Applications linéaires

Table des matières

Contextualisation **2**

1 Définition de la linéarité **2**
1.1 Résumé . . . 2
1.2 MiMos à travailler . . . 2
1.3 Exercices . . . 2
Exercice 1.1 . . . 2
Exercice 1.2 . . . 3
Exercice 1.3 . . . 3

2 Noyau et image d'une application linéaire **4**
2.1 Résumé . . . 4
2.2 MiMos à travailler . . . 4
2.3 Exercices . . . 4
Exercice 2.4 . . . 4
Commentaires 2.4 . . . 4
Exercice 2.5 . . . 4
Commentaires 2.5 . . . 5
Exercice 2.6 . . . 5
Exercice 2.7 . . . 5

3 Théorème du rang **5**
3.1 Résumé . . . 5
3.2 MiMos à travailler . . . 5
3.3 Exercices . . . 5
Exercice 3.8 . . . 5
Exercice 3.9 . . . 5
Exercice 3.10 . . . 6
Exercice 3.11 . . . 6
Exercice 3.12 . . . 6

4 Projecteurs et symétries **6**
4.1 Résumé . . . 6
4.2 MiMos à travailler . . . 7
4.3 Exercices . . . 7
Exercice 4.13 . . . 7
Exercice 4.14 . . . 7
Exercice 4.15 . . . 7
Exercice 4.16 . . . 7

Contextualisation

Les applications linéaires sont sous-jacentes aux suites récurrentes ou aux équations différentielles ***linéaires*** qu'on a évoquées au cours du TD précédent. Quand on étudie la suite récurrente donnée par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \geq 1 \quad u_{n+1} = 2u_n$$

on demande en réalité que u_{n+1} soit égale à l'image de u_n par l'application linéaire $f : x \mapsto 2x$. On pourrait mettre en évidence la même situation avec l'équation différentielle

$$f = 2f'.$$

Ces applications, et leurs généralisations à la dimension supérieure, justifient à elles seules le fait de s'intéresser aux applications linéaires de plus prêt. Une autre raison vient également apporter son soutien à cet intérêt : les mathématiques moderne mettent l'emphase non sur les objets mais sur les opérations sur ceux-ci ; autrement dit sur les applications entre ces objets. Il est plus important de savoir qu'on peut transformer notre position GPS en une autre (se déplacer) que de connaître une fois pour toute notre position GPS à la naissance. De manière plus marquante pour vous un *objet* au sens de la ***POO*** n'est qu'une donnée si elle ne contient de méthodes. Dans la suite de cette feuille on étudie les *méthodes* de l'algèbre linéaire.

1 Définition de la linéarité

1.1 Résumé

Dans cette première partie on vise à vous faire assimiler la notion d'application linéaire. Une application est un procédé qui permet d'associer à un élément d'un ensemble de départ un élément dans un ensemble d'arrivée. La linéarité spécifie la ***manière*** avec laquelle on associe à un élément de l'ensemble de départ un élément de l'ensemble d'arrivée. Cette association f ne peut être linéaire que si les espaces de départ et d'arrivée, E et F, sont des $\mathbb{R}$-ev et si pour tout x, $y \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad \text{et} \qquad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

On dit dans ce cas que f est compatible aux structures d'espaces vectoriels de E et F ; elle respecte les opérations sur E et F.

1.2 MiMos à travailler

Mimo : Définition d'une application linéaire
Mimo : Exemples d'applications linéaires

1.3 Exercices

Exercice 1.1

On se place dans un premier temps dans le cas d'une fonction numérique d'une variable réelle. Ce sont les applications que vous avez le plus manipulé jusqu'ici.

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, que signifie f est linéaire ? Quelle est sa représentation graphique dans le plan ?
2. Soient u et v deux réels, quelle est l'image de $u + v$ par f ? Soit α un réel, que dire de l'image de αu ?
3. Soit g une fonction affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Répondez à nouveau aux questions précédentes.
4. Soit h la fonction carré de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Répondez à nouveau aux mêmes questions.

Exercice 1.2

Les applications suivantes sont-elles linéaires :

1. $$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & (2x_1 - x_3, 3x_1 + x_2 + x_3) \end{cases}$$

2. $$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & (2x_1 - x_3, 3x_1 + 2 + x_3) \end{cases}$$

3. $$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_2 \\ 2x_1 - x_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

4. $$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

5. $$f : \begin{cases} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p \end{pmatrix} \end{cases}$$ où les a_{ij} sont des réels.

6. $$f : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a-b & b-c \\ d & d \end{pmatrix} \end{cases}$$

   où $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$ est le $\mathbb{R}$-ev étudié au cours du TD précédent.

7. $$f : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ u & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{cases}.$$

8. $$f : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ u & \longmapsto & (u_0, \sqrt{u_1}) \end{cases}.$$

9. $$f : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & 2(X+1)P - X^2 \end{cases}.$$

10. $$f : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & 2(X+1)P - (X^2 - 2X + 1)P' \end{cases}.$$

11. $$\phi : \begin{cases} \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \end{cases}$$ où $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1.3

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-ev.

1. Montrer que $\mathscr{L}(E,F)$, l'ensemble des homomorphismes de E dans F, est un $\mathbb{R}$-ev.
2. Soient G un sev de E, H un sev de F et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
   Montrer que $f(G)$ est un sev de F et que $f^{-1}(H)$ est un sev de E.

2 Noyau et image d'une application linéaire

2.1 Résumé

L'étude des applications linéaires passent par l'étude de deux sous-espaces vectoriels structurellement associé à toute application linéaire : le ***noyau*** et l'***image*** d'une application linéaire. On peut y penser respectivement comme le lieu qui ne laisse (presque) aucune trace dans l'espace d'arrivée et le lieu qui représente toute la trace de celle-ci. Le noyau est donc une partie de l'ensemble de départ et l'image une de l'espace d'arrivée.

2.2 MiMos à travailler

Mimo : Image et noyau d'une application linéaire

2.3 Exercices

Exercice 2.4

1. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,0) \end{cases}$
   (a) Montrer que f est linéaire
   (b) Déterminer le noyau de f et le représenter dans le plan.
   (c) Déterminer l'image de f et la représenter dans le plan.
   (d) De quel type de sous ensembles de $\mathbb{R}^2$ s'agit-il ?
2. Soient E et F deux $\mathbb{R}$-ev, et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
   (a) Montrer que $\operatorname{Ker} f$ est un sev de E.
   (b) Montrer que $\operatorname{Im} f$ est un sev de F.

Commentaires 2.4 Au début de ce chapitre, il est important de faire comprendre les notions de noyau et d'image par des exemples simples et par des dessins, soit des dessins dans le plan, soit des patatoïdes.

On pourra aussi utiliser des exemples non linéaires sur des ensembles finis pour se ré-approprier les notions d'image et d'image réciproque. Exemple : Soient $E = F = \{0, 1, \cdots, 10\}$ et $f : \begin{cases} E & \longrightarrow & F \\ n & \longmapsto & \dfrac{n+(-1)^n n}{2} \end{cases}$

Représenter l'application f sous forme de flèches reliant chaque éléments de E à son image par f dans F. Puis identifier graphiquement $K = f^{-1}(0)$ et $I = f(E)$. Dans quels ensembles sont inclus K et I ?

Exercice 2.5

Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires suivantes. Les exprimer sous forme d'espace vectoriel engendré lorsque c'est possible.

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y, 2x-y+z) \end{cases}$$

$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x, x+z, z) \end{cases}$$

$$f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x, 2x+y, 3y) \end{cases}$$

$$f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{cases}$$

$$f_5 : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & (P(0), P(1)) \end{cases}$$

Commentaires 2.5 L'idée de cet exercice est de s'exercer a identifier le noyau et l'image d'une application linéaire, mais aussi de commencer à comprendre ce qui lie les dimensions des différents espaces en jeu pour préparer l'introduction du théorème du rang.

Exercice 2.6

Soient E, F deux $\mathbb{R}$-ev et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. Montrer que f injective ssi $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
   (a) Montrer que si f est injective : $\forall u \in E,\ f(u) = 0_F \Longrightarrow u = 0_E$
   (b) Montrer que si $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ alors : $\forall (u, v) \in E^2,\ f(u) = f(v) \Longrightarrow u = v$
2. Montrer que f surjective ssi $\operatorname{Im} f = F$.

Exercice 2.7

Indiquer pour chacune des applications de l'exercice 2.6 si elle est injective et/ou surjective.

3 Théorème du rang

3.1 Résumé

Le noyau et l'image d'une application linéaire sont liées : vous devriez avoir pu, à ce stade, constater qu'une application linéaire qui a un *gros* noyau a une *petite* image, inversement une application linéaire qui a une *grosse* image a un petit *petit* noyau. Cette intuition est tout à fait vraie dans le cas des applications linéaires entre espaces vectoriels de dimensions finies. Elle se traduit par le ***théorème du rang*** qui explicite le lien entre la dimension du noyau et de l'image d'une application linéaire en dimension finie (et ***uniquement en dimension finie***). Ce théorème permet dans la pratique de se faciliter des calculs fréquents lors de la résolution de systèmes linéaires.

Cette section va nous permettre de se familiariser avec le théorème du rang et d'en constater la véracité.

3.2 MiMos à travailler

Pas de Mimos sur ce sujet.

3.3 Exercices

Exercice 3.8

Reprendre les applications linéaires de l'exercice 2.6, identifier les dimensions des noyaux et des images de chaque application et vérifier le théorème du rang sur ces exemples.

Exercice 3.9

Soient $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto (6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y) \end{cases}$$

1. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et donner sa dimension en exhibant une de ses bases.

2. En déduire la dimension de $\operatorname{Im} f$.
3. Soit $u = e_1 + e_2$ et $v = e_2 - e_3$. Calculer $f(u)$ et $f(v)$.
4. En déduire que (u, v) est une base de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 3.10

1. Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E.
   A l'aide du théorème du rang, montrer que :
   (a) si f est injective alors f est surjective,
   (b) si f est surjective alors f est injective,
   (c) f bijective $\iff \operatorname{Ker} f = \{0_E\} \iff \operatorname{Im} f = F$.
2. On se donne désormais un $\mathbb{R}$-ev F de dimension finie. Que dire d'une application linéaires $f \in \mathcal{L}(E, F)$ suivant les dimensions de E et de F ?

Exercice 3.11

Soient $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$, $n + 1$ réels distincts et
f l'application linéaire définie par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(x_0), P(x_1), \cdots, P(x_n)) \end{cases}$$

1. Montrer que f est injective puis qu'elle est bijective.
2. En déduire qu'en $n + 1$ points du plan d'abscisses distinctes passe un et un seul polynôme de degré n.

Exercice 3.12

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f et g deux endomorphismes de E tels que :
$$E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$$
   Montrer que les deux sommes précédentes sont directes.
2. Soient $E = \mathbb{R}[X]$,
$$f : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{cases}$$
   et
$$g : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P(0) \end{cases}$$
   (a) Montrer f et g que sont deux endomorphismes de E.
   (b) Déterminer les noyaux et les images de f et g.
   (c) f et g sont-elles injectives ? surjectives ?
   (d) Montrer que $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$
   (e) Ces sommes sont-elles directes ?

4 Projecteurs et symétries

4.1 Résumé

Parmi l'ensemble des applications linéaires certaines sont apparaissent plus fréquemment que d'autres. Les projecteurs font partie de cette catégorie. Ils permettent par exemple de projeter une partie de $\mathbb{R}^3$ sur un plan ; comme on pourrait vouloir faire pour représenter la terre sur une carte. C'est également des projecteurs qui apparaissent lorsque l'on souhaite réduire la dimension d'une image. On étudie quelques exemples d'apparition de cette famille d'application ainsi que de celle, soeur, des symétries.

4.2 MiMos à travailler

Pas de Mimos sur ce sujet

4.3 Exercices

Exercice 4.13

Soient $(p_1, p_2) \in \left(\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)\right)^2$ définies par

$$p_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto (x,0) \end{cases}$$

et

$$p_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto (x-y,0) \end{cases}$$

Pour chacune de ces applications linéaires :

1. Vérifier que $p \circ p = p$
2. Déterminer $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$. Les dessiner sur le plan. Constater que $\operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p = \mathbb{R}^2$.
3. Expliquer pourquoi ce type d'application linéaire s'appelle un projecteur.
4. On note $f = \mathrm{id} - p$. Étudier l'image d'un vecteur du plan par f, qu'est-ce que cette application ?

Exercice 4.14

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ défini par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1,x_2) & \longmapsto (4x_1 - 6x_2, 2x_1 - 3x_2) \end{cases}$$

1. Montrer que f est un projecteur, c'est à dire que $f \circ f = f$.
2. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sous forme de Vect, les dessiner sur le plan.
3. Justifier que $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$.
4. Montrer que $\forall v \in \operatorname{Im} f, \quad f(v) = v$.
5. Soit $u \in \mathbb{R}^2$ et $(v,w) \in \operatorname{Im} f \times \operatorname{Ker} f$ tels que $u = v + w$. Que vaut $f(u)$?

Exercice 4.15

Décrire les projections suivantes :

$$p_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1,x_2,x_3) & \longmapsto \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3, x_1+x_2+x_3, x_1+x_2+x_3) \end{cases}$$

$$p_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1,x_2,x_3) & \longmapsto (\frac{1}{2}(x_1-x_2), \frac{1}{2}(x_2-x_1), x_3) \end{cases}$$

Exercice 4.16

Soient E un $\mathbb{R}$-ev, p un projecteur (c'est-à-dire $p \in \mathscr{L}(E)$ et $p^2 = p$ où $p^2 = p \circ p$) et $s = 2p - id$ où id est l'endomorphisme identité de E.

1. Montrer que $id - p$ est un projecteur.
2. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Im}(p)$.
3. Montrer que $\operatorname{Im}(id - p) = \operatorname{Ker}(p)$.

4. Montrer que $s^2 = id$.
5. Soit $(y, z) \in \mathrm{Im}(p) \times \mathrm{Ker}(p)$. Montrer que $s(y + z) = y - z$.
6. Soit $\Theta : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ f & \longmapsto & g \end{cases}$ où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$

   Montrer que Θ est un projecteur puis déterminer $\mathrm{Ker}(\Theta)$ et $\mathrm{Im}(\Theta)$.