Probabilités

EPITA

Février 2019

Avertissement

- **Cette version contient les formules à connaître, mais pas les exemples présentés en cours, ni la pédagogie employée pour introduire les concepts fondamentaux.**

SECTION N°1

GÉNÉRALITÉS SUR LES

VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES

GENERALITES

Vocabulaire

- **Un espace d'événements élémentaires :** Ω
- **Un événements élémentaire :** $\omega \in \Omega$
- **Un événement, confirmant « A est vrai » :** $A, A \subset \Omega, A \in \mathcal{P}(\Omega)$
- **Un événement où « A est faux » :** A^c
- **L'événement « A et B » :** $A \cap B$
- **L'événement « A ou B » :** $A \cup B$
- **L'événement « A mais non B » :** $A \backslash B$
- **L'événement « A ou B, mais pas les deux » :** $A \Delta B$
- **L'événement « Si A alors B » :** $A \subseteq B$
- **L'événement impossible :** $\emptyset$
- **L'événement certain :** Ω

Définition d'une tribu

- **Un ensemble $\mathcal{F}$ de parties de Ω est appelé une tribu si :**
  - $\emptyset \in \mathcal{F}$
  - Si $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ alors $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$
  - Si $A \in \mathcal{F}$ alors $A^c \in \mathcal{F}$

Mesure de probabilité

- **Une mesure de probabilité** $\mathbb{P}$ **sur** $(\Omega, \mathcal{F})$ **est une fonction** $\mathbb{P}: \mathcal{F} \rightarrow [0,1]$ **vérifiant**

  - $\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \mathbb{P}(\Omega) = 1$

  - Si $A_1, A_2, \ldots$ est une suite d'ensembles disjoints deux à deux de $\mathcal{F}$ c'est à dire $A_i \cap A_j = \emptyset$ dès que $i \neq j,$ alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

- **Le triplet** $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ **est un espace probabilisé**

Propriétés

- $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $B \supseteq A \colon \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \backslash A) \geq \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Probabilité conditionnelle

- **Définition : Si** $\mathbb{P}(B) \neq 0$ **la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie ainsi :**

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

- **Propriété : Pour tout événement A et B tels que :** $0 < \mathbb{P}(B) < 1$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)$$

- **Plus généralement, pour une partition** $B_1, B_2, \dots, B_n$ **de** Ω **d'ensembles de probabilités non nul :**

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$$

Formule de Bayes

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Evénements indépendants

- **Deux événements A et B sont indépendants si :**

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

- **Une famille** $\{A_i : i \in I\}$ **est indépendante si, pour tout sous-ensemble fini J de I :**

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_i)$$

VARIABLES ALEATOIRES

Variable aléatoire

- **Une variable aléatoire est une fonction** $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ **vérifiant, pour tout x :** $\{\omega \in \Omega \colon X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$ **.**

- **La fonction de répartition d'une variable aléatoire X est la fonction** $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ **définie ainsi :**

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

- **Propriétés de la fonction de répartition :** F
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0;\ \lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$
  - si $x < y$ alors $F(x) \leq F(y)$
  - F est continue à droite.

Autre propriétés de la fonction de répartition

- **Soit F la fonction de répartition de la variable aléatoire alors :**
  - $\mathbb{P}(X > x) = 1 - F(x)$
  - $\mathbb{P}(x < X \leq y) = F(y) - F(x)$
  - $\mathbb{P}(X = x) = F(x) - \lim_{y \nearrow x (c.a.d. y < x)} F(y)$

La loi de la moyenne

- **Soit** $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ **une suite d'événements indépendants ayant la même probabilité p.**
- **Soit** $\mathbb{I}(A_n)$ **la fonction caractéristique de** A_n**, pour tout n.**
- **Posons :** $S_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}(A_i)$ **.**
- **Théorème :** $\frac{1}{n} S_n$ **converge vers p quand** $n \to \infty$ **dans le sens suivant :**

pour tout $\varepsilon > 0,$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(p - \varepsilon \leq \frac{1}{n} S_n \leq p + \varepsilon) = 1.$$

Variables aléatoires discrètes et continues

- **Variable aléatoire discrète : prend ses valeurs dans un sous ensemble fini ou dénombrable $\{x_1, x_2, \ldots\}$ de $\mathbb{R}$.**

  Loi donnée par les probabilités : $p_n = \mathbb{P}(X = x_n)$.

- **Une variable aléatoire réelle est continue si sa fonction de répartition peut être écrite :**

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

pour une fonction f intégrable et positive ou nulle. La fonction f est alors la densité de la variable aléatoire.

Pour une V.A. continue

- $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$
- $$\forall x \in \mathbb{R}: \mathbb{P}(X = x) = 0$$
- $$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Variables aléatoires indépendantes

- **Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si :**
  - (cas discret) les événements $\{X = x\}$ et $\{Y = y\}$ sont indépendants pour tout x et y,
  - (cas continu) les événements $\{X \leq x\}$ et $\{Y \leq y\}$ sont indépendants pour tout x et y.

- **Théorème : si X et Y sont indépendantes et f, g sont deux fonctions réelles quelconques, alors f(X) et g(Y) sont aussi indépendantes.**

Espérance d'une variable aléatoire

- **La valeur moyenne, ou l'espérance d'une variable aléatoire est définie ainsi :**

  - Cas discret : $$\mathbb{E}(X) = \sum_n p_n x_n = \sum_{x:\mathbb{P}(X=x)>0} x.\,\mathbb{P}(X = x)$$

    si la série est absolument convergente

  - Cas continu : $$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

    si l'intégrale existe.

- **Attention : il existe des V.A. sans espérance.**

Espérance de g(X)

- **Propriété :**

  - Cas discret : $\mathbb{E}(g(X)) = \sum_n p_n g(x_n) = \sum_{x:\mathbb{P}(X=x)>0} g(x).\mathbb{P}(X=x)$

  - Cas continu : $\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx.$

  - Remarque : facile à démontrer dans le cas discret.

Moment d'une variable aléatoire

- **Le k-ième moment (moment d'ordre k) de la variable aléatoire X :**

$$m_k = \mathbb{E}(X^k)$$

- **Le moment centré d'ordre k de la variable aléatoire X :**

$$\sigma_k = \mathbb{E}((X - m_1)^k)$$

Variance d'une variable aléatoire

- **La variance :**

$$Var(X) = \mathbb{E}((X - m_1)^2)$$
$$= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

- **Ecart type**

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Propriétés de l'espérance

- **Si** $X \geq 0,$ **alors** $\mathbb{E}(X) \geq 0,$

- **Si** $a, b \in \mathbb{R}$ **alors :** $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y),$

- **La V.A. aléatoire 1 prenant toujours la valeur 1 vérifie :**

  $\mathbb{E}(1) = 1.$

Variables non corrélées et propriétés de la variance

- **Variables X et Y non corrélées :** $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
- **Deux variables aléatoires indépendantes sont non corrélées.**

- **Propriétés de la variance :**
  - $$Var(aX) = a^2 Var(X)$$
    $$\sigma(aX) = |a|\sigma(X)$$
  - pour deux V.A. non corrélées :

    $$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$$
  - Remarque : cette dernière propriété est utilisée constamment

Deux autres propriétés

- **Cauchy – Schwarz**

$$[\mathbb{E}(XY)]^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$$

- **Inégalité de Bienaymé-Tschébichef :**

  pour tout réel strictement positif a

$$\mathbb{P}(|X - m| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}, m = \mathbb{E}(X)$$

Changement de variable

- **Si :** $Y = g(X),$ **pour connaître la densité en fonction de Y à partir de celle donnée en fonction de X, il faut penser :**
  - Dans le cas où l'application n'est pas bijective, additionner les densités des antécédents $x_1, x_2, \ldots$ de y;
  - Et à traiter la densité comme une forme différentielle :

$$f_Y(y)dy = f_Y(g(x)).\frac{d}{dx}(g(x)).dx = f_X(x)dx$$

- **Exemple : homothétie …**

Somme de deux V.A. indépendantes

- **Somme de deux V.A. indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.**

$$Z = X + Y, \mathbb{P}(X = k) = p_k, \mathbb{P}(Y = l) = q_l$$

$$\mathbb{P}(Z = n) = \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}$$

- **Si les V.A. sont à valeurs dans $\mathbb{Z}$.**

$$\mathbb{P}(Z = n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k q_{n-k} \, , n \in \mathbb{Z}.$$

- **Pour deux variables continues X et Y, à densités resp. f et g, la densité h de Z =X+Y est :**

$$h(x) = \int_{y \in \mathbb{R}} f(y) g(x - y) dy \, .$$

SECTION N°2

EXEMPLES

Indicatrice d'un ensemble

- **Soit** $A \subset \Omega, A \in \mathcal{F}$ **, l'indicatrice de A est la V.A.** $\mathbb{I}_A$ **Définie ainsi :**

$$\mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1 si \omega \in A \\ 0 sinon. \end{cases}$$

- **Propriété élémentaire :**

$$\mathbb{E}(\mathbb{I}_A) = \mathbb{P}(A).$$

Loi de Bernoulli

- **La V.A. X a une loi de Bernoulli de paramètre p :**

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p,$$
$$\mathbb{P}(X = 1) = p$$

- **On a :**

$$\mathbb{E}(X) = p,$$
$$Var(X) = p(1 - p)$$
$$\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$$

Loi Binomiale

- **Soient** $X_1,\ldots,X_n$ **n V.A. indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.**
- **La V.A.** $Z = X_1+\ldots+X_n$ **Suit une loi binomiale de paramètres n et p.**

- **Propriétés :**

$$\mathbb{P}(Z = k) \\ = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\mathbb{E}(Z) = np$$

$$Var(Z) = np(1-p)$$

$$\sigma(Z) = \sqrt{np(1-p)}$$

Loi Exponentielle

- **La V.A. X est une loi exponentielle de paramètre λ si sa densité vérifie :**

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

- **Propriétés :**

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$
$$\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$$
$$Var(X) = 1/\lambda^2$$
$$\sigma(X) = 1/\lambda$$

Loi exponentielle
Propriété d’absence de mémoire

- **Soit X un V.A. ayant un loi exponentielle, le fait de savoir que X est supérieur à un nombre H n’apporte aucune information sur la différence X-H.**

- **Si X est un temps d’attente (ex : moyen de transport), le fait d’avoir attendu H n’apporte aucune information sur le temps qu’il reste à attendre.**

$$\mathbb{P}(X > H + t | X > H) = \mathbb{P}(X > t)$$

Loi de Poisson

- **La V.A. entière N suite une loi de Poisson de paramètre λ si elle est de la forme suivante :**

$$\mathbb{P}(N = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

- **Propriétés :**

$$\mathbb{E}(N) = \lambda$$
$$Var(N) = \lambda$$
$$\sigma(N) = \sqrt{\lambda}$$

- **Somme de deux VA ayant une loi de Poisson : Si M et N sont deux V.A. indépendantes ayant une loi de Poisson de paramètres resp. μ et λ, leur somme a une loi de Poisson de paramètre λ+μ.**

Loi exponentielle et loi de Poisson

- **Soient T_1, …, T_n, … des V.A. indépendantes ayant une loi exponentielle de paramètre 1. Soit λ fixé. On pose :**

$$S_n = T_1 + \ldots + T_n$$
$$N = \sup \{ n | S_n \leq \lambda \}$$
$$N = 0 \ \ si \ \ S_1 > \lambda$$

- **N représente un « comptage ».**
- **La V.A. N suit une loi de Poisson de paramètre λ.**

Loi gamma

- **La V.A. X est une loi gamma de paramètres ν, λ si sa densité vérifie :**

$$f(x) = \frac{\lambda^{\nu}}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} e^{-\lambda x}$$

- **Propriétés :**

$$\mathbb{E}(X) = \nu/\lambda$$
$$Var(X) = \nu/\lambda^2$$
$$\sigma(X) = \sqrt{\nu}/\lambda$$

- **Si X et Y sont indépendantes et suivent des lois gamma $\nu_1, \lambda resp. \nu_2, \lambda$ leur somme X+Y suit une loi gamma de paramètre :** $\nu_1 + \nu_2, \lambda.$

Intermède sur la fonction gamma

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \text{pour} \quad \text{tout} \quad z > 0$$

$$\Gamma(n+1) = n! \, \text{pour} \quad \text{tout} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$n! = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt.$$

Loi Uniforme

- **La loi uniforme sur [a, b] a une densité constante sur cet intervalle, et nulle à l'extérieur.**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} si x \in [a, b] \\ 0 sinon. \end{cases}$$

- **Propriétés :**

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma(X) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

Loi Normale

- **La V.A. X est une V.A. avec une loi normale de paramètres** μ, σ **si sa densité vérifie :**

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2})$$

- **Cette loi est très importantes, sa fonction de répartition est souvent notée** Φ **, dans le cas de la loi normale standard de paramètres** $\mu = 0, \sigma = 1$ **:**

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-\frac{1}{2}u^2)du$$

- **Quelquefois, on définit cette loi par les paramètres** μ, σ^2 **, on note la loi ainsi** $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ **.**

Propriétés (1)

- **Si X suit une loi normale de paramètres** μ, σ **:**

$$\mathbb{E}(X) = \mu$$
$$Var(X) = \sigma^2$$
$$\sigma(X) = \sigma$$

- **La densité est symétrique par rapport à 0 et la probabilité de X de rester « autour de sa moyenne » reste forte :**

$$\mathbb{P}(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$$
$$\mathbb{P}(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$$

Propriétés (2)

- **Si X et Y, indépendantes, suivent des lois** $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ **et** $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ **leur somme X+Y suit une loi normale :**

$$\mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

La V.A. aX+b suit une loi normale :

$$\mathcal{N}(a\mu_1 + b, a^2\sigma_1^2)$$

Théorème de la limite centrale

- **Soit** $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ **une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées ayant chacune la même espérance μ et même écart type σ,**
- **Soit de plus**

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

- **alors la suite de V.A. :**

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

- **Converge « en loi » (non défini dans le cours), c'est à dire « s'approche d'une» loi normale** $\mathcal{N}(0,1)$ **quand n tend vers l'infini.**

Loi Log-normale

- **La V.A. X suit une loi log-normale de paramètres** μ, σ **si son logarithme U suit une loi normale :** $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$X = \exp(\mu + \sigma Z) \text{où} Z \sim \mathcal{N}(0{,}1)$$

- **Propriétés :**

$$\mathbb{E}(X) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$$
$$Var(X) = e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$$
$$= \mathbb{E}(X)^2(e^{\sigma^2} - 1)$$
$$\sigma(X) = \mathbb{E}(X)\sqrt{e^{\sigma^2} - 1}$$

SECTION N°3

DÉPENDANCE DE VARIABLES ALÉATOIRES
VECTEURS ALÉATOIRES

DÉPENDANCE DE VARIABLES ALÉATOIRES

Distribution conjointe de deux V.A.

- **La fonction de distribution conjointe de deux V.A. réelles, X et Y est la fonction** $F: \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ **définie par :**

$$F(x,y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)$$

.

- **Dans le cas discret, une distribution définie par :**

$$p_{k,l} = \mathbb{P}(X = x_k, Y = y_l).$$

- **Dans le cas continu, une densité de probabilité conjointe f(u,v) vérifiant :**

$$\forall x, y: F(x,y) = \int_{v=-\infty}^{y} \int_{u=-\infty}^{x} f(u,v) du dv .$$

- **Remarque :**

$$\int_{v=-\infty}^{\infty} \int_{u=-\infty}^{\infty} f(u,v) du dv = 1$$

Indépendance de deux V.A. discrètes

- **Les V.A. discrètes X et Y sont indépendantes si et seulement si :**

$$\forall k, l: \mathbb{P}(X = x_k, Y = y_l) = \mathbb{P}(X = x_k)\mathbb{P}(Y = y_l).$$

Distributions marginales

- **On connaît la distribution conjointe.**
- **Cas général :**

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = F(x, \infty),$$
$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = F(\infty, y).$$

- **Dans le cas discret :**

$$\mathbb{P}(X = x_k) = \sum_l \mathbb{P}(X = x_k, Y = y_l).$$

- **Dans le cas continu, les distributions marginales ont une densité vérifiant :**

$$f_X(x) = \int_{v=-\infty}^{\infty} f(x, v)dv$$
$$f_Y(y) = \int_{u=-\infty}^{\infty} f(u, y)du$$

Indépendance de deux variables continues

- **Deux V.A. continues sont indépendantes si et seulement si leur distribution conjointe et leur densités conjointes vérifient :**

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$
$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Distribution conditionnelle de V.A. (1)

- **Cas discret :**
- **Exemple : on lance deux dés. Quelle est la distribution de probabilité du premier sachant que la somme des deux vaut 9.**

$$\mathbb{P}(Y = y_l | X = x_{k_0}) = \frac{\mathbb{P}(X = x_{k_0}, Y = y_l)}{\mathbb{P}(X = x_{k_0})} = \frac{p_{k_0,l}}{\sum_m p_{k_0,m}}$$

Distribution conditionnelle de V.A. (2)

- **Cas continu.**
- **La fonction de répartition conditionnelle de Y sachant que X=x est donnée par :**

$$F_{Y|X}(y|x) = \frac{\int_{-\infty}^{y} f(x,v)dv}{f_x(x)} = \frac{\int_{-\infty}^{y} f(x,v)dv}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,v)dv}$$

- **La fonction de densité conditionnelle de Y sachant X vaut :**

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_x(x)} = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,v)dv}$$

Espérance conditionnelle (1)

- Soient X et Y deux V.A. Dans ce cours nous « verrons » l'espérance conditionnelle de Y sachant X comme l'espérance de la distribution conditionnelle de Y connaissant la valeur de X.
- Dans le cas discret :

$$\mathbb{E}(Y|X = x_k)$$
$$= \sum_{l} \frac{y_l \mathbb{P}(X = x_k, Y = y_l)}{\mathbb{P}(X = x_k)}$$
$$= \frac{\sum_l y_l p_{k,l}}{\sum_l p_{k,l}}$$

- Attention : l peut parcourir un ensemble fini ou infini selon le cas.

Espérance conditionnelle (2)

- **Dans le cas continu**

$$\mathbb{E}(Y|X=x) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} vf(x,v)dv}{f_x(x)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} vf(x,v)dv}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,v)dv}$$

Espérance conditionnelle (3)

- **L’espérance conditionnelle ressemble à un nombre mais est en fait une variable aléatoire !**

$$\omega \to X(\omega) = x \to \mathbb{E}(Y|X = x)$$

- **Elle vérifie :**

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \mathbb{E}(Y).$$

Autres propriétés

- **Pour des variables discrètes :**

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{l} \mathbb{E}(X|Y = y_l)\mathbb{P}(Y = y_l)$$

- **Pour les variables continues :**

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(X|Y = y)\, f_Y(y)dy$$

Covariance et coefficient de corrélation de deux V.A.

- **Définition de la covariance de X et Y :**

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

- **Si X et Y sont indépendantes, la covariance est nulle**
- **La réciproque est fausse !**

- **Définition du coefficient de corrélation :**

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

- **Le coefficient de corrélation est toujours compris entre -1 et 1.**
- **Des variables indépendantes ont un coefficient de corrélation nul.**
- **Si le coefficient de corrélation est nul, on dit que les V.A. sont non corrélées, elles ne sont pas nécessaires indépendantes.**

Variance et Covariance

- **La covariance se comporte comme un « produit scalaire »**
- **La variance se comporte comme le carré d'une distance.**

- **Exemple :**

$$Cov(aX + bY, aX + bY) = a^2Var(X) + 2ab.Cov(X, Y) + b^2Var(Y)$$

- **De plus :**

$$Var(X + cte) = Var(X)$$

Fonction de deux variables aléatoires

- **Pour une fonction $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, « sous de bonnes hypothèses » $g(X,Y)$ est encore une V.A. et, si f désigne la densité (cas continu) de la distribution conjointe de X et Y :**

$$\mathbb{E}(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\,f(x,y)dxdy$$

$$Var(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)^2\,f(x,y)dxdy - \mathbb{E}^2(g(X,Y))$$

Changement de variables

- **Si : $\mathbf{Y} = g(\mathbf{X})$ pour connaître la densité en fonction de Y à partir de celle donnée en fonction de X, il faut penser :**
  - Dans le cas où l'application n'est pas bijective, à additionner les densités des antécédents $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \dots$ de $\mathbf{y}$
  - Et à traiter la densité comme une forme différentielle, en faisant intervenir la Jacobienne :

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})dy_1dy_2\dots dy_n = f_{\mathbf{Y}}(g(\mathbf{x})).\left|J(x_{1,}\dots,x_n)\right|.dx_1dx_2\dots dx_n$$
$$= f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})dx_1dx_2\dots dx_n$$

$$J(x_{1,}\dots,x_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Vecteur aléatoire

- **Vecteur aléatoire :**

$$\mathrm{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

où chaque X_k est une variable aléatoire.

- **Fonction de répartition :**

$$F_{\mathrm{X}}(\mathrm{x}) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n)$$

Propriété de la fonction de répartition

- **Cas d'un vecteur aléatoire (X,Y), la fonction de répartition étant notée $F_{X,Y}$:**

$$Lim_{x,y\to-\infty}F_{X,Y}(x,y) = 0$$
$$Lim_{x,y\to\infty}F_{X,Y}(x,y) = 1$$
$$Si x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2 F_{X,Y}(x_1,y_1) \leq F_{X,Y}(x_2,y_2)$$
$$F_{X,Y}(x+u,y+v) \to F_{X,Y}(x,y) quand u,v \searrow 0^+$$

- **Par ailleurs, on définit comme plus haut les probabilités marginales pour le couple X, Y et :**

$$\lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$
$$\lim_{x\to\infty} F_{X,Y}(x,y) = F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y)$$

Distribution conjointe d'un vecteur de V.A. continues

- **Cas en dimension 2, f étant la « densité de probabilité jointe » :**

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{u=-\infty}^{x} \int_{v=-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$$

Espérance d'un vecteur aléatoire

- Elle est définie ainsi pour

$$\mathrm{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

-

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = (\mathbb{E}(X_1), \mathbb{E}(X_2), \ldots, \mathbb{E}(X_n))$$

Matrice de variance-covariance d'un vecteur aléatoire

- **On utilise une matrice pour représenter les variances ainsi que les « dépendances » entre éléments, à travers les covariances.**

$$\boldsymbol{\Sigma} = (\Sigma_{i,j})_{i,j}$$

$$\Sigma_{i,j} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j) soit : \Sigma_{i,i} = \mathrm{Var}(X_i)$$

Propriétés (1)

- Il existe une matrice diagonale $\mathbf{\Lambda}$ et une matrice d'« isométrie » (vecteurs normés, orthogonaux deux à deux) $\mathbf{B}$ telles que :

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{B \Lambda B^t}$$

- Pour un vecteur $\mathbf{X}$ d'espérance $\boldsymbol{\mu}$ et de matrice de variance covariance $\mathbf{\Sigma}$, et un vecteur scalaire $\mathbf{a}$, les vecteurs étant « notés en colonne » :

$$\mathbb{E}(\mathbf{a}^t.\mathbf{X}) = \mathbf{a}^t.\boldsymbol{\mu} = \sum_k a_k \mu_k$$

$$Var(\mathbf{a}^t.\mathbf{X}) = \mathbf{a}^t.\mathbf{\Sigma}.\mathbf{a} = \sum_i a_i^2 \Sigma_{i,i} + 2\sum_{i<j} a_i a_j \Sigma_{i,j}$$

$$= \sum_{i,j} a_i a_j \Sigma_{i,j}$$

Propriétés (2)

- **Pour un vecteur $\mathbf{X}$ d'espérance μ et de matrice de variance covariance $\mathbf{\Sigma}$, et une matrice $\mathbf{A}$, la variable aléatoire $\mathbf{Y}$ définie par (***avec compatibilité supposée sur les dimensions des matrices***) :**

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}$$

a pour espérance : $\mu_{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\mu$

et pour matrice de variance-covariance :

$$\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\mathbf{\Sigma}\mathbf{A}^{t}$$

SECTION N°4

LOI NORMALE MULTIVARIÉE

Loi normale multivariée (1)

- Une vecteur aléatoire $\mathbf{X}$ a une loi normale multivariée si, quelque soit le vecteur scalaire $\mathbf{a}$ la variable aléatoire suivante :

$$\mathbf{a}^t\mathbf{X}$$

suit une loi normale.

- Une vecteur aléatoire normal est entièrement déterminé par son espérance μ et sa matrice de variance-covariance Σ.

Loi normale multivariée (2)

- **Si le vecteur $\mathbf{x}$ a une loi normale multivariée d'espérance $\boldsymbol{\mu}$ et de matrice de variance-covariance $\boldsymbol{\Sigma}$ et si cette dernière est une matrice symétrique définie positive, sa fonction de densité conjointe vérifie (***les vecteurs étant des vecteurs colonne***) :**

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \det(\boldsymbol{\Sigma})^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right]$$

Propriétés

- **Si $\mathbf{X}$ est un vecteur normal multivarié et $\mathbf{a}$ un vecteur scalaire, alors $\mathbf{a}^t\mathbf{X}$ suit une loi normale dont l'espérance et la variance peuvent être calculés comme plus haut.**

- **Si de plus $\mathbf{D}$ est une matrice (*non nécessairement carrée*) dans le cas où $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ alors $\mathbf{Y} = \mathbf{DX}$ a une loi normale multivariée d'espérance $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{0}$ et de matrice de variance-covariance :**

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{D}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{D}^t$$

SECTION N°5

SIMULATION DE VARIABLES ALÉATOIRES

Simulation de variables aléatoires (1)

- On considère que la génération d’un nombre aléatoire suivant une loi uniforme sur [0, 1] existe en standard dans tous les logiciels. Soit U une telle variable.

- Toujours penser au fait que, si on sait simuler X, on sait simuler aX+b pour toutes constantes a et b.

- Toutes les V.A. sont déduites de U, ou d’exemplaires indépendants de U (U_1, U_2, …)

Simulation de variables aléatoires (2)

- **Loi de Bernoulli de paramètre p, soit B cette variable aléatoire:**

$$B = \begin{cases} 0 si U \leq 1 - p \\ 1 sinon \end{cases}$$

- **Loi Binomiale de paramètres n, p, soit V cette V.A.**

$$V = B_1 + B_2 + \ldots + B_n$$

$$B_1, B_2, \ldots, B_n Loi de Bernoulli indépendantes de paramètre p.$$

Simulation de variables aléatoires (3)

- **Loi exponentielle X de paramètre 1 :**

$$X = -\log(U)$$

- **Loi de Poisson N de paramètre λ : On simule des lois exponentielles T_1, …, T_n,… de paramètre 1**

$$N = \begin{cases} Si T_1 > \lambda \\ alors N = 0 \\ sinon \\ N = le nombre de T_k tels que \\ T_1 + T_2 + \ldots + T_k \leq \lambda \end{cases}$$

Simulation de variables aléatoires (4)

- **Simulation d'une loi normale N(0, 1) : Si U et V sont deux V.A. uniformes dur [0, 1] et indépendantes et X, Y définis par :**

$$X = \sqrt{-2\log(U)}.\cos(2\pi V)$$
$$Y = \sqrt{-2\log(U)}.\sin(2\pi V)$$

alors X et Y sont deux V.A N(0, 1) indépendantes.

- **Permet de simuler de VA normales quelconques ainsi que des vecteurs aléatoires normaux.**