

# Traitement avancé du signal

Nicolas Boutry<sup>1</sup>

✉ nicolas.boutry@lrde.epita.fr

<sup>1</sup> Laboratoire de Recherche et Développement de l'EPITA (LRDE), France

Octobre-Décembre 2019



# Outline

1

## Un monde transitoire

- Le paradis de Fourier
- Le mariage temps-fréquence
- La transformée de Fourier à fenêtre
- La transformée en ondelettes
- Pavages temps-fréquence
- Applications : cas général
- Application 1 : approximations
- Application 2 : estimation de signaux bruités
- Application 3 : compression de données

2

## Approfondissement des concepts essentiels

- Petits rappels techniques venant de Fourier
- Les opérateurs linéaires stationnaires sont des filtres fréquentiels
- Rappel de l'inégalité de Cauchy-Schwartz
- Incertitude d'Heisenberg - Preuve !
- La TFF et constance de ses boîtes d'Heisenberg
- L'essentiel sur la TFO 1D/2D
- Analyse multi-résolution et pyramide Laplacienne

# Outline

1

## Un monde transitoire

- ➊ Le paradis de Fourier
- ➋ Le mariage temps-fréquence
- ➌ La transformée de Fourier à fenêtre
- ➍ La transformée en ondelettes
- ➎ Pavages temps-fréquence
- ➏ Applications : cas général
- ➐ Application 1 : approximations
- ➑ Application 2 : estimation de signaux bruités
- ➒ Application 3 : compression de données

2

## Approfondissement des concepts essentiels

- ➊ Petits rappels techniques venant de Fourier
- ➋ Les opérateurs linéaires stationnaires sont des filtres fréquentiels
- ➌ Rappel de l'inégalité de Cauchy-Schwartz
- ➍ Incertitude d'Heisenberg - Preuve !
- ➎ La TFF et constance de ses boîtes d'Heisenberg
- ➏ L'essentiel sur la TFO 1D/2D
- ➐ Analyse multi-résolution et pyramide Laplacienne

# Le paradis de Fourier

1

## Un monde transitoire

- Le paradis de Fourier
- Le mariage temps-fréquence
- La transformée de Fourier à fenêtre
- La transformée en ondelettes
- Pavages temps-fréquence
- Applications : cas général
- Application 1 : approximations
- Application 2 : estimation de signaux bruités
- Application 3 : compression de données

2

## Approfondissement des concepts essentiels

# Le paradis de Fourier I

- Rappels sur la [transformée de Fourier](#), si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction réelle d'énergie finie, on :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \exp^{-i\omega t} dt,$$

où les coefficients  $\hat{f}(\omega)$  correspondent à l'amplitude de la sinusoïde  $\exp^{-i\omega t}$  dans le signal  $f$ ,

- on a alors inversement:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \exp^{i\omega t} d\omega,$$

qui permet de reconstruire  $f$  à partir de sa transformée de Fourier,

# Le paradis de Fourier II

- Soit  $L$  un opérateur linéaire stationnaire, il est entièrement caractérisé par ses valeurs propres  $\hat{h}(\omega)$  :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, L \exp^{i\omega t} = \hat{h}(\omega) \exp^{i\omega t},$$

- Interprétation : à un  $\omega$  donné,

- on synthétise une sinusoïde complexe  $\exp^{i\omega t}$  fonction du temps,
- Elle correspond à un vecteur de l'espace d'entrée de  $L$ ,
- $L$  vérifie alors l'égalité  $Av = \lambda v$  montrant que  $\exp^{i\omega t}$  est un vecteur propre de  $L$ ,
- Ce vecteur propre  $\exp^{i\omega t}$  est alors associé à la valeur propre  $\hat{h}(\omega)$ ,

# Le paradis de Fourier III

- appliquons-le à la fonction temporelle  $f$  :

$$\begin{aligned}Lf &= L\left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \exp^{i\omega t} d\omega\right), \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} L\hat{f}(\omega) \exp^{i\omega t} d\omega, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)L \exp^{i\omega t} d\omega, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)\hat{h}(\omega) \exp^{i\omega t} d\omega,\end{aligned}$$

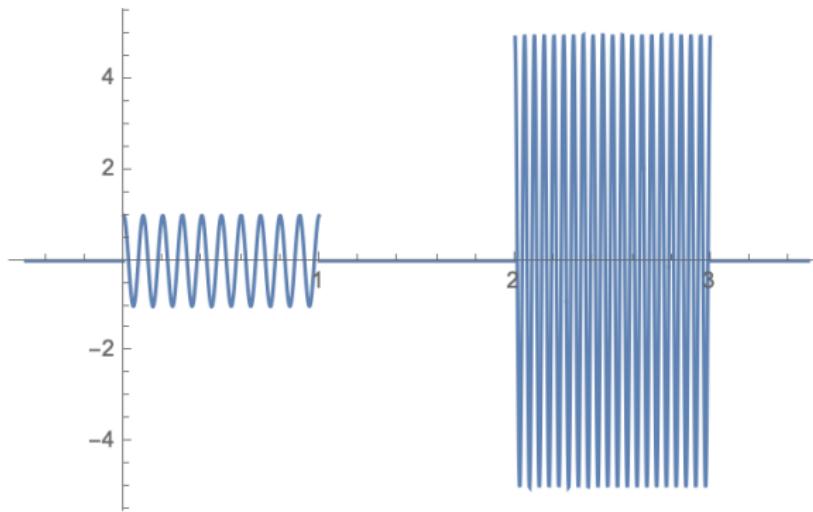
alors on observe que  $L$  atténue ou augmente chaque composante fréquentielle de  $f$ , c'est donc un **filtre fréquentiel**.

- ainsi, on comprend que la TF est un outil idéal pour la transmission ou le traitement des signaux **stationnaires**, c'est-à-dire dont les propriétés statistiques (moyenne, variance, etc.) sont constantes dans le temps,

# Le paradis de Fourier IV

- Pour calculer une TF, on corrèle une fonction avec un signal infini dans le temps, ainsi on ne capture PAS comme il nous arrangerait l'**information transitoire**:
  - Exemple 1 : la prononciation d'un mot dans un silence.
  - Exemple 2 : voir ci-dessous

# Le paradis de Fourier V



**Figure:** Deux notes de musiques se suivant dans le temps (Signal 1)

- On insère dans un silence deux notes de musiques "do" puis "ré" consécutivement (Signal 1),

# Le paradis de Fourier VI

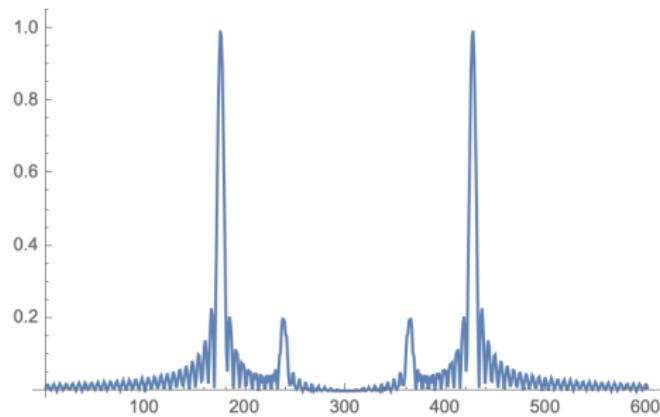


Figure: Spectre du signal 1

- On calcule le spectre (module de la TF) du Signal 1,

# Le paradis de Fourier VII

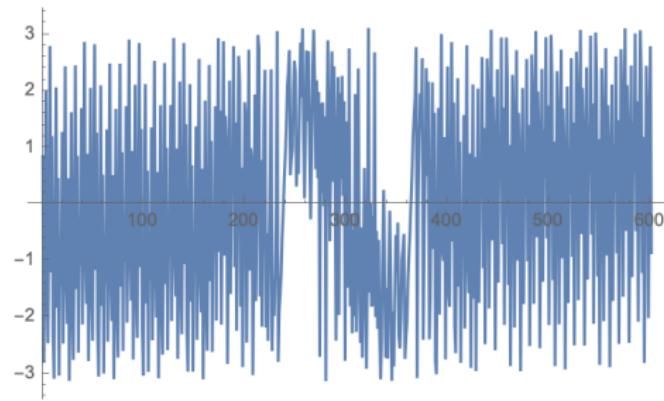
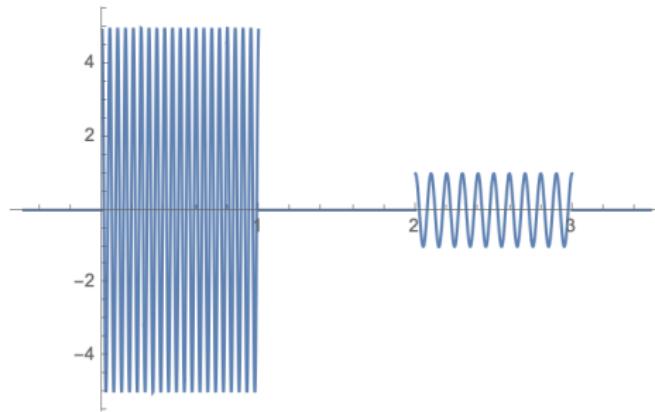


Figure: Phase du signal 1

- On calcule la phase du Signal 1,

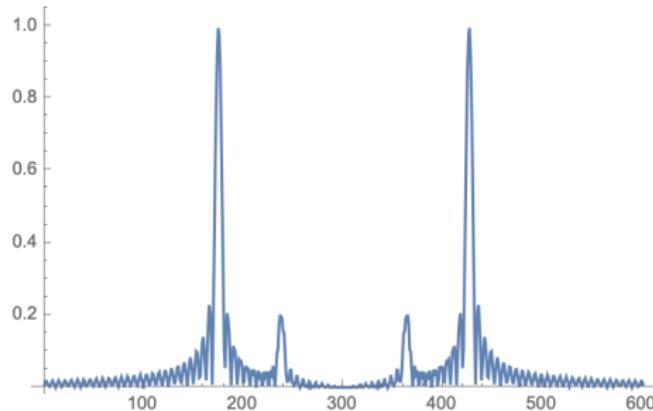
# Le paradis de Fourier VIII



**Figure:** Deux notes de musiques se suivant dans le temps dans le sens inverse par rapport au signal 1 (Signal 2)

- On synthétise un nouveau signal mais avec un "ré" puis un "do" (Signal 2),

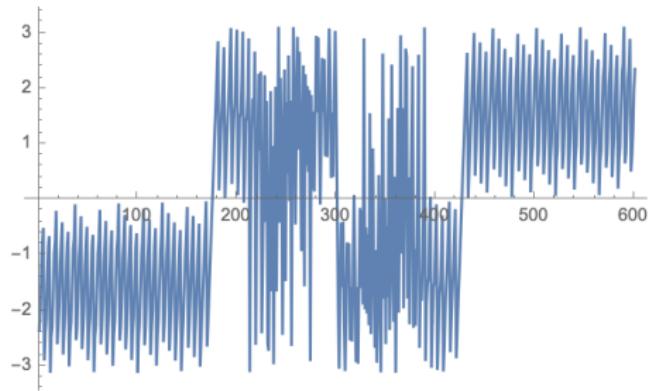
# Le paradis de Fourier IX



**Figure:** Spectre du signal 2, identique à celui du signal 1 ! Le spectre ne suffit donc pas à détecter l'inversion des fréquences ...

- On calcule le spectre du Signal 2,
- On obtiendra les mêmes spectres (et donc les mêmes pics aux deux fréquences concernées !),

# Le paradis de Fourier X



**Figure:** Phase du signal 2 : on peut la différencier de la phase du signal 1 mais comment décrypter que l'une est la suite de fréquences  $f_1$  et  $f_2$  et l'autre la suite de fréquences  $f_2$  et  $f_1$  ?

- On calcule la phase du signal 2,

# Le paradis de Fourier XI

- Noter que l'information due à la TF n'est pas vraiment perdue (inversibilité de la TF combinaison du spectre et de la phase),
- En fait l'information permettant de savoir si on a "do" et "ré" ou "ré" et "do" sera "cachée" dans la phase,
- Problème : elle sera alors difficile à exploiter ...

# Le mariage temps-fréquence

1

## Un monde transitoire

- Le paradis de Fourier
- **Le mariage temps-fréquence**
- La transformée de Fourier à fenêtre
- La transformée en ondelettes
- Pavages temps-fréquence
- Applications : cas général
- Application 1 : approximations
- Application 2 : estimation de signaux bruités
- Application 3 : compression de données

2

## Approfondissement des concepts essentiels

# Le mariage temps-fréquence I

- **Principe d'incertitude d'Heisenberg** : *l'énergie d'une fonction et de sa transformée de Fourier ne peuvent être concentrées en même temps sur des intervalles arbitrairement petits,*
- Exemple 1 : un Dirac temporel  $\delta(t - t_0)$  est concentré temporellement en  $t_0$  mais son spectre est à support infini (et ne décroît même pas dans le temps !),
- Exemple 2 : un Dirac fréquentiel  $\delta(\omega - \omega_0)$ , c'est à dire une sinusoïde temporelle  $\exp^{-j(\omega-\omega_0)t}$ , a son énergie centrée en  $\omega_0$  mais son module vaut 1 partout dans le temps !
- Autrement dit : une grande précision (définie ci-après) ou localisation en temps  $\Rightarrow$  faible précision en fréquence, et inversement,
- On entend par **précision temporelle/fréquentielle** la capacité d'un système à différencier deux signaux proches temporellement/fréquentiellement,
- 1946: Gabor propose d'étudier les signaux sonores avec des **atomes élémentaires** précis en temps et en fréquence autant que possible (détailé plus tard).

## Le mariage temps-fréquence II

- Cela mena à la naissance de l'analyse temps-fréquence (liée à la perception humaine des signaux),
- 1948 : Ville  $\Rightarrow$  étude temps-fréquence d'un signal  $f$  à partir d'une densité d'énergie [HORS COURS]:

$$P_V f(t, \omega) := \int_{\mathbb{R}} f(t + \frac{\tau}{2}) f^*(t - \frac{\tau}{2}) \exp^{-i\tau\omega} d\tau,$$

- Cette distribution fut en réalité introduite par Wigner en 1932 en mécanique quantique, d'où le nom de distribution de Wigner-Ville.

# La transformée de Fourier à fenêtre

1

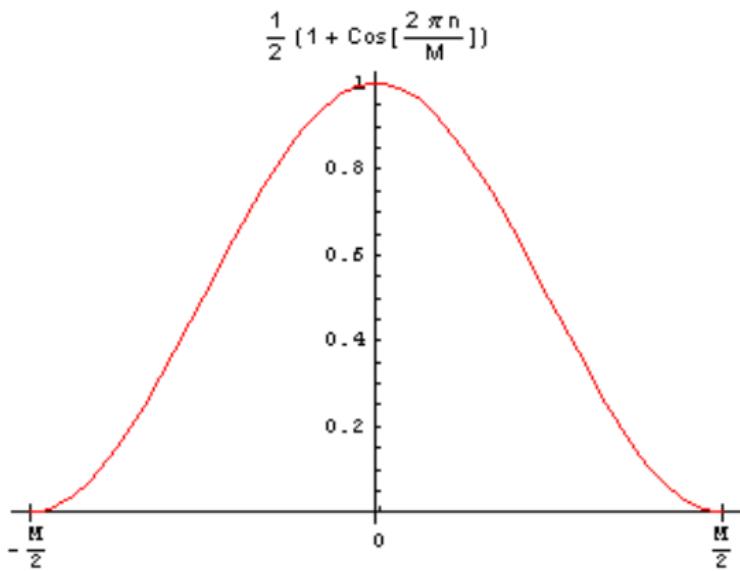
## Un monde transitoire

- Le paradis de Fourier
- Le mariage temps-fréquence
- **La transformée de Fourier à fenêtre**
- La transformée en ondelettes
- Pavages temps-fréquence
- Applications : cas général
- Application 1 : approximations
- Application 2 : estimation de signaux bruités
- Application 3 : compression de données

2

## Approfondissement des concepts essentiels

# La transformée de Fourier à fenêtre I



- Une **fenêtre** en traitement du signal est une fonction à support compact, symétrique autour du milieu de ce support, généralement maximale ou près de son maximum au centre, et évanescante (cf. Hanning, Hamming, Gaussienne tronquée, etc.).

## La transformée de Fourier à fenêtre II

- construction des **atomes de Gabor** à partir d'une fenêtre  $g$  translatée en temps et en fréquence:

$$g_{u,\xi}(t) = g(t - u) \exp^{i\xi t},$$

- l'énergie de  $g$  est donc concentrée au voisinage de  $u$  sur un intervalle de largeur :

$$\sigma_t = \text{StandardDeviation}(|g(t)|^2),$$

- on obtient comme TF de  $g$ :

$$\hat{g}_{u,\xi}(\omega) = \hat{g}(\omega - \xi) \exp^{-iu(\omega - \xi)},$$

- De la même façon, l'énergie de  $g$  est donc concentrée au voisinage de  $\xi$  (mais fréquentiellement) sur un intervalle de largeur :

$$\sigma_\omega = \text{StandardDeviation}(|\hat{g}(\omega)|^2),$$

- l'énergie de  $\hat{g}_{u,\xi}$  est donc localisée autour de la fréquence  $\xi$  sur un intervalle de largeur  $\sigma_\omega$  qui mesure le domaine où  $|\hat{g}(\omega)|$  est non négligeable,
- Attention, les intervalles de support ne sont pas égaux (en général) aux intervalles où est concentrée l'énergie !

# La transformée de Fourier à fenêtre III

- l'étalement de l'énergie de l'atome dans le plan temps-fréquence est symboliquement représenté par un **rectangle d'Heisenberg** de centre  $(u, \xi)$ , de largeur temporelle  $\sigma_t$  et de largeur fréquentielle  $\sigma_\omega$  :

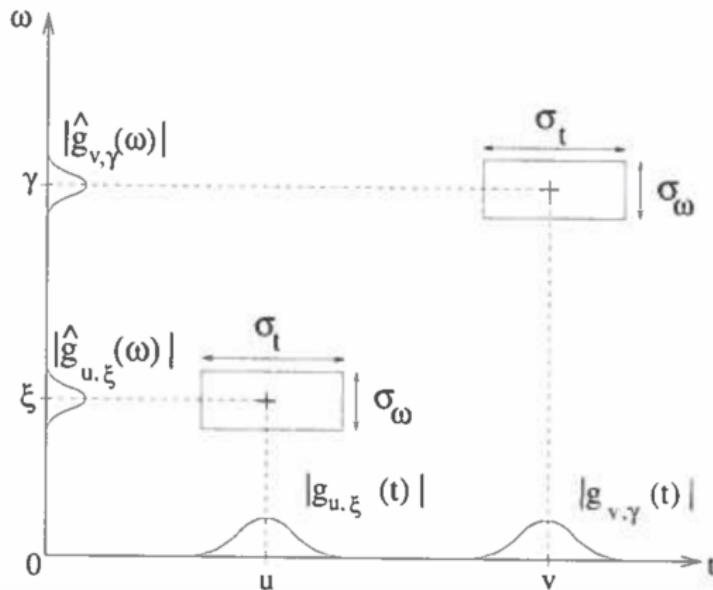


Figure: Diagramme d'Heisenberg d'une TFF

## La transformée de Fourier à fenêtre IV

- on observe bien le théorème d'incertitude d'Heisenberg :

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2},$$

- Autrement dit, si on a une très bonne précision en temps, c'est-à-dire  $\sigma_t \rightarrow 0$ , alors  $\sigma_\omega$  tend vers  $+\infty$  (mauvaise précision fréquentielle),
- cette surface  $\sigma_t \sigma_\omega$  est minimale lorsque la fenêtre  $g$  est une Gaussienne, on parle alors de **fonctions de Gabor** (cas optimal donc !),
- Attention à ne pas confondre les atomes de Gabor et les fonctions de Gabor !

# La transformée de Fourier à fenêtre V

- Supposons que l'on ait donc un atome temps-fréquence  $g_{u,\xi}^*(t)$  centré en  $(u, \xi)$ , alors la **Transformée de Fourier à fenêtre (TFF)** est définie en terme de corrélation par :

$$S f(u, \xi) := \int_{\mathbb{R}} f(t) g_{u,\xi}^*(t) dt \quad (1)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(t) g(t-u) \exp^{-i\xi t} dt \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \hat{g}_{u,\xi}^*(\omega) d\omega \quad (3)$$

- Rappel : la dernière égalité est obtenue par la **formule de Parseval**.
- Bien noter que l'on est passé d'une fonction temporelle 1D à une nouvelle fonction qui elle est 2D (temps  $\rightarrow$  temps + fréquence),
- Ces deux représentations (initiale et temps-fréquentielle) codent le même signal mais de façon différente,
- Ces intégrales montrent que :
  - Temporellement on ne considérera que les valeurs de  $f$  autour de  $u$ ,

# La transformée de Fourier à fenêtre VI

- Fréquemment, on ne considérera que les valeurs de  $\hat{f}$  autour de  $\xi$ .

# La transformée en ondelettes

1

## Un monde transitoire

- Le paradis de Fourier
- Le mariage temps-fréquence
- La transformée de Fourier à fenêtre

## ● La transformée en ondelettes

- Pavages temps-fréquence
- Applications : cas général
- Application 1 : approximations
- Application 2 : estimation de signaux bruités
- Application 3 : compression de données

2

## Approfondissement des concepts essentiels

# La transformée en ondelettes I

- En 1984 : Morlet (sismologie par réflexion) et Grossman (physique théorique) s'unissent à Gabor, Ville et Wigner pour donner naissance à un mélange physique théorique et traitement du signal : (la formalisation de) la transformée en ondelettes (TFO),
- Note : notion non nouvelles en analyse harmonique ou en computer vision ! (cf. l'analyse multi-échelle d'images),
- une ondelette  $\psi : t \in \mathbb{R} \rightarrow \psi(t) \in \mathbb{R}$  est une fonction de moyenne nulle:

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0,$$

qui est dilatée par un paramètre d'échelle  $s > 0$  et translatée de  $u \in \mathbb{R}$ :

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right).$$

## La transformée en ondelettes II

- on appelle alors TFO de  $f$  à l'échelle  $s$  et à la position  $u$  la corrélation entre  $f$  et l'ondelette correspondante :

$$W f(u, s) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi_{u,s}^*(t) dt \quad (4)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^*\left(\frac{t-u}{s}\right) dt, \quad (5)$$

- comme une TFF, la TFO permet de mesurer les variations temporelles des composantes spectrales de  $f$ ,
- Dans le cas de la TFO, la résolution temps-fréquence dépend de son centrage  $(u, s)$  dans l'espace temps-fréquence,

# La transformée en ondelettes III

- dans le domaine fréquentiel, on obtient par la formule de Parseval :

$$W f(u, s) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi_{u,s}^*(t) dt \quad (6)$$

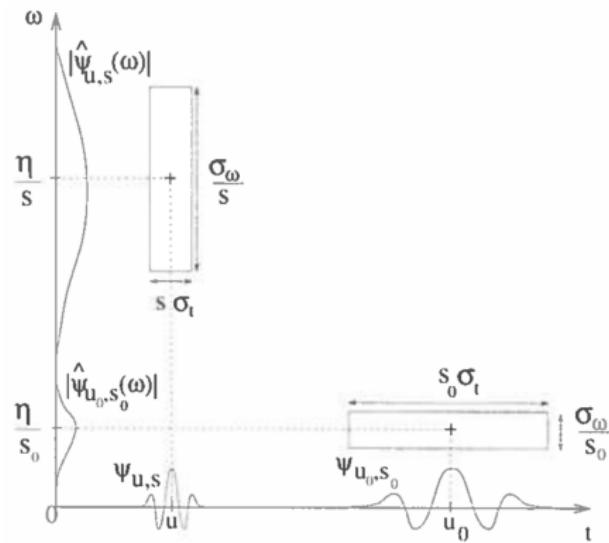
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \hat{\psi}_{u,s}^*(\omega) d\omega, \quad (7)$$

- Regardons la TF de  $\psi_{u,s}$  :

$$\hat{\psi}_{u,s}(\omega) = \exp^{-iu\omega} \sqrt{s} \hat{\psi}(s\omega),$$

- Le facteur d'échelle de  $s$  en temporel devient un facteur d'échelle en  $1/s$  en fréquentiel !
- Autrement dit, plus on s'étale en temps, le moins on s'étale en fréquence, et inversement.
- Ainsi on peut comprendre intuitivement la préservation de l'aire de la boîte d'Heisenberg (on perd d'un côté la précision que l'on aura gagnée de l'autre ...),

# La transformée en ondelettes IV



**Figure:** Boîtes d'Heisenberg dans le cas d'une TFO : l'ondelette en bas à droite est étalée dans le temps et donc concentrée en fréquence (donc bonne précision fréquentielle) ; la même ondelette mais compressée en temps (à gauche) donnera une meilleure précision temporelle mais une moins bonne précision en fréquence.

## La transformée en ondelettes V

- Pour une TFO, nous ne sommes PAS centrés en  $(u, s)$  !
- Imaginons sur la figure ci-dessus que l'on ait  $s_0 = 1$  et  $s = 1/10$ , alors on voit que :
  - $\psi_{u,s}$  est 10 fois moins étalée en temps que  $\psi_{u_0,s_0}$ ,
  - $\psi_{u,s}$  est 10 fois plus étalée en fréquence que  $\psi_{u_0,s_0}$ ,
  - $\psi_{u,s}$  est centrée temporellement indépendamment de  $\psi_{u_0,s_0}$ ,
  - $\psi_{u,s}$  est centrée 10 fois plus haut en fréquence que  $\psi_{u_0,s_0}$  (corrélation des centrages en fréquences).
- C'est donc le facteur d'échelle qui décide de la fréquence centrale de l'ondelette !
- la position dans l'espace temps-fréquence est donc liée à l'étalement temporel/fréquentiel,
- la taille des boîtes d'Heisenberg dépend donc de leur position dans le cas d'une TFO (vs. la TFF !)

## La transformée en ondelettes VI

- Aussi,  $W f(u, s)$  ne dépend que des valeurs  $f(t)$  et  $\hat{f}(\omega)$  dans les voisinages temporels et fréquentiels où sont concentrées les énergies de  $\psi_{u,s}$  et de  $\hat{\psi}_{u,s}$ .
- Exemple, si l'on prend une **ondelette analytique complexe**, telle que son spectre est nul pour les fréquences négatives:

$$\hat{\psi}(\omega) = 0 \text{ pour } \omega < 0,$$

Alors:

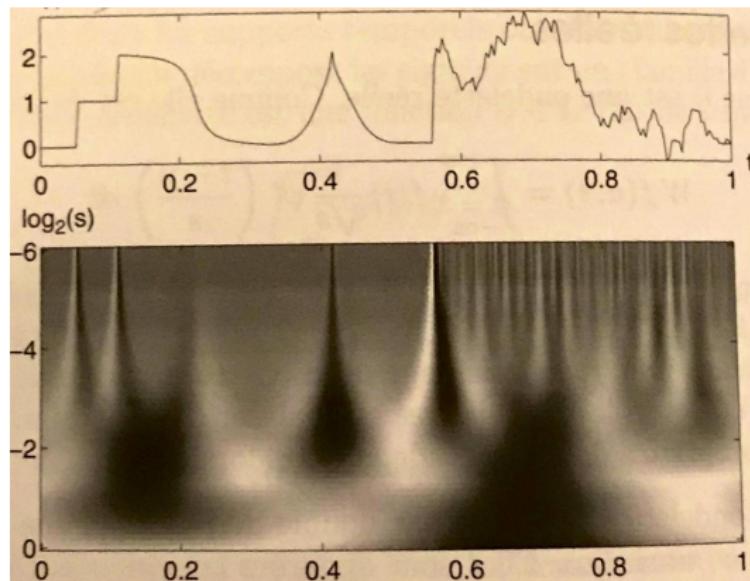
- On peut alors analyser l'information de phase des signaux,
- L'énergie de  $\hat{\psi}$  est alors localisée autour d'une fréquence centrale  $\eta > 0$ ,
- Elle est donc concentrée autour de  $\eta/s$  pour  $\psi_{u,s}$  (cf. l'étalement de  $1/s$ ),
- On obtient donc un centrage en  $(u, \eta/s)$ .

## La transformée en ondelettes VII

- Cas de l'ondelette  $\psi$  réelle :

- cette ondelette peut détecter et caractériser les transitoires par un zoom le long des échelles.
- Comme  $\psi$  est réelle, le coefficient  $W f(u, s)$  mesure les **variations** dans un voisinage de  $u$ , de largeur proportionnelle à  $s$ .
- Intuition : les **variations brutales** d'un signal impliquent de gros coefficients d'ondelettes (comme pour une dérivée !!),
- Inversement, plus  $f$  est **régulière**, c'est-à-dire le moins  $f$  contient de discontinuités, plus les coefficients correspondant aux hautes fréquences décroissent,

## La transformée en ondelettes VIII



**Figure:** TFO d'un signal contenant des irrégularités : observer les amplitudes de la TFO versus la force des irrégularités dans le signal temporel, ainsi que la capacité à les localiser selon l'échelle observée.

# La transformée en ondelettes IX

- Détection des **singularités** de  $f$ : on suit les maxima locaux de la TFO dans l'espace temps-fréquence (on dira **le long des échelles**),
- Différentes échelles  $\Rightarrow$  contours d'objets de tailles différentes dans l'image  $\Rightarrow$  Computer vision & Reconnaissance de Formes,
- Remarque : d'un signal **1D** (c'est-à-dire  $f$ ), on est passé à une représentation **2D**, que ce soit pour la TF fenêtrée  $Sf(u, \xi)$  ou pour la TFO  $Wf(u, s)$ )  $\Rightarrow$  redondance d'information.

# La transformée en ondelettes X

- Rappel  $L^2(\mathbb{R})$  représente l'ensemble des fonctions  $f$  réelles d'énergie finie:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < +\infty$$

- Représentation dans  $L^2(\mathbb{R})$ : on peut écrire les TFF et TFO sous forme de **produits scalaires**:

$$S f(u, \xi) = \langle f, g_{u,\xi} \rangle,$$

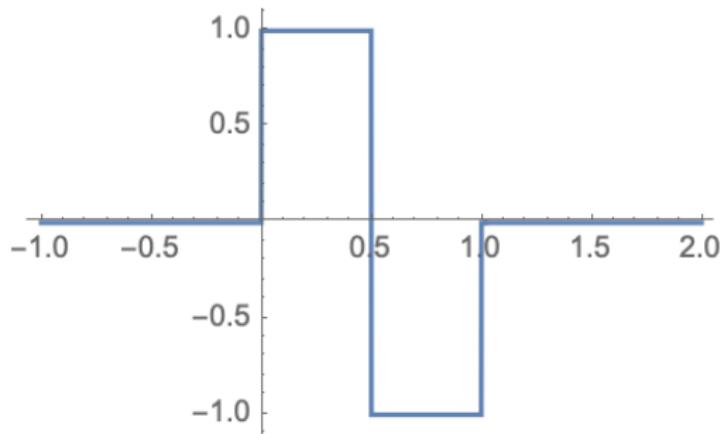
$$W f(u, s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle,$$

- Ces produits scalaires seront souvent appelés **coefficients**.

# La transformée en ondelettes XI

- On dit qu'une représentation du signal à base (d'un nombre discret) d'atomes est **complète** si tout signal peut se reconstruire par combinaison linéaire de cette famille d'atomes,
- la **théorie des frames** établit les conditions pour que des bases d'ondelettes soient stables (définition plus tard) et complètes,
- Intuition : on cherche à éliminer la redondance via ces décompositions; on parle de **base de l'espace des signaux**.
- Exemples de bases:
  - bases d'ondelettes (orthogonales ou non),
  - bases de **paquets d'ondelettes**,
  - bases de **cosinus locaux**,
  - ...

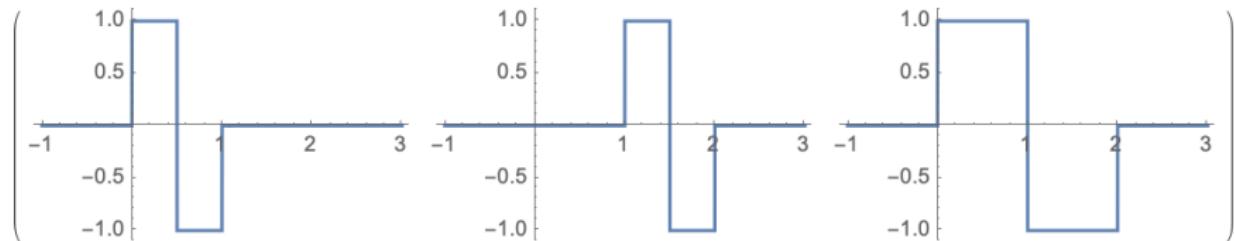
## La transformée en ondelettes XII



- ondelettes de Haar (1910) :

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq t < 1/2, \\ -1 & \text{pour } 1/2 \leq t < 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

# La transformée en ondelettes XIII



dont les translations et dilatations engendrent une base orthonormale dans  $L^2(\mathbb{R})$  :

$$\left\{ \psi_{j,n}(t) := \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t - 2^j n}{2^j}\right) \right\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2},$$

on peut alors **décomposer** tout signal  $f \in L^2(\mathbb{R})$  de la façon suivante :

$$f = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n}.$$

## La transformée en ondelettes XIV

- soit la **somme partielle**:

$$d_j(t) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n}(t),$$

alors  $d_j$  encode les variations de détails de  $f$  à l'échelle  $2^j$ ,

- Si  $f$  est régulière,

$$f_J(t) := \sum_{j=J}^{+\infty} d_j(t),$$

est une approximation “précise” de  $f$  à l'échelle  $2^J$ ,

- Plus  $J$  tend vers  $-\infty$ , plus on aura une **Résolution fine**,
- Intuition :  $+\infty$  correspond à la composante “constante” de  $f$ , et  $-\infty$  aux “discontinuités”,

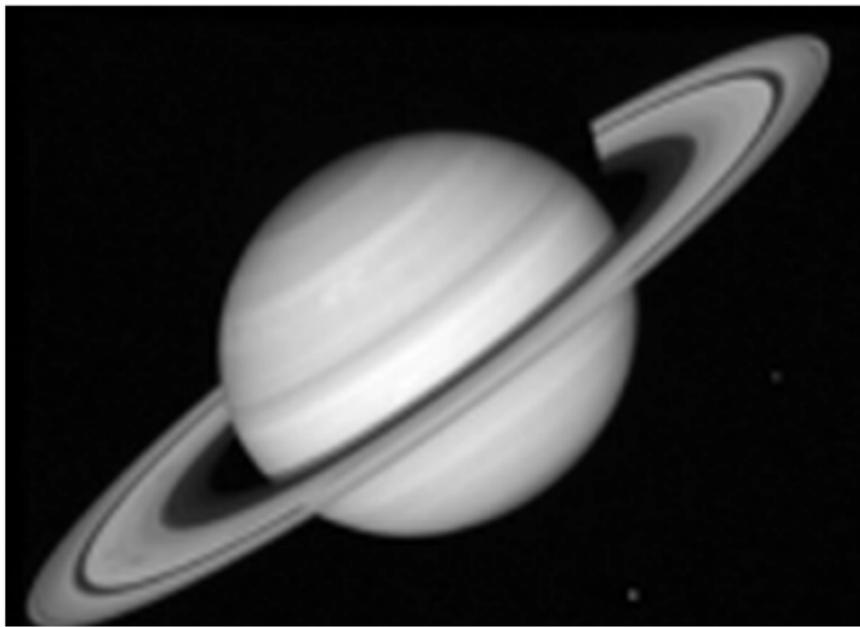
## La transformée en ondelettes XV

- Note : l'approximation de fonctions régulières par des ondelettes de Haar n'est pas du tout optimale,
- Par exemple, essayez de décomposer un disque en un nombre fini de carrés ...
- En effet, car pour la base de Haar,  $f$  est constante par morceaux !
- Il faut une ondelette qui représente au mieux les variations de  $f$  (son comportement en quelque sorte ...),

## La transformée en ondelettes XVI

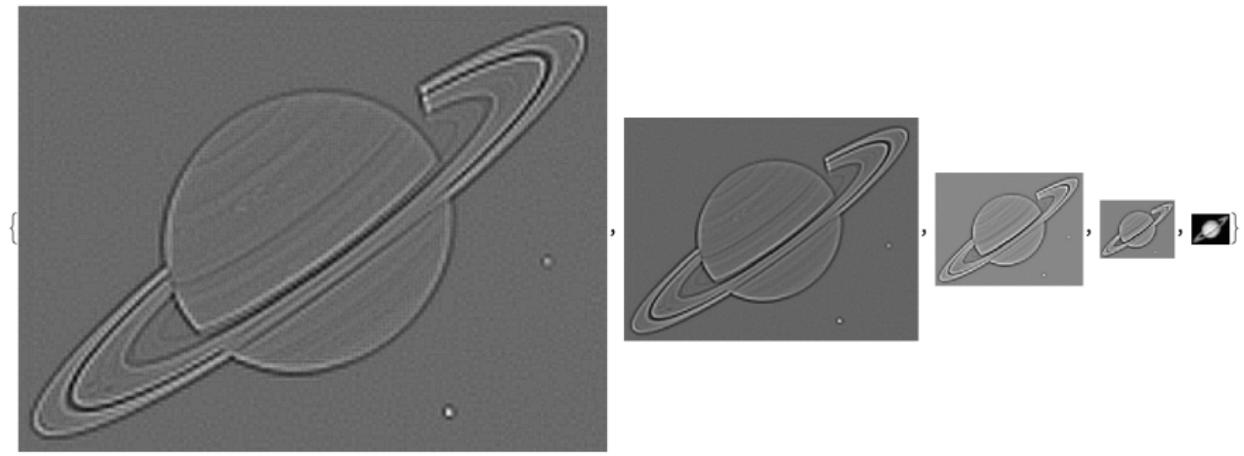
- Une meilleure modélisation/approximation de  $f$  régulière serait une fonction **affine par morceaux** (plus petites erreurs d'approximations),
- Un peu d'histoire !
  - Strömberg (1980) trouve une fonction **affine par morceaux** qui engendre une base orthonormale d'ondelettes améliorant l'approximation de fonctions régulières,
  - Ignorant ce résultat, Meyer essayait de prouver qu'il n'existe pas de fonctions régulières engendrant une base orthonormale  $\Rightarrow$  échec positif : trouve de nombreuses bases d'ondelettes orthonormales,
  - Mallat et Meyer introduisent en 1989 les **approximations multirésolutions** permettant de construire toutes les bases d'ondelettes orthonormales,

# La transformée en ondelettes XVII



**Figure:** Image initiale dont on voudrait une décomposition multirésolution

## La transformée en ondelettes XVIII



**Figure:** Exemple de pyramide Laplacienne : noter que les BF's se codent à basse résolution quand les HF's se codent à la résolution la plus fine.

- ces derniers furent inspirés par la **pyramide Laplacienne** (multirésolution) de Burt et Adelson de 1983 développée pour l'analyse d'images par ordinateur,

## La transformée en ondelettes XIX

- Croisier, Esteban et Galand travaillant sur la compression de la parole ont présenté en 1976 un **banc de filtres inversible**:
  - on décompose un signal discret  $f[n]$  en deux signaux de taille moitié, avec un double filtrage suivi d'un sous-échantillonnage,
  - ils ont montré que  $f[n]$  peut être reconstitué à partir de ces deux signaux en annulant les termes d'**aliasing** (effets d'escaliers dans les contours)
  - Ceci peut se faire à l'aide d'une classe de filtres spéciaux que l'on appelle **filtres miroirs conjugués** (propriétés mathématiques définies plus tard),
  - Cela a mené 10 ans après à la **théorie des complètes des bancs de filtres à reconstruction parfaite** (Smith, Barnwell, Vaidyanathan et Vetterli),
  - Les cascades de filtres miroirs conjugués ont alors permis de développer les **transformées en ondelettes rapides** ou FWT pour **fast wavelets transforms** (évidemment discrètes !),

# La transformée en ondelettes XX

- Continu vs. discret :
  - le continu permet une étude théorique des ondelettes :
    - translations et dilatations faciles,
    - possibilité d'étudier le lien entre l'amplitude des coefficients d'ondelettes et la régularité locale des fonctions
  - le discret quant à lui est :
    - plus compliqué (effets de bords, échantillonnage, etc.)
    - permet l'élaboration d'algorithmes rapides et efficaces,
- Important : l'étude des **convergences asymptotiques** des théories continues donnent une idée du comportement des algorithmes discrets !

# Pavages temps-fréquence

1

## Un monde transitoire

- Le paradis de Fourier
- Le mariage temps-fréquence
- La transformée de Fourier à fenêtre
- La transformée en ondelettes
- **Pavages temps-fréquence**
- Applications : cas général
- Application 1 : approximations
- Application 2 : estimation de signaux bruités
- Application 3 : compression de données

2

## Approfondissement des concepts essentiels

# Pavages temps-fréquence I

- **Complétude** d'une base: on peut représenter tout signal par une combinaison linéaire de vecteurs de cette base,
- Ceci s'observe par le pavage des boîtes d'Heisenberg de l'espace temps-fréquence,
- **Orthogonalité** d'une base : le produit scalaire de deux vecteurs différents est nul,
- Ceci s'observe par le fait que les boîtes d'Heisenberg ne se recouvrent pas dans l'espace temps-fréquence.
- Ainsi, on représente la **complétude** et l'**orthogonalité** des bases d'ondelettes par un pavage du plan temps-fréquence avec les boîtes d'Heisenberg correspondantes,

## Pavages temps-fréquence II

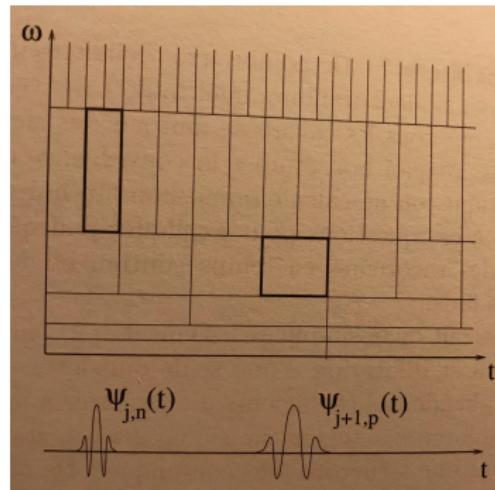
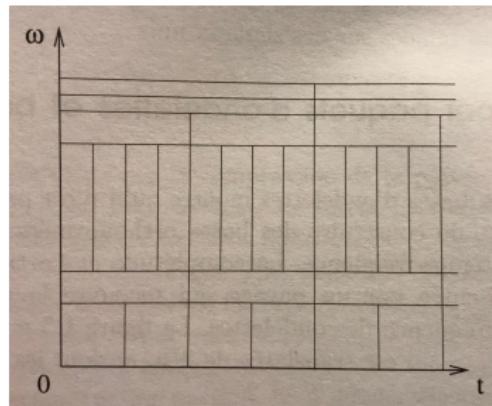


Figure: Pavage temps-fréquence d'une base d'ondelettes dyadiques (échelles en puissances de 2)

- **bases d'ondelettes orthonormées**  $\Rightarrow$  pavage dyadique (voir figure) : comme les  $\psi_{j,p}(t)$  sont de largeur temporelle  $2^j$  (à une constante multiplicative près), leur largeur fréquentielle est de la forme  $2^{-j}$  (toujours à une constante près),

# Pavages temps-fréquence III



**Figure:** Pavage temps-fréquence d'une base de paquets d'ondelettes (adaptativité des boîtes d'Heisenberg selon les besoins !)

- **base de paquets d'ondelettes orthonormées :**

- pavage de rectangles de tailles quelconques (Coifman, Meyer et Wickerhauser en 1992)
- Méthode : découpage de l'axe fréquentiel arbitraire puis translation des ondelettes dans le temps en conséquence pour paver le plan.

# Pavages temps-fréquence IV

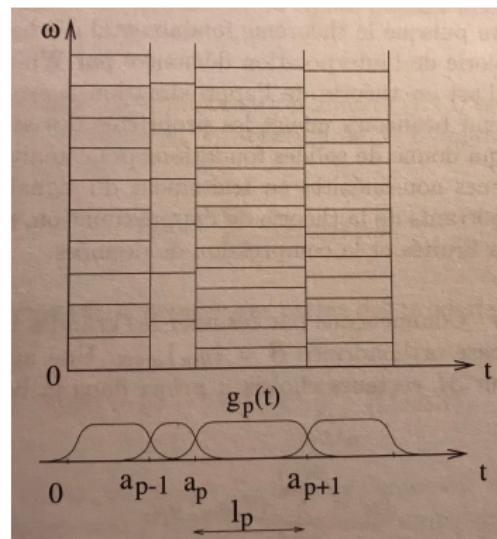


Figure: Pavage temps-fréquence d'une base de cosinus locaux (algorithme développé ci-dessous)

## Pavages temps-fréquence V

- **base de cosinus locaux** (Malvar 1988) : on peut aussi décomposer l'axe temporel de façon arbitraire puis faire des translations fréquentielles en conséquence :

- des **fenêtres régulières**  $g_p(t)$  recouvrent des intervalles successifs  $[a_p, a_{p+1}]$ ,
- puis on multiplie celles-ci par des cosinus  $\cos(\xi t + \phi)$  de fréquences différentes,
- idée issue de Wilson (1987) qui analysait les propriétés des états quantiques cohérents.

# Applications : cas général

1

## Un monde transitoire

- Le paradis de Fourier
- Le mariage temps-fréquence
- La transformée de Fourier à fenêtre
- La transformée en ondelettes
- Pavages temps-fréquence
- Applications : cas général
- Application 1 : approximations
- Application 2 : estimation de signaux bruités
- Application 3 : compression de données

2

## Approfondissement des concepts essentiels

# Applications I

- Objectif d'une base : elle doit être adaptée à l'application demandée, et donc à la nature et à la localisation des singularités des signaux analysés,
- Selon la théorie de l'approximation, il faut choisir une base qui permette une approximation précise d'un signal à partir d'une combinaison linéaire d'un nombre restreint de vecteurs de base,
- Autrement dit, il faut que la base corresponde à la structure intrinsèque du signal,
- Exemple intuitif : si l'on essaie d'approximer un disque dessiné sur une feuille de papier par des carrés, on verra que l'on en aura besoin d'un infinité, dû au fait qu'un carré n'est pas adapté pour représenter un disque,
- C'est exactement le même problème que pour représenter un signal régulier par des ondelettes de Haar!

# Applications II

- Applications directes possibles :
  - approximations,
  - estimations de signaux bruités,
  - compression de données.
- 2 approches possibles : linéaire et non-linéaire,

# Application 1 : approximations

1

## Un monde transitoire

- Le paradis de Fourier
- Le mariage temps-fréquence
- La transformée de Fourier à fenêtre
- La transformée en ondelettes
- Pavages temps-fréquence
- Applications : cas général
- **Application 1 : approximations**
- Application 2 : estimation de signaux bruités
- Application 3 : compression de données

2

## Approfondissement des concepts essentiels

# Application 1 : approximations I

- Approximations linéaires : on part d'une base orthonormée  $\mathcal{B} = \{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ . On appelle **approximation linéaire** la fonction:

$$f_M = \sum_{m=0}^{M-1} \langle f, g_m \rangle g_m,$$

où les  $M$  vecteurs  $g_m$  sont choisis a priori, c'est-à-dire indépendamment du signal  $f$

# Application 1 : approximations II

- L'erreur d'approximation est alors :

$$\varepsilon[M] = \|f - f_M\|^2 \quad (8)$$

$$= \left\| \sum_{m=M}^{+\infty} \langle f, g_m \rangle g_m \right\|^2, \quad (9)$$

$$= \left\langle \sum_{m_1=M}^{+\infty} \langle f, g_{m_1} \rangle g_{m_1}, \sum_{m_2=M}^{+\infty} \langle f, g_{m_2} \rangle g_{m_2} \right\rangle, \quad (10)$$

$$= \sum_{m_1, m_2 \geq M} \langle \langle f, g_{m_1} \rangle g_{m_1} \langle f, g_{m_2} \rangle g_{m_2} \rangle, \quad (11)$$

$$= \sum_{m_1, m_2 \geq M} \langle f, g_{m_1} \rangle \langle f, g_{m_2} \rangle \delta_{m_1, m_2}, \quad (12)$$

$$= \sum_{m=M}^{+\infty} |\langle f, g_m \rangle|^2, \quad (13)$$

autrement dit la qualité d'approximation dépend des propriétés de  $f$  par rapport à la base  $\mathcal{B}$ .

# Application 1 : approximations III

- Exemple 1 :

- la base de Fourier fournit une approximation linéaire efficace des signaux uniformément réguliers, par projection sur les M premières sinusoïdes de plus basse fréquence.
- La décroissance de l'erreur  $\varepsilon[M]$  lorsque  $M$  augmente est liée à la régularité globale de  $f$  (décroissance asymptotique).
- En effet, plus le signal est régulier, moins on a de HF's, plus le signal est codé par des coefficients de BF's et MF's ...

# Application 1 : approximations IV

- Exemple 2 : une base d'ondelettes orthonormées où l'on fixerait les  $M$  échelles les plus grandes
  - On regarde les données à très grande échelle (grande couverture temporelle), puis à moyenne échelle, puis on stoppe (on ne regarde pas les détails),
  - On parle alors d'approximation à résolution uniforme.

# Application 1 : approximations V

- Lorsque l'on peut modéliser un ensemble de signaux  $f[n]$  discrets de taille  $N$  comme les réalisations d'un vecteur aléatoire  $F[n]$ ,

- On suppose une base orthonormée  $\mathcal{B} = \{g_m\}_{0 \leq m < N}$  fixée mais inconnue pour le moment pour décomposer nos signaux,
- On suppose aussi que l'on approxime ces signaux avec les  $M$  premiers vecteurs de cette base  $\mathcal{B}$ ,
- On définit alors l'erreur statistique moyenne :

$$\mathbb{E}_F \left[ \|F - F_M\|_2^2 \right],$$

avec  $F_M$  l'approximation par les  $M$  premiers vecteurs de la base donnée,

# Application 1 : approximations VI

- Cette erreur peut alors être minimisée en utilisant la base de **Karhunen-Loève** (aussi connue sous le nom de PCA !)
- On a donc optimalité de la base de KL !
- Problème de KL : si on change la nature du signal (distribution statistique différente), alors la base élaborée n'est plus adaptée !
- Exemple : en JPEG, on se sert de cosinus car indépendants du signal et de plus souvent proche de la base de KL.

# Application 1 : approximations VII

- Approximations non-linéaires (cas général):

- On peut améliorer les approximations linéaires précédentes en choisissant *a posteriori* les  $M$  vecteurs  $g_m$  en fonction de  $f$ ,
- En quelque sorte, on s'adapte au signal,
- Soient alors  $M$  vecteurs indexés dans la sous-famille  $I_M$  calculée en conséquence, on obtient :

$$f_M = \sum_{m \in I_M} \langle f, g_m \rangle g_m,$$

- l'erreur d'approximation est alors :

$$\varepsilon[M] = \|f - f_M\|^2 = \sum_{m \notin I_M} |\langle f, g_m \rangle|^2,$$

# Application 1 : approximations VIII

- Pour minimiser cette erreur, on choisit  $I_M$  comme l'ensemble des  $M$  vecteurs de base dont les produits scalaires avec  $f$  sont de plus grande amplitude  $|\langle f, g_m \rangle|$ .
- Ce schéma d'approximation est non linéaire car le choix des vecteurs de base dépend de  $f$ .
- L'amplitude des produits scalaires sur une base d'ondelettes dépend de l'irrégularité locale du signal.
- Autrement dit, il faut garder d'autant plus de coefficients là où  $f$  présente des irrégularités

## Application 1 : approximations IX

# Quadtrees



# Application 1 : approximations X

- Dans les images 2D, les irrégularités sont les contours/textures, le **quad-tree** est alors un moyen efficace de s'adapter aux irrégularités de l'image.
- De façon sommaire, le quad-tree est un algorithme qui décompose de façon adaptative l'espace de l'image en zones carrées où l'image est la plus homogène possible,
- Il y aura donc d'autant plus de subdivisions aux endroits où le signal présente des irrégularités,
- On parlera de **grille d'approximation adaptative** : la résolution augmente dans les zones où le signal est irrégulier.
- Ceci est particulièrement utile quand les irrégularités sont locales/isolées.
- Intérêt : la base de KL ne fonctionne PAS lorsque la matrice de covariance est variable, et donc pas dans les images qui sont non stationnaires !

# Application 1 : approximations XI

- Approximations non-linéaires (plusieurs familles de vecteurs) :

- Laissons-nous un nouveau degré de liberté en ne choisissant PAS une seule base  $\mathcal{B}$  *a priori* mais plutôt en choisissant une "meilleure" base en fonction du signal  $f$ .
- Cette base sera choisie dans une famille de bases orthogonales et on prendra celle qui minimisera l'erreur d'approximation.
- En particulier, si l'on choisit dans une base de paquets d'ondelettes ou de cosinus locaux, on pourra accélérer les calculs via de la programmation dynamique (Coifman et Wickerhauser, 1992).

# Application 1 : approximations XII

- Approximations non-linéaires (dictionnaire adaptatif) :

- On pourra même imaginer se laisser choisir les vecteurs  $\{g_{\gamma m}\}_{0 \leq m < M}$  dans une base NON orthogonale  $\mathcal{D} = \{g_{\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma}$  appelée **dictionnaire**,
- On reconstruira ainsi le signal par :

$$f_M = \sum_{m=0}^{M-1} a_m g_{\gamma m},$$

- Attention on ne peut plus calculer les  $a_m$  par simple projection (on n'a plus orthogonalité !),
- De plus, la recherche de ces  $M$  meilleurs vecteurs peut vite devenir explosive en terme de complexité !
- On utilisera donc des **algorithmes de poursuites** sous-optimaux mais efficaces en terme d'approximation.
- Exemple 1 : le **matching pursuit** qui tente de minimiser le nombre de coefficient non-nuls (pseudo-norme 0) correspondant aux atomes du dictionnaire,
- Exemple 2 : le **basis pursuit** qui tente lui de minimiser la norme 1 de l'ensemble des coefficients correspondant aux atomes du dictionnaire (somme de leurs valeurs absolues),
- L'idée est de se servir des atomes décomposant le mieux le signal donné, mais aussi qui sont le plus décorrélés entre eux.

# Application 1 : approximations XIII

[VOIR NOTEBOOK POUR EXEMPLES D'APPROXIMATIONS 1D]

# Application 2 : estimation de signaux bruités

1

## Un monde transitoire

- Le paradis de Fourier
- Le mariage temps-fréquence
- La transformée de Fourier à fenêtre
- La transformée en ondelettes
- Pavages temps-fréquence
- Applications : cas général
- Application 1 : approximations
- **Application 2 : estimation de signaux bruités**
- Application 3 : compression de données

2

## Approfondissement des concepts essentiels

## Application 2 : estimations de signaux bruités I

- Qui dit **estimation** de signaux bruités demande autant que possible de bien connaître les propriétés du signal et du bruit,
- soit l'approche est **Bayésienne**, soit elle est à base de **minimax**,
- vers les années 2000, la tendance était aux approches **Bayésiennes linéaires**,
- Deux statisticiens, Donoho et Johnstone, ont montré en 1994 qu'un simple algorithme de seuillage dans une base convenable donne lieu à un **estimateur non linéaire quasi-optimal**.

## Application 2 : estimations de signaux bruités II

- Soit un signal  $f[n]$  discret donné de taille  $N$  contaminé par un bruit additif,
- On modélise ce bruit par une réalisation d'un processus stochastique  $W[n]$  dont la distribution de probabilité est connue.
- Le signal mesuré est donc:

$$X[n] = f[n] + W[n],$$

## Application 2 : estimations de signaux bruités III

- On cherche alors à estimer le signal par un opérateur de **débruitage**  $D$  à  $X$  :

$$\tilde{F} = DX,$$

- $\tilde{F}$  représente alors le **signal reconstruit**,
- On appelle alors **risque** de l'estimateur  $\tilde{F}$  de  $f$  la valeur suivante :

$$r(D, f) = \mathbb{E}_W[\|f - \tilde{F}\|^2],$$

calculée par rapport à la distribution de probabilités du bruit  $W$ .

- On voudra bien sûr minimiser le risque.
- Autrement dit, on voudra minimiser l'erreur moyenne de reconstruction pour l'ensemble des bruits possible,
- Plus le risque est petit, plus cela veut dire que  $D$  est adapté à la reconstruction du signal  $f$ .

## Application 2 : estimations de signaux bruités IV

- Les opérateurs linéaires sont plus simples mais vraiment moins efficaces,
- Les opérateurs non-linéaires conduisent facilement à un risque beaucoup plus faible,
- En fait, un simple seuillage permet d'obtenir un **estimateur non linéaire quasi-optimal** :

$$\tilde{F} = DX = \sum_{m=0}^{M-1} \rho_T(\langle X, g_m \rangle) g_m,$$

où  $\rho_T$  est la **fonction d'atténuation** (ici, de seuillage plus particulièrement) définie telle que :

$$\rho_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < T, \\ x & \text{si } |x| \geq T. \end{cases}$$

# Application 2 : estimations de signaux bruités V

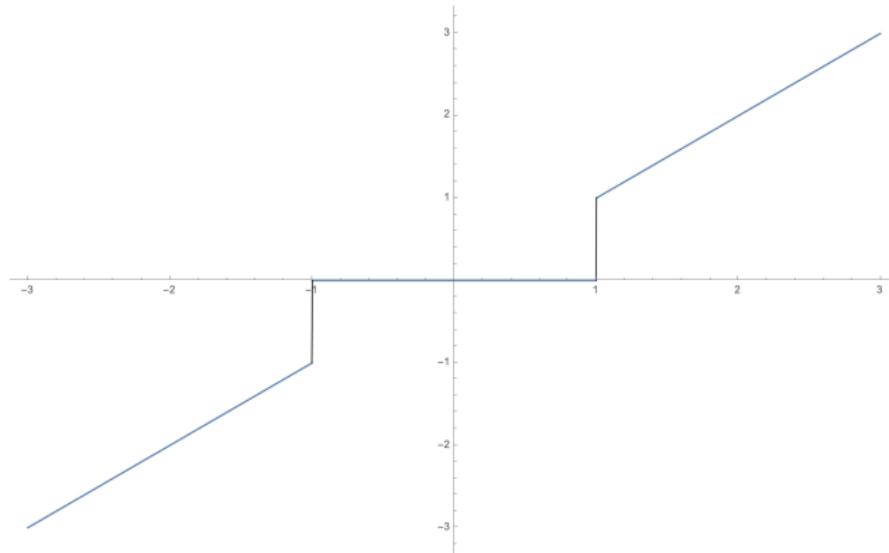


Figure: Fonction d'atténuation.

## Application 2 : estimations de signaux bruités VI

- On appellera un tel seuillage dans une base d'ondelettes correspond un **lissage adaptatif**.
- Ce lissage adaptatif moyenne le signal  $X$  avec un noyau qui dépend de la régularité du signal  $f$  sous-jacent.
- En effet, c'est l'amplitude de l'irrégularité qui est le critère de lissage et NON sa fréquence.

# Application 2 : estimations de signaux bruités VII

## ● Méthode Bayésienne :

- On considérait de base le bruit comme aléatoire,
- Maintenant on va aussi considérer le signal comme aléatoire,
- En effet, on considère  $f$  comme une réalisation d'un vecteur aléatoire  $F$
- La distribution de probabilités  $\pi$  de  $F$  est connue.
- On a donc non seulement le bruit mais aussi le signal qui sont des (réalisations de) processus aléatoires !

## Application 2 : estimations de signaux bruités VIII

- Définition du **risque Bayésien**:

$$r(D, \pi) = \mathbb{E}_{\pi}[r(D, F)],$$

- C'est le risque moyen calculé statistiquement relativement à  $\pi$ ,
- le **risque Bayésien minimum** se calcule alors en optimisant  $D$  parmi tous les opérateurs possibles:

$$r^*(\pi) = \inf_D r(D, \pi).$$

- Problème : non adapté aux contours et textures dans les images (on ne sait PAS les modéliser de façon statistique).

## Application 2 : estimations de signaux bruités IX

- Autre méthode, le **minimax**, plus adapté aux images :

- Dans les années 1940, Wald a ouvert une nouvelle perspective sur la statistique, par la **théorie de la décision**, qui provient de la **théorie des jeux**.
- Ce point de vue permet d'introduire de l'information a priori sur des signaux complexes.
- Les signaux sont modélisés comme des éléments d'un ensemble particulier  $\Theta$ .
- On ne suppose PAS connaître la distribution de probabilité de ces signaux.
- Prenons  $\Theta$  l'ensemble des **fonctions à variations bornées** par une constante,

## Application 2 : estimations de signaux bruités X

- Afin de contrôler le risque pour tout  $f \in \Theta$ , on peut calculer le **risque maximum** :

$$r(D, \Theta) = \sup_{f \in \Theta} r(D, f),$$

- Le risque maximum est une façon de parler du **pire cas** possible.
- le **risque minimax** est alors :

$$r^*(\Theta) = \inf_D r(D, \Theta).$$

- Autrement dit, on veut que le **pire cas** soit le **moins grave** possible,
- Le risque des **estimateurs de seuillage en ondelettes** est proche du risque minimax (images à variations bornées).

# Application 2 : estimations de signaux bruités XI

[VOIR NOTEBOOK POUR EXEMPLES DE DEBRUITAGE]

# Application 3 : compression de données

1

## Un monde transitoire

- Le paradis de Fourier
- Le mariage temps-fréquence
- La transformée de Fourier à fenêtre
- La transformée en ondelettes
- Pavages temps-fréquence
- Applications : cas général
- Application 1 : approximations
- Application 2 : estimation de signaux bruités
- **Application 3 : compression de données**

2

## Approfondissement des concepts essentiels

# Application 3 : compression de données I

- Motivation :

- capacités de stockage limitées vs. explosion de la quantité de données multimédia,
- délais de transmission : les canaux à bandes étroites poussent à comprimer les signaux tout en minimisant leur dégradation,

# Application 3 : compression de données II

- Principe de base de la **compression de données par transformées** :

- 1 On décompose le signal via une base orthonormée  $\mathcal{B} = \{g_m\}_{0 \leq m < M}$  :

$$f = \sum_{m=0}^{N-1} \langle f, g_m \rangle g_m,$$

- 2 Chaque coefficient  $\langle f, g_m \rangle$  est approximé par une valeur quantifiée  $Q(\langle f, g_m \rangle)$ ,

- 3 Le signal reconstitué à partie des valeurs quantifiées est :

$$\tilde{f} = \sum_{m=0}^{N-1} Q(\langle f, g_m \rangle) g_m,$$

- 4 On utilise un **codage binaire** pour transcrire les coefficients quantifiés sur  $R$  bits,

- 5 la **distortion** de ce codage est:

$$d(R, f) = \|f - \tilde{f}\|^2.$$

## Application 3 : compression de données III

- Dans le cas d'un signal "simple" comme un son :

- On le modélise comme un processus Gaussien à densité de probabilité  $\pi$ ,
- On considère les signaux comme des réalisations d'un vecteur aléatoire  $F$  avec cette densité  $\pi$ ,
- On calculera le taux de distortion  $d(R, F)$ ,
- On optimise alors la quantification et la base  $\mathcal{B}$  afin de minimiser le taux de distortion moyen:

$$d(R, \pi) = \mathbb{E}[d(R, F)]$$

- dans le cas des signaux plus complexes (images) : on aura plutôt une **approche minimax** en supposant les signaux à variation bornée.

# Application 3 : compression de données IV

[VOIR NOTEBOOK POUR EXEMPLES DE COMPRESSION D'IMAGES 2D]

# Outline

1

## Un monde transitoire

- ➊ Le paradis de Fourier
- ➋ Le mariage temps-fréquence
- ➌ La transformée de Fourier à fenêtre
- ➍ La transformée en ondelettes
- ➎ Pavages temps-fréquence
- ➏ Applications : cas général
- ➐ Application 1 : approximations
- ➑ Application 2 : estimation de signaux bruités
- ➒ Application 3 : compression de données

2

## Approfondissement des concepts essentiels

- ➊ Petits rappels techniques venant de Fourier
- ➋ Les opérateurs linéaires stationnaires sont des filtres fréquentiels
- ➌ Rappel de l'inégalité de Cauchy-Schwartz
- ➍ Incertitude d'Heisenberg - Preuve !
- ➎ La TFF et constance de ses boîtes d'Heisenberg
- ➏ L'essentiel sur la TFO 1D/2D
- ➐ Analyse multi-résolution et pyramide Laplacienne

# Petits rappels techniques venant de Fourier

## 1 Un monde transitoire

## 2 Approfondissement des concepts essentiels

- Petits rappels techniques venant de Fourier
- Les opérateurs linéaires stationnaires sont des filtres fréquentiels
- Rappel de l'inégalité de Cauchy-Schwartz
- Incertitude d'Heisenberg - Preuve !
- La TFF et constance de ses boîtes d'Heisenberg
- L'essentiel sur la TFO 1D/2D
- Analyse multi-résolution et pyramide Laplacienne

# Petits rappels et théorèmes importants I

- La TF de la fonction indicatrice  $t \rightarrow \mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$  est:

$$TF(\mathbb{1}_{[-1,1]})(\omega) = \int_{[-1,1]} \exp^{-j\omega t} dt = \left[ \frac{\exp^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{t=-1}^{t=1} = \frac{\exp^{-j\omega} - \exp^{j\omega}}{-j\omega} = \frac{2 \sin(\omega)}{\omega},$$

- Cette dernière fonction n'est pas intégrable :

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin(\omega)}{\omega} \right| d\omega = +\infty,$$

- Tandis que l'on a son carré intégrable :

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin(\omega)}{\omega} \right|^2 d\omega = \pi,$$

- Note : le fait que  $\hat{f}$  n'est pas intégrable est du au fait que la fonction fenêtre  $f$  n'est pas continue !,
- Ceci conduit à étendre la TF à l'espace  $L^2(\mathbb{R})$  par la TFF et la TFO,

## Petits rappels et théorèmes importants II

- La [formule de Parseval](#) pour  $f, h$  dans  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)h^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)\hat{h}^*(\omega)d\omega,$$

- Cela montre que sous certaines conditions, un produit scalaire dans le temps devient un produit scalaire fréquentiel (à une constante multiplicative près),
- On peut en déduire que pour  $f$  dans  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , on a l' [égalité de Plancherel](#) :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega,$$

- Cette égalité montre que l'énergie de  $f$  est la même en temps et en fréquence (toujours à une constante multiplicative près).

# Petits rappels et théorèmes importants III

Propriété	Fonction	Transformée de Fourier
	$f(t)$	$\hat{f}(\omega)$
Inverse	$\hat{f}(t)$	$2\pi f(-\omega)$
Convolution	$f_1 * f_2(t)$	$\hat{f}_1(\omega) \hat{f}_2(\omega)$
Multiplication	$f_1(t) f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} \hat{f}_1 * \hat{f}_2(\omega)$
Translation	$f(t - u)$	$e^{-iu\omega} \hat{f}(\omega)$
Modulation	$e^{i\xi t} f(t)$	$\hat{f}(\omega - \xi)$
Changement d'échelle	$f(t/s)$	$ s  \hat{f}(s\omega)$
Dérivées temporelles	$f^{(p)}(t)$	$(i\omega)^p \hat{f}(\omega)$
Dérivées fréquentielles	$(-it)^p f(t)$	$\hat{f}^{(p)}(\omega)$
Complexe conjuguée	$f^*(t)$	$\hat{f}^*(-\omega)$
Symétrie hermitienne	$f(t) \in \mathbb{R}$	$\hat{f}(-\omega) = \hat{f}^*(\omega)$

Figure: Récapitulatif des formules classiques de Fourier

# Les opérateurs linéaires stationnaires sont des filtres fréquentiels

## 1 Un monde transitoire

## 2 Approfondissement des concepts essentiels

- Petits rappels techniques venant de Fourier
- **Les opérateurs linéaires stationnaires sont des filtres fréquentiels**
- Rappel de l'inégalité de Cauchy-Schwartz
- Incertitude d'Heisenberg - Preuve !
- La TFF et constance de ses boîtes d'Heisenberg
- L'essentiel sur la TFO 1D/2D
- Analyse multi-résolution et pyramide Laplacienne

- Les **opérateurs linéaires stationnaires** sont fondamentaux en traitement du signal :
  - transmission de signaux,
  - élimination de bruits stationnaires,
  - codage prédictif,
  - ...
- **Linéarité** d'un opérateur  $L$ :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{C}, \forall f, L(A f)(t) = A(L f)(t),$$

- **Stationnarité** d'un opérateur  $L$ :

$$\forall t \in \mathbb{R}, L(f_\tau)(t) = (L f)(t - \tau),$$

où  $f_\tau(t) := f(t - \tau)$  pour un retard  $\tau$  fixé.

- Autrement dit un retard  $\tau$  sur la fonction d'entrée impose un retard  $\tau$  sur la fonction de sortie,

- un filtre linéaire (stationnaire)  $L$  est équivalent à une convolution avec une réponse impulsionnelle  $h$  (p. 20 du Mallat) :

- Supposons  $f$  continue sur  $\mathbb{R}$ ,
- Soit  $\delta_u(t) = \delta(t - u)$ ,
- Par continuité de  $f$  :

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(u) \delta_u(t) du,$$

En effet si  $f$  n'est pas continue en  $u$ , on ne peut appliquer cette égalité !

- Par linéarité de  $L$  :

$$L f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(u) L \delta_u(t) du,$$

- Soit  $h$  la réponse impulsionnelle de  $L$  :

$$h := L\delta$$

- Par stationnarité de  $L$ , un retard de  $u$  sur l'input  $\delta$  cause un retard de  $u$  sur l'output  $h$ :

$$L\delta_u(t) = h(t - u),$$

ainsi :

$$L f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(u) h(t - u) du = h * f(t).$$

- Au final, lorsque  $L$  est un filtre linéaire stationnaire, alors :

$$h := L\delta \Rightarrow \forall f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, L f = h * f,$$

- Noter qu'en réalité la continuité de  $f$  n'est pas si nécessaire que cela (certains critères de convergence suffisent),
- Autrement dit, si  $h$  est la RI de l'opérateur linéaire stationnaire  $L$ , alors l'appliquer à une fonction  $f$  équivaut à faire une convolution par cette RI.

- Quelques formules de base :

Commutativité

$$a * b(t) = b * a(t)$$

Dérivée

$$(a * b)'(t) = (a' * b)(t) + (a * b')(t)$$

Retard

$$f * \delta_\tau(t) = f(t - \tau)$$

- **Causalité** : un filtre  $L$  est dit causal si la réponse impulsionnelle (RI) de  $L$  est elle-même causale, c'est-à-dire que le résultat par la convolution par sa RI ne dépend que ce qu'il s'est passé avant:

$$L f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(u)h(t-u)du = \int_{-\infty}^t f(u)h(t-u)du,$$

c'est-à-dire  $h(t-u) = 0$  pour  $u > t$ , équivalent à  $h(t < 0) = 0$ ,

- Définition de la **stabilité** :  $L f(t)$  bornée si  $f$  bornée, c'est-à-dire :

$$|L f(t)| \leq \left| \int_{\mathbb{R}} h(u)f(t-u)du \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |h(u)f(t-u)|du \leq \|f\|_{\infty} * \int_{\mathbb{R}} |h(u)|du,$$

autrement dit, la propriété de stabilité est vérifiée dès que  $h$  est **absolument intégrable** :

$$\int_{\mathbb{R}} |h(u)|du < +\infty,$$

- On obtient alors que la sortie  $Lf_2$  varie peu par rapport à  $Lf_1$  quand l'entrée  $f_2$  varie peu par rapport à  $f_1$  :

$$f_1 \approx f_2 \Rightarrow |Lf_1(t) - Lf_2(t)| \leq \|f_1 - f_2\|_{\infty} * \int_{\mathbb{R}} |h(u)|du \rightarrow 0$$

- Les fonctions complexes  $t \rightarrow \exp^{i\omega t}$  sont des vecteurs propres des opérateurs de convolution :

$$L \exp^{i\omega t} = \int_{\mathbb{R}} h(u) \exp^{i\omega(t-u)} du = \exp^{i\omega t} \int_{\mathbb{R}} h(u) \exp^{-i\omega u} du = \hat{h}(\omega) \exp^{i\omega t},$$

- En effet, on a bien retrouvé la forme  $A v = \lambda v$ ,

- Pour appliquer une TF sur une fonction  $f$ , il suffit que  $f$  soit dans  $L^1(\mathbb{R})$ , alors on peut écrire :

$$TF(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) := \int_{\mathbb{R}} f(t) \exp^{-i\omega t} dt,$$

qui mesure la quantité de signal dans  $f$  à la fréquence  $\omega$ ,

- Si de plus  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ , alors on peut calculer la transformée de Fourier inverse pour retrouver  $f$  :  
:

$$f(t) = TF^{-1}(\hat{f})(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \exp^{i\omega t} d\omega,$$

- Théorème de convolution : si  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $h \in L^1(\mathbb{R})$ , et  $g := h * f$  alors:

$$g \in L^1(\mathbb{R}),$$

Autrement dit, le produit de convolution de deux fonctions de  $L^1(\mathbb{R})$  est dans  $L^1(\mathbb{R})$ .

De plus,

$$\hat{g}(\omega) = \hat{h}(\omega)\hat{f}(\omega),$$

Autrement dit, la TF d'une convolution est le produit des TF.

- En notant  $L$  un opérateur linéaire stationnaire avec  $h \in L^1(\mathbb{R})$  sa RI, et avec  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , alors :

$$TF(L f)(\omega) = TF(f * h)(\omega) = \hat{h}(\omega)\hat{f}(\omega),$$

et ainsi,

$$L f(t) = TF^{-1}(\hat{h}(\omega)\hat{f}(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{h}(\omega)\hat{f}(\omega) \exp^{i\omega t} d\omega,$$

- Ceci est la transformée de Fourier inverse de  $\hat{f}$  à la chose près que l'on a un terme  $\hat{h}(\omega)$  qui atténue, préserve, amplifie, déphase, etc, les composantes de  $f$  en  $\omega$ .
- On parlera alors de cette convolution comme d'un **filtrage fréquentiel**,
- Aussi,  $\hat{h}$  est la **fonction de transfert** du filtre.

# Rappel de l'inégalité de Cauchy-Schwartz

## 1 Un monde transitoire

## 2 Approfondissement des concepts essentiels

- Petits rappels techniques venant de Fourier
- Les opérateurs linéaires stationnaires sont des filtres fréquentiels
- **Rappel de l'inégalité de Cauchy-Schwartz**
- Incertitude d'Heisenberg - Preuve !
- La TFF et constance de ses boîtes d'Heisenberg
- L'essentiel sur la TFO 1D/2D
- Analyse multi-résolution et pyramide Laplacienne

- Pour toutes fonctions  $u, v$  dans un **espace pré-Hilbertien** (c'est-à-dire muni du produit scalaire) :

$$|\langle u, v \rangle|^2 \leq |\langle u, u \rangle| |\langle v, v \rangle|,$$

autrement dit :

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|_2 \|v\|_2$$

et l'on a l'égalité de Cauchy-Schwartz :

$$|\langle u, v \rangle|^2 = |\langle u, u \rangle| |\langle v, v \rangle|,$$

si et seulement si il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $u = \lambda v$ ,

• Preuve :

- Soient  $u, v$  deux vecteurs d'un même espace pré-Hilbertien,
- Lorsque  $v = 0$  (vecteur nul), les inégalités et égalités sont toutes deux vérifiées,
- Supposons donc  $v$  non nul (et donc de norme non nulle !),
- Soit  $z := u - u_v$  avec  $u_v$  la projection de  $u$  sur  $v$  normalisé par sa norme au carré :

$$u_v := \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v,$$

- Alors on remarque que :

$$\langle z, v \rangle = \left\langle u - \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \cdot v, v \right\rangle \quad (14)$$

$$= \langle u, v \rangle - \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \langle v, v \rangle, \quad (15)$$

$$= 0, \quad (16)$$

- Ainsi  $z$  et  $v$  sont orthogonaux, et donc il en est de même pour  $z$  et  $u_v$ .

- On peut alors appliquer le **théorème de Pythagore** sur  $z$  et  $u_v$  puisqu'ils sont orthogonaux:

$$\|u\|_2^2 = \|z + u_v\|_2^2, \quad (17)$$

$$\stackrel{(P)}{=} \|z\|_2^2 + \|u_v\|_2^2, \quad (18)$$

$$= \|z\|_2^2 + \left\| \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v \right\|_2^2, \quad (19)$$

$$= \|z\|_2^2 + \frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\|v\|_2^4} \|v\|_2^2, \quad (20)$$

$$= \|z\|_2^2 + \frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\|v\|_2^2} \quad (21)$$

(22)

qui peut s'écrire :

$$\|u\|_2^2 = \|z\|_2^2 + \frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\|v\|_2^2} \quad (E)$$

- Sachant ( $E$ ), et comme  $\|z\| \geq 0$ , l'inégalité :

$$\|u\|_2^2 \geq \frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\|v\|_2^2}$$

est donc toujours vraie,

- Sachant ( $E$ ), on a alors l'égalité :

$$\|u\|_2^2 = \frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\|v\|_2^2}$$

ssi  $\|z\| = 0$ , c'est-à-dire ssi  $u = u_v$ , et donc ssi :

$$u = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v,$$

ce qui implique alors que  $u = \lambda v$  pour un  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,

- Inversement, lorsque  $u = \lambda v$  pour un  $\lambda \in \mathbb{C}$ , on a évidemment :

$$\|u\|_2^2 = |\lambda|^2 |\langle v, v \rangle| = |\lambda|^2 \|v\|_2^2,$$

tandis que :

$$\frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\|v\|_2^2} = |\lambda|^2 \frac{|\langle v, v \rangle|^2}{\|v\|_2^2} = |\lambda|^2 \|v\|_2^2,$$

ce qui confirme l'égalité.

- On a donc bien équivalence entre l'égalité de Cauchy-Schwartz et  $u = \lambda v$  pour un  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,
- CQFD

# Incertitude d'Heisenberg - Preuve !

## 1 Un monde transitoire

## 2 Approfondissement des concepts essentiels

- Petits rappels techniques venant de Fourier
- Les opérateurs linéaires stationnaires sont des filtres fréquentiels
- Rappel de l'inégalité de Cauchy-Schwartz
- **Incertitude d'Heisenberg - Preuve !**
- La TFF et constance de ses boîtes d'Heisenberg
- L'essentiel sur la TFO 1D/2D
- Analyse multi-résolution et pyramide Laplacienne

# Incertitude d'Heisenberg I

- Heisenberg en dimension 1 (démontré ci-dessous) :
- Le principe évoqué ici vient de la physique quantique,
- Problématique : *Est-il possible de construire une fonction  $f$  dont l'énergie est bien localisée dans le temps, et dont la transformée de Fourier ait une énergie concentrée dans un petit domaine fréquentiel ?*

# Incertitude d'Heisenberg II

- Données du problème :

- Soit l'équation de Schrödinger caractérisant les **fonctions d'ondes  $\psi$** :

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right] \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

- Soit une fonction d'onde réelle  $f \in L^2(\mathbb{R})$  décrivant l'état d'une particule,

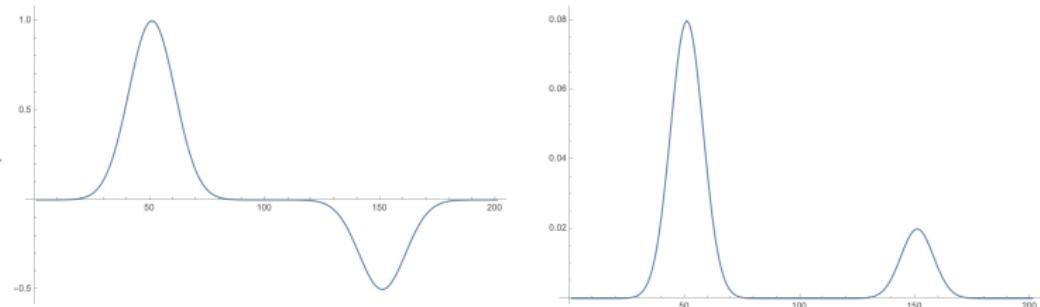


Figure: De la fonction d'onde  $f$  à la densité de probabilités  $\frac{|f(t)|^2}{\|f\|^2}$ .

# Incertitude d'Heisenberg III

- La densité de probabilité pour que cette particule se trouve dans la position temporelle  $t$  est :

$$\frac{|f(t)|^2}{\|f\|^2},$$

- Autrement dit, la probabilité (et non plus la densité de probabilité) qu'elle se trouve en  $t = t_0$  est:

$$\int_{(t_0)} \frac{|f(t)|^2}{\|f\|^2} dt = 0,$$

- À l'inverse la probabilité qu'elle se trouve en  $t \in T$  avec  $T \rightarrow ]-\infty, \infty[$  est :

$$\int_T \frac{|f(t)|^2}{\|f\|^2} dt \rightarrow 1,$$

# Incertitude d'Heisenberg IV

- La densité de probabilité pour que la quantité de mouvement soit  $\omega$  est :

$$\frac{|\hat{f}(\omega)|^2}{2\pi||f||^2},$$

- De la même façon, on obtiendra que sa probabilité d'avoir une quantité de mouvement  $\omega = \omega_0$  sera 0, et que celle que sa quantité de mouvement soit dans  $[-W, W]$  avec  $W$  très grand tendra vers 1.

# Incertitude d'Heisenberg V

- Ainsi la **position temporelle moyenne**  $u$  se définit par :

$$u := \frac{1}{\|f\|^2} \int_{\mathbb{R}} t |f(t)|^2 dt,$$

- On peut interpréter  $\frac{|f(t)|^2}{\|f\|^2}$  comme une pondération de l'instant  $t$ ,
- La **quantité de mouvement moyenne**  $\xi$  se définit par :

$$\xi := \frac{1}{2\pi\|f\|^2} \int_{\mathbb{R}} \omega |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega,$$

# Incertitude d'Heisenberg VI

- On obtient alors les **variances**  $\sigma_t^2$  et  $\sigma_\omega^2$  autour des position/fréquence moyennes :

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{\mathbb{R}} (t - u)^2 |f(t)|^2 dt,$$

et

$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi\|f\|^2} \int_{\mathbb{R}} (\omega - \xi)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega,$$

- Plus  $\sigma_t$  est grand, plus il y a d'incertitude sur la position temporelle de la particule libre.
- Plus  $\sigma_\omega$  est grand, plus il y a d'incertitude sur la quantité de mouvement.

# Incertitude d'Heisenberg VII

- Elles vérifient alors ([Théorème d'incertitude d'Heisenberg \[PARTIE 1\]](#)):

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \geq 1/4.$$

- Attention à la terminologie : on parle d'**incertitude** car ce théorème vient de la mécanique quantique (mesure de position vs. mesure de quantité de mouvement),
- Mais ce théorème, qui vaut aussi pour les concentrations en temps/fréquence en traitement du signal, n'est plus basé sur une "incertitude" mais sur de la précision !

# Incertitude d'Heisenberg VIII

## • Preuve du théorème d'Heisenberg [PARTIE 1] :

- On traitera le sous-cas où  $f$  est différentiable mais le résultat est vrai pour toute  $f \in L^2(\mathbb{R})$  !
- De plus on supposera sans contrainte  $u = 0$  et  $\xi = 0$  (ces variables n'intervenant pas dans le calcul, ce que l'on peut prouver par un simple changement de variables),

# Incertitude d'Heisenberg IX

- Aussi, notons les inégalités suivantes :

$$\left| \int_{\mathbb{R}} t \cdot f(t) \cdot f'(t) dt \right|^2 \stackrel{(CS)}{\leq} \int_{\mathbb{R}} |t|^2 \cdot |f(t)|^2 dt \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(t)|^2 dt, \quad (23)$$

$$\leq \sigma_t^2 \cdot \|f\|_2^2 \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(t)|^2 dt, \quad (24)$$

$$\leq \sigma_t^2 \cdot \|f\|_2^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{R}} |TF(f')(\omega)|^2 d\omega, \quad (25)$$

$$\leq \sigma_t^2 \cdot \|f\|_2^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{R}} |\omega|^2 \cdot |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega, \quad (26)$$

$$\leq \sigma_t^2 \cdot \|f\|_2^2 \cdot \sigma_{\omega}^2 \cdot \|f\|_2^2, \quad (27)$$

$$\leq \sigma_t^2 \cdot \sigma_{\omega}^2 \cdot \|f\|_2^4, \quad (28)$$

(29)

d'où :

$$\left| \int_{\mathbb{R}} t \cdot f(t) \cdot f'(t) dt \right|^2 \leq \sigma_t^2 \cdot \sigma_{\omega}^2 \cdot \|f\|_2^4, \quad (EQ.A)$$

# Incertitude d'Heisenberg X

- Notons maintenant que par intégration par parties on obtient :

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} t \frac{\partial f^2(t)}{\partial t} dt = \frac{1}{2} \cdot \left( [t \cdot f^2(t)]_{\mathbb{R}} - \int_{\mathbb{R}} f^2(t) dt \right) = -\frac{\|f\|_2^2}{2}$$

et en développant ce même terme à gauche, on obtient :

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} t \frac{\partial f^2(t)}{\partial t} dt = \int_{\mathbb{R}} t \cdot f'(t) \cdot f(t) dt,$$

ainsi :

$$\int_{\mathbb{R}} t \cdot f'(t) \cdot f(t) dt = -\frac{\|f\|_2^2}{2} \quad (EQ.B),$$

- Au final, on obtient donc en combinant (EQ.A) et (EQ.B) :

$$\sigma_t^2 \cdot \sigma_{\omega}^2 \geq \frac{1}{4}.$$

- CQFD

# Incertitude d'Heisenberg XI

- Théorème d'incertitude d'Heisenberg [PARTIE 2] : l'inégalité vue en partie 1 devient une égalité lorsque il existe  $(u, \xi, a, b) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^2$  tels que :

$$f(t) = a \exp^{j\xi t - b(t-u)^2}.$$

- Preuve du théorème d'Heisenberg [PARTIE 2] :

- Pour que l'inégalité du théorème d'Heisenberg soit une égalité, il faut avoir :

$$\left| \int_{\mathbb{R}} t \cdot f(t) \cdot f'(t) dt \right|^2 = \int_{\mathbb{R}} |t|^2 \cdot |f(t)|^2 dt \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(t)|^2 dt$$

ou de façon équivalente :

$$|\langle t \cdot f(t), f'(t) \rangle|^2 = \|t \cdot f(t)\|_2 \cdot \|f'(t)\|_2.$$

# Incertitude d'Heisenberg XII

- Ceci se vérifie (cf. l'égalité de Cauchy-Schwartz) pour une  $b \in \mathbb{C}$  tel que :

$$f'(t) = -2 b t f(t).$$

- Il existe alors un  $a \in \mathbb{C}$  tel que :

$$f(t) = a \exp^{-bt^2},$$

- En retardant  $f$  de  $u$  et en modulant  $f$  par une fréquence  $\xi$  (changement de variable inverse), on obtient ainsi la formule demandée,
- CQFD

# Incertitude d'Heisenberg XIII

- Théorème 2.6 (Mallat) : Si  $f$  est différente de la fonction nulle, alors :
  - Lorsque  $f$  est à support temporel compact,  $\hat{f}(\omega)$  ne peut être nulle sur un intervalle fréquentiel non dégénéré,
  - Inversement lorsque  $\hat{f}$  est à support fréquentiel compact,  $f$  ne peut être nulle sur un intervalle temporel non dégénéré.
- Conséquence : il n'existe pas de fonction non nulle à support compact à la fois en temps et en fréquence,

# La TFF et constance de ses boites d'Heisenberg

## 1 Un monde transitoire

## 2 Approfondissement des concepts essentiels

- Petits rappels techniques venant de Fourier
- Les opérateurs linéaires stationnaires sont des filtres fréquentiels
- Rappel de l'inégalité de Cauchy-Schwartz
- Incertitude d'Heisenberg - Preuve !
- **La TFF et constance de ses boites d'Heisenberg**
- L'essentiel sur la TFO 1D/2D
- Analyse multi-résolution et pyramide Laplacienne

# La TFF et l'espace temps-fréquence I

- 1946 : Gabor introduit les atomes de Fourier à fenêtre pour mesurer les **variations fréquentielles** des sons (comme un **chirp**),
- Pour cela on crée une fenêtre  $g$  vérifiant  $g(-t) = g(t)$  (c'est-à-dire paire) et telle  $\|g\| = 1$ , puis on calcule (cf. exemple cité avant) :

$$g_{u,\xi}(t) = \exp(i\xi t)g(t-u),$$

- On obtient alors la **short-time Fourier transform** ou **TF à fenêtre (TFF)** :

$$S f(u, \xi) := \langle f, g_{u,\xi} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t-u) \exp(-i\xi t),$$

- On définit donc la densité d'énergie appelée **spectrogramme** :

$$P_S f(u, \xi) := |S f(u, \xi)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t-u) \exp(-i\xi t) dt \right|^2,$$

- Le spectrogramme mesure alors l'énergie de  $f$  contenue dans le voisinage temps-fréquence décrit par la boîte d'Heisenberg définie par  $g_{u,\xi}$ ,

# La TFF et l'espace temps-fréquence II

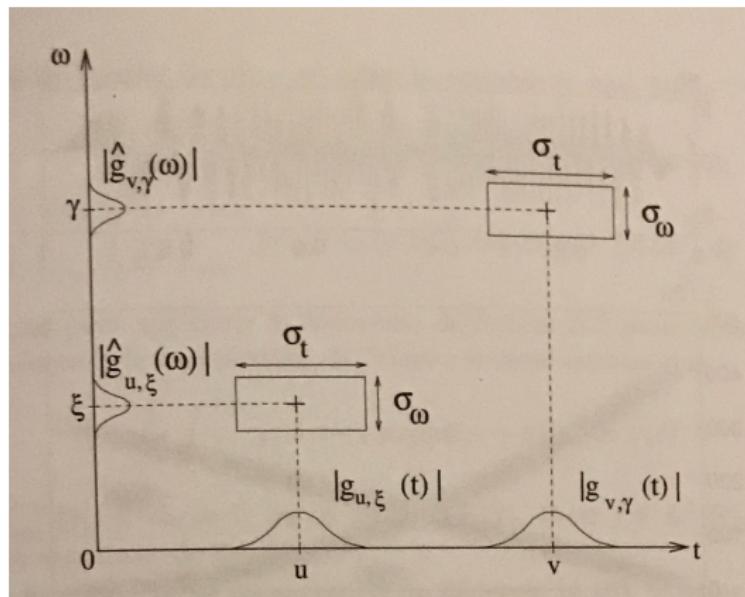


Figure: Fenêtres d'Heisenberg invariantes dans l'espace temps-fréquence pour la TFF

- Montrons que la boîte d'Heisenberg de la TFF est constante dans le plan temps-fréquence.

# La TFF et l'espace temps-fréquence III

- Comme  $g$  est paire,  $g_{u,\xi}(t) = g(t-u) \exp(i\xi t)$  est centrée en  $u$ , et son étalement est indépendant de  $u$  et  $\xi$  :

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t-u)^2 |g_{u,\xi}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |g(t)|^2 dt,$$

- De plus,  $\hat{g}$  est réelle et symétrique car  $g$  est réelle et symétrique, donc on obtient :

$$\hat{g}_{u,\xi}(\omega) = \hat{g}(\omega - \xi) \exp[-iu(\omega - \xi)],$$

- Elle est donc centrée en  $\xi$  et son étalement autour de  $\xi$  est :

$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \xi)^2 |\hat{g}_{u,\xi}|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega,$$

- $\sigma_\omega$  est indépendant de  $u$  et  $\xi$ .
- On a donc bien que la résolution de la TFF est la même quelque soit la localisation dans le plan temps-fréquence,
- Exemple : une sinusoïde  $\exp(i\xi_0 t)$ , qui a une TF

$$\hat{g}(\omega) = 2\pi\delta(\xi - \xi_0),$$

# La TFF et l'espace temps-fréquence IV

- Elle aura une TFF :

$$S f(u\xi) = \hat{g}(\xi - \xi_0) \exp[-iu(\xi - \xi_0)],$$

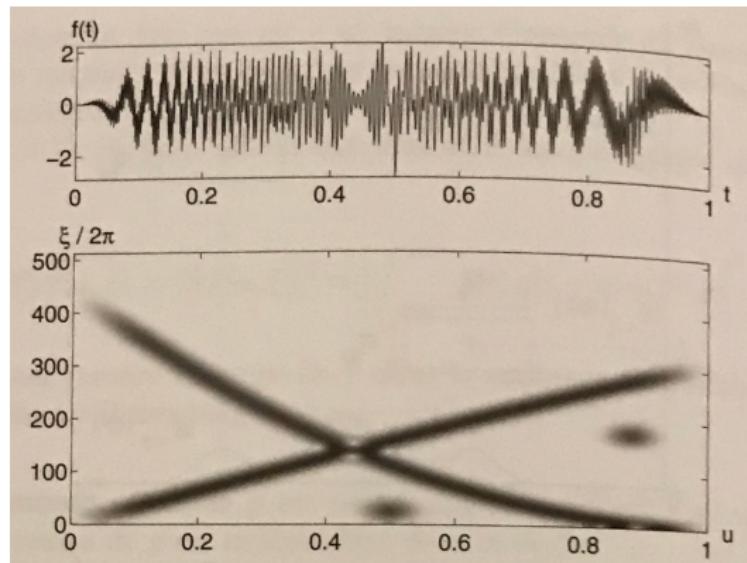
- Et son énergie sera donc répartie sur l'intervalle fréquentiel :

$$[\xi_0 - \sigma_\omega/2, \xi_0 + \sigma_\omega/2],$$

- Par dualité, on peut déduire que  $\delta(t - u_0)$  aura une énergie localisée dans l'intervalle temporel

$$[u_0 - \sigma_t/2, u_0 + \sigma_t/2],$$

# La TFF et l'espace temps-fréquence V



**Figure:** Spectrogramme d'un signal contenant un chirp linéaire croissant dans le temps, un chirp quadratique décroissant dans le temps, plus deux Gaussiennes.

# La TFF et l'espace temps-fréquence VI

- Un **chirp linéaire**  $f(t) = \exp(iat^2)$  a une fréquence instantanée qui croît avec le temps, pour une fenêtre Gaussienne

$$g(t) = (\pi\sigma^2)^{-1/4} \exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma^2}\right),$$

le spectrogramme de la TFF est alors :

$$P_S f(u, \xi) = \left( \frac{4\pi\sigma^2}{1 + 4a^2\sigma^4} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\sigma^2(\xi - 2au)^2}{1 + 4a^2\sigma^4}\right),$$

ce qui veut dire qu'à un instant donné  $u$ ,  $P_S f(u, \xi)$  est une Gaussienne qui atteint son max à la fréquence  $\xi(u) = 2au$ , qui dépend bien du temps.

- **Complétude de la TFF** : si  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , alors on peut reconstruire  $f$  à partir de sa TFF:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S f(u, \xi) g(t-u) \exp(i\xi t) d\xi du,$$

- bien noter la double intégrale pour sommer sur les translations et sur les fréquences !

# La TFF et l'espace temps-fréquence VII

- **Stabilité** : on a aussi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{S} f(u, \xi)|^2 d\xi du,$$

autrement dit, si l'énergie de  $f$  est finie, il en est de même pour sa TFF, et inversement.

- Reformulation de la TFF:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f, g_{u,\xi} \rangle g_{u,\xi}(t) d\xi du,$$

ce qui ressemble à une décomposition sur une base orthogonale, mais n'en est pas une, car la famille  $\{f, g_{u,\xi}\}_{u,\xi}$  est fortement redondante.

- Choix de la fenêtre de la TFF : la résolution en temps et en fréquence de la TFF dépend de l'étalement de la fenêtre en temps et en fréquence, cela se mesure par la surface de la boîte d'Heisenberg,

## La TFF et l'espace temps-fréquence VIII

- Echelle de la fenêtre : la localisation en temps-fréquence de  $g$  peut se modifier par **changement d'échelle**, c'est-à-dire que, si l'on part d'une fenêtre  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de largeurs  $\sigma_t$  en temps et de  $\sigma_\omega$  en fréquence, on peut aisément définir :

$$g_s(t) := \frac{1}{\sqrt{s}} g(t/s),$$

qui correspond à la fenêtre  $g$  dilatée d'un facteur  $s$  en temps, et donc contractée d'un facteur  $s$  en fréquence, elle aura une surface rectangulaire de côtés de longueurs  $\sigma_t * s$  en temps et de  $\sigma_\omega / s$  en fréquence.

- On appelle  $s$  le **paramètre d'échelle**,
- bien noter que l'aire de la boîte d'Heisenberg n'est pas modifiée !
- dans les applications numériques, il est nécessaire de choisir  $g$  à support compact (autrement dit le support fréquentiel sera infini),

# L'essentiel sur la TFO 1D/2D

## 1 Un monde transitoire

## 2 Approfondissement des concepts essentiels

- Petits rappels techniques venant de Fourier
- Les opérateurs linéaires stationnaires sont des filtres fréquentiels
- Rappel de l'inégalité de Cauchy-Schwartz
- Incertitude d'Heisenberg - Preuve !
- La TFF et constance de ses boîtes d'Heisenberg
- **L'essentiel sur la TFO 1D/2D**
- Analyse multi-résolution et pyramide Laplacienne

# La TFO en quelques slides I

- Soit une fonction  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  d'énergie finie qui vérifie la propriété suivante :

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0,$$

- Alors on paramétrise cette fonction :

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right),$$

avec  $u \in \mathbb{R}$  la **translation** et  $s > 0$  le **paramètre d'échelle**.

- On vient donc de définir une **famille d'ondelettes**  $\mathcal{F} := \{\psi_{u,s}(t)\}_{u,s}$ .
- On dit alors que la famille  $\mathcal{F}$  de vecteurs **libre** lorsque aucune ondelette  $\psi_{u_0,s_0}$  n'est combinaison linéaire d'autres ondelettes de cette même famille  $\mathcal{F}$ .
- On dit aussi que  $\mathcal{F}$  est **génératrice** de l'espace  $L^2(\mathbb{R})$  si tout signal  $f \in L^2(\mathbb{R})$  peut se représenter comme combinaison linéaire d'éléments de  $\mathcal{F}$ .
- Alors, si  $\mathcal{F}$  est une famille libre et génératrice d'ondelettes, on parlera de **base d'ondelettes**.

## La TFO en quelques slides II

- Cette base  $\mathcal{F}$  est **orthogonale** si pour deux vecteurs  $\psi_{u_0, s_0}$  et  $\psi_{u_1, s_1}$  avec  $(u_0, s_0) \neq (u_1, s_1)$ , alors :

$$\langle \psi_{u_0, s_0}, \psi_{u_1, s_1} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \psi_{u_0, s_0}(t) \psi_{u_1, s_1}^*(t) dt = 0,$$

- $\mathcal{F}$  sera de plus **orthonormale** si la norme 2 de chaque vecteur est bien égale à 1 :

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi_{u,s}(t)|^2 dt = 1,$$

- Supposons que  $\mathcal{F}$  soit bien une base orthonormale d'ondelettes.
- Alors soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , on peut représenter  $f$  sous la forme d'une combinaison linéaire d'éléments de  $\mathcal{F}$ :

$$f(t) = \sum_{u,s} c_{u,s} \psi_{u,s}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

## La TFO en quelques slides III

- Montrons que l'on peut aisément calculer ces coefficients:

$$\langle f, \psi_{u_0, v_0} \rangle = \left\langle \sum_{u,s} c_{u,s} \psi_{u,s}, \psi_{u_0, v_0} \right\rangle, \quad (30)$$

$$= \sum_{u,s} c_{u,s} \langle \psi_{u,s}, \psi_{u_0, v_0} \rangle, \quad (31)$$

$$= \sum_{u,s} c_{u,s} \delta_{u-u_0, v-v_0}, \quad (32)$$

$$= c_{u_0, v_0}, \quad (33)$$

(34)

- On peut donc déduire chaque coefficient d'ondelette par un produit scalaire avec le signal de départ,
- Autrement dit :

$$f(t) = \sum_{u,s} \langle f, \psi_{u,s} \rangle \psi_{u,s}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

## La TFO en quelques slides IV

- Maintenant, on rappelle que comme  $\psi$  est une ondelette, alors :

$$\hat{\psi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0,$$

et ainsi  $\psi$  est un **passe-bande**.

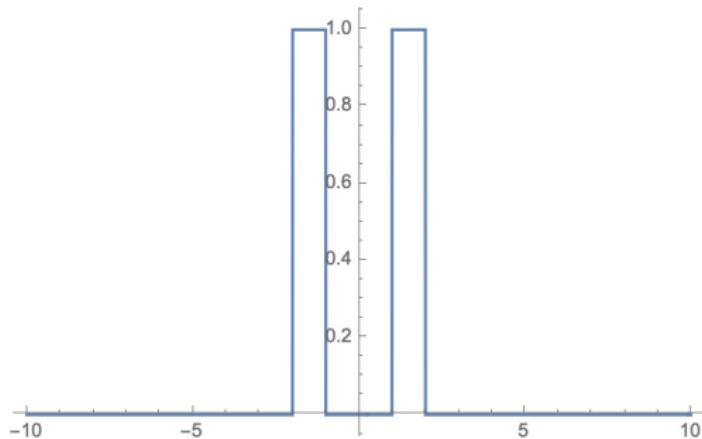


Figure: Passe-bande (idéal)  $|\hat{\psi}(\omega)|$

# La TFO en quelques slides V

- On rappelle que :

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right),$$

et ainsi par transformée de Fourier, on obtient que :

$$\hat{\psi}_{u,s}(\omega) = \sqrt{s} \exp^{i\omega u} \hat{\psi}_{u,v}(s\omega),$$

- Cela signifie que pour dilater d'un facteur  $s$  le spectre  $\hat{\psi}_{u,v}$ , il suffit de réduire d'un facteur  $s$  en temps l'ondelette  $\psi_{u,v}$ ,
- On peut ainsi pavier tout l'espace des fréquences:

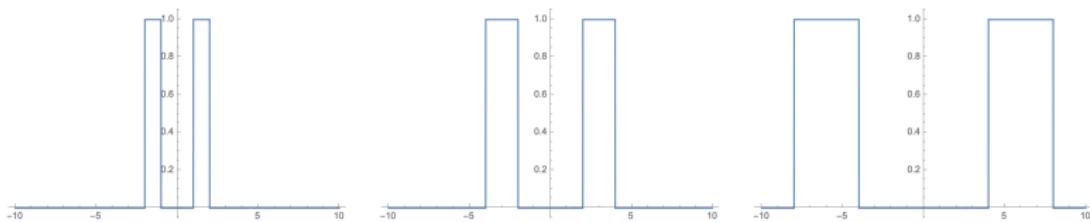


Figure: Passe-bande  $|\hat{\psi}(\omega)|$  et ses dilatations successives en fréquences

# La TFO en quelques slides VI

- Mais on remarque que pour couvrir tout le spectre, il faudrait un nombre infini d'échelles  $s$  (problème de couverture en  $\omega = 0$ ),
- On se propose alors de définir une **fonction d'échelles**  $\phi(t)$  qui jouerait le rôle de passe-bas.
- Au final, en 1D, on pourra donc décomposer un signal de la façon suivante:

$$f(t) \approx f * \phi(t) + \sum_{k=0}^K \sum_u \langle f, \psi_{u,s_k} \rangle \psi_{u,s_k}(t)$$

- Il ne restera alors plus qu'à paramétriser aussi  $\phi$ :

$$\phi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \phi\left(\frac{t-u}{s}\right),$$

- Au final, on obtiendra donc :

$$f(t) \approx \sum_u \langle f, \phi_{u,s_K} \rangle \phi_{u,s_K}(t) + \sum_{k=0}^K \sum_u \langle f, \psi_{u,s_k} \rangle \psi_{u,s_k}(t),$$

# La TFO en quelques slides VII

- Souvent, en discret, on utilisera le cas dyadique :

$$s_k = \text{cte} * 2^k,$$

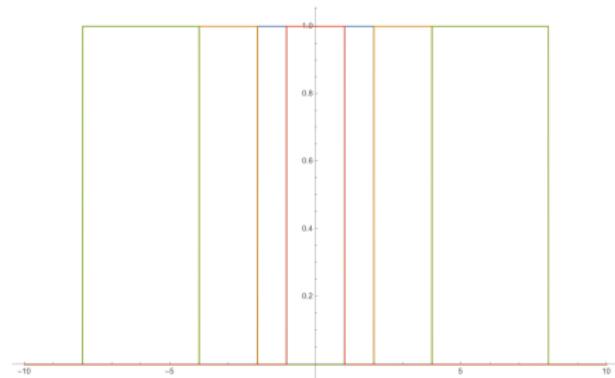


Figure: Recouvrement de la totalité du spectre

## La TFO en quelques slides VIII

- On peut aisément étendre ce principe à la 2D, on aura donc les BF codées par les  $\phi_{u,s_k}$ , et les MFs et les HF codées par les  $\psi_{u,s_k}$  :

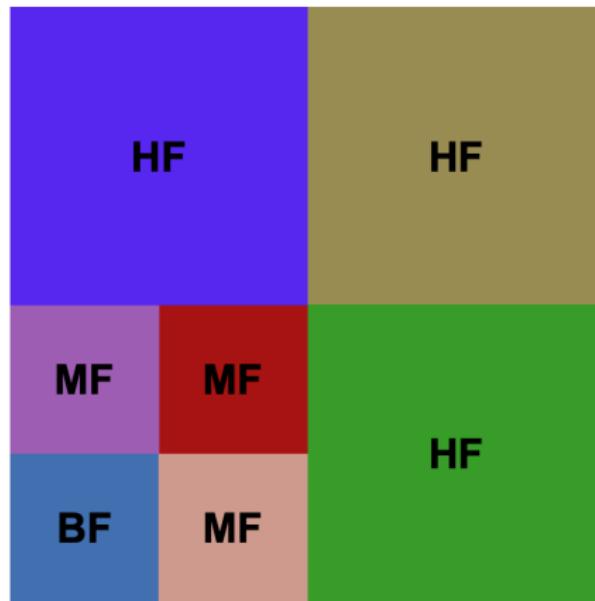


Figure: Couverture de l'espace de fréquences en 2D

## La TFO en quelques slides IX

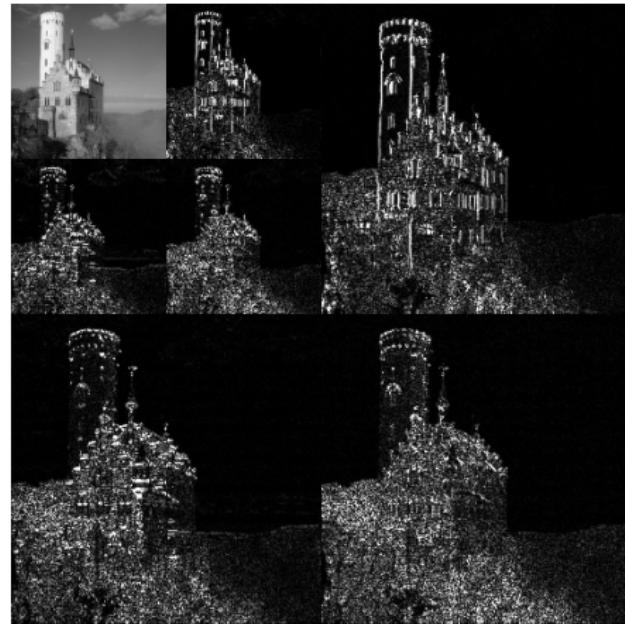


Figure: Une transformée en ondelettes en 2D (JPEG2000)

# Analyse multi-résolution et pyramide Laplacienne

## 1 Un monde transitoire

## 2 Approfondissement des concepts essentiels

- Petits rappels techniques venant de Fourier
- Les opérateurs linéaires stationnaires sont des filtres fréquentiels
- Rappel de l'inégalité de Cauchy-Schwartz
- Incertitude d'Heisenberg - Preuve !
- La TFF et constance de ses boîtes d'Heisenberg
- L'essentiel sur la TFO 1D/2D
- Analyse multi-résolution et pyramide Laplacienne

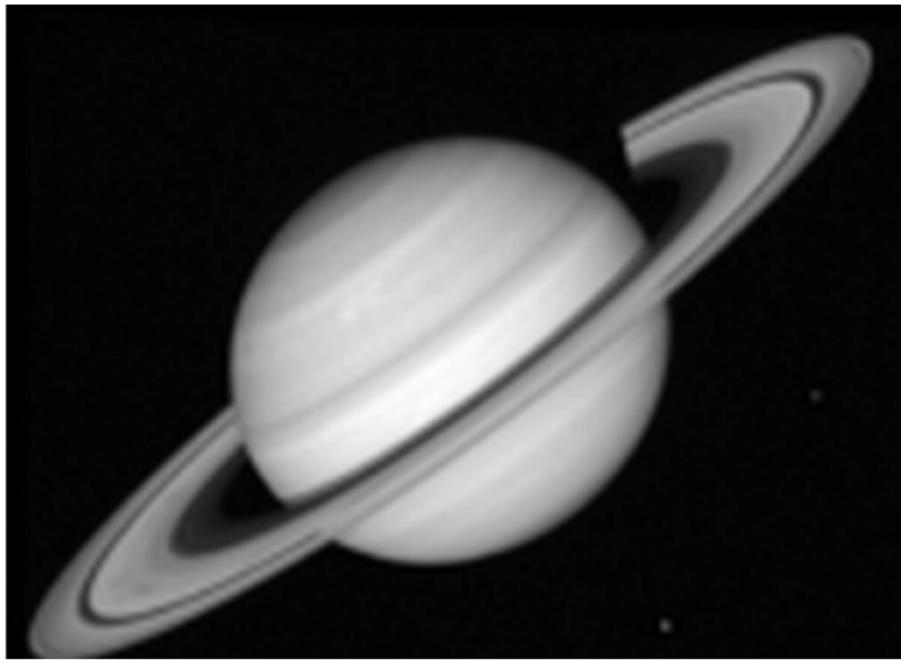


Figure: Image initiale

- Prenons l'exemple de la **pyramide Laplacienne** : on décompose une image en une somme d'une image de basse-fréquences et d'images de moyennes/hautes-fréquences, c'est un exemple de **décomposition multi-résolution**,
- on définira alors une échelle  $k$ , ( $k = 0$  représente l'image initiale), et une **Résolution** ou **facteur d'échelle**  $r[k] := 2^k$ , alors on obtient les basses-fréquences en filtrant par :

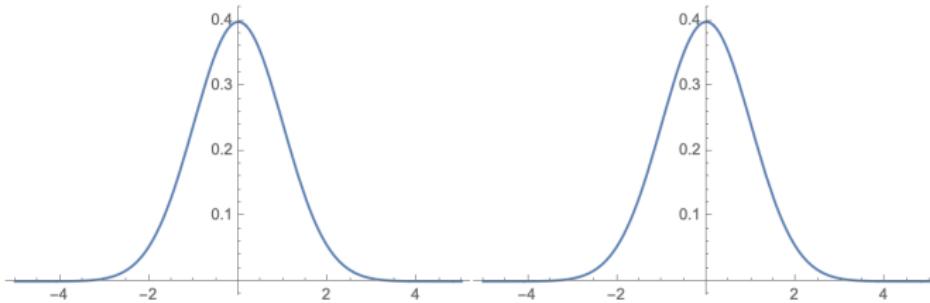


Figure:  $g_\sigma(t)$  et sa TF

$$G_\sigma(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right),$$

dont la TF est :

$$\hat{G}_\sigma(\omega_x, \omega_y) = \exp\left(-\frac{\sigma^2(\omega_x^2 + \omega_y^2)}{2}\right),$$

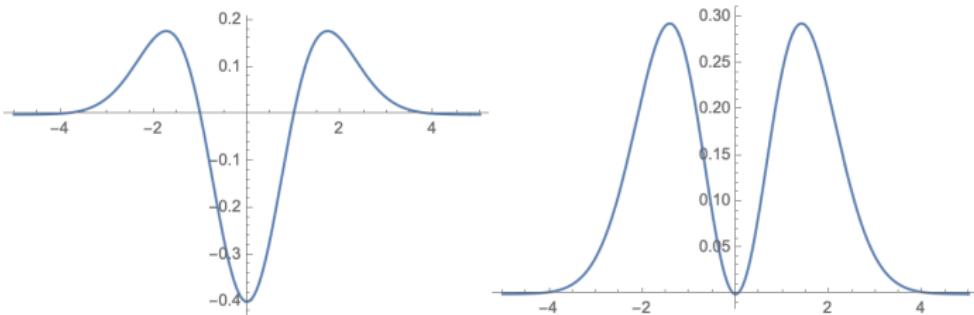


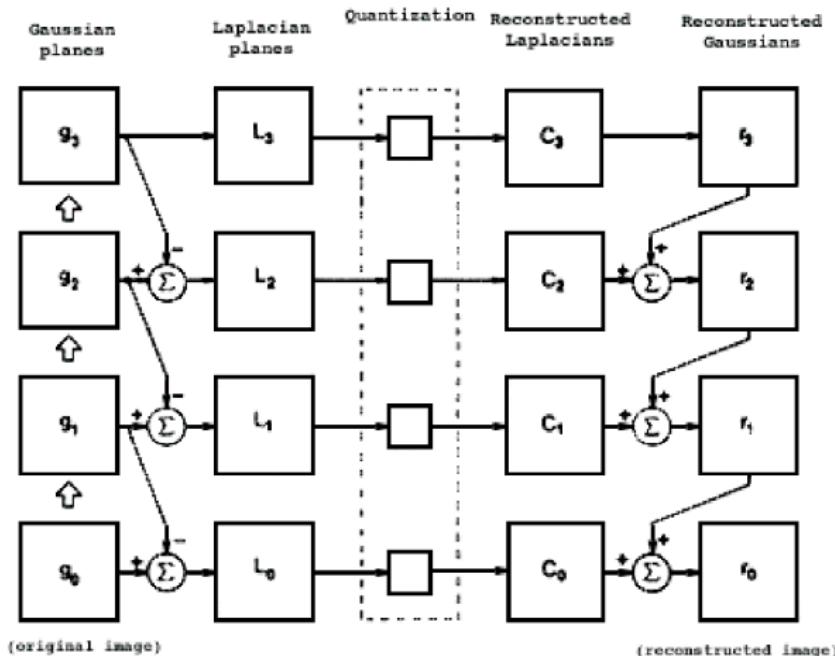
Figure: Un Laplacien de Gaussienne et sa TF

- on capturera les moyennes/hautes fréquences par le Laplacien de la Gaussienne :

$$\mathcal{LOG}_\sigma(x, y) = \frac{(x^2 + y^2 - 2\sigma^2)}{2\pi\sigma^6} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right),$$

dont la TF est :

$$TF(\mathcal{LOG}_\sigma)(\omega_x, \omega_y) = -\frac{(\omega_x^2 + \omega_y^2)}{2\pi} \exp\left(-\frac{\sigma^2(\omega_x^2 + \omega_y^2)}{2}\right),$$



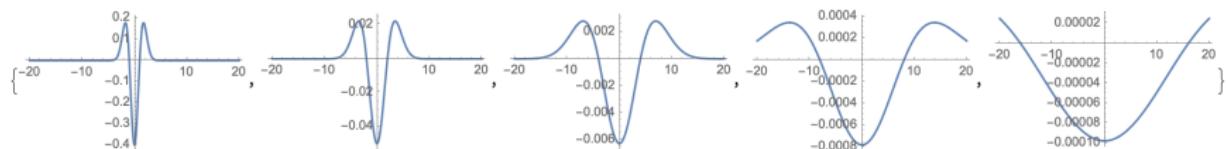


Figure: Les différents LoG (en temporel)

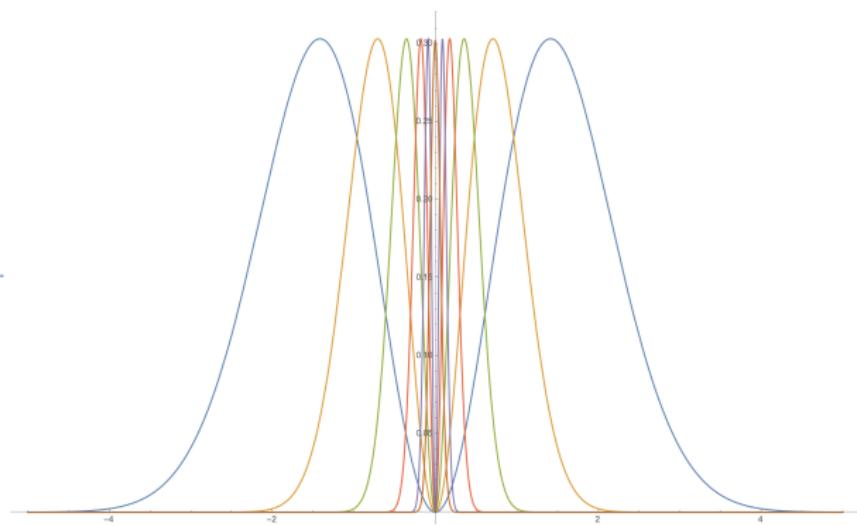


Figure: Les différents LoG (en fréquentiel) plus la fonction de transfert de la Gaussienne se complètent pour décomposer proprement le signal en bandes de fréquences.

- on choisira généralement des puissances dyadiques,
- en somme le principe de la pyramide Laplacienne est simple :
  - on décompose un signal donné en bandes de fréquences,
  - on traite le signal si besoin (compression/décompression, filtrage, etc.),
  - on somme les bandes récupérées,
  - on a récupéré notre signal !

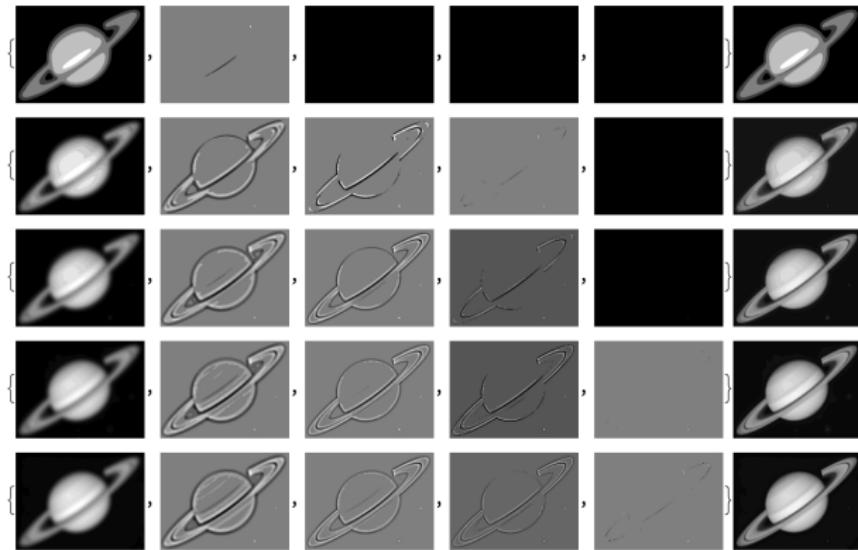


Figure: Différentes pyramides Laplaciennes (pour des pas de quantification croissants de haut en bas)



Figure: Pyramide Gaussienne

- la **pyramide Gaussienne** suit le même principe que la pyramide Laplacienne mais on filtre juste par des Gaussiennes de facteurs d'échelles en  $2^k$ , elle peut alors servir pour le calcul de la pyramide Laplacienne (voir plus bas),

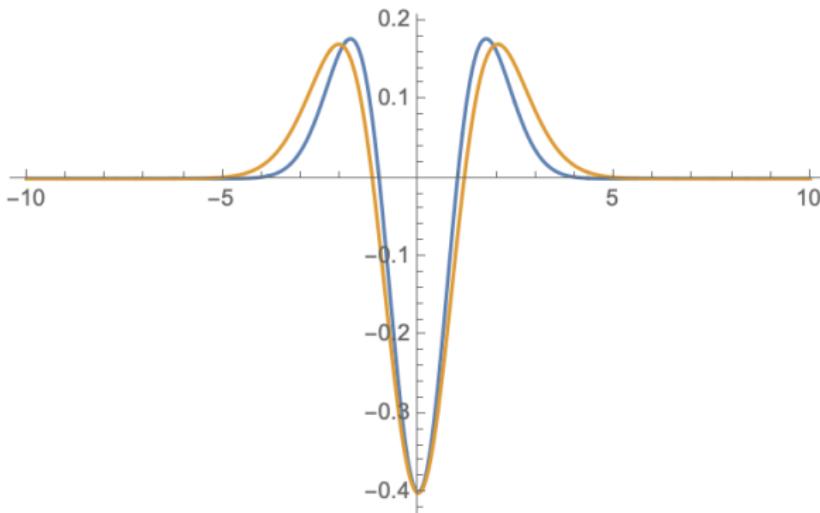


Figure: Approximation d'un LoG par une DoG (1D)

- Astuce de la pyramide Laplacienne, on peut approximer un Laplacien de Gaussienne par une différence de deux Gaussiennes, autrement dit, on peut calculer chaque bande de fréquence en partant de la pyramide Gaussienne (revoir le schéma bloc plus haut),
- Exemple d'application à la compression d'images : on module le processus décrit précédemment de la façon suivante :

- on décompose un signal donné en bandes de fréquences par différences des images de la pyramide Gaussienne,
- on sous-échantillonne les bandes de fréquences (compression sur l'espace de l'image),
- on quantifie les bandes de fréquences (compression à nouveau mais sur les valeurs),
- on sauvegarde/transmet notre signal,
- on récupère le signal sauvegardé/transmis,
- on sur-échantillonne les bandes de fréquences (si on a sous-échantillonné),
- on somme les bandes récupérées !

# Références

-  Gasquet, C. and Witomski, P. (2013).  
*Fourier analysis and applications: filtering, numerical computation, wavelets*, volume 30.  
Springer Science & Business Media.
-  Mallat, S. (1999).  
*A wavelet tour of signal processing*.  
Elsevier.
-  Mallat, S. (2009).  
*A wavelet tour of signal processing, The Sparse Way*.  
Elsevier.