Bashar’s Github (https://github.com/bashardudin/Epita-SCIA-OCVX)

bashar.dudin@epita.fr (mailto:bashar.dudin@epita.fr)
guillaume.tochon@lrde.epita.fr (mailto:guillaume.tochon@lrde.epita.fr)

À voir :

- Descente de gradient (https://www.youtube.com/watch?v=IHZwWFHWa-w)

- Suite du cours ici (https://hackmd.io/thliiIX3Rm-SjdEiUc-nUw#)

Analyse convexe et programmation mathématique

Introduction

En rentrant dans l’ère industrielle, il a fallu optimiser les coûts, minimiser les risques, etc.
Des mathematiciens ont commencé à se poser des questions.
ex: gestion d’un stock, optimiser la construction de produits en usine.

- Algebre linéaire
- Calcul différentiel
- Géometrie

> Examples:
>
> 1. Chercher le plus cours chemnin entre deux coordonnées GPS.
> 2. Décider des meilleurs routes aériennes qui minimisent le prix d’approvisionnement en kérosène.
> 3. Identifier des images d’IRM qui correspondent à des malformations du cerveau.
> 4. Chercher des patterns dans la population d’étudiants intégrants EPITA.

Problèmes d’optimisation

Définition formelle

Minimiser $f_0(x)$
sujet à :

- $f_i(x) \leq 0, \forall i \in \{1, \ldots, p\}$
- $h_j(x) \leq 0, \forall j \in \{1, \ldots, m\}$

où f_0, les f_i et les h_i sont des applications de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$. La fonction f_0 est dite **fonction objectif**; suivant le contexte ce sera une fonction de **coût** ou d'**erreur**.

Un problème d'optimisation du type de (P) :

- **différentiable** si toutes les fonctions en jeu le sont.
- **non-contraint** s'il n'a aucune contrainte d'inégalités ou d'égalités.
- **convexe** si l'ensemble des fonctions en jeu sont convexes, les contraintes d'égalités étant de plus affines.

Lexique

Étant donnée un problème d'optimisation (P) on appelle :

- **point admissible** de (P) tout point de $\mathbb{R}^n$ satisfaisant toutes les contraintes. L'ensemble de tous les points admissibles est appelé **lieu admissible** de (P).
- **valeur objectif** d'un point admissible la valeur que prend la fonction objectif en celui-ci.
- **valeur optimale** de (P) la meilleure borne inférieure sur la fonction objectif.
- **point optimale** de (P) tout point admissible dont la valeur objectif est la valeur optimale.

Premières remarques qualitatives

- Y a-t-il au moins une solution ?
- S'il y a au moins une solution, combien ?
- Peut-on toujours décrire l'ensemble des solutions?
- Y a-t-il moyen d'approcher des solutions?

ML

Map fitting

Problème d'optimisation dit de *map fitting*

Définition :
Une famille différentiable d'applications $f_\alpha : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ indexés par $\alpha \in \mathbb{R}^k$ est une famille de fonctions pour laquelle l'application $\varphi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ qui envoie (α, x) sur $f_\alpha(x)$ est différentiable.

Map Fitting :
On considère un ensemble de couples $(X_i, y_i) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ pour $i \in \{1, \ldots, p\}$ et une famille différentiable d'applications $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}^k}$. Le problème de *map fitting* relatif aux données précédentes consiste à trouver les meilleurs paramètres α^* tels que f_{α^*} approche au mieux les (X_i, y_i).

Régression linéaire

Le plus simple des problèmes de *map fitting* est celui de la régression linéaire.

- La famille différentiable à laquelle on s'intéresse est indexés par $\mathbb{R}^2$: $f_\alpha(x) = \alpha_1 x + \alpha_0$ pour $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1)$
- La métrique standard utilisée est le **MSE** (Mean Square Error) donnée pour un f_α par

$$\mathcal{E}(\alpha) = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{p} (f_\alpha(X_j) - y_i)^2$$

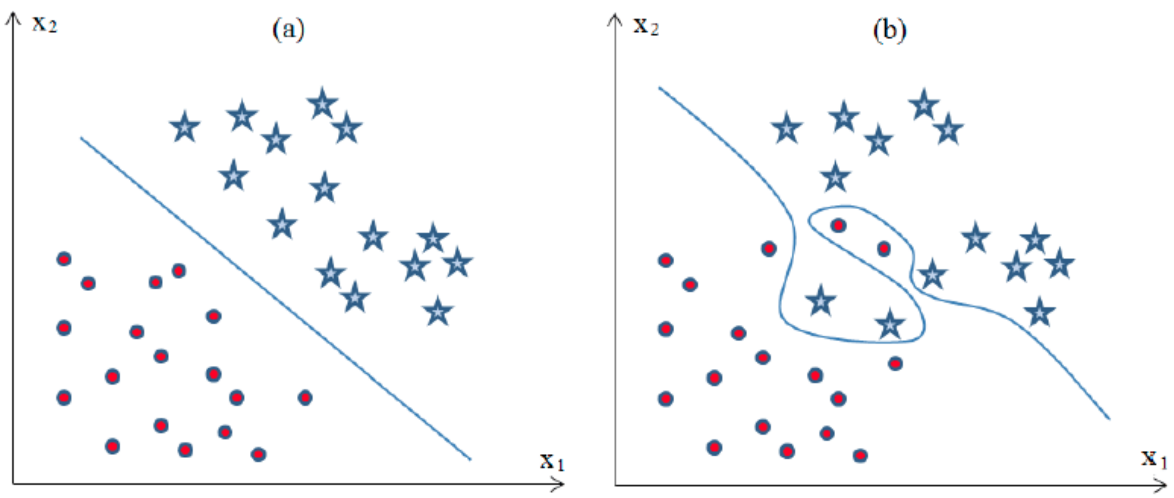
Le but est de trouver un paramètre $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1)$ tel que $\mathscr{E}(\alpha)$ est minimal, autrement dit de réoudre le problème d'optimisation sans contraintes

Contour du cours

- La première partie est noté par un TD et un partiel
- La seconde partie est noté par une analyse à faire (projet?)

Classification

Comment séparer la classe1 de la classe2 ?



On fait un trait…

Produit scalaire

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \langle : \rangle : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

On veut :

- x_1, x_2 en fonction de $||x||$ et φ
- y_1, y_2 en fonction de $||y||$ et ψ
- $x_1 = ||x|| \cos\varphi \qquad x_2 = ||x|| \sin\varphi$
- $y_1 = ||y|| \cos\psi \qquad y_2 = ||y|| \sin\psi$
- $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 = ||x||.\,||y||.\,\underbrace{(\cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi)}_{\cos(\psi - \varphi) = \cos\theta} = ||x||.\,||y||.\cos\theta$

En dimension n :

$$\theta(x, y) = arccos\left(\frac{\langle x, y \rangle}{||x||.\,||y||}\right)$$

Formules usuelles trigonometriques :

$$\begin{aligned}
\sin(s+t) &= \sin(s)\cos(t) + \cos(s)\sin(t) \\
\sin(s-t) &= \sin(s)\cos(t) - \cos(s)\sin(t) \\
\cos(s+t) &= \cos(s)\cos(t) - \sin(s)\sin(t) \\
\cos(s-t) &= \cos(s)\cos(t) + \sin(s)\sin(t) \\
\cos(s)\cos(t) &= \frac{\cos(s-t) + \cos(s+t)}{2} \\
\sin(s)\sin(t) &= \frac{\cos(s-t) - \cos(s+t)}{2} \\
\sin(s)\cos(t) &= \frac{\sin(s+t) + \sin(s-t)}{2} \\
\cos(s)\sin(t) &= \frac{\sin(s+t) - \sin(s-t)}{2}
\end{aligned}$$

On peut représenter une droite avec :

- 2 points
- 1 point et un vecteur directeur ou normal.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in D \Leftrightarrow \langle \vec{O}x, \vec{n} \rangle = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x^\top n = 0}_{\langle x,n \rangle}$$

$\rightarrow$ Equation d'un hyperplan de vecteur normal $\vec{n}$

Soit une droite $ax_1 + bx_2 + c = 0$:

- Son **vecteur normal** : $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
- Son **vecteur directeur** : $\vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

Exercice :

Dessiner le lieu de $\mathbb{R}^2$ donné par la relation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

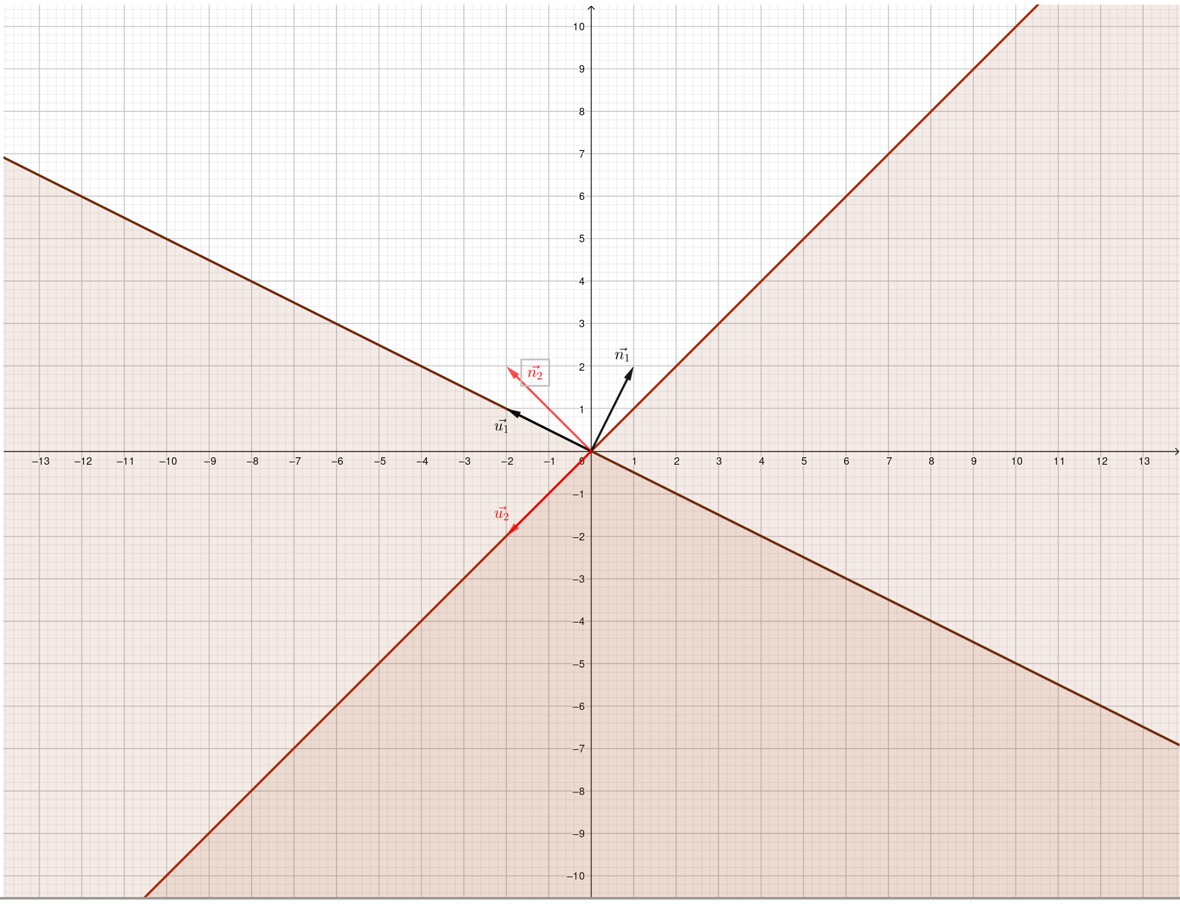
$x_1 + 2x_2 \leq 0$
$-x_1 + x_2 \leq 0$

On remplace l'inégalité par une égalité :

$$x_1 + 2x_2 = 0 \qquad \vec{n_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{u_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$-x_1 + x_2 = 0 \qquad \vec{n_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{u_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

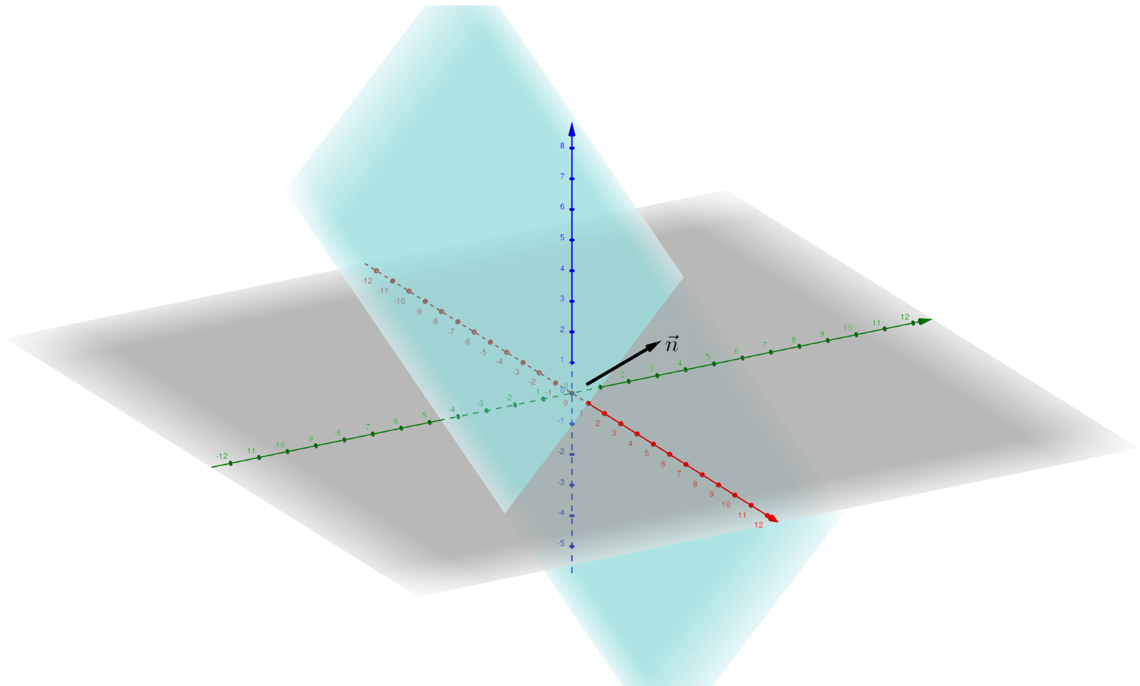
On a les vecteurs normaux on peut donc représenter graphiquement le lieu.



Exercice :

Trouver le lieu de $\mathbb{R}^3$ tq $\underbrace{x_1+x_2+x_3}_{(111)\begin{pmatrix}x1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}} \geq 0$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$
$$\langle n, x\rangle \geq 0$$



Espace affine

$$A = (1,t) \in \mathbb{R}^2 | t \in \mathbb{R} = (1,0) + \underbrace{\{(0,t) \in \mathbb{R}^2 | t \in \mathbb{R}\}}_{F}$$

On note qu'on pouvait utiliser un autre point $(1,42)$ au lieu de $(1,0)$ donne le même résultat.

$$P = \{(t, 3t+u, -u) \setminus (t,u) \in \mathbb{R}^2\}$$

- $O \in P$
- $A = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} \in P$

- $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in P$

  $\vec{n} = \vec{OA} \times \vec{OB}$

Produit vectoriel : Wikipédia (https://fr.wikiversity.org/wiki/Produit_vectoriel/Avanc%C3%A9)

Exercice :

Ecrire **paramétriquement** la droite D de $\mathbb{R}^2$ de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et passant par $(2, 3)$

Soit $M \in D \Leftrightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ tq

$$\begin{gathered} \vec{AM} = \alpha\vec{u} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2 = \alpha \\ x_2 - 3 = -\alpha \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha + 2 \\ x_2 = 3 - \alpha \end{cases} \end{gathered}$$

Donc $(D) = \{(\alpha + 2, 3 - \alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$

Exercice :

Dessiner le lien de $\mathbb{R}^2$ decrit par les contraintes :

$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$ax + by = 0$

$ax + by + c = 0$

$\overrightarrow{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \overrightarrow{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -x + 2y \leq -1 \text{ et } x + y \leq 1\}$

$(D_1) = -x + 2y + 1 = 0$

$(0, \frac{-1}{2} \in D_1)$

$\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{Ax = r}_{\text{écriture implicite}} \qquad \text{avec} \begin{cases} \text{A matrice } m \times n \\ A = [a_{i,j}]_{mn} \\ x \in \mathbb{R}^n \; r \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}xn = r_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = r_m \end{cases}$$

Hyperplan: Un plan de dimension $n - 1$.
Exemples: En 2D, c'est une droite. En 3D, c'est un plan…

Notre description affine ne suffit pas dans le cas général.

Description d'un cercle :
$x^2 + y^2 = r^2$
$x^2 + y^2 - r^2 = 0$
$\boxed{f(x, y) = x^2 + y^2 - r^2}$

Ligne / Courbe de niveau d'une fonction f :

$$\mathscr{C}_r = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = r\}$$

Lieu de sous niveau d'une fonction f :

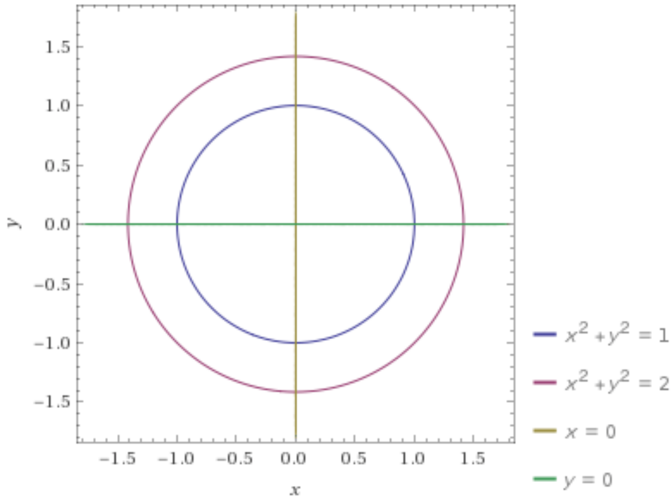
$$\mathscr{C}_{\leqslant r} = \{x \ \in \mathbb{R}^n \ f(x) \leqslant r\}$$

Les **coniques :** Ce sont les paraboles, hyperboles, elipses…

Exercice :

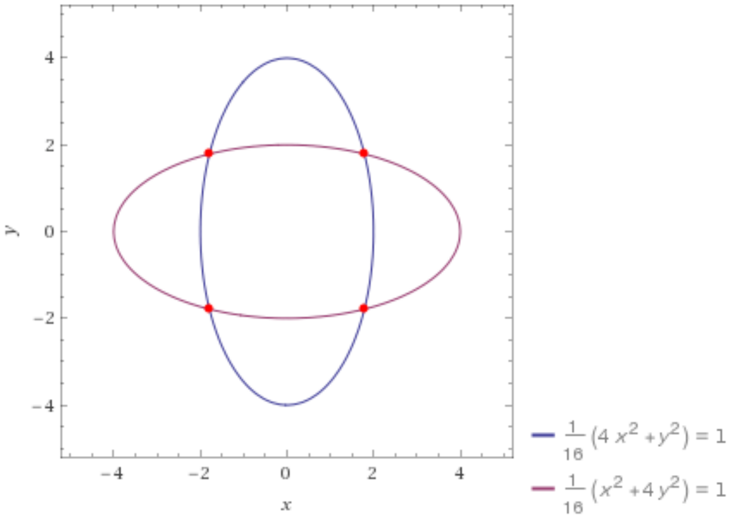
Courbes de niveau 0,1,2

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$
   $\mathscr{C}_0$: seul $(0,0)$
   $\mathscr{C}_1$: cercle de rayon 1 centré en 0
   $\mathscr{C}_2$: cercle de rayon 2 centré en 0
2. $g(x,y) = x^2 + 4y^2$
   $\mathscr{C}_0$: seul $(0,0)$
   $\mathscr{C}_1$: ellipse demi-grand axe 1, demi-petit axe $\frac{1}{2}$, centré en 0
   $\mathscr{C}_2$: ellipse demi-grand axe $\sqrt{2}$, demi-petit axe $\frac{\sqrt{2}}{2}$, centré en 0



Équation d'une éllipse

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

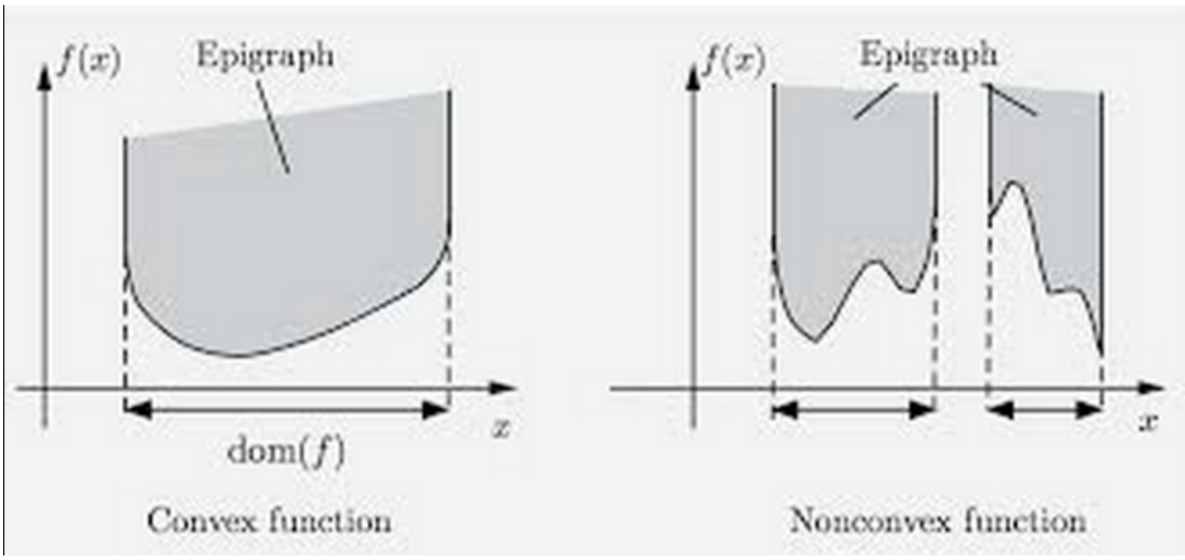


a : demi-grand axe

b : demi-petit axe

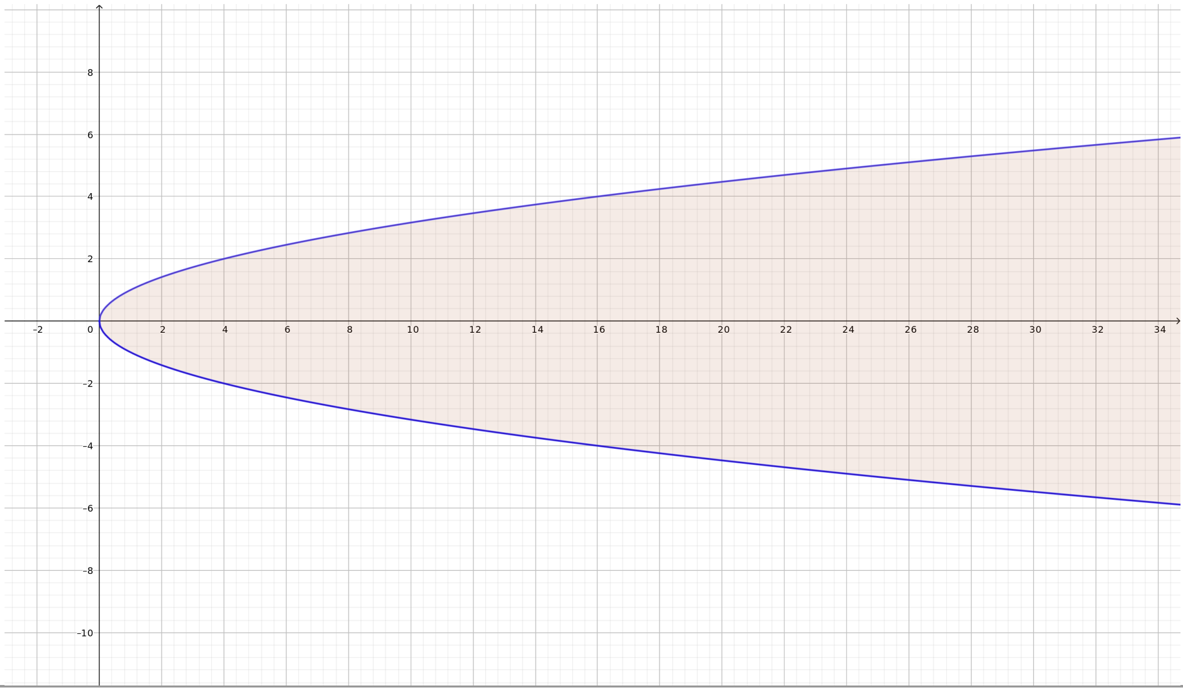
Epigraphe d'une fonction $f. \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$Epi(f) = \{(x, t) \mid f(x) \leq t\}$



Exercice :

Dessiner l'intersection de l'épigraphe de $f(x) = -\sqrt{x}$ (sur $\mathbb{R}^+$)
avec la partie $\{(x, y)|y \leq \sqrt{x}\}$



Une partie de $A \subset \mathbb{R}^n$ est **convexe** ssi $\forall x, y \in A, \forall t \in [0, 1]$ alors

$$tx + (1-t)y \in A$$

L'adhérence d'une partie est sa frontiere.

$A \cup \partial A = \underbrace{\bar{A}}_{adhérence}$

Exemple :

$A = [1, 2[$

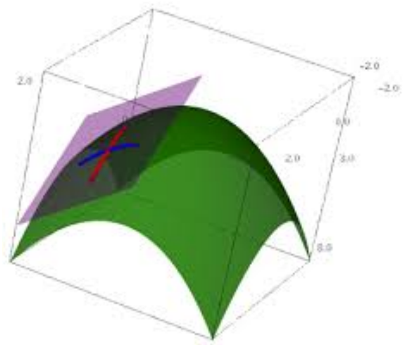
$\partial A = \{\{1\}\{2\}\}$

$\bar{A} = [1, 2]$

Quoi ? Hyper parapluie ???

— multun

Un **hyperplan d'appui** d'une partie A est un hyperplan de A qui posséde un élément du bord de A



Une **fonction convexe** admet des hyperplans d'appui en chacun des points de sa frontière.

f **convexe** $\Leftrightarrow f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$

Exemple de fonctions convexes :

- $f(x) = ax^2 + bx + c, a \geq 0$
- $f(x) = bx + c$
- $e^{ax} \quad \forall a$
- $f(x) = -\log(x)$
- $f(x) = \sqrt(x)$
- $f(x) = |x|$
- $f(x) = x^{2p}, p \in \mathbb{N}^*$

Exercice :
Est ce que la somme de fonctions convexes est convexe ?

$f = \sum_{i=1}^N w_i f_i$ la somme de fonctions convexes

$$\begin{aligned} f(tx + (1 - tg)) &= \sum_{i=1}^N f_i(tx + (1-t)y) \\ &\leq tf_i(x) + (1-t)f_i(y) \\ &\leq \sum_{i=1}^N w_i(tf_i(x) + (1-t)f_i(y)) \\ &\leq \sum_{i=1}^N tw_i f_i(x) + \sum_{i=1}^N (1-t) w_i f_i(y) \\ &\leq \underbrace{t\sum_{i=1}^N w_i f_i(x)}_{f(x)} + \underbrace{(1-t)\sum_{i=1}^N w_i f_i(y)}_{f(y)} \end{aligned}$$

Donc c'est bien convexe !

Soit $f(x,y) = x^2 + y^2$
La fonction Hessienne (https://fr.wikipedia.org/wiki/Matrice_hessienne) de f:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\, \partial x} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\, \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Programme linéaire

Exercice 1:

$$\mathcal{A}_u : \begin{cases} -x + 2y \leq 1 \\ x + y \leq 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_b = \mathcal{A}_u \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - 3y \leq 6\}$$

- (D_1): $-x + 2y + 1 = 0$ $\quad (0, -\frac{1}{2}) \in (D_1)$ $\quad \vec{n_1} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{u_1} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$
- (D_2): $x + y - 1 = 0$ $\quad (0, 1) \in (D_2)$ $\quad \overrightarrow{n_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{u_2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- (D_3): $x - 3y - 6 = 0$ $\quad (0, -2) \in (D_3)$ $\quad \overrightarrow{n_3} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{u_3} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\min f_0(x, y) = y = -\infty}_{(x,y)\in\mathcal{A}_u}$$

$$\underbrace{\min f_0(x, y) = -y = 0}_{(x,y)\in\mathcal{A}_u}$$

Exercice 2:

$f(x,y) = 3x^2 + y^2$
$\mathcal{C}_2(f)\mathcal{C}_4(f)$?
$\mathcal{C}_{\leq 4}(f)$?
$\min f_0(x,y) = 2x + y$
sujet à $3x^2 + y^2 \leq 4$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2(f) :& 3x^2 + y^2 = 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 \frac{1}{2}y^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_4(f) :& 3x^2 + y^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{4}x^2 \frac{1}{4}y^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{x}{\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0(f_0) :& 2x + y = 0 \\ &(0,0) \in \mathcal{C}_0(f_0) \\ &\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

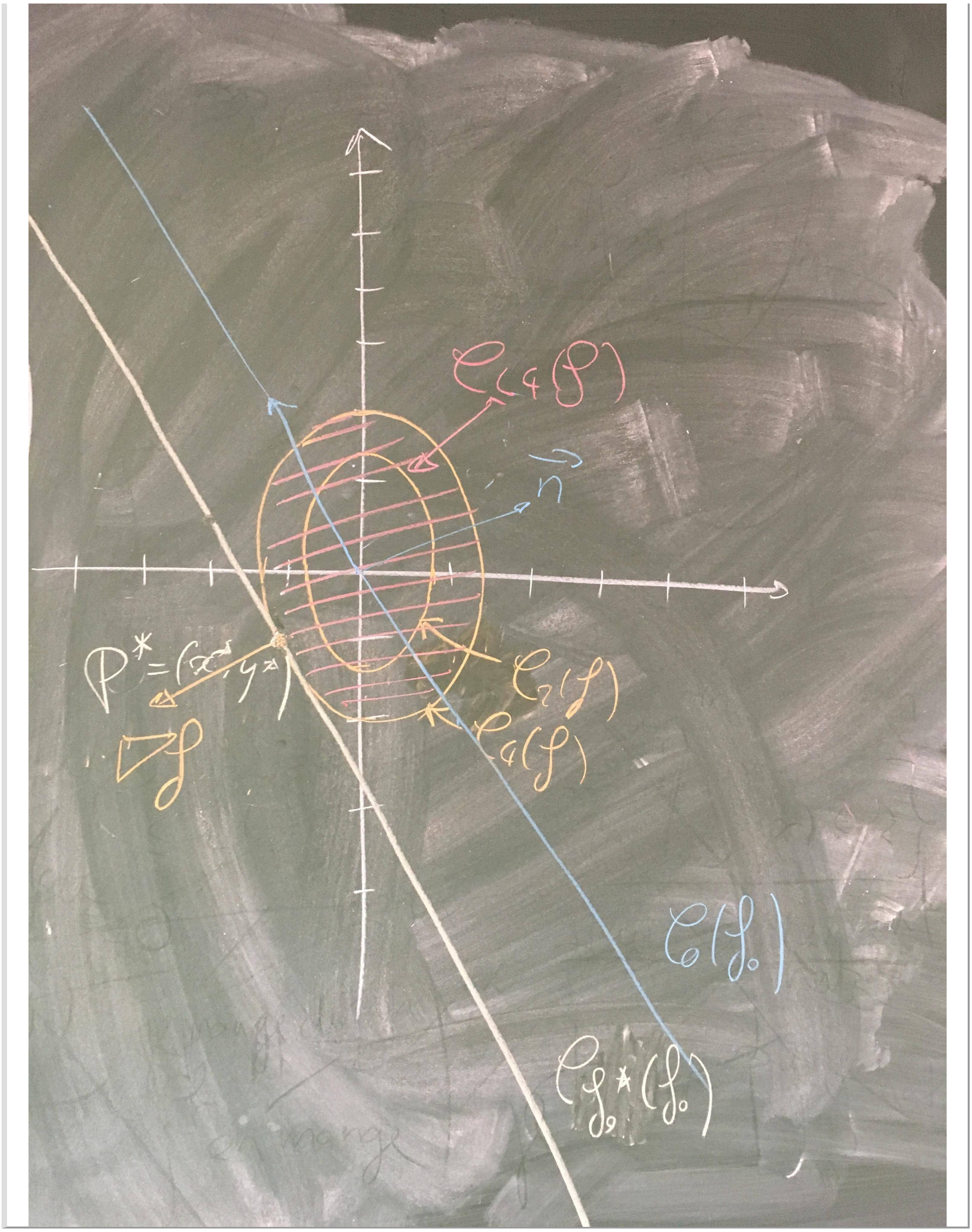
$\min(f_0(xy)) = f_0^*$ pour $(x,y) = (x^*, y^*)$
$3x^{*2} + y^{*2} = 4$ $(x^*, y^*) \in \mathcal{C}_4(f)$
$2x^* + y^* = f_0^*$ $(x^*, y^*) \in \mathcal{C}_{f_0^*}(f_0)$

$$\begin{aligned} \Delta f(x^*, y^*) &= \begin{pmatrix} 6x^* \\ 2y^* \end{pmatrix} \\ \langle \Delta f(x^*, y^*), \overrightarrow{u} \rangle &= 0 \\ \begin{pmatrix} 6x^* & 2y^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
3x^{*2} + y^{*2} &= 4 \\
-6x^* + 4y^* = 0 \rightarrow y^* &= \frac{6}{4}x^* \\
&= \frac{3}{2}x^* \\
&= \frac{6}{\sqrt{21}}
\end{aligned}
$$

$y^* = \frac{6}{\sqrt{21}}$

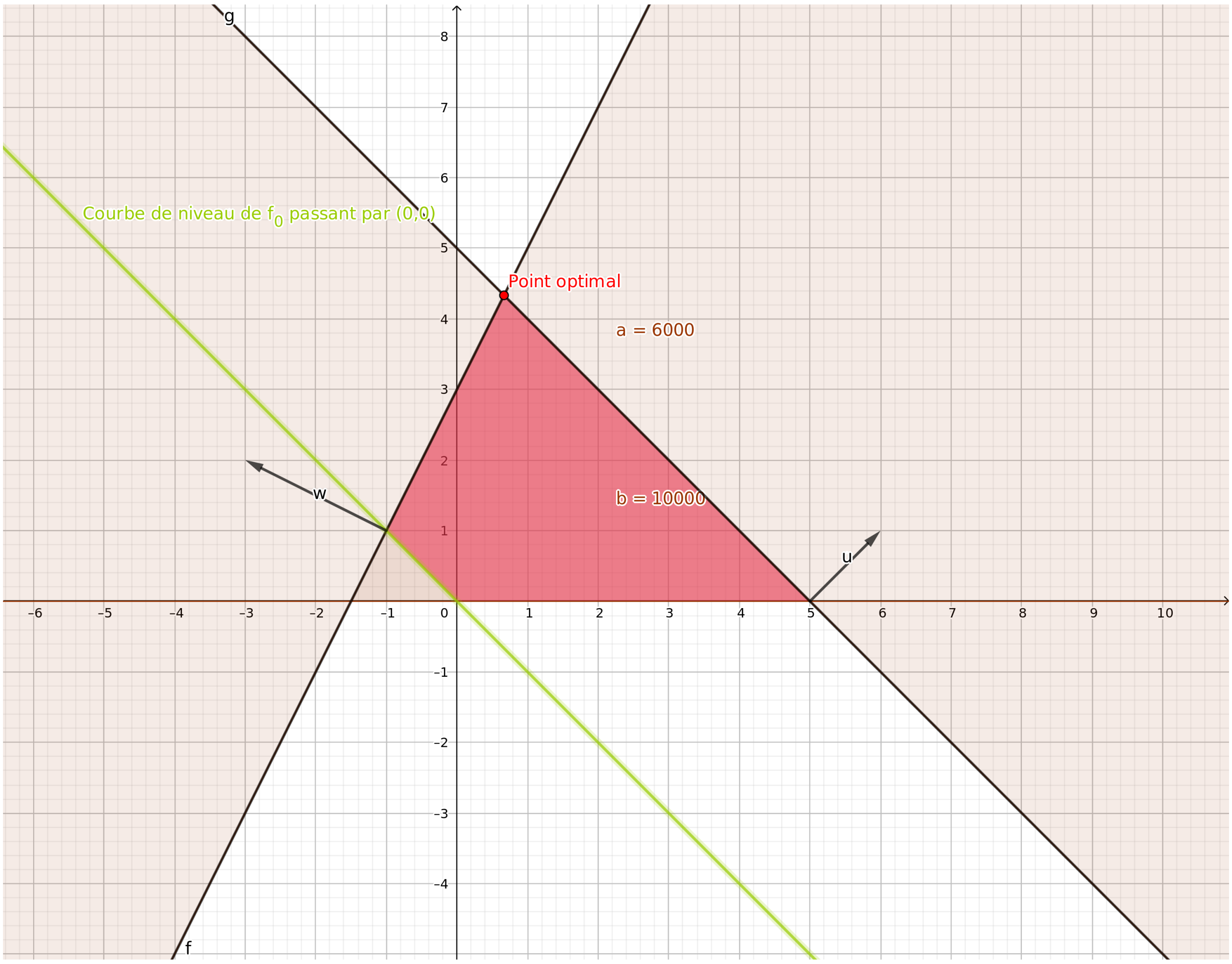
$3x^{*2} + (\frac{3}{2}x^*)^2 = 4$
$3x^{*2} + \frac{9}{4}x^{*2} = 4$
$\frac{21}{4}x^{*2} = 4$
$x^{*2} = \frac{16}{21}$
$x^* = \frac{4}{\sqrt{21}}$ ou $-\frac{4}{\sqrt{21}}$



Géometrie différentielle pour les petits

Avec ce qu'on a vu à ce jour on peut chercher à résoudre un problème d'optimisation de la forme suivante

$$
\begin{array}{ll}
\min & \overbrace{-x_1 - 2x_2}^{f_o(x_1,x_2)} \\
\text{sujet à} & x_1 + x_2 \leqslant 5 \\
 & -2x_1 + x_2 \leqslant 3 \\
 & x_1, x_2 \geqslant 0
\end{array}
$$



Sur la rouge non plus, cf (0.5, 1)
Tu dépasse a gauche

Le lieu admissible

$\mathscr{C}_0$: Courbe de niveau de f_0 passant par $(0, 0)$

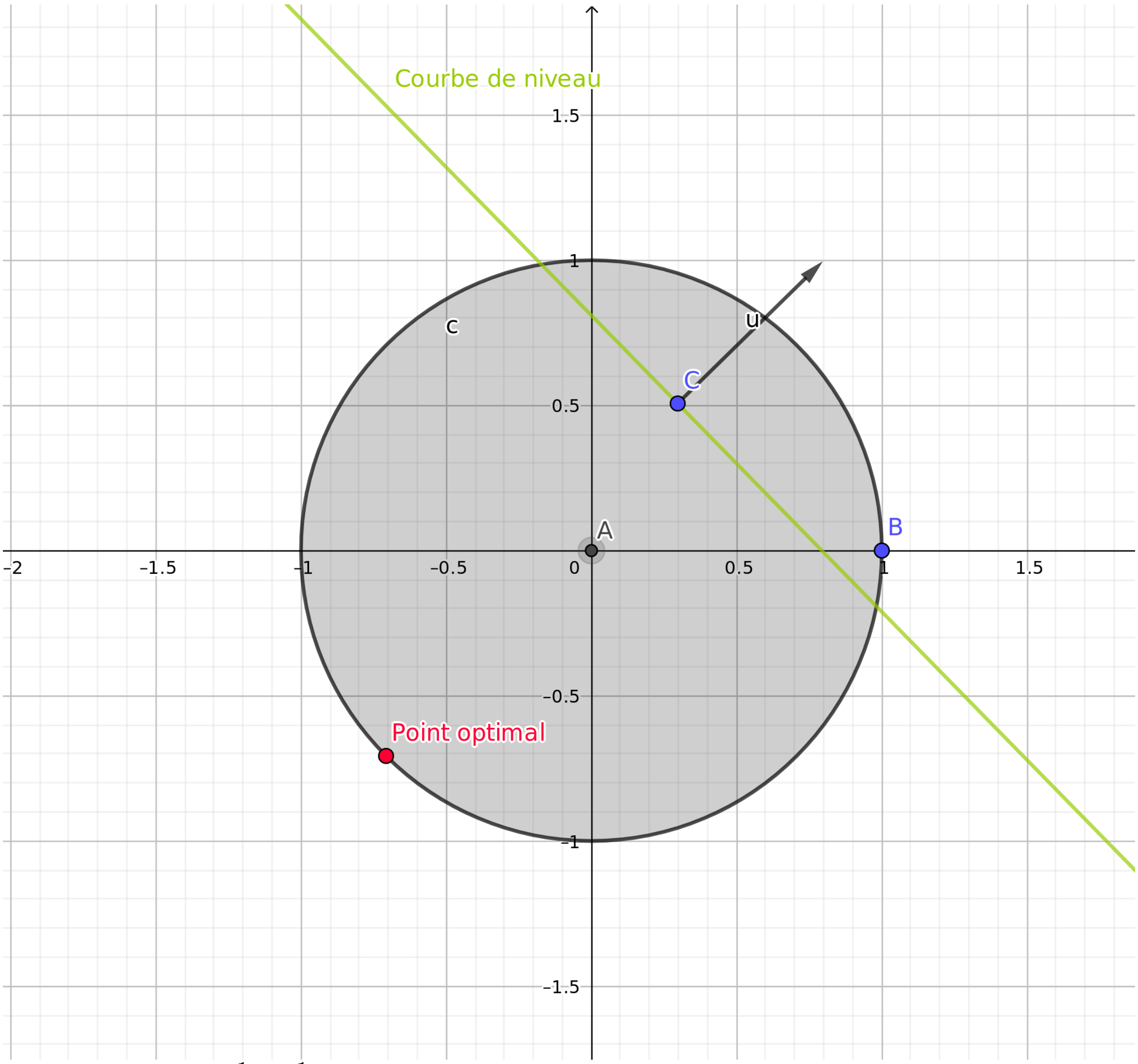
Afin d'améliorer la valeur objectif du point courant, on cherche un point à la fois dans le lieu admissible et dans le demi-espace, qu'on determine à partir de l'équation de la fonction objectif.

La courbe de niveau de la fonction objectif au point optimal isole le lieu admissible dans la partie + des demi-espaces defini par la courbe de niveau de la fonction objectif en ce point. le demi-espace est un hyperplan d'appui au lieu admissible.

Exercice :

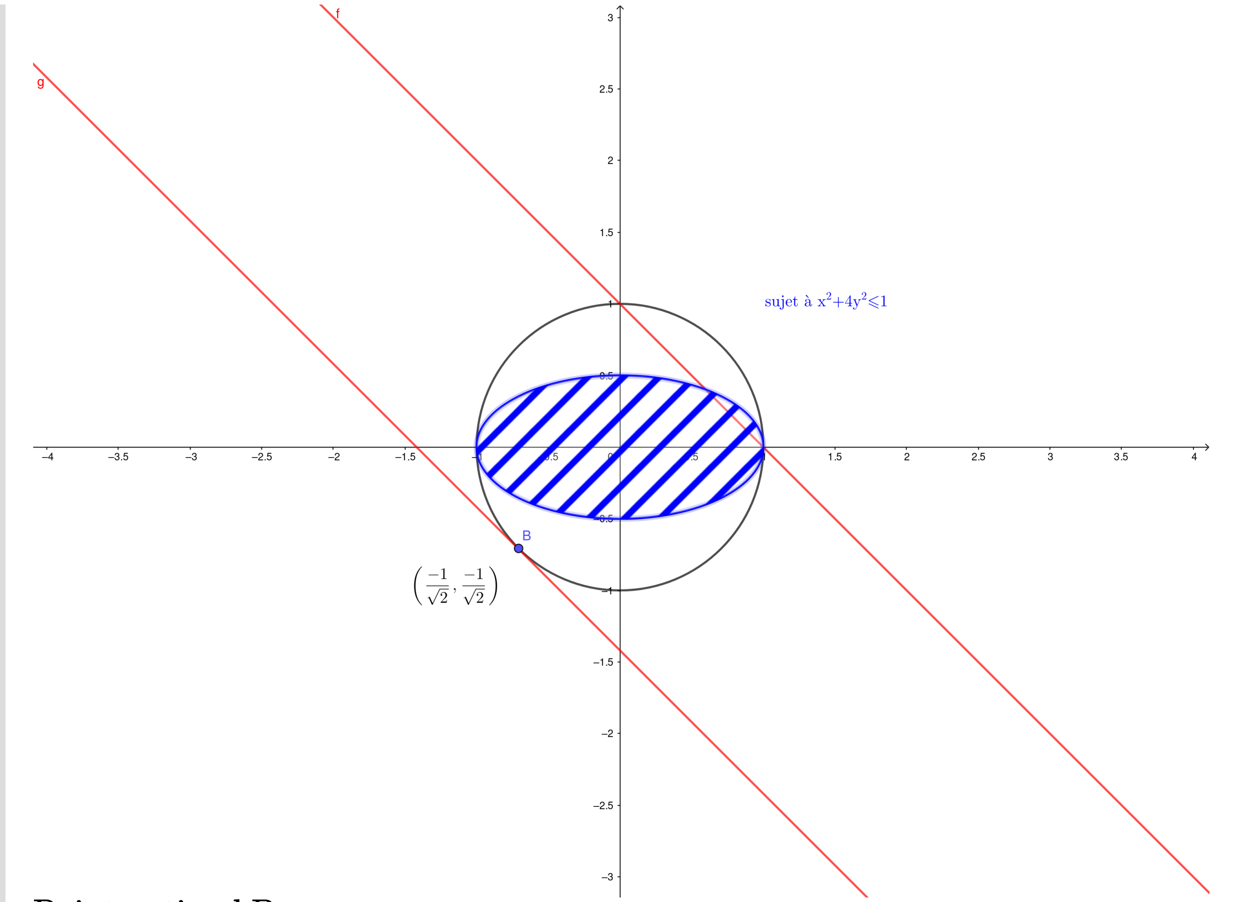
$$\begin{array}{rl} \min & x+y \\ \text{sujet à} & x^2+y^2 \leqslant 1 \end{array}$$

Comment trouver les hyperplans d'appui au lieu admissible?



point optimal en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

je propose



Point optimal B

Quand on cherche à minimiser une fonction objectif affine contrainte par un lieu admissible qui est une ellipse de $\mathbb{R}^2$, on se retrouve à rechercher des hyperplans d'appui de celui-ci .
Cette notion nous ramene à l'étude des dérivées de fonction numériques dont les graphes décrivent des morceaux du bord du lieu admissible. Pour généraliser cette approche, on a besoin de généraliser la notion de dérivée sur plusieurs variables.

Normes sur $\mathbb{R}^2$

Une norme sur $\mathbb{R} - ev$ est une manière de mesurer la longueur d'un vecteur, tout en préservant un minimum la structure d'ev. Elle permet en particulier de mesurer la distance entre deux points pour la longueur du vecteur qui les relie.

Définition :
Une norme sur $\mathbb{R}^n$ est une application $||\cdot||$: $\mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ telle que

1. $||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$: $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$ (relation d'homogéinité)
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$ (inégalité triangulaire)

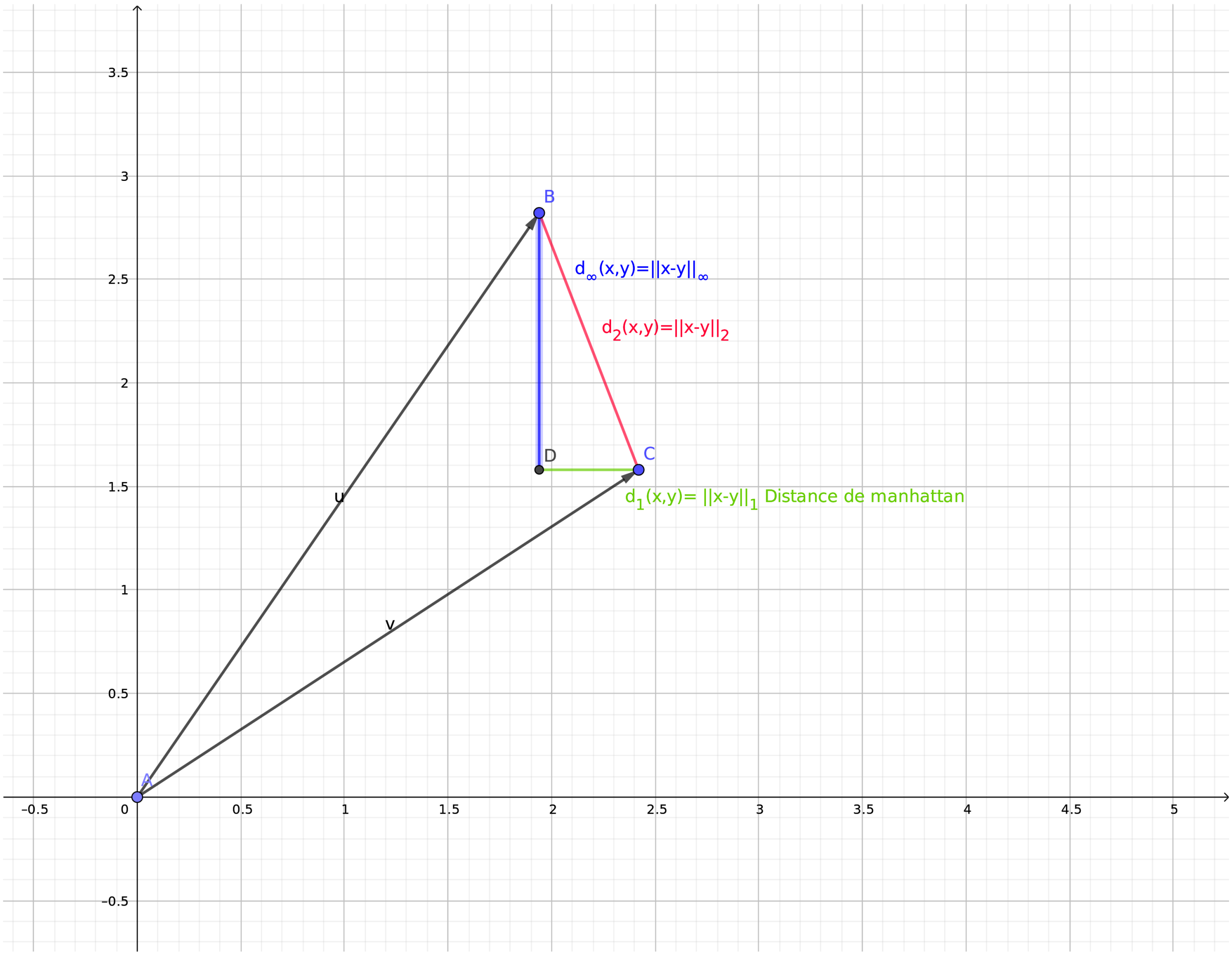
Exercice : sur $\mathbb{R}^n$

1. $||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
2. $||x||_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^T x}$
3. $||x||_\infty = \max_{i \in \{1,...,n\}} \{|x_i|\}$
4. Pour $p \geqslant 1$,

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$ (la norme p) ($p \geq 1$)

À partir d'une norme sur $\mathbb{R}^n$, on va pouvoir définir :

1. Une distance : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, d(x, y) = ||x - y||$



2. Une notion de voisinage d'un point

   Quand on fait de l'analyse, on s'intéresse à ce qui se passe autour d'un point donné ε-près. Par example, pour montrer qu'une suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$, on vérifie:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Longrightarrow \underbrace{|u_n - l| < \varepsilon}_{u_n \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[}$$

La notion de norme sur $\mathbb{R}^n$ permet de généraliser cette notion à toute dimension. Par exemple si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et $l = (l_1, .., l_n) \in \mathbb{R}^n$.
On dit que (u_n) converge vers l au sens de la norme $||.||$ si :

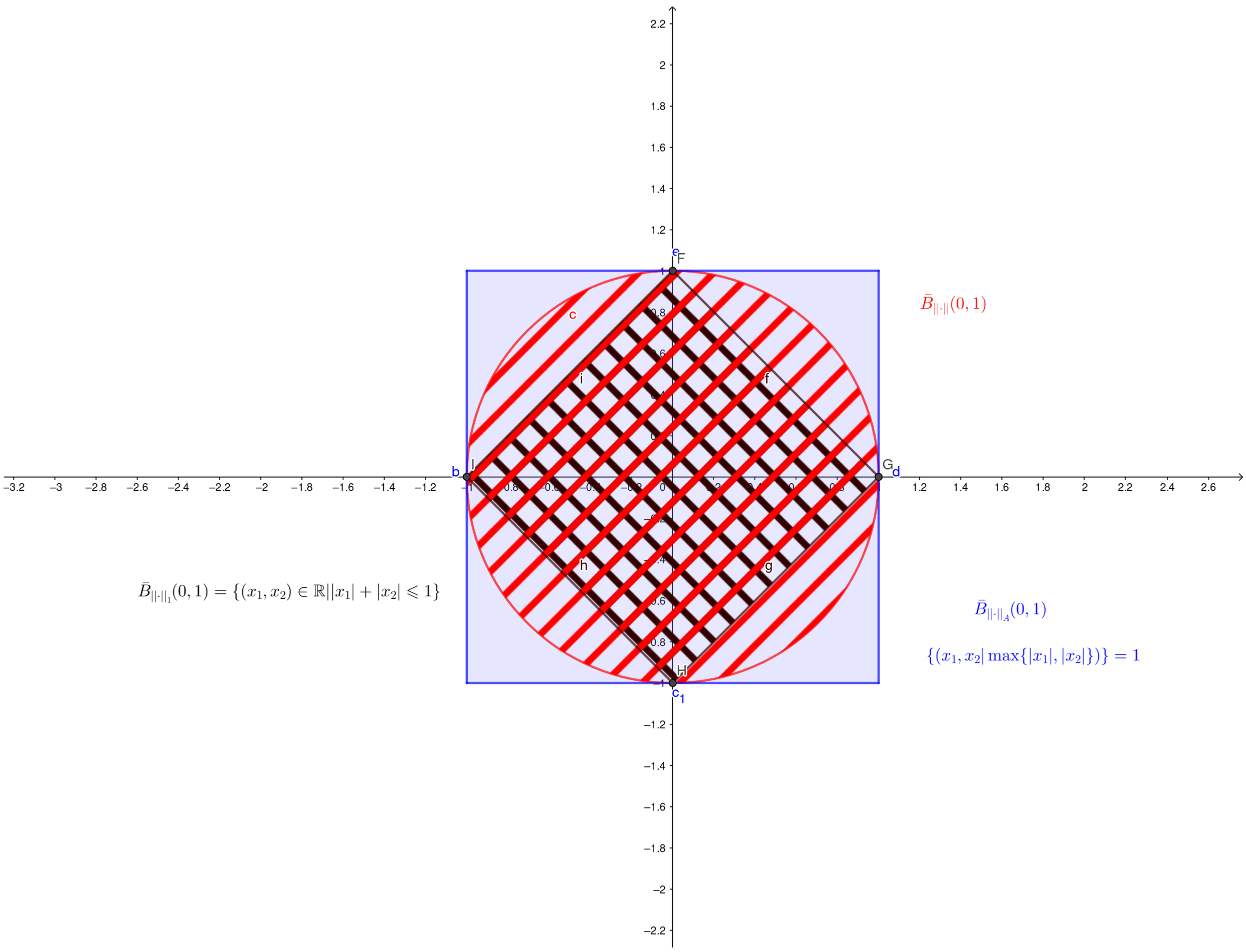
$$(E) \qquad \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Longrightarrow ||u_n - l|| < \varepsilon$$

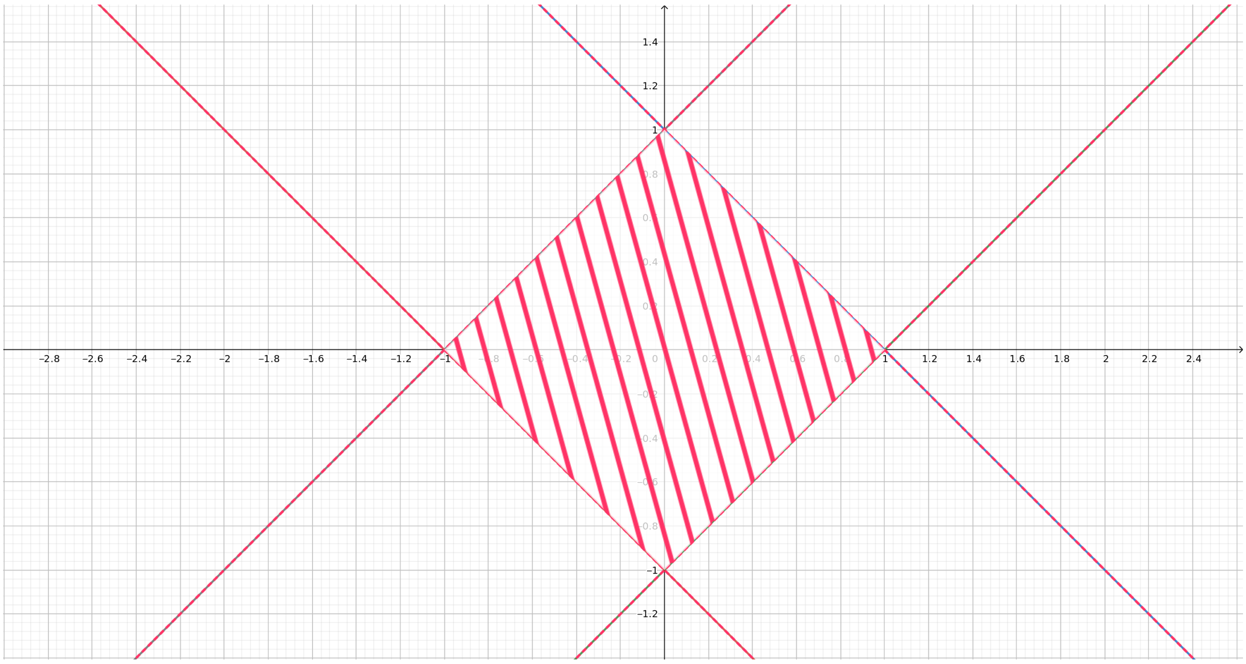
On note
$B_{||\cdot||}(l, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n | ||x - l|| < \varepsilon\}$
$\bar{B}_{||\cdot||}(l, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n | ||x - l|| < \varepsilon\}$

Dans ce cas, (E) s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, b \geq N \Rightarrow \mathcal{U}_n \in B_{||.||}(l, \varepsilon)$$

Dans le cas de $\mathbb{R}^2$ on represente $\overline{B_{||\cdot||}}(\underbrace{0}_{\text{l'origine}}, 1)$





Remarque: les boules d'une norme sont convexes.

> *du coup, les boules de Noel aussi #loul*

Comme on a pu le voir pour la cas de la convergence d'une suite se donner une norme sur $\mathbb{R}^n$ va nous permettre de transposer les notons de continuité d'une fonction ou de comparaison de fonctions en un point $(o, \theta, \sim)$

Exercice :
On se donne une norme $||.||$ sur$\mathbb{R}^n$.
continuite): Soit $f : (E, ||.||_E) \to (F, ||.||_F)$
on dit que f est continue en $a \in E$ si

- f est défini au voisinage de a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mu > 0 tq ||x - a|| < \mu \Rightarrow ||f(x) - f(a)|| < \varepsilon$$

(θ) Une fonction f est un $\theta_1(g)$ en a $\in$ E s'il existe ε :(E,$||\cdot||_E$) $\to \mathbb{R}$ telle que

- $f = \varepsilon g$
- $\varepsilon \underset{a}{\to} 0$

Quand g n'est pas identiquement nulle au voisinage de a, la condition précédente est équivalente à $\frac{||f||_F}{||g||_F} \underset{a}{\to} 0$

Il semble à ce stade que la définition de continuité ou celle de convergence dépende de la norme choisie.

Définition :
Les normes $||\cdot||_\alpha$ et $||\cdot||_\beta$ sur $\mathbb{R}^n$ sont dites équivalentes s'il existe $c, C \in \mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, c||x||_\alpha \leqslant ||x||_\beta \leqslant C||x||_\alpha$$

Si 2 normes sont équivalentes alors elles définissent les mêmes fonctions continues, les mêmes o, θ, ~ ou encore les mêmes suites convergentes.

Théorème :
Sur $\mathbb{R}^n$ toutes les normes sont équivalentes.

Normes sur $\mathbb{R}^n$

Les normes usuelles:

1. $||.||_2 : \forall x \in \mathbb{R}^n; ||x||_2 = (\sum_{x=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^T x}$
2. $||.||_1 : \forall x \in \mathbb{R}^n; ||x||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
3. $||.||_\infty : \forall x \in \mathbb{R}^n; ||x||_\infty = \underset{i \in \{1,...,n\}}{max} |X_i|$

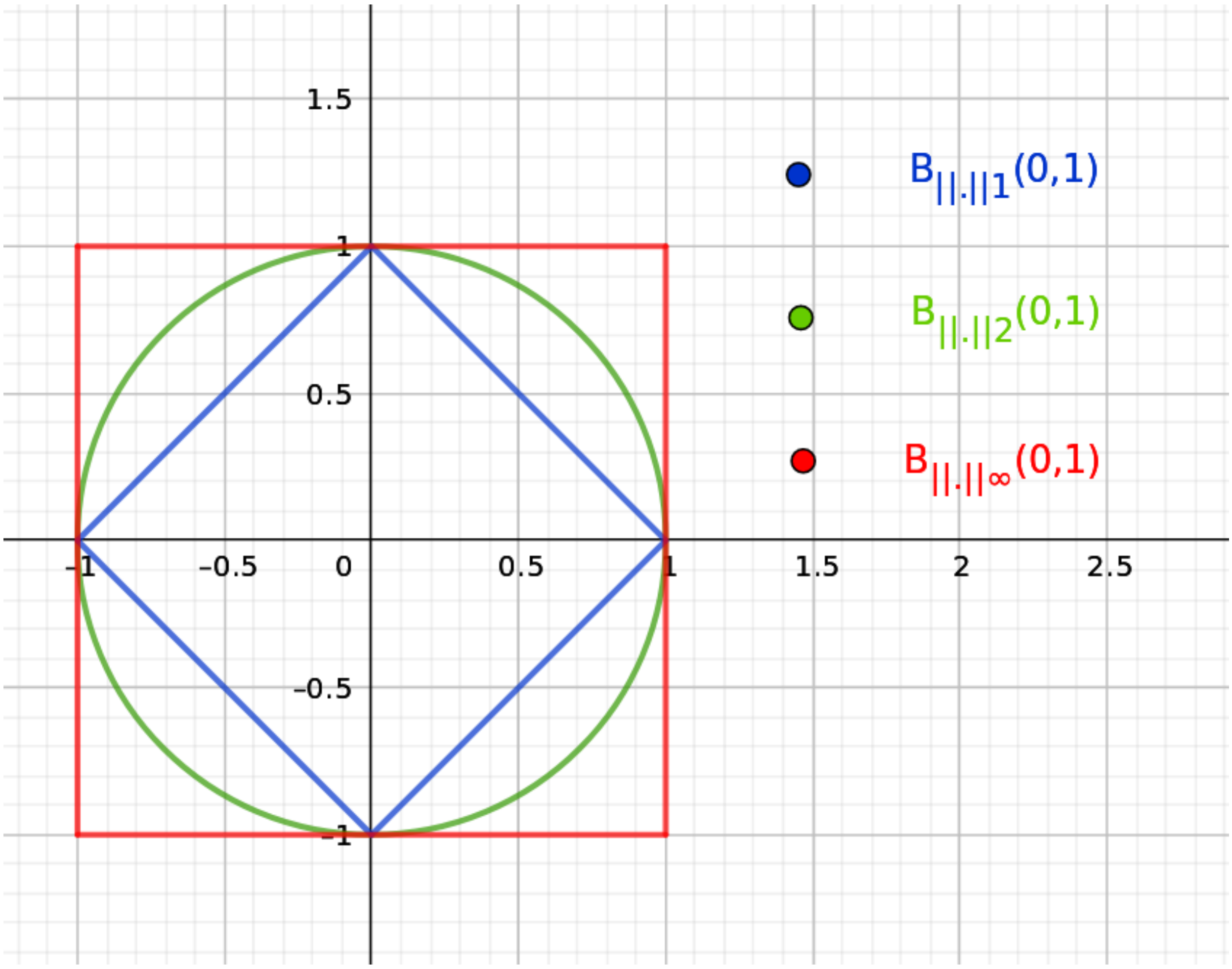
Propriété:

$$\forall p \geq 1 :$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^n; ||x||_p = (\sum (x_i)^p)^{\frac{1}{p}}$$

À partir d'une norme, on définit :

- Une distance : $d_{||.||}$(x,y) = ||x-y||$
- Des boules :
  - Ouvertes : $B_{||.||}(x, \varepsilon) = \{y | d_{||.||}(x, y) < \varepsilon\}$
  - Fermées : $\bar{B}_{||.||}(x, \varepsilon) = \{y | d_{||.||}(x, y) \leq \varepsilon\}$

Objectif : Montrer que les boules ouvertes pour une norme $||.||$ sur $\mathbb{R}^n$ sont convexes.



1.5
1
0.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
-0.5
-1
B||.||1(0,1)
B||.||2(0,1)
B||.||∞(0,1)

Définition :
Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite convexe si

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [0,1];$$
$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

Une fonction est convexe si son graphe est sous ses cordes.

L'inégalité de convexité se traduit géométriquement par le fait que les secantes entre deux points du graphe de f sont au-dessus de salves prises par f entre les abscisses de ces points.

Soient $f : (\mathbb{R}^2, ||.||) \to (\mathbb{R}, ||.||)$ et $(0,0) \in \mathbb{R}^2$

- f est continue en $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ si
  $\forall \varepsilon > 0, \exists\, q > 0, \quad ||(x,y)|| < q \implies ||f(x,y) - f(0,0)|| < \varepsilon$

Différentiabilité et différentielle

Pour rappel on avait conclu à la séance précédente qu'il nous fallait étendre la notion de dérivée d'une fonction numérique au cas des fonctions à plusieurs variables.

On se donne une $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ au voisinage $a \in \mathbb{R}$

Dire que f est derivable en $a \in \mathbb{R}$ c'est a dire que la limite:
$lim_{h \to 0, h \neq 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (D)$ existe ; càd est un nombre réél $l \in \mathbb{R}$

L'objectif est détendre la notion de dérivabilié au cas d'une fonction : $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m (n > 1)$ en $a \in \mathbb{R}^n$

On **ne peut pas** faire : $\frac{g(a+h) - g(a)}{\underbrace{h}_{\text{Un vecteur}}}$
Diviser par un vecteur n'a pas de sens…

L'approche (D) n'est pas celle qui s'étend le plus facilement vers le cas multivarié. On doit voir les choses autrement.

Si f est derivable en a:
$f(a+h) = \boxed{f(a)} + \underbrace{f'(a)h}_{*} + \boxed{o_0(h)}$

$*$ Est la partie linéaire de l'approximation affine de f en a;

$$h \mapsto f'(a).\, h$$
$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Remarque: Caractériser les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans lui-même.

Soit $\mathcal{L} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

une application linéaire
$\forall x \in \mathbb{R}; \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(x.1) = x.\, \mathcal{L}(1)$
Si $\mathcal{L}$ est un **endomorphisme** (https://fr.wikipedia.org/wiki/Endomorphisme) de $\mathbb{R}$ alors $\mathcal{L}$ est de la forme $x \mapsto \lambda x; \lambda \in \mathbb{R}$.

Propriété: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, f est dérivable en a ssi il existe $\lambda_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall h \text{ proche de } 0,\;\; f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o_0(h)$ $(**)$

Preuve:

- $(\Rightarrow)$: c'est ce que l'on vient de dire
- $(\Leftarrow)$: On suppose qu'on a une écriture du type $(**)$

On regarde pour h assez proche de 0, $h \neq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\lambda_n(h) + o_0(h)}{h} \\
&= \frac{1}{h}\lambda_n(h) + \frac{1}{h}o_0(h) \\
\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \lambda_a(1) + o_0(1) \\
\Rightarrow \lim_{\substack{h\to 0 \\ h\neq 0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \lambda_a(1) \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Donc f est derivable en a et $f'(a) = \lambda_a(1)$

Définition de la différentiabilité:

On suppose $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ munies de normes qu'on note indifférentiablement $||\cdot||$. Dans la suite les énoncés qu'on fait ne dépendent pas des normes choisies.

On appelle ouvert de $\mathbb{R}^n$ pour $||\cdot||$ toute partie de $\mathbb{R}^n$ qui contient des voisinages de chacun de ses points.

Ex:

- $]a,b[\subset \mathbb{R}$
- $B_{||\cdot||}(x,R); R>0$

Définition: Soit $f: u\subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction définie en $a\in u$, f est différentiable en a s'il existe $\lambda_u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ telle que
$\forall h$ assez proche de $\underline{0}$:

$$f(u+h)=f(a)+\lambda_a(h)+o_{\underline{0}}(h)$$

$$\underline{0}=(0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^n$$

Propriété: Quand elle existe l'application linéaire λa est unique.

Preuve: Supposons qu'il existe pour h assez proche de 0,2 $\lambda_n, \mu_n \in (\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ telles que:

$$f(a+h)=f(a)+\lambda_n(h)+o_{\underline{0}}(h)$$
$$=f(a)+\mu_a(h)+o_{\underline{0}}(h)$$

$\forall h$ assez proche de $\underline{0}$:

$$(\lambda_a-\mu_a)(h)=o_{\underline{0}}(h)$$

Soit $v_1,\ldots,v_n$ une base de $\mathbb{R}^n$.
Pour t au voisinage de $0\in\mathbb{R}; t\neq 0$
$\forall i\in\{1,\ldots,n\}$

$$(\lambda_a-\mu_a)(tv_1)=o_{\underline{0}}(t\overbrace{n}^{\in\mathbb{R}^n})$$

D'ou $(\frac{\lambda_a-\mu_a)(tv_1)}{t}=o_{\underline{0}}(v)$
$\Leftrightarrow(\lambda_a-\mu_a)(v_i)=o_{\underline{0}}(v)$
$\Rightarrow(\lambda_a-\mu_a)(v_i)=0 \qquad t\to 0$

Comme $\lambda_a-\mu_a$ est une application linéaire nulle sur tout élément de la base $v_1,\ldots,v_n$ elle est nulle. Donc $\lambda_a=\mu_a$.

Definition: Soit $f: u\to\mathbb{R}^n$ definie sur un ouvert $u\subset\mathbb{R}^n$ Si f est différentiable, l'unique application lineaire $Df(u)\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, telle que pour h assez proche de \underline{0}.
$f(a+h)=f(a)+Df(a)(h)+o_{\underline{0}}(h)$

$Df(a)$ est appelée dans le ce cas la difféééerentielle de f en a.

Propriété: Si f est différentiable en un point $a \in u$ alors elle est continue en $a \in u$

Propriétés: Soient f, g 2 fonctions $\underset{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}}{u}$ différentiables en $a \in u$ alors

1. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda f$ est différentiables en a et $D(\lambda f(a)) = \lambda Df(a)$

2. $f + g$ est différentiable en a et $D(f+g)(a) = Df(a) + Dg(a)$

3. $\langle f, g \rangle$ est différentiable en a et $D(\langle f, g \rangle)(a) = \langle f(a), Dg(a) \rangle + \langle Df(a), g(a) \rangle$

Prop: Soient f, g des fonctions différentiables respectivement en a et $b = f(a)$
Alors $g \circ f$ est différentiable en a et $D(g \circ f)(a) = Dg(f(n)) \circ Df(a)$

$\mathbb{R}^n \overset{f}{\longmapsto} \mathbb{R}^m \overset{g}{\longmapsto} \mathbb{R}^k$
$a \to f(a)$

$\mathbb{R}^n \overset{Df(a)}{\longmapsto} \mathbb{R}^m \overset{dg(f(a))}{\longmapsto} \mathbb{R}^k$

Ex:

1. $\mathbb{R}^n \overset{f}{\to} \mathbb{R}$
   $X \to \langle X, X \rangle = X^T X$

2. $\mathbb{R}^n \overset{g}{\to} \mathbb{R}$
   $X \to e^{X^T X}$

f(X + h) = (X + h)^T(X+h)
$= (X^T + h^T)(X + h)$
$f(X) = X^T X + h^T X + X^T h + h^T h$
$\mu_q h^T h = \theta_{\underline{0}}(h)$
$h \neq 0, \frac{|h^T h|}{||h||_2} = \frac{|h^T h|}{\sqrt{h^T h}}$
$= \sqrt{hTh} = ||h||_2 \to 0; h \to \underline{0}$

Rappel normes, voir plus haut.
$||x||_0 =$ # d'elements non nuls de x. (ce n'est pas une norme)
Inégalité triangulaire inversée: $|\ ||x|| - ||y||\ | \leq ||x-y||$

A partir d'une norme ||.|| on définit la notion distance: $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$
$(x, y) \to \langle x, y\rangle$
alors $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ est une norme pour x.

Voisinage de a

Boule centrée en a et de rayon r.
$\to$"Tout ce qui se passe à une $\underbrace{\text{distance}}_{\text{besoin d'une norme}}$ r de $a \in \mathbb{R}^n$

$\to B_{||.||}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}, d(x, a) < r\}$
Ceci est une boule ouverte

$B_{||.||}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n, d(x, a) \leq r\}$
Ceci est une boule fermée

$\overline{B_{||.||}} = B_{||.||} \cup B_{||.||}$

Les fonctions norme sont des fonctions convexes.

$p = \frac{1}{2} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad ||x||_{\frac{1}{2}} = (\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|})^2$
$B_{||.||_{\frac{1}{2}}}(0, 1) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, (\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|} \leq 1\}$

Dans le cadre ou $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

$(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2 < 1$
$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} < 1$
$x_2 < (1 - \sqrt{x_1})^2$

$f : (\mathbb{R}^n, ||.||_\alpha \to (\mathbb{R}^p, ||.||_p)$
$x = (x_1, \ldots, x_n) \to (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots f_p(x_1, \ldots, x_n))$
$a \in \mathbb{R}^n f$ est continue en $a \in \mathbb{R}^n$
$\forall \varepsilon > 0, \exists \mu > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, ||x - a||_\alpha < \mu \Rightarrow ||f(x) - f(a)||_\beta < \varepsilon$

Deux normes $||.||_\alpha$ et $||.||_\beta$ sont equivalentes ssi
$\exists c \geq 0, C \geq 0, \forall x \in E, c||x||_\beta \leq ||x||_\alpha \leq C||x||_\beta$
dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

$x \in \mathbb{R}^n, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$
$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad ||x||_\infty = max_{i=1,...,n}|x_i|$

...

Fonction Lipschitzienne

Une fonction est dite Lipschitzienne ssi: $\exists K > 0$ tq $||f(x) - f(y)|| \leq K||x - y||$
$\forall x, y \in D_y$
Si f est Lipschitzienne, f est continue.

> $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
> $(x_1, x_2) \to x_1 + x_2$
> $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$
> $||x - y|| = || \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix} ||_1 = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$
> $||f(x) - f(y)||_1 = ||x_1 + x_2 - (y_1 + y_2)||_1$
> $= ||(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)||_1$
> $= |(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)|$
> $\leq |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

L'ensemble des fonctions continues est un espace vectoriel.

- Si f,g sont continues $\lambda f + \mu g$ est continue $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ $\to$ structure d'espace vectoriel
- Si p =1, f*g est continue, $\frac{f}{g}$ est continu partout ou g ne s'annule pas.
- Si $h : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ qui est continue, alors $h \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \to h(f(x))$ est continue.

Toutes les fonctions de type polynome sont continues.
et $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ avec f et g polynomiales, est continue partout ou g ne s'annule pas. (fonction rationelle)

$\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$
$f(x, 0) = 0 \to$ continu en 0
$f(0, y) = 0 \to$ continu en 0

> exemple
> Soient $g : t \to (t, t)$
> $f \circ g(t) = f(g(t)) = f(t, t) = \frac{t^2}{t^2+t^2} = \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$ si $t \neq 0$

Donc $f \circ g$ n'est pas continue.

Exercice:
1)

$\mathbb{R} \overset{f}{\longmapsto} \mathbb{R}$
$X \longmapsto X^T X$
On cherche à determiner la diffierenciablité de f en tout point $a \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} f(a+h) &= (a+h)^T(a+h) \\ &= a^Ta + h^Ta + a^Th + h^Th \\ &= f(a) + \underbrace{2a^Th}_{\substack{h \to 2a^Th \\ \text{est linéaire}}} + h^Th \end{aligned}$$

$||h||_2^2 = ||h||_2||h||_2 = ||h||\varepsilon(h)$
On a $f(a+h) = f(a) + \text{ lim en h } + o_0(h)$. f est différentiable en a et
$\Delta f(a)h = 2a^Th$
2)

$\mathbb{R}^n \overset{g}{\to} \mathbb{R}$
$X \to e^{X^TX}$
$g : \mathbb{R}^n \overset{f}{\to} \mathbb{R} \overset{exp}{\to} \mathbb{R}$
$X \to X^TX \to e^{X^TX}$
On s'intéresse à la différenciabilité de g en $a \in \mathbb{R}^n$. La fonction g est composée de fonctions différentiables, elle est donc différentiable en tout point.
En $a \in \mathbb{R}^n, \Delta g(a')h = \Delta\exp(a^Ta)(\Delta f(a)f(h))$
Dans le cours: $\Delta g(a) = \Delta(exp \circ f)(a) = \Delta\exp(f(a)) \circ \Delta f(a)$
$\forall h \in \mathbb{R}^n, \Delta g(a)(h) = \Delta\exp(a^Ta)\underbrace{(\Delta f(a)f(h))}_{\in\mathbb{R}}$

- $\Delta f(a)(h) = 2aTh \qquad h \in \mathbb{R}$
- $\Delta exp(y)(k) = exp'(y) \cdot k = e^y k$

  $\implies \Delta g(a)(h) = e^{a^Ta} \times 2a^Th \qquad h \in \mathbb{R}^n \; a^T \in \mathbb{R}^n, e^{a^Ta} \in \mathbb{R}$

Gradient et dérivées partielles

Soit $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application différentiable en $a \in U$. On peut donc écrire, pour h assez proche de 0:
$f(a+h) = f(a) + Df(a)(h) + \underset{l \to 0}{o_0}(h)$
$(f(a+h) = f(a) + \Delta f(a)f(h) + ||h||\varepsilon(h))$
L'application $\Delta f(a) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ où $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est l'ensemble des applications linéaires

de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, est caractérisée par sa matrice dans des bases données.

Définition:
On appelle jacobienne de f en $a \in U$ la matrice de $Df(a)$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$
Dans cette section,on étudie comment trouver les coefficients de la matrice jacobienne de f en a
Notation:
La jacobienne de f en a s'écrit $\mathcal{J}_f(a) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$
On a $f(a+h) = f(a) + \mathcal{J}_f(a) \cdot h + o_0(h)$

On se pose en premier temps la question de savoir comment déterminer les lignes, puis en un second temps, les colonnes.

Pour les lignes

On écrit $f = (f_1, -, f_m)$
où $f_i : u \to \mathbb{R}$ est la composante de f suivant la i_{eme} coordonnée.

Exemple:
$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^4$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} xy^2 \\ x+y+z \\ xyz \\ z \end{pmatrix}$$
En notant,
$f_1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xy^2$
$f_2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x+y+z$
$f_3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xyz$
$f_4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z$

on a $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$
En $a \in U$, on a pour chaque f:
$f_1(a+h) = f_i(a) + \mathcal{J}_{f_i}(a)h + ||h||\varepsilon(h)$
On peut donc écrire:

$$\begin{aligned}
f(a+h) &= \begin{pmatrix} f_1(a+h) \\ \vdots \\ f_m(a+h) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f_1(a) + \mathcal{J}_{f_1}(a)h + ||h||\varepsilon(h) \\ \vdots \\ f_m(a) + \mathcal{J}_{f_m}(a)h + ||h||\varepsilon(h) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_m(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{J}_{f_1}(a)h \\ \vdots \\ \mathcal{J}_{f_m}(a)h \end{pmatrix} + ||h||\varepsilon(h) \\
&= f(a) + \begin{pmatrix} \mathcal{J}_{f_1}(n) \\ \vdots \\ \mathcal{J}_{f_m}(n) \end{pmatrix} h + ||h||\varepsilon(h)
\end{aligned}$$

$(\mathcal{J}_{f_i}(n) \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R}))$

"$\varepsilon(h)$" est une quantité négligeable sous forme de vecteur

Par unicité de la différentielle, on a : $\mathcal{J}_f(a) = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_{f_1}(a) \\ \vdots \\ \mathcal{J}_{f_m}(a) \end{pmatrix}$

Autrement dit, $\mathcal{J}_f(a)$ est la concaténation des $\mathcal{J}_{f_i}(a)$ verticalement (en colonnes).

Pour les colonnes

Il nous reste à comprendre comment constuire la jacobienne en un point d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $g : U \subset \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction différentiable en $a \in U$.
Pour h assez proche de $\underline{0}$,
$g(a+h) + g(a) + \mathcal{J}_g h + ||h||\varepsilon(h)$

Soit $v \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$, pour t assez proche de 0, $g(a+tv) = g(a) + \mathcal{J}_g(a)tv + ||tv||\varepsilon(tv)$
$g(a+tv) = g(a) + t\mathcal{J}_g(a)v + ||tv||\varepsilon(tv)$
Si $t \neq 0$:
$\frac{g(a+tv)-g(a)}{t} = \mathcal{J}_g(a)v + \varepsilon(tv)$
Quand $t \longmapsto 0$ on a

$$\mathcal{J}_g(a)v = \lim_{t\to 0} \frac{g(a+tv)-g(a)}{t}$$

La valeur de la $\mathcal{J}_g(a)$ en un vecteur v est décrite par la dérivée de la direction de g à la droite a+tv.
$g_v : t \to g(a+tv)$

$\mathbb{R}$: $\frac{g(a+tv)-g(a)}{t} = \frac{g_v(t)-g_v(0)}{t}$

Définition:
On appelle dérivée directionelle de g en a le long de v, la limite, quand elle existe,

$$\partial_v(g(a)) = \lim_{t\to 0} \frac{g(a+tv)-g(a)}{t}$$

Notation:
Dans le cas v, c'est un vecteur de la base canonique, $v = ej$ on note

$$\partial_{e_j} g(a) = \frac{\partial g}{\partial x_j}(a)$$

Remarque:
On vient de voir que si g est différentiable en a alors g admet des dérivées directionnelles en a le long de tout vecteur.

La réciproque est fausse.On peut avoir des directionnelles en tout point mais ne pas être différentiable.

$$\begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+x^2} & \text{si} (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Propriété:
Si les dérivées partielles de g sont des fonctions continues alors g est différentiable en tout point de fonction différentielle $x \longmapsto Df(x)$ continue.

Désormais si g est différentiable en un point a alors

$$\mathcal{J}g(a) = (\ \underbrace{\frac{\delta g(a)}{\delta x_1}}_{\mathcal{J}g(a)e_1} \ \dots \ \underbrace{\frac{\delta g(a)}{\delta x_n}}_{\mathcal{J}g(a)e_n}\ )$$

Pour h assez proche de 0

$$g(a+h) = g(a) + \underbrace{\mathcal{J}_g(a)h}_{\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})} + ||h||\varepsilon(h)$$

Définition: [gradient]
On appelle gradient de g en a

$$\nabla g(a) = \mathcal{J}_g(a)^T$$

On lit ∇ *“nabla”*

Ex:
Calculer:

1. $\nabla g(x, y)$ pour $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
   $(x, y) \to xy^2 + y$
2. $\mathcal{J}_f(x, y)$ pour
   $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
   $(x, y) \to (xy, y^2, \sin(xy))$

1.

- $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = y^2$
- $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 2yx + 1$
  $\Rightarrow \nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2yx + 1 \end{pmatrix}$

2.

$$\mathcal{J}f(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ ycos(xy) & xcos(xy) \end{pmatrix}$$

Suite du cours ici (https://hackmd.io/thliilX3Rm-SjdEiUc-nUw#)