Traitement avance du signal

Litterature

Livre de base pour le cours: Une exploration des signaux en ondelettes (https://www.amazon.fr/Une-exploration-signaux-en-ondelettes/dp/2730207333/ref=sr_1_1?__mk_fr_FR=%C3%85M%C3%85%C5%BD%C3%95%C3%91&keywords=Une+exploration+des+signaux+en+ondelettes&qid=1572278615&sr=8-1)

> **Produit tensoriel**: $\Psi(x,y) = \Psi_1(x) \otimes \Psi_2(y)$

(La numérotation c'est juste la place sur la slide on s'en fout)

- Théorie (on parlera pas forcement de tout)
    - Réponse impusionnelle
    - Fonctions de Transfert
    - Transformée de Fourier sur $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$
    - Regularité et décroissance
    - Principe d'incertitude d'Heisenberg
    - Oscillation de Gibbs et Variation totale
    - transformée de Fourier en dimension 2
    - Atomes temps-fréquence
    - Transformée de Fourier à fenêtre
    - Transformée en Ondelettes (TFO)
    - Fréquences instantanées
    - Distributions temps-fréquence de Wigner-Ville
    - La théorie des frames pour la réduction du bruit
    - Tranformée en ondelette dyadiques
    - Ondelettes de Gabor et discriminations de textures
    - Moments nuls des ondelettes et mesures de régularité
    - Maxima de la TFO et detection de singularites
    - Calculs rapides de contours multi-échelles et algorithme à trous
    - Bases d'ondelettes orthogonnales
    - Bases d'ondelettes biorthogonales
    - Lifting d'ondelettes
    - Bases d'ondelette séparable en dimension 2
    - Paquets d'ondelettes séparable et en dimension 2
    - Paquets d'ondelettes d'images et arbres quaternaire associé
    - Transformée par blocs et Transformée rapide en cosinus discret

    - Approximation de Karhunen-Loeve
    - Optimalité Minimax
    - Wavelet scatering transform

Wavelet Scattering Transform (WST) (https://deeplearning-math.github.io/slides/Lecture02_LiuHX.pdf)

- Applications
    - Réduction de bruit a l'aide des frames
    - approximations par pousuite de base
    - cosinus par blocs et compression d'images (JPEG)
    - Descripteurs de contours a base d'ondelette et reconnaissance de formes article (https://www.hindawi.com/journals/je/2013/435628/)

$cos \simeq e^{j\omega t}$

$\Psi = \Psi_1 \otimes \Psi_2 \Leftrightarrow \Psi(x, y) = \Psi(x)\Psi(y)$

Transitoire : variation dans le temps
Stationnaire : les propriétés stats sont constantes dans le temps

L'ondelette va etre capable de capturer ca.

Rappel TF:

Fonction d'energie finie et on fait son produit scalaire par une sinusoide.
Si on a la TF, on peut revenir au signal initial.

Soit un **opérateur linéaire stationnaire** :

$$\forall \omega \in \mathcal{R}, \quad L\ exp^{i\omega t} = h(\omega) exp^{i\omega t}$$

C'est qqch qui prend en entree un espace vectoriel et qui rend un espace vectoriel.

Principe d'incertitude d'Heisenberg ("Le truc le plus important du cours")

L'énergie d'une fonction et de sa transformée de Fourier ne peuvent être concentrées en même temps sur des intervalles arbitrairement petits.

Quand on est précis en temps, on est pas précis en fréquence et vice-versa.

Les atomes de Gabor arrivent à minimiser l'imprécision en temps et en fréquence.

Précision : capacité à différencier deux signaux proches dans le temps/leur fréquence

Transformée de Fourier à fenêtre

Elle est non nulle sur un intervalle fini (Support compact).
La gaussienne a un support non compact.

compact $\equiv$ borné

En la modulant on obtient un atome de Gabor.

modulé : multiplié par une sinusoide

Théorème d'incertitude d'Heisenberg:

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2}$$

Allégorie: voir ça comme un "rectangle d'Heisenberg" avec σ_t et σ_ω en axes. On cherche à minimiser l'aire du rectabngle, à savoir $\sigma_t \times \sigma_\omega$. Dans le cas d'un atome de Gabor, on a $\sigma_t \sigma_\omega = \frac{1}{2}$

En gros la TF a fenetre, ca fait un peu comme un filtre.

Seance 1

Information transitoire exemple :

```
gros bruit puis plus rien
```

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(t)\tau(t-t_0)dt &= \int f(t_0) \int \tau(t-t_0)dt \\ &= f(t_0) \int \underbrace{\tau(t-t_0)dt}_{1} \\ &= f(t_0)\end{aligned}$$

Plus on est precis en frequentiel, moins on est precis en temporel et inversement.

Transformee fenêtré

> Rappel: La Transformé de Fourier d'un dirac donne un exponentiel et inversement.

Transformee de Fourier a fenetre avec une gaussienne,

Atome:

> Fonction dont l'énergie est localisé/centré en temps et en fréquence
> Exemple atome de gabor

> La boite d'heisengerg est constante dans tout l'espace temps frequence.

Transformee en ondelette

$$\Psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}\Psi\left(\frac{t-u}{s}\right)$$

- u temporelle
- s échelle
- La moyenne d'une ondelette est nulle.
- Les ondelettes sont des passes bande. Ca mesure des variations (des fréquences).
- L'idée c'est d'échantillonné un signal avec des ondelettes.
- $\Psi \iff \Psi_{0,1}$

Boites d'Heisenberg, il y a 4 paramètres :

- Centre temporelle
- Centre frequentielle
- Etalement temporelle
- Etalement frequentielle

Remarque: On passe d'un signa 1D (en fonction du temps) à un signal 2D (temps fréquence).

Seance 2 (Tochon)

> Boutry fait la partie ondelettes, Tochon plus la partie stats

Comment estimer des paramètres statistiques à partir d'observations

Ex: estimer la puissance du bruit pour débruitage

MATHS

En sachant qu'un échantillon a été généré par une Normale de moyenne inconnue et en connaissant l'écart type de la Loi Normale.

- 1 seul échantillon --> Difficile de savoir
- plein --> use moyenne empirique ? Si on génère de nouveaux échantillons on aura un résultat différent à chaque fois

$\mathcal{X}_i$ ~ $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$
$Y = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ ~ $\mathcal{N}(0,1)$

$x_1, \ldots, x_n$ découle de X ~ $f_X(x, \underbrace{\theta}_{\text{un parametre inconnu}})$

D'une amiere generale on a $\hat{\theta} = g(x_1, \ldots, x_n)$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ représentés par les v.a $X_1, X_2, \ldots, X_n$ qui sont sont iid (== "indépendantes et identiquement distribuées")

$\hat{\theta}$ est un estimateur ponctuel de θ réalisations particulières

$$\underbrace{\Theta}_{\text{Estimateur}} = g(X_1, \dots, X_n)$$

$$\mathcal{X} \sim \mathcal{R}(\alpha) \; ; \; f_X(x, \alpha) = \frac{x}{\alpha^2} e^{\frac{-x^2}{2\alpha^2}} ; x \geq 0$$

$E[X] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\alpha$
var $(X) = \frac{4-\pi}{2}\alpha^2$
$\overline{x_n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\hat{\alpha} \longrightarrow \overline{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\overline{x_n}$

$$\hat{A} = \sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$$

$X_i \overbrace{\sim}^{rid} f_X$
$E[X] = \mu$
Var $(X) = \sigma^2$

Estimateur de la moyenne empirique

$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
Si $n \to +\infty$, on espere que Var$(\overline{X_n}) \to 0$
$E[X_n] = \mu$

> En general
> $\hat{\Theta} = g(X_1, \dots, X_n)$ pour estimer $theta$
> On espere:
>
> - $E[\hat{\Theta}] = \theta \Leftrightarrow \underbrace{E[\hat{\Theta}] - \theta}_{\text{biais } b(\hat{\Theta})} = 0$
> - Var$(\hat{\Theta}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ Estimateur consistant

$$E[\underbrace{\overline{X_n}}_{\text{non biaisé et consistant}}] = E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{E[X_i]}_{\mu} = \mu$$

$$var(\overline{X_n}) = var(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n^2} var(\sum_{i=1}^n X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \underbrace{var(X_i)}_{\sigma^2}}_{\text{possible d'inverser somme et variance car les vars sont indeps}}$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} \to \inf \text{quand n tend vers} \inf$$

Variable empirique

Si $E[X] = \mu$ est connu
$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ non biaisé
$E[S_n^2] = \sigma^2$
$var(S_n^2) --> 0$ quand n tend vers inf

TCL stuff :
TODO

Tableau de droite:
Moment d'ordre k:
k == 1: esperance
k == 2: Variance
k == 3: Symetrie
… (autres)

- Si μ est inconnu $\to$ on estime μ par $\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underbrace{(X_i - \overline{X_n})}_{X_i^2 - 2X_i\overline{X_n} + \overline{X_n}^2}^2$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\overline{X_n} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \overline{X_n}^2$$
$$= \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\overline{X_n X_n} + \overline{X_n}^2$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \overline{X_n}^2$$

$$E[S_n^2] = E[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \overline{X_n}^2]$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X_i^2] - E[\overline{X_n}^2]$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma^2 + \mu^2) - (\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2)$$
$$= \sigma^2 \mu^2 - \frac{\sigma^2}{n} - \mu^2$$
$$= \sigma^2 + \mu^2 - \frac{\sigma^2}{n} - \mu^2 = (\frac{n-1}{n} \sigma^2)$$

Estimateur non biaise
$E[S_n^2] = \frac{n-1}{n} \Leftrightarrow \frac{n}{n-1}E[S_n^2] = \sigma^2$
$= E[\frac{n}{n-1}S_n^2] = \sigma^2$
$= E[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_n)^2] = \sigma^2$
$S_n^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2$ est un estimateur non biaise de σ^2

Th de Koenig:
$var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = cannotsee$

Rappel:
si X, Y indep, la densité de proba jointe du vecteur $(X_1, \dots X_n)$ est $L(X_1 \dots X_n, \theta) = \mathrm{PROD}_{i_n} f_X(x_i, \theta)$

$\theta \to L(X_i \dots X_n, \theta)$
où L est la fonc de vraissemblance de theta
pour une observation $(x_1 \dots x_n), \theta \to L(x_1 \dots x_n, \theta)$ est la proba que l'observation se produise pour la valeur theta

On va donc chercher la valeur theta qui maximise la proba d'observer l'échantillon $(x_1 \dots x_n)$ et donc qui maximise $L(x_1 \dots x_n, \theta)$

Ne marche que quand Df ne depend pas de θ

On cherche a maximiser la log vraissemblance $\ln(L(x_1 \dots x_n, \theta))$

$x_1, \dots, x_n \to X_i \overset{\text{uid}}{\sim} \mathcal{R}(\alpha) f_x(x_i \alpha) = \frac{x_i}{\alpha^2} e^{\frac{-x_i^2}{2\alpha^2}}; x > 0$

Fonction de vraisemblance

$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \alpha) = \Pi_{i=1}^{n} \mathcal{L}_x(x_i, \alpha)$
$= \Pi_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\alpha^2} e^{-\frac{x_i^2}{2\alpha^2}}$
$\frac{1}{\alpha^{2n}}(\Pi_{i=1}^{n} x_i) e^{-\frac{1}{2\alpha^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

Rayleigh et logs

**

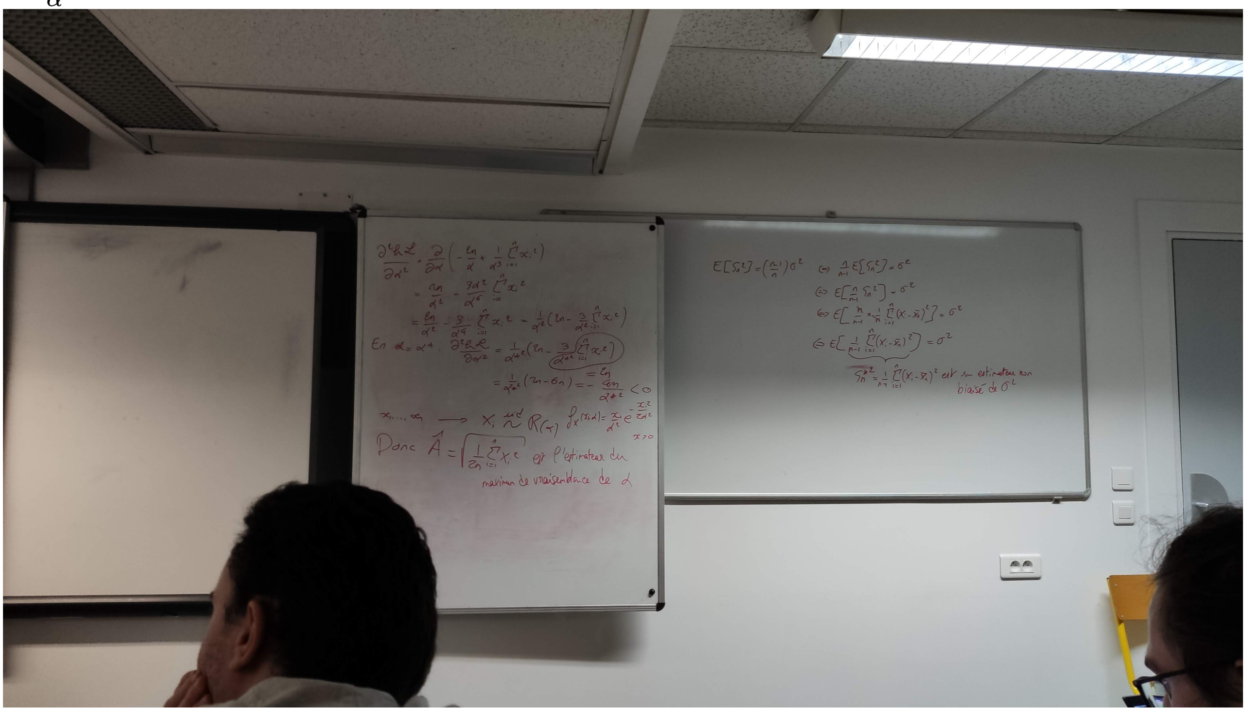
Loi de Rayleigh
https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_de_Rayleigh (https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_de_Rayleigh)
NOT https://onepiece.fandom.com/wiki/Silvers_Rayleigh (https://onepiece.fandom.com/wiki/Silvers_Rayleigh)

**

Rappel logs:
$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$
$\log(a^b) = b\log(a)$
d'où :
$\log(1/a) = \log(a^{-1}) = -\log(a)$
$\log(e^b) = b$

$\frac{\partial^2 hl}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial}{\partial x}(-\frac{2n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3} \sum i = 1^n x_i^2)$
$= \frac{2n}{\alpha^2} - \frac{3}{\alpha 4} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{1}{\alpha^2}(2n - \frac{3}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n x_i^2)$

En $\alpha = \alpha^+$: $\frac{\partial^2 hl}{\partial \alpha^2}$
\(= \frac{1}{\alpha^{*2}}\) … voir photo
$= \frac{1}{\alpha^{*2}}(2n - 6n) = -\cdot$



[…]

Donc $\hat{A} = \sqrt{\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2}$ est l'estimateur du max de vraissemblance de α

Cours du 18 novembre

Ondelette respecte les elements suivants

- $\psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ // energie finie
- $\int_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = \emptyset$
- $\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}\psi(\frac{t-u}{s})$

Fonction d'echelle

Fonction qui complete … (comporte les basses frequences)

Diadique

En puisssance de 2

Suite ici (https://hackmd.io/z__0wRb5RpKxQhGWes6_7w)