2}} + I_{10}\,|_{a=\frac{-9-\sqrt{31}}{2})}^{b=\frac{-9+\sqrt{31}}{2})}\right) =$$

$$= \frac{1}{S_G}[320\left(\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)+\frac{\pi}{2}\right)+128\left(\sin\left(2\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)\right)+$$

$$+\frac{16}{3}\left((16-(\frac{-1-\sqrt{31}}{2})^2)^{\frac{3}{2}}\right)-16\left(\sin\left(4\arcsin(\frac{-1-\sqrt{31}}{8})\right)\right)+$$

$$+160\left(\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right)-\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)+$$

$$+64\left(\sin\left(2\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right)\right)-\sin\left(2\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)\right)+$$

$$+\frac{8}{3}\left((16-(\frac{-1+\sqrt{31}}{2})^2)^{\frac{3}{2}}-(16-(\frac{-1-\sqrt{31}}{2})^2)^{\frac{3}{2}}\right)-$$

$$-8\left(\sin\left(4\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right)\right)-\sin\left(4\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)\right)-$$

$$-\frac{1}{4}(\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right)^2-\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)^2)-\frac{5}{3}(\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right)^3-\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)^3)] =$$

$$= \frac{1}{S_G}[160\left(\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right)+\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)+$$

$$+64\left(\sin\left(2\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right)\right)+\sin\left(2\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)\right)-$$

$$-8\left(\sin\left(4\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right)\right)+\sin\left(4\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)\right)+$$

$$+\frac{8}{3}\left((16-(\frac{-1+\sqrt{31}}{2})^2)^{\frac{3}{2}}+(16-(\frac{-1-\sqrt{31}}{2})^2)^{\frac{3}{2}}\right)-$$

$$-\frac{1}{4}(\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right)^2-\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)^2)-\frac{5}{3}(\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right)^3-\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)^3)+160\pi]=$$

$$=\frac{1}{S_G}[160\left(\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right)+\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)+$$

$$+64\left(\sin\left(2\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right)\right)+\sin\left(2\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)\right)-$$

$$-8\left(\sin\left(4\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right)\right)+\sin\left(4\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)\right)+$$

$$+\frac{188}{3}-\frac{79\sqrt{31}}{384}+160\pi]=$$

$$=\frac{1}{S_G}[20S_G-16\left(\sin\left(2\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right)\right)+\sin\left(2\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)\right)-$$

$$-8\left(\sin\left(4\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right)\right)+\sin\left(4\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)\right)-$$

$$-\frac{459\sqrt{31}}{384}+\frac{188}{3}]=$$

$$=20-\frac{1}{S_G}[16\left(\sin\left(2\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right)\right)+\sin\left(2\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)\right)+$$

$$+8\left(\sin\left(4\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right)\right)+\sin\left(4\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)\right)+$$

$$+\frac{459\sqrt{31}}{384}-\frac{188}{3}]=$$

$$= 20 - \frac{1}{S_G} \cdot \frac{1179\sqrt{31} - 24064}{384} \approx 22.34$$

Тоді можемо обчислити дисперсію першої координати:

$$D\xi_1 = E\xi_1^2 - (E\xi_1)^2 = 20 - \frac{1}{S_G} \cdot \frac{1179\sqrt{31} - 24064}{384} - 16 - \frac{56\sqrt{31}}{6S_G} - \frac{1519}{36S_G^2}$$

$$= 4 - \frac{4763\sqrt{31}}{384S_G} + \frac{72192S_G - 48608}{1152S_G^2} \approx 22.34 - (-4.33)^2 = 3.5911$$

Дисперсія додатня, як і очікувалось.

$$E\xi_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_{\xi_2}(y)\, dy =$$

$$= \frac{1}{S_G} \left(\int_{\frac{-1-\sqrt{31}}{2}}^{\frac{-1+\sqrt{31}}{2}} y^2 (y + \sqrt{16 - (y+1)^2})\, dy + 2\int_{\frac{-1+\sqrt{31}}{2}}^{3} y^2 \sqrt{16 - (y+1)^2}\, dy \right) =$$

$$= \frac{1}{S_G} \left(I_{12} \,|_{a=\frac{-1-\sqrt{31}}{2}}^{b=\frac{-1+\sqrt{31}}{2}} + 2I_{11} \,|_{a=\frac{-1+\sqrt{31}}{2}}^{b=3} \right) =$$

$$= \frac{1}{S_G}[40 \left(\arcsin\left(\frac{1+\sqrt{31}}{8}\right) - \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{31}}{8}\right) \right) +$$

$$+4 \left(\sin\left(2\arcsin\left(\frac{1+\sqrt{31}}{8}\right)\right) - \sin\left(2\arcsin\left(\frac{1-\sqrt{31}}{8}\right)\right) \right) +$$

$$+\frac{4}{3} \left((16 - (\frac{1+\sqrt{31}}{2})^2)^{\frac{3}{2}} - (16 - (\frac{1-\sqrt{31}}{2})^2)^{\frac{3}{2}} \right) -$$

$$-8 \left(\sin\left(4\arcsin\left(\frac{1+\sqrt{31}}{8}\right)\right) - \sin\left(4\arcsin\left(\frac{1-\sqrt{31}}{8}\right)\right) \right) +$$

$$+\frac{1}{4} \left(\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{2}\right)^4 - \left(\frac{-1-\sqrt{31}}{2}\right)^4 \right) +$$

$$+80 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{1+\sqrt{31}}{8}\right) \right) - 8 \left(\sin\left(2\arcsin\left(\frac{1+\sqrt{31}}{8}\right)\right) \right) -$$

$$-\frac{8}{3} \left((16 - \left(\frac{1+\sqrt{31}}{2}\right)^2)^{\frac{3}{2}} \right) + 16 \left(\sin\left(4\arcsin\left(\frac{1+\sqrt{31}}{8}\right)\right) \right)] =$$

$$= \frac{1}{S_G}[40\left(\arcsin\left(\frac{-1-1\sqrt{31}}{8}\right)+\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right)\right)+$$

$$+4\left(\sin\left(2\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)+\sin\left(2\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right)\right)\right)-$$

$$-8\left(\sin\left(4\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)+\sin\left(4\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right)\right)\right)+$$

$$+4\sqrt{31}+\frac{94}{3}+40\pi] =$$

$$= \frac{1}{S_G}[5S_G - 16\left(\sin\left(2\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)+\sin\left(2\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right)\right)\right)-$$

$$-8\left(\sin\left(4\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)+\sin\left(4\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right)\right)\right)+$$

$$+\frac{3\sqrt{31}}{2}+\frac{94}{3}] =$$

$$= 5 - \frac{1}{S_G}[16\left(\sin\left(2\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)+\sin\left(2\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right)\right)\right)+$$

$$+8\left(\sin\left(4\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)+\sin\left(4\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right)\right)\right)-$$

$$-\frac{3\sqrt{31}}{2}-\frac{94}{3}] = 5 - \frac{1}{S_G}\cdot\frac{9\sqrt{31}-752}{24} \approx 6.5$$

Тепер можемо обчислити дисперсію:

$$D\xi_2 = E\xi_2^2 - (E\xi_2)^2 = 5 - \frac{1}{S_G}\cdot\frac{9\sqrt{31}-752}{24} - 1 + \frac{74\sqrt{31}}{6S_G} - \frac{35836}{36S_G^2} =$$

$$= 4 + \frac{287\sqrt{31}}{24S_G} + \frac{2256S_G - 71672}{72S_G^2} \approx 6.5 - (0.76)^2 = 5.9224$$

Дисперсія додатня, як і очікувалось.

$$E\xi_1\xi_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{\bar{\xi}}(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S_G}\left(\int_{-8}^{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}} x\,dx \int_{-\sqrt{16-(x+4)^2}-1}^{\sqrt{16-(x+4)^2}-1} y\,dy + \int_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{\frac{-9+\sqrt{31}}{2}} x\,dx \int_{x+4}^{\sqrt{16-(x+4)^2}-1} y\,dy\right) =$$

$$= \frac{1}{S_G}\left(\int_{-8}^{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}} x\sqrt{16-(x+4)^2}\,dx + \int_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{\frac{-9+\sqrt{31}}{2}} x(\sqrt{16-(x+4)^2} - x - 5)\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{S_G}\left(I_5 \,|_{a=-8}^{b=\frac{-9-\sqrt{31}}{2}} + I_6 \,|_{a=\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{b=\frac{-9+\sqrt{31}}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{S_G}[-\frac{1}{3}\left(\frac{16-\sqrt{31}}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - 32\left(\arcsin\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right) - 16\left(\sin\left(2\arcsin\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right) - 16\pi -$$

$$-\frac{1}{3}\left(\left(\frac{16+\sqrt{31}}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{16-\sqrt{31}}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right) - 32\left(\arcsin\frac{-1+\sqrt{31}}{8} - \arcsin\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right) -$$

$$-16\left(\sin\left(2\arcsin\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right)\frac{1}{S_G}() - \sin\left(2\arcsin\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right) - \frac{\sqrt{31}}{3}] =$$

$$= \frac{1}{S_G}\left[-32\left(\arcsin\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right) - 16\left(\sin\left(2\arcsin\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right)\right) - \frac{47+21\sqrt{31}}{12} - 16\pi\right] =$$

$$= \frac{1}{S_G}(-32\left(\arcsin\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right) - \frac{227+21\sqrt{31}}{12} - 16\pi) \approx -5.04$$

Тепер обчислюємо кореляційний момент:

$$K(\xi_1, \xi_2) = E\xi_1\xi_2 - E\xi_1 \cdot E\xi_2 \approx -5.04 - (-4.33) \cdot 0.76 = -1.7492$$

Можемо записати кореляційну матрицю:

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} 3.5911 & -1.7492 \\ -1.7492 & 5.9224 \end{pmatrix}$$

Перевіримо додатну визначеність:

$$\det \mathbb{K} = \begin{vmatrix} 3.5911 & -1.7492 \\ -1.7492 & 5.9224 \end{vmatrix} = 3.5911 \cdot 5.9224 - (1.7492)^2 \approx 18.2 > 0$$

Нормована кореляційна матриця має вигляд:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r(\xi_1, \xi_2) \\ r(\xi_1, \xi_2) & 1 \end{pmatrix}$$

Коефіцієнт кореляції обчислюється за формулою:

$$r(\xi_1, \xi_2) = \frac{K(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{D\xi_1 \cdot D\xi_2}}$$

$$\sqrt{D\xi_1 \cdot D\xi_2} \approx \sqrt{3.5911 \cdot 5.9224} \approx 4.612$$

$$r(\xi_1, \xi_2) \approx \frac{-1.7492}{4.612} \approx -0.38$$

Отже, **нормована кореляційна матриця має вигляд:**

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -0.38 \\ -0.38 & 1 \end{pmatrix}$$

УМОВНІ ЩІЛЬНОСТІ РОЗПОДІЛУ ДЛЯ КОЖНОЇ КООРДИНАТИ

$$f_{\xi_1}(x/y) = \frac{f_{\bar{\xi}}(x,y)}{f_{\xi_2}(y)} = \begin{cases} 0, & y \le \frac{-1-\sqrt{31}}{2} \\ \frac{\frac{1}{S_G}}{\frac{1}{S_G}(y+\sqrt{16-(y+1)^2})} = & \\ = \frac{1}{y+\sqrt{16-(y+1)^2}}, & y \in \left(\frac{-1-\sqrt{31}}{2}; \frac{-1+\sqrt{31}}{2}\right), x \in \left(-\sqrt{16-(y+1)^2}-4; y-4\right) \\ 0, & y \in \left(\frac{-1-\sqrt{31}}{2}; \frac{-1+\sqrt{31}}{2}\right), x \notin \left(-\sqrt{16-(y+1)^2}-4; y-4\right) \\ \frac{\frac{1}{S_G}}{\frac{2}{S_G}(\sqrt{16-(y+1)^2})} = & \\ = \frac{1}{2\sqrt{16-(y+1)^2}}, & y \in \left(\frac{-1+\sqrt{31}}{2}; 3\right), x \in \left(-\sqrt{16-(y+1)^2}-4; \sqrt{16-(y+1)^2}-4\right) \\ 0, & y \in \left(\frac{-1+\sqrt{31}}{2}; 3\right), x \notin \left(-\sqrt{16-(y+1)^2}-4; \sqrt{16-(y+1)^2}-4\right) \\ 0, & y > 3 \end{cases}$$

Остаточно маємо:

$$f_{\xi_1}(x/y) = \begin{cases} \frac{1}{y+\sqrt{16-(y+1)^2}}, & y \in \left(\frac{-1-\sqrt{31}}{2}; \frac{-1+\sqrt{31}}{2}\right), x \in \left(-\sqrt{16-(y+1)^2}-4; y-4\right) \\ \frac{1}{2\sqrt{16-(y+1)^2}}, & y \in \left(\frac{-1+\sqrt{31}}{2}; 3\right), x \in \left(-\sqrt{16-(y+1)^2}-4; \sqrt{16-(y+1)^2}-4\right) \\ 0, & y \le \frac{-1-\sqrt{31}}{2} \\ 0, & y \in \left(\frac{-1-\sqrt{31}}{2}; \frac{-1+\sqrt{31}}{2}\right), x \notin \left(-\sqrt{16-(y+1)^2}-4; y-4\right) \\ 0, & y \in \left(\frac{-1+\sqrt{31}}{2}; 3\right), x \notin \left(-\sqrt{16-(y+1)^2}-4; \sqrt{16-(y+1)^2}-4\right) \\ 0, & y > 3 \end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(y/x)=\frac{f_{\bar\xi}(x,y)}{f_{\xi_1}(x)}=\begin{cases}0, & y\le\frac{-1-\sqrt{31}}{2}\\ \frac{\frac{1}{S_G}}{\frac{2}{S_G}\sqrt{16-(x+4^2)}}= & \\ =\frac{1}{2\sqrt{16-(x+4)^2}}, & x\in(-8;\frac{-9-\sqrt{31}}{2}),y\in(-\sqrt{16-(x+4)^2}-1;\sqrt{16-(x+4)^2}-1)\\ 0, & x\in(-8;\frac{-9-\sqrt{31}}{2}),y\notin(-\sqrt{16-(x+4)^2}-1;\sqrt{16-(x+4)^2}-1)\\ \frac{\frac{1}{S_G}}{\frac{1}{S_G}(\sqrt{16-(x+4)^2}-x-5)}= & \\ =\frac{1}{\sqrt{16-(x+4)^2-x-5}}, & x\in(\frac{-9-\sqrt{31}}{2};\frac{-9+\sqrt{31}}{2}),y\in(x+4;\sqrt{16-(x+4)^2}-1)\\ 0, & x\in(\frac{-9-\sqrt{31}}{2};\frac{-9+\sqrt{31}}{2}),y\notin(x+4;\sqrt{16-(x+4)^2}-1)\\ 0, & x>\frac{-9+\sqrt{31}}{2}\end{cases}$$

Остаточно маємо:

$$f_{\xi_2}(y/x)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{16-(x+4)^2}}, & x\in(-8;\frac{-9-\sqrt{31}}{2}),y\in(-\sqrt{16-(x+4)^2}-1;\sqrt{16-(x+4)^2}-1)\\ \frac{1}{\sqrt{16-(x+4)^2-x-5}}, & x\in(\frac{-9-\sqrt{31}}{2};\frac{-9+\sqrt{31}}{2}),y\in(x+4;\sqrt{16-(x+4)^2}-1)\\ 0, & x\le-8\\ 0, & x\in(-8;\frac{-9-\sqrt{31}}{2}),y\notin(-\sqrt{16-(x+4)^2}-1;\sqrt{16-(x+4)^2}-1)\\ 0, & x\in(\frac{-9-\sqrt{31}}{2};\frac{-9+\sqrt{31}}{2}),y\notin(x+4;\sqrt{16-(x+4)^2}-1)\\ 0, & x>\frac{-9+\sqrt{31}}{2}\end{cases}$$

Перевіримо умову нормування для знайдених умовних щільностей:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_{\xi_1}(x/y)dx=\int_{-\sqrt{16-(y+1)^2}-4}^{y-4}\frac{dx}{y+\sqrt{16-(y+1)^2}}=\frac{y-4+\sqrt{16-(y+1)^2}+4}{y+\sqrt{16-(y+1)^2}}$$

$$=\frac{y+\sqrt{16-(y+1)^2}}{y+\sqrt{16-(y+1)^2}}=1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x/y)dx = \int_{-\sqrt{16-(y+1)^2}-4}^{\sqrt{16-(y+1)^2}-4} \frac{dx}{2\sqrt{16-(y+1)^2}} = \frac{2\sqrt{16-(y+1)^2}}{2\sqrt{16-(y+1)^2}} = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_2}(y/x)dy = \int_{-\sqrt{16-(x+4)^2}-1}^{\sqrt{16-(x+4)^2}-1} \frac{dy}{2\sqrt{16-(x+4^2)}} = \frac{2\sqrt{16-(x+4)^2}}{2\sqrt{16-(x+4)^2}} = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_2}(y/x)dy = \int_{x+4}^{\sqrt{16-(x+4)^2}-1} \frac{dy}{\sqrt{16-(x+4)^2}-x-5} = \frac{\sqrt{16-(x+4)^2}-x-5}{\sqrt{16-(x+4)^2}-x-5} = 1$$

УМОВНІ МАТЕМАТИЧНІ СПОДІВАННЯ ДЛЯ КОЖНОЇ КООРДИНАТИ З ПЕРЕВІРКОЮ

$$E(\xi_2/\xi_1 = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{\xi_2}(y/x)dy = \psi(x)$$

$$E(\xi_2/\xi_1 = x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} 0\,dy = 0, & (x \leq -8) \vee (x > \frac{-9+\sqrt{31}}{2}) \\ \int_{-\sqrt{16-(x+4)^2}-1}^{\sqrt{16-(x+4)^2}-1} \frac{y}{2\sqrt{16-(x+4)^2}}\,dy = & \\ = \frac{1}{4\sqrt{16-(x+4)^2}} y^2 \mid_{-\sqrt{16-(x+4)^2}-1}^{\sqrt{16-(x+4)^2}-1} = & \\ = \frac{16-(x+4)^2-2\sqrt{16-(x+4)^2}+1-16+(x+4)^2-2\sqrt{16-(x+4)^2}-1}{4\sqrt{16-(x+4)^2}} = -1, & x \in (-8; \frac{-9-\sqrt{31}}{2}) \\ \int_{x+4}^{\sqrt{16-(x+4)^2}-1} \frac{y}{\sqrt{16-(x+4)^2}-x-5}\,dy = & \\ = \frac{y^2}{2(\sqrt{16-(x+4)^2}-x-5)} \mid_{x+4}^{\sqrt{16-(x+4)^2}-1} = & \\ = \frac{17-2(x+4)^2-2\sqrt{16-(x+4)^2}}{2(\sqrt{16-(x+4)^2}-x-5)}, & x \in (\frac{-9-\sqrt{31}}{2}; \frac{-9+\sqrt{31}}{2}) \end{cases}$$

$$E(\xi_1/\xi_2 = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi_1}(x/y)dx = \varphi(y)$$

$$E(\xi_1/\xi_2=y)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}0\,dx=0 & (y\le\frac{-1-\sqrt{31}}{2})\vee(y>3)\\ \int_{-\sqrt{16-(y+1)^2}-4}^{y-4}\frac{x}{y+\sqrt{16-(y+1)^2}}\,dx= & \\ =\frac{x^2}{2(y+\sqrt{16-(y+1)^2})}\,|_{-\sqrt{16-(y+1)^2}-4}^{y-4}= & \\ =\frac{y^2-8y-16+(y+1)^2-8\sqrt{(16-(y+1)^2)}}{2(y+\sqrt{16-(y+1)^2})}, & y\in(\frac{-1-\sqrt{31}}{2};\frac{-1+\sqrt{31}}{2})\\ \int_{-\sqrt{16-(y+1)^2}-4}^{\sqrt{16-(y+1)^2}-4}\frac{x}{2\sqrt{16-(y+1)^2}}\,dx=\frac{x^2}{4\sqrt{16-(y+1)^2}}\,|_{-\sqrt{16-(y+1)^2}-4}^{\sqrt{16-(y+1)^2}-4}= & \\ =\frac{-16\sqrt{16-(y+1)^2}}{8\sqrt{16-(y_1)^2}}=-4, \quad y\in\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{2};3\right) & \end{cases}$$

$E(\xi_1/\xi_2=y)$ та $E(\xi_2/\xi_1=x)$ зображені блакитними лініями на рисунках 32 та 33 відповідно.

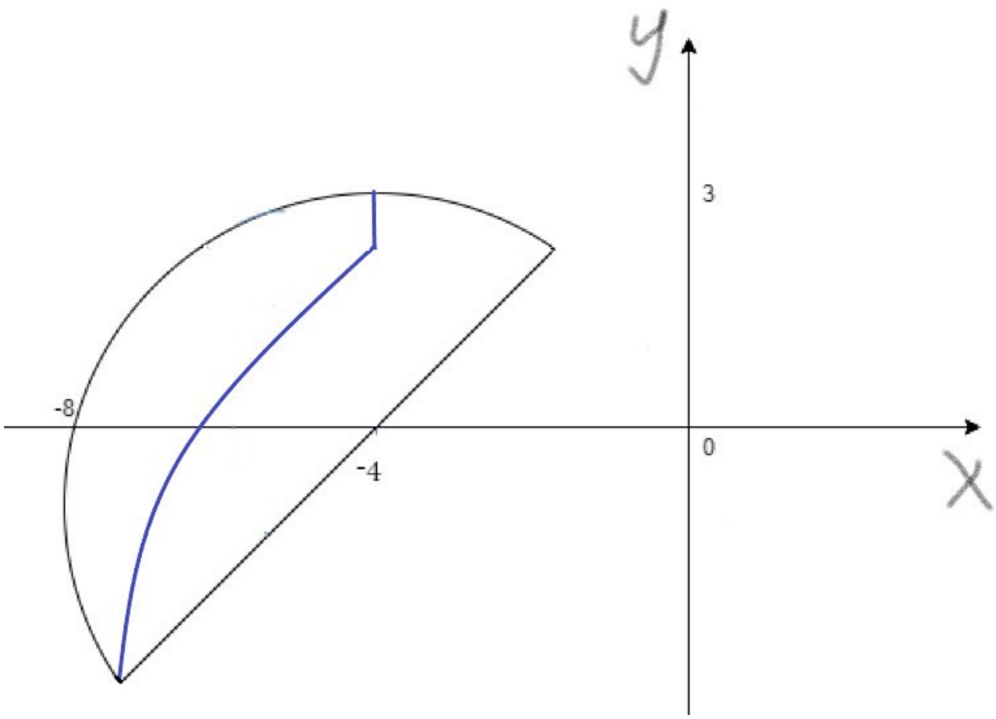

Рисунок 32

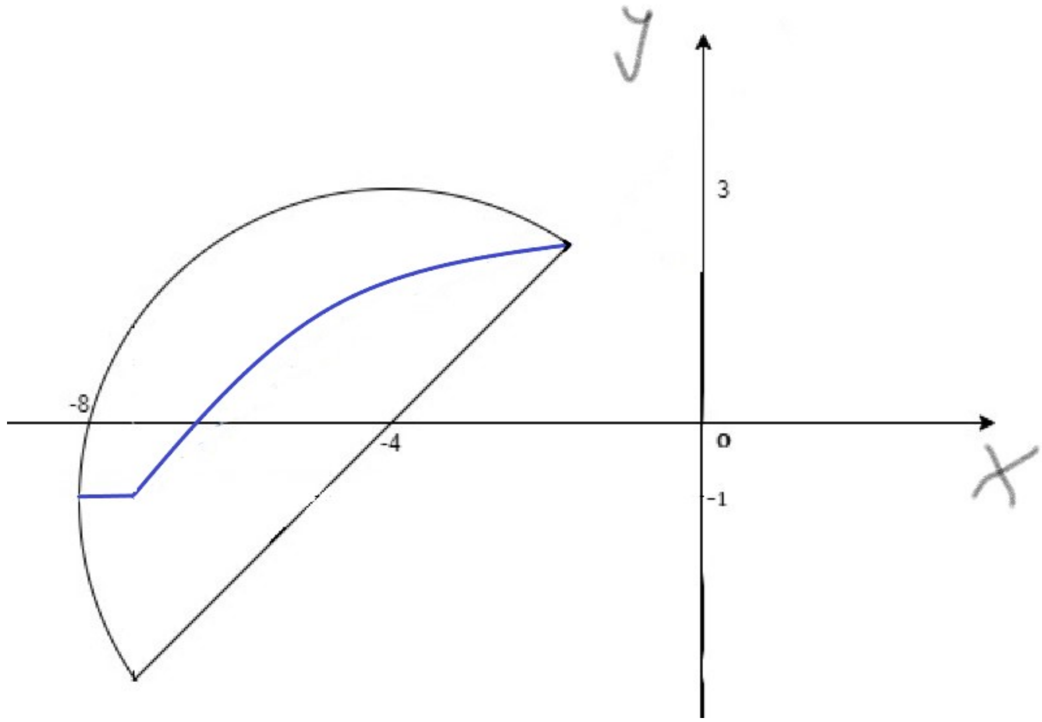

Рисунок 33

Розглянемо випадкові величини $E(\xi_1/\xi_2) = \varphi(\xi_2)$ та $E(\xi_2/\xi_1) = \psi(\xi_2)$. Отримаємо:

$$E(\xi_1/\xi_2) = \begin{cases} 0, & (\xi_2 \leq \frac{-1-\sqrt{31}}{2}) \vee (\xi_2 > 3) \\ \frac{\xi_2^2 - 8\xi_2 - 16 + (\xi_2+1)^2 - 8\sqrt{(16-(\xi_2+1)^2)}}{2(\xi_2 + \sqrt{16-(\xi_2+1)^2})} & \xi_2 \in (\frac{-1-\sqrt{31}}{2}; \frac{-1+\sqrt{31}}{2}) \\ -4, & \xi_2 \in \left(\frac{-1+\sqrt{31}}{2}; 3\right) \end{cases}$$

$$E(\xi_2/\xi_1) = \begin{cases} 0, & (\xi_1 \leq -8) \vee (\xi_1 > \frac{-9+\sqrt{31}}{2}) \\ -1, & \xi_1 \in (-8; \frac{-9-\sqrt{31}}{2}) \\ \frac{17 - 2(\xi_1+4)^2 - 2\sqrt{16-(\xi_1+4)^2}}{2(\sqrt{16-(\xi_1+4)^2} - \xi_1 - 5)}, & \xi_1 \in (-9 - \sqrt{31}2; \frac{-9+\sqrt{31}}{2}) \end{cases}$$

Виконаємо перевірку формул повного математичного сподівання:

$$E(E(\xi_1/\xi_2)) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\xi_1/\xi_2 = y) f_{\xi_2}(y) = \frac{1}{2S_G} \int_{\frac{-1-\sqrt{31}}{2}}^{\frac{-1+\sqrt{31}}{2}} (y^2 - 8y - 16 + (y+1)^2 - 8\sqrt{(16-(y+1)^2)})\, dy -$$

$$-\frac{8}{S_G}\int_{\frac{-1+\sqrt{31}}{2}}^{3}\sqrt{16-(y+1)^2}\,dy=$$

$$=\frac{1}{2S_G}(\int_{\frac{-1-\sqrt{31}}{2}}^{\frac{-1+\sqrt{31}}{2}}y^2\,d(y)-8\int_{\frac{-1-\sqrt{31}}{2}}^{\frac{-1+\sqrt{31}}{2}}(y+1)\,d(y+1)+\int_{\frac{-1-\sqrt{31}}{2}}^{\frac{-1+\sqrt{31}}{2}}(y+2)^2\,d(y+1)-$$

$$-8\int_{\frac{-1-\sqrt{31}}{2}}^{\frac{-1+\sqrt{31}}{2}}\sqrt{16-(y+1)^2}\,dy)-\frac{8}{S_G}I_2\,|_{a=\frac{-1+\sqrt{31}}{2}}^{b=3}=$$

$$=\frac{1}{2S_G}\left(\frac{(y)^3}{3}\,|_{\frac{-1-\sqrt{31}}{2}}^{\frac{-1+\sqrt{31}}{2}}-\frac{8(y+2)^2}{2}\,|_{\frac{-1-\sqrt{31}}{2}}^{\frac{-1+\sqrt{31}}{2}}+\frac{(y+1)^3}{3}\,|_{\frac{-1-\sqrt{31}}{2}}^{\frac{-1+\sqrt{31}}{2}}\right)-\frac{4}{S_G}\left(I_2\,|_{a=\frac{-1-\sqrt{31}}{2}}^{b=\frac{-1+\sqrt{31}}{2}}+2I_2\,|_{a=\frac{-1+\sqrt{31}}{2}}^{b=3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2S_G}\cdot\left(-\frac{19\sqrt{31}}{3}\right)-$$

$$-\frac{4}{S_G}[8\left(\arcsin\left(\frac{1+\sqrt{31}}{8}\right)-\arcsin\left(\frac{1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)+$$

$$+4\left(\sin\left(2\arcsin\left(\frac{1+\sqrt{31}}{8}\right)\right)-\sin\left(2\arcsin\left(\frac{1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)\right)+$$

$$+16\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\left(\frac{1+\sqrt{31}}{8}\right)\right)-8\left(\sin\left(2\arcsin\left(\frac{1+\sqrt{31}}{8}\right)\right)\right)]=$$

$$=\frac{1}{2S_G}\cdot\left(-\frac{19\sqrt{31}}{3}\right)-$$

$$-\frac{4}{S_G}[8\left(\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)+\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right)\right)+$$

$$+4\left(\sin\left(2\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)+\sin\left(2\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right)\right)\right)+8\pi]=-4-\frac{7\sqrt{31}}{6S_G}=E\xi_1$$

$$E(E(\xi_2/\xi_1))=\int_{-\infty}^{+\infty}E(\xi_2/\xi_1=x)f_{\xi_1}(x)\,dx=$$

$$=-\frac{2}{S_G}\int_{-8}^{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}\sqrt{16-(x+4)^2}\,dx+\frac{1}{2S_G}\int_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{\frac{-9+\sqrt{31}}{2}}(17-2(x+4)^2-2\sqrt{16-(x+4)^2})\,dx=$$

$$=-\frac{2}{S_G}I_1\,|_{a=-8}^{b=\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}+$$

$$+\frac{1}{2S_G}\left(\int_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{\frac{-9+\sqrt{31}}{2}} 17\,dx - 2\int_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{\frac{-9+\sqrt{31}}{2}} (x+4)^2\, d(x+4) - 2I_1 \mid_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{\frac{-9+\sqrt{31}}{2}}\right) =$$

$$\frac{1}{S_G}\left(2I_1 \mid_{a=-8}^{b=\frac{-9-\sqrt{31}}{2}} + I_1 \mid_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{\frac{-9+\sqrt{31}}{2}}\right) + \frac{1}{2S_G}\left(17(x) \mid_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{\frac{-9+\sqrt{31}}{2}} - \frac{2}{3}(x+4)^3 \mid_{\frac{-9-\sqrt{31}}{2}}^{\frac{-9+\sqrt{31}}{2}}\right) =$$

$$\frac{1}{S_G}[16\left(\arcsin\frac{-1-\sqrt{31}}{8}+\frac{\pi}{2}\right) + 8\left(\sin\left(2\arcsin\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right) +$$

$$+8\left(\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right) - \arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right) +$$

$$+4\left(\sin\left(2\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right)\right) - \sin\left(2\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)\right)] + \frac{34\sqrt{31}}{6S_G} =$$

$$= \frac{1}{S_G}[8\left(\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right) + \arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right) +$$

$$+4\left(\sin\left(2\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{8}\right)\right) + \sin\left(2\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{8}\right)\right)\right) +$$

$+8\pi] + \frac{34\sqrt{31}}{6S_G} = -1 + \frac{37\sqrt{31}}{6S_G} = E\xi_2$

ДОДАТОК

1. $I_1 =$

$$= \int_a^b \sqrt{16-(x+4)^2}\,dx = \left[\begin{array}{l} x+4 = 4\sin p \\ dx = 4\cos p\,dp \\ \text{Межі інтегрування:} \\ p = \arcsin\left(\frac{x+4}{4}\right) \end{array}\right] = \int_{\arcsin\left(\frac{a+4}{4}\right)}^{\arcsin\left(\frac{b+4}{4}\right)} \sqrt{16-16\sin^2 p}\cdot 4\cos p\,dp =$$

$$= 16\int_{\arcsin\left(\frac{a+4}{4}\right)}^{\arcsin\left(\frac{b+4}{4}\right)} \cos^2 p\,dp = 8\int_{\arcsin\left(\frac{a+4}{4}\right)}^{\arcsin\left(\frac{b+4}{4}\right)} (1+\cos(2p))\,dp =$$

$$= 8(p)\,\Big|_{\arcsin\left(\frac{a+4}{4}\right)}^{\arcsin\left(\frac{b+4}{4}\right)} + 4\int_{\arcsin\left(\frac{a+4}{4}\right)}^{\arcsin\left(\frac{b+4}{4}\right)} \cos(2p)\,d(2p) =$$

$$= 8\left(\arcsin\left(\frac{b+4}{4}\right) - \arcsin\left(\frac{a+4}{4}\right)\right) + 4(\sin(2p))\,\Big|_{\arcsin\left(\frac{a+4}{4}\right)}^{\arcsin\left(\frac{b+4}{4}\right)} =$$

$$= 8\left(\arcsin\left(\frac{b+4}{4}\right) - \arcsin\left(\frac{a+4}{4}\right)\right) + 4\left(\sin\left(2\arcsin\left(\frac{b+4}{4}\right)\right) - \sin\left(2\arcsin\left(\frac{a+4}{4}\right)\right)\right)$$

2. $I_2 =$

$$= \int_a^b \sqrt{16-(y+1)^2}\,dy = \left[\begin{array}{l} y+1 = 4\sin p \\ dy = 4\cos p\,dp \\ \text{Межі інтегрування:} \\ p = \arcsin\left(\frac{y+1}{4}\right) \\ \\ \text{Інтеграл береться аналогічно розглянутому } I_1 \end{array}\right] =$$

$$= 8\left(\arcsin\left(\frac{b+1}{4}\right) - \arcsin\left(\frac{a+1}{4}\right)\right) + 4\left(\sin\left(2\arcsin\left(\frac{b+1}{4}\right)\right) - \sin\left(2\arcsin\left(\frac{a+1}{4}\right)\right)\right)$$

3. $I_3 =$

$$= \int_a^b (\sqrt{16-(x+4)^2} - x - 5)\,dx = \int_a^b \sqrt{16-(x+4)^2}\,dx - \int_a^b x\,dx - \int_a^b 5\,dx =$$

$$= I_1 - \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_a^b - 5(x)\,\Big|_a^b =$$

$$= 8\left(\arcsin\left(\frac{b+4}{4}\right) - \arcsin\left(\frac{a+4}{4}\right)\right) + 4\left(\sin\left(2\arcsin\left(\frac{b+4}{4}\right)\right) - \sin\left(2\arcsin\left(\frac{a+4}{4}\right)\right)\right) -$$

$$-\frac{1}{2}(b^2-a^2) - 5(b-a)$$

4. $I_4 =$

$$= \int_a^b (y + \sqrt{16-(y+1)^2})\, dy = \int_a^b y\, dy + I_2 =$$

$$= \left(\frac{y^2}{2}\right) |_a^b + 8\left(\arcsin\left(\frac{b+1}{4}\right) - \arcsin\left(\frac{a+1}{4}\right)\right) +$$

$$+4\left(\sin\left(2\arcsin\left(\frac{b+1}{4}\right)\right) - \sin\left(2\arcsin\left(\frac{a+1}{4}\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(b^2 - a^2) + 8\left(\arcsin\left(\frac{b+1}{4}\right) - \arcsin\left(\frac{a+1}{4}\right)\right) +$$

$$+4\left(\sin\left(2\arcsin\left(\frac{b+1}{4}\right)\right) - \sin\left(2\arcsin\left(\frac{a+1}{4}\right)\right)\right)$$

5. $I_5 =$

$$= \int_a^b x\sqrt{16-(x+4)^2}\, dx = \left[\begin{array}{l} x\sqrt{16-(x+4)^2} = \\ = x\sqrt{16-(x+4)^2} + 4\sqrt{16-(x+4)^2} - \\ -4\sqrt{16-(x+4)^2} = \\ = (x+4)\sqrt{16-(x+4)^2} - 4\sqrt{16-(x+4)^2} \end{array}\right] =$$

$$= \int_a^b (x+4)\sqrt{16-(x+4)^2}\, dx - 4\int_a^b \sqrt{16-(x+4)^2}\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_a^b \sqrt{16-(x+4)^2}\, d(16-(x+4)^2) - 4I_1 = -\frac{1}{3}(16-(x+4)^2)^{\frac{3}{2}} |_a^b -$$

$$-32\left(\arcsin\left(\frac{b+4}{4}\right) - \arcsin\left(\frac{a+4}{4}\right)\right) - 16\left(\sin\left(2\arcsin\left(\frac{b+4}{4}\right)\right) - \sin\left(2\arcsin\left(\frac{a+4}{4}\right)\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\left((16-(b+4)^2)^{\frac{3}{2}} - (16-(a+4)^2)^{\frac{3}{2}}\right) -$$

$$-32\left(\arcsin\left(\frac{b+4}{4}\right) - \arcsin\left(\frac{a+4}{4}\right)\right) - 16\left(\sin\left(2\arcsin\left(\frac{b+4}{4}\right)\right) - \sin\left(2\arcsin\left(\frac{a+4}{4}\right)\right)\right)$$

6. $I_6 =$

$$= \int_a^b x(\sqrt{16-(x+4)^2} - x - 5)\, dx = \int_a^b x\sqrt{16-(x+4)^2}\, dx - \int_a^b x^2\, dx - \int_a^b 5x\, dx =$$

$$= I_5 - \left(\frac{x^3}{3}\right) |_a^b - \frac{5}{2}(x^2) |_a^b = -\frac{1}{3}\left((16-(b+4)^2)^{\frac{3}{2}} - (16-(a+4)^2)^{\frac{3}{2}}\right) -$$

$$-32\left(\arcsin\left(\frac{b+4}{4}\right) - \arcsin\left(\frac{a+4}{4}\right)\right) - 16\left(\sin\left(2\arcsin\left(\frac{b+4}{4}\right)\right) - \sin\left(2\arcsin\left(\frac{a+4}{4}\right)\right)\right) -$$

$$-\frac{1}{3}(b^3-a^3) - \frac{5}{2}(b^2-a^2)$$

7. $I_7 =$

$$= \int_a^b y\sqrt{16-(y+1)^2}\,dy = \left[\begin{array}{l} y\sqrt{16-(y+1)^2} = \\ = y\sqrt{16-(y+1)^2} + \sqrt{16-(y+1)^2} - \\ -\sqrt{16-(y+1)^2} = \\ = (y+1)y\sqrt{16-(y+1)^2} - \sqrt{16-(y+1)^2} \\ \text{Далі діємо аналогічно випадку } I_5 \end{array}\right] =$$

$$= -\frac{1}{3}(16-(y+1)^2)^{\frac{3}{2}} |_a^b - I_2 = -\frac{1}{3}\left((16-(b+1)^2)^{\frac{3}{2}} - (16-(a+1)^2)^{\frac{3}{2}}\right) -$$

$$-8\left(\arcsin\left(\frac{b+1}{4}\right) - \arcsin\left(\frac{a+1}{4}\right)\right) - 4\left(\sin\left(2\arcsin\left(\frac{b+1}{4}\right)\right) - \sin\left(2\arcsin\left(\frac{a+1}{4}\right)\right)\right)$$

8. $I_8 =$

$$= \int_a^b y(y + \sqrt{16-(y+1)^2})\,dy = \int_a^b y^2\,dy + \int_a^b y\sqrt{16-(y+1)^2}\,dy =$$

$$= \left(\frac{y^3}{3}\right) |_a^b + I_7 = \frac{1}{3}\left(b^3-a^3\right) - \frac{1}{3}\left((16-(b+1)^2)^{\frac{3}{2}} - (16-(a+1)^2)^{\frac{3}{2}}\right) -$$

$$-8\left(\arcsin\left(\frac{b+1}{4}\right) - \arcsin\left(\frac{a+1}{4}\right)\right) - 4\left(\sin\left(2\arcsin\left(\frac{b+1}{4}\right)\right) - \sin\left(2\arcsin\left(\frac{a+1}{4}\right)\right)\right)$$

9. $I_9 =$

$$= \int_a^b x^2\sqrt{16-(x+4)^2}\,dx = \left[\begin{array}{l} x+4=t \\ dx = dt \\ \text{Межі інтегрування:} \\ t = x+4 \end{array}\right] = \int_{a+4}^{b+4} (t-4)^2\sqrt{16-t^2}\,dt =$$

$$= \int_{a+4}^{b+4} t^2\sqrt{16-t^2}\,dt - 8\int_{a+4}^{b+4} t\sqrt{16-t^2}\,dt + 16\int_{a+4}^{b+4} \sqrt{16-t^2} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} t = 4\sin p \\ \\ dt = 4\cos p \\ \\ \text{Межі інтегрування: } p = \arcsin\left(\frac{t}{4}\right) \\ \\ \text{Цю заміну робимо в першому інтегралі} \end{array}\right] = 64\int_{\arcsin\left(\frac{a+4}{4}\right)}^{\arcsin\left(\frac{b+4}{4}\right)} \sin^2 p\sqrt{16-16\sin^2 p}\cos p\,dp +$$

$$+4\int_{a+4}^{b+4} \sqrt{16-t^2}\,d(16-t^2) + 16I_1 =$$

$$= \frac{8}{3}(16-t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{a+4}^{b+4} + 156\int_{\arcsin\left(\frac{a+4}{4}\right)}^{\arcsin\left(\frac{b+4}{4}\right)} \sin^2 p\cos^2 p\,dp + 16I_1 = 16I_1 +$$

$$+\frac{8}{3}\left((16-(b+4)^2)^{\frac{3}{2}} - (16-(a+4)^2)^{\frac{3}{2}}\right) + 256\int_{\arcsin\left(\frac{a+4}{4}\right)}^{\arcsin\left(\frac{b+4}{4}\right)} (\cos^2 p - \cos^4 p)\,dp =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \cos^2 p - \cos^4 p = \\ \\ = \frac{1+\cos(2p)}{2} - \frac{(1+\cos(2p))^2}{4} = \\ \\ = \frac{2+2\cos(2p)-1-2\cos(2p)-\cos^2(2p)}{4} = \\ \\ = \frac{1-\cos^2(2p)}{4} = \frac{1-\cos(4p)}{8} \\ \\ \end{array}\right] = 16I_1 +$$

$$+\frac{8}{3}\left((16-(b+4)^2)^{\frac{3}{2}} - (16-(a+4)^2)^{\frac{3}{2}}\right) + 32\int_{\arcsin\left(\frac{a+4}{4}\right)}^{\arcsin\left(\frac{b+4}{4}\right)} (1-\cos(4p))\,dp =$$

$$16I_1 + \frac{8}{3}\left((16-(b+4)^2)^{\frac{3}{2}} - (16-(a+4)^2)^{\frac{3}{2}}\right) +$$

$$+32(p)\Big|_{\arcsin\left(\frac{a+4}{4}\right)}^{\arcsin\left(\frac{b+4}{4}\right)} - 8\int_{\arcsin\left(\frac{a+4}{4}\right)}^{\arcsin\left(\frac{b+4}{4}\right)} \cos(4p)\,d(4p) = 16I_1 + \frac{8}{3}\left((16-(b+4)^2)^{\frac{3}{2}} - (16-(a+4)^2)^{\frac{3}{2}}\right) +$$

$$+32\left(\arcsin\left(\frac{b+4}{4}\right) - \arcsin\left(\frac{a+4}{4}\right)\right) - 8(\sin(4p))\Big|_{\arcsin\left(\frac{a+4}{4}\right)}^{\arcsin\left(\frac{b+4}{4}\right)} =$$

$$= 160\left(\arcsin\left(\frac{b+4}{4}\right) - \arcsin\left(\frac{a+4}{4}\right)\right) + 64\left(\sin\left(2\arcsin\left(\frac{b+4}{4}\right)\right) - \sin\left(2\arcsin\left(\frac{a+4}{4}\right)\right)\right) +$$

$$+\frac{8}{3}\left((16-(b+4)^2)^{\frac{3}{2}} - (16-(a+4)^2)^{\frac{3}{2}}\right) - 8\left(\sin\left(4\arcsin\left(\frac{b+4}{4}\right)\right) - \sin\left(4\arcsin\left(\frac{a+4}{4}\right)\right)\right)$$

10. $I_{10} =$

$$= \int_a^b x^2(\sqrt{16-(x+4)^2} - x - 5)\,dx = \int_a^b x^2\sqrt{16-(x+4)^2}\,dx - \int_a^b x^3\,dx - 5\int_a^b x^2\,dx =$$

$$= I_9 - \frac{1}{4}(x^4)\mid_a^b - \frac{5}{3}(x^3)\mid_a^b =$$

$$= 160\left(\arcsin\left(\frac{b+4}{4}\right) - \arcsin\left(\frac{a+4}{4}\right)\right) + 64\left(\sin\left(2\arcsin\left(\frac{b+4}{4}\right)\right) - \sin\left(2\arcsin\left(\frac{a+4}{4}\right)\right)\right) +$$

$$+\frac{8}{3}\left((16-(b+4)^2)^{\frac{3}{2}} - (16-(a+4)^2)^{\frac{3}{2}}\right) - 8\left(\sin\left(4\arcsin\left(\frac{b+4}{4}\right)\right) - \sin\left(4\arcsin\left(\frac{a+4}{4}\right)\right)\right) -$$

$$-\frac{1}{4}(b^2-a^2) - \frac{5}{3}(b^3-a^3)$$

11. $I_{11} =$

$$= \int_a^b y^2\sqrt{16-(y+1)^2}\,dy = \left[\begin{array}{l} y+1=t \\ dy=dt \\ \text{Межі інтегрування:} \\ t=y+1 \end{array}\right] = \int_{a+1}^{b+1} (t-1)^2\sqrt{16-t^2}\,dt =$$

$$= \int_{a+1}^{b+1} t^2\sqrt{16-t^2}\,dt - 2\int_{a+1}^{b+1} t^2\sqrt{16-t^2}\,dt + \int_{a+1}^{b+1} \sqrt{16-t^2}\,dt = \left[\begin{array}{l} \text{Отримали вираз } I_9, \\ \text{але з іншими межами} \\ \text{інтегрування} \\ \text{та коефіцієнтами} \end{array}\right] =$$

$$= 40\left(\arcsin\left(\frac{b+1}{4}\right) - \arcsin\left(\frac{a+1}{4}\right)\right) + 4\left(\sin\left(2\arcsin\left(\frac{b+1}{4}\right)\right) - \sin\left(2\arcsin\left(\frac{a+1}{4}\right)\right)\right) +$$

$$+\frac{4}{3}\left((16-(b+1)^2)^{\frac{3}{2}} - (16-(a+1)^2)^{\frac{3}{2}}\right) - 8\left(\sin\left(4\arcsin\left(\frac{b+1}{4}\right)\right) - \sin\left(4\arcsin\left(\frac{a+1}{4}\right)\right)\right)$$

12. $I_{12} =$

$$= \int_a^b y^2(y + \sqrt{16-(y+1)^2})\,dy = \int_a^b y^3 + \int_a^b y^2\sqrt{16-(y+1)^2}\,dy = \frac{1}{4}(y^4)\mid_a^b + I_{11} =$$

$$= 40\left(\arcsin\left(\frac{b+1}{4}\right) - \arcsin\left(\frac{a+1}{4}\right)\right) + 4\left(\sin\left(2\arcsin\left(\frac{b+1}{4}\right)\right) - \sin\left(2\arcsin\left(\frac{a+1}{4}\right)\right)\right) +$$

$$+\frac{4}{3}\left((16-(b+1)^2)^{\frac{3}{2}} - (16-(a+1)^2)^{\frac{3}{2}}\right) - 8\left(\sin\left(4\arcsin\left(\frac{b+1}{4}\right)\right) - \sin\left(4\arcsin\left(\frac{a+1}{4}\right)\right)\right) +$$

$$+\frac{1}{4}\left(b^4 - a^4\right)$$