ALGÈBRE LINÉAIRE

Table des matières

Contextualisation

Quand on stocke des données en mémoire dans un programme informatique, on utilise fréquemment une liste de nombres réels. Cette liste est en fait un vecteur de $\mathbb{R}^n$ où n est la longueur de la liste. De même, un signal peut être vue comme une fonction réelle dépendante du temps, qui est alors un vecteur de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Dans tous ces cas, il faut savoir raisonner avec les vecteurs proprement dits et ne pas se limiter aux valeurs de leurs composantes prises isolément. Or les vecteurs qu'on rencontre dans la vie ne se limitent pas à $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Citons quelques applications :

— En analyse de données, on dispose d'un grand nombre d'observation d'un vecteur aléatoire. On peut par exemple sonder des individus sur leurs revenus, leurs loyers, leurs dépenses alimentaires, leurs états de santé, etc. On obtient alors, pour chaque individu, un vecteur constitué de toutes les variables mesurées, donc un vecteur de $\mathbb{R}^n$ où la dimension n est bien souvent plus grande que 3. De même, l'ensemble de toutes ces données peut être représenté comme une matrice, chaque colonne correspondant à un individu sondé.

— En traitement du signal, un vecteur est une fonction réelle. S'il est échantillonné, on pourra se ramener à $\mathbb{R}^n$, mais alors on perd une partie de l'information qu'il contient. Il est parfois possible de projeter ce signal dans un sous-espace de dimension finie. Encore faut-il choisir ce sous-espace et comprendre quelle part de l'information est ainsi gardée.

Dans tous ces cas, on est amener à considérer des espaces de dimensions largement plus grandes que 3.

Pourtant, une première compréhension de l'algèbre linéaire passe par des représentations géométriques en 2 ou 3 dimensions. Ce mode de pensée est nécessaire, c'est par lui qu'on se fait des intuitions qui demeurent souvent valables en dimensions supérieures. Mais pour passer à des dimensions supérieures, il faut se construire des certitudes sur ce qu'on peut généraliser aux cas $n > 3$ et sur la bonne façon de le faire. Cela nécessite un certain formalisme.

Au cours du semestre précédent, nous sommes partis d'une vision axiomatique puis, progressivement, nous avons considéré des situations plus concrètes. Nous nous sommes alors concentrés sur des espaces de dimensions finies. Les vecteurs et les applications linéaires pouvaient être représentés par des matrices.

Ce semestre, nous tenterons une démarche inverse. Nous partirons d'espaces ou de sous-espaces de dimensions finies et nous remonterons vers des concepts plus abstraits. Ces derniers peuvent donner un éclairage sur les premiers, bien utile quand on est en grande dimension.

Un accent particulier sera mis sur la notion de base d'un espace vectoriel. Une question apparemment inextricable peut devenir extrêmement simple si on représente les vecteurs dans une base adéquate. Nous en verrons plusieurs exemples.

Attendus

Voilà les compétences que vous devez acquérir, sur lesquelles vous serez évalués :

— Comprendre la notion de base d'un espace vectoriel. Savoir représenter un vecteur dans différentes bases.

— Comprendre les propriétés des endomorphismes et leurs liens avec matrices qui les représentent. Savoir regarder la matrice d'un endomorphisme, où y trouver les informations sur le noyau et l'image.

— Savoir simplifier l'étude d'un endomorphisme par le choix d'une base appropriée.

— Comprendre les notions de produits scalaires et d'orthogonalité. Savoir les exploiter pour analyser une matrice symétrique.

Les sections qui suivent sont consacrées des points particuliers de ces compétences :

Familles de vecteurs et bases :

— Comprendre ce qui définit une base.

— Savoir jongler entre les représentations d'un même vecteur dans différentes bases.

Applications linéaires :
- Comprendre la relation entre une application linéaire et sa matrice. Savoir analyser la matrice, y retrouver le noyau et l'image.
- Savoir jongler entre les représentations matricielles d'une application linéaire quand on change la base d'un des espaces de départ ou d'arrivée.

Réduction des endomorphismes :
- Comprendre les notions de vecteur propre et de base propre.
- Savoir déterminer une base propre quand elle existe.
- Savoir exploiter la réduction d'un endomorphisme. La comprendre géométriquement.

Espaces euclidiens :
- Connaître le théorème spectral.
- Interpréter géométriquement l'image d'une matrice symétrique au moyen des axes propres.
- Savoir dire si une matrice symétrique définit un produit scalaire.

Première partie
Révisions

1 Familles de vecteurs et bases

1.1 Résumé

La représentation la plus immédiate d'un vecteur, dans un espace de dimension finie n, est le n-uplet de ses composantes dans la base canonique. Cependant, ce n'est pas toujours la représentation la plus efficace, tant en terme de temps de calcul que de compréhension de l'information contenue par le vecteur.

Ainsi par exemple, pour analyser un signal échantillonné, on utilise parfois sa transformée de Fourier discrète. On peut alors «oublier» les n valeurs successives prises par le signal (ses coordonnées dans la base canonique) et les remplacer par les coefficients de Fourier. Ces derniers sont en fait les coordonnées du signal dans une autre base. Ils contiennent toute l'information portée par le signal, mais sous une autre forme, celle d'une représentation fréquentielle, qui permet une analyse particulière du signal. Il est ensuite toujours possible, si besoin est, de retrouver les coordonnées dans la base initiale (donc les valeurs successives du signal) à partir de celles dans la nouvelle base (donc à partir des coefficients de Fourier).

De façon générale, changer de système de coordonnées revient à choisir une nouvelle base et à travailler avec les coordonnées du vecteur dans cette nouvelle base. Il faut donc savoir passer d'un système de coordonnées à un autre.

1.2 Exercices

Exercice 1.1

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $A = \{e_1, \dots, e_n\} \subset E$. On définit $F = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \right\}$.

1. Montrer que F est un sev de E.
2. Soit G un sev tel que $A \subset G$. Montrer que $F \subset G$.

Remarque : on appelle $\mathrm{Vect}(A)$ ce sev F. C'est le plus petit sev de E contenant A.

Exercice 1.2

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset E$. On sait que, par définition, $\mathscr{B}$ est une base de E si et seulement si :

1. cette famille engendre E ;
2. cette famille est libre.

Justifier la présence de chacune de ces conditions dans la définition.

Exercice 1.3

Les familles suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$? Dans la négative, transformez-les par suppressions et/ou ajouts de vecteurs pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$.

1. $A_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$
2. $A_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
3. $A_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$

★ **Exercice 1.4**

Les familles A suivantes sont-elles libres dans E ? Dans la négative, donner une sous-famille libre B telle que $\mathrm{Vect}(B) = \mathrm{Vect}(A)$.

1. $E = \mathbb{R}[X]$ et $A = \left((X-1)^2, (X+1)^2, X^2\right)$
2. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $A = \left(x \mapsto e^{2x}, x \mapsto x^2, x \mapsto x\right)$
3. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $A = \left(x \mapsto e^{x}, x \mapsto e^{x+1}, x \mapsto e^{x+2}\right)$
4. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $A = \left(x \mapsto \cos(2x), x \mapsto \cos^2(x), x \mapsto 1\right)$

Exercice 1.5 *Matrices de passage*

1. Soient $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{B}' = \big((1,1), (-1,2)\big)$ une seconde base.

   Pour tout vecteur $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit X et X' les colonnes représentant les coordonnées de u dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.
   Enfin, la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ contient dans chaque colonne les coordonnées dans $\mathscr{B}$ des vecteurs de $\mathscr{B}'$. Ici, $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

   a. Représenter graphiquement les vecteurs de $\mathscr{B}$ et de $\mathscr{B}'$, ainsi qu'un vecteur u arbitraire. Comment voit-on graphiquement les coordonnées de u dans les deux bases ?
   b. Déterminer la relation matricielle exprimant X en fonction de X'.
   c. Vérifier que P est inversible puis déterminer la relation matricielle exprimant X' en fonction de X.
   d. Soit la droite d'équation $x + 2y = 0$. Donner l'équation de cette droite dans la base $\mathscr{B}'$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{R}$-ev de dimension n, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ deux bases de E.
   Pour tout $u \in E$, on note comme précédemment X et X' les colonnes constituées des coordonnées de u dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.
   Enfin, la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est la matrice P définie par : P est de taille $n \times n$ et chaque colonne i est constituée des coordonnées de ε_i dans la base $\mathscr{B}$.

   a. Déterminer la relation matricielle exprimant X en fonction de X'.
   b. En considérant les applications $X \mapsto u$ et $u \mapsto X'$, démontrer que la matrice P est inversible.
   c. En déduire la relation matricielle exprimant X' en fonction de X.

3. Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ et les bases $\mathscr{B} = \big(1, X, X^2\big)$ et $\mathscr{B}' = \big(1, (X+1), (X+1)^2\big)$.
   a. Déterminer la matrice de passage P et son inverse P^{-1}.
   b. Pour tout $Q \in E$, expliciter la relation entre les coordonnées de Q dans $\mathscr{B}$ et dans $\mathscr{B}'$.

2 Applications linéaires

2.1 Résumé

Une application linéaire respecte les relations de linéarité, quand il y en a, entre ses vecteurs d'entrée. Quand l'espace de départ est de dimension finie, une application linéaire est entièrement définie par les images des vecteurs d'une base de l'espace de départ. Si de plus l'espace d'arrivée est aussi de dimension finie, l'application peut être définie par une matrice.

Une matrice peut aussi représenter une famille de vecteurs. Elle contient alors les vecteurs successifs de la famille, colonne après colonne. En statistiques, on utilise souvent des matrices de cette façon : on étudie un vecteur aléatoire et chaque colonne correspond à une observation. L'analyse statistique consistera par exemple à mettre en évidence des relations de dépendance entre les différentes composantes du vecteur, donc entre les lignes de la matrice des observations.

Dans tous les cas, il est important de savoir regarder une matrice. Déterminer son rang, son image et son noyau, permet d'étudier aussi bien une application linéaire qu'un jeu de données statistiques.

2.2 Exercices

Exercice 2.6

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(x_0, x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Explicitez les matrices des applications linéaires suivantes, dans les bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée.

1. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & (a+d)X^2 + (b+c)X + (d-c) \end{array} \right.$

2. $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x \end{array} \right.$

3. $V : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & \begin{pmatrix} P(x_0) \\ \vdots \\ P(x_n) \end{pmatrix} \end{array} \right.$

Exercice 2.7

1. Soient $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. On considère $f \in \mathscr{L}(E)$ définie par sa matrice

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Enfin, on note C_1, C_2 et C_3 les trois colonnes de A.

   a. Soient $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E$ et $v = f(u)$. Écrire v en fonction de x, y, z, C_1, C_2 et C_3.

b. L'application f est-elle surjective ? La famille (C_1, C_2, C_3) engendre-t-elle $\mathbb{R}^3$?
c. L'application f est-elle injective ? La famille (C_1, C_2, C_3) est-elle libre ?
d. L'application f est-elle bijective ? La famille (C_1, C_2, C_3) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

2. On se donne :
Un $\mathbb{R}$-ev E de dimension n, muni d'une base $\mathscr{B}_1 = (e_1, \cdots, e_n)$.
Un $\mathbb{R}$-ev F de dimension p, muni d'une base $\mathscr{B}_2 = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$.
Une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ définie par sa matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2}(f)$.
On note $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes de A.
a. Montrer que : f surjective $\Longleftrightarrow (C_1, \cdots, C_n)$ engendre $\mathbb{R}^p$.
b. Montrer que : f injective $\Longleftrightarrow (C_1, \cdots, C_n)$ est une famille libre.
c. En déduire que : f bijective $\Longleftrightarrow (C_1, \cdots, C_n)$ est une base de $\mathbb{R}^p$.
d. Que peut-on conclure si $n < p$? Et si $n > p$?

Exercice 2.8 *Rang d'une application linéaire*

Soit $a \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ l'application linéaire définie par sa matrice dans les bases canoniques

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Le rang de A est définie par $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(a) = \dim\big(\mathrm{Im}(a)\big)$.

1. Sans s'intéresser aux valeurs des coefficients de A, montrer que $\mathrm{rg}(A) \leqslant 2$. Puis montrer que, de façon générale, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}_*^2$,

$$\forall A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{R}),\ \mathrm{rg}(A) \leqslant \min(n, p)$$

2. Donner une base de $\mathrm{Ker}(a)$.
3. Donner une base de $\mathrm{Im}(a)$. La matrice A est-elle de rang plein ?
4. Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.9 *Déterminant d'une matrice carrée*

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.10 *Changement de bases*

1. Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$, sa base canonique $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ et la base $\mathscr{B}' = \big(1, (1+X), (1+X)^2\big)$. On considère $f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ définie pour tout $P \in E$ par

$$f(P) = \int_0^3 \frac{P(x)}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$$

a. Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathscr{B}'$ de E.
b. Déterminer la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
c. En déduire la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$.

2. Soient E et F deux espaces de dimensions finies n et p, $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}'_1$ deux bases de E, $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}'_2$ deux bases de F. On note P la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}'_1$ et Q la matrice de passage de $\mathscr{B}_2$ à $\mathscr{B}'_2$. Enfin, pour tout $f \in \mathscr{L}(E, F)$, on définit

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f) \qquad \text{et} \qquad A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'_1,\mathscr{B}'_2}(f)$$

   a. Déterminer la relation matricielle donnant A' en fonction de A.
   b. Écrire cette relation dans le cas particulier où

$$E = F, \qquad \mathscr{B}_1 = \mathscr{B}_2 \qquad \text{et} \qquad \mathscr{B}'_1 = \mathscr{B}'_2$$

Exercice 2.11 *Projecteurs*

1. Soient $E = \mathbb{R}^2$, $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in E$ et $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in E$.
   On définit $F = \mathrm{Vect}\{\varepsilon_1\}$ et $G = \mathrm{Vect}\{\varepsilon_2\}$, de sorte que $E = F \oplus G$.
   Ainsi, pour tout $w \in E$, il existe un unique $(u, v) \in F \times G$ tel que $w = u + v$.
   a. Soit $p : w \longmapsto u$. Vérifier que $p \in \mathscr{L}(E)$ et que $p^2 = p$.
   b. Que sont $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$?
   c. Soit $q = id - p \in \mathscr{L}(E)$. Expliciter q et vérifier que $q^2 = q$. Que sont $\mathrm{Ker}(q)$ et $\mathrm{Im}(q)$?
   d. Donner les matrices de p et q dans la base canonique de E, puis dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.
2. Soient E un $\mathbb{R}$-ev et p un projecteur, c'est-à-dire que $p \in \mathscr{L}(E)$ et que $p^2 = p$.
   a. Soit $q = id - p$. Montrer que q est un projecteur.
   b. Vérifier que $p \circ (id - p) = 0$ puis montrer que $\mathrm{Im}(id - p) = \mathrm{Ker}(p)$.
   c. Vérifier que $(id - p) \circ p = 0$ puis montrer que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(id - p)$.
   d. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.

Deuxième partie
Comprendre un endomorphisme

3 Endomorphismes diagonalisables

3.1 Résumé

Un endomorphisme se différencie des autres applications linéaires par le fait que ses espaces de départ et d'arrivée sont identiques. Quand cet espace est de grande dimension, on comprend mieux l'endomorphisme si on peut mettre en évidence des sous-espaces stables, de plus petites dimensions. La ***réduction*** d'un endomorphisme consiste à trouver de tels ***sous-espaces stables supplémentaires***. Si on choisit pour base de E la concaténation de bases de ces sous-espaces stables, la matrice de l'endomorphisme se compose alors de blocs diagonaux, les coefficients hors de ces blocs étant tous nuls. Cette matrice est dite «diagonale par blocs».

Le cas idéal est celui où on parvient à une base dans laquelle la matrice est tout simplement diagonale. Une telle représentation, quand elle existe, s'obtient dans une base de vecteurs propres : ce sont des vecteurs qui sont colinéaires à leur image par l'endomorphisme. Diagonaliser une matrice, c'est mettre en évidence une base de vecteurs propres.

Ce cas idéal a, de plus, le bon goût d'être le plus fréquent. Une grande majorité des matrices sont diagonalisables, dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. Cette propriété justifie de traiter à part le cas des matrices diagonalisables.

3.2 Exercices

Exercice 3.12 *Enjeux de la diagonalisation*

On se place dans l'espace $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par sa matrice dans cette base canonique

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Soient les vecteurs $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et la famille $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.
   a. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   b. Représenter graphiquement $\mathscr{B}'$ et $f(\mathscr{B}')$ dans le plan. En déduire la matrice D de f dans $\mathscr{B}'$.
   c. En utilisant la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, rappeler la relation matricielle liant A à D.
2. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On considère les deux suites réelles (x_n) et (y_n) définies par leurs valeurs initiales x_0 et y_0 et :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & 3x_n - 2y_n \\ y_{n+1} & = & 2x_n - 2y_n \end{array} \right.$$
   De plus, on définit $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$
   a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = f(X_n)$. Représenter graphiquement X_0, X_1 et X_2.
   b. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ les coordonnées de X_n dans la base $\mathscr{B}'$. Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.
   c. En déduire U_n en fonction de n, puis X_n en fonction de n.
   d. Le point d'équilibre $x_n = y_n = 0$ est-il un équilibre stable ?
3. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On cherche les fonctions réelles dérivables $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ telles que $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\left| \begin{array}{lcl} x'(t) & = & 3x(t) - 2y(t) \\ y'(t) & = & 2x(t) - 2y(t) \end{array} \right.$$
   Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$
   a. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = f\big(X(t)\big)$. Représenter graphiquement la trajectoire du vecteur $X(t)$ sur un intervalle $[0, \delta t]$ où δt est supposé petit.
   b. Pour $t \in \mathbb{R}$, on considère $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ le couple des coordonnées du vecteur $X(t)$ dans la base $\mathscr{B}'$. Exprimer $U'(t)$ en fonction de $U(t)$.
   c. En déduire $U(t)$ en fonction de t, puis $X(t)$ en fonction de t.
   d. Le point d'équilibre $x(t) = y(t) = 0$ est-il un équilibre stable ?

Exercice 3.13

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? Dans les cas favorables, donner les matrices P et D.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

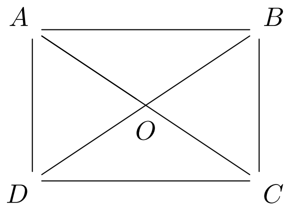
Exercice 3.14

Soit $a \in \mathbb{R}$. Discuter en fonction de a la diagonalisabilité des matrices suivantes. Dans les cas favorables, ***la diagonalisation n'est pas demandée***.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & a+1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 3 & -a-1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

★ **Exercice 3.15** *Matrice de probabilités*

Un jeton se déplace aléatoirement sur les cinq points A, B, C, D et O :



À l'itération $n = 0$, le jeton est en A. Puis à chaque itération n, il se déplace aléatoirement vers un nœud adjacent :

— s'il est en A, B, C ou D, il se déplace vers l'un des trois nœuds adjacents avec la probabilité $\frac{1}{3}$;

— s'il est en O, il se déplace vers l'un des quatre nœuds adjacents avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

On définit l'évènement $A_n =$«le jeton est en A à l'itération n» et, de la même façon, les évènements B_n, C_n, D_n et O_n. Enfin, on note

$$X_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \\ P(D_n) \\ P(O_n) \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $A \in \mathscr{M}_5(\mathbb{R})$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. On admet qu'une diagonalisation de A est donnée par

$$P = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 8 & 0 & -8 & 0 \\ 8 & 0 & -8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on note $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ s_n \\ t_n \end{pmatrix}$ le vecteur des coordonnées de X_n dans la base propre.

a. Écrire la première coordonnée u_n en fonction de X_n. Quelle relation y a-t-il entre u_{n+1} et u_n ? En déduire u_n en fonction de n.

b. Même question avec les deux dernières coordonnées s_n et t_n. En déduire une relation entre $P(B_n)$ et $P(D_n)$, puis une relation entre $P(A_n)$ et $P(C_n)$, qui sont satisfaites dès que $n \geqslant 1$.

c. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} X_n$.

4 Endomorphismes non diagonalisables

4.1 Résumé

Quand un endomorphisme n'est pas diagonalisable, il reste possible de le réduire. On n'est plus dans le cas idéal, mais dès lors que le polynôme caractéristique est scindé (ce qui est toujours le cas dans $\mathbb{C}$), on peut trouver une base dans lequel l'endomorphisme a une matrice diagonale par blocs. On peut même obtenir des blocs triangulaires.

4.2 Exercices

Exercice 4.16 *Réduction d'une matrice non diagonalisable*
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $P_A(X) = (-1 - X)(2 - X)^2$, puis que A n'est pas diagonalisable.
2. Déterminer une base $\mathscr{B}_{-1} = (u_1)$ de E_{-1} et une base $\mathscr{B}_2 = (u_2)$ de E_2.
3. Étude de Ker $\left((A - 2I)^2\right)$.
   a. Montrer que $E_2 \subset$ Ker $\left((A - 2I)^2\right)$.
   b. En complétant la famille (u_2), donner une base $\mathscr{B}'_2$ de Ker $\left((A - 2I)^2\right)$.
4. Montrer que la concaténation de $\mathscr{B}_{-1}$ et de $\mathscr{B}'_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer la matrice de f dans cette base.
6. ***(Bonus)*** Résoudre le système différentiel $X'(t) = AX(t)$.

★ **Exercice 4.17** *Théorème de Cayley-Hamilton*
Soient les fonctions $f_0 : x \mapsto e^x$, $f_1 : x \mapsto xe^x$ et $f_2 : x \mapsto x^2e^x$.

On définit l'espace $E = \text{Vect}(f_0, f_1, f_2)$ et l'application $\Delta : f \mapsto f'$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (f_0, f_1, f_2)$ est une base de E.
2. Montrer que Δ est un endomorphisme de E.
3. Déterminer la matrice A de Δ dans la base $\mathscr{B}$. Cette matrice est-elle diagonalisable ?
4. En appliquant le théorème de Cayley-Hamilton, déterminer A^n.
5. En déduire $f^{(n)}$ pour tout $f \in E$.

Troisième partie
Espaces euclidiens

5 Espaces euclidiens

5.1 Résumé

Un ***produit scalaire*** sur un espace E est une application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie certaines propriétés de base. Un ***espace euclidien*** est un espace vectoriel de ***dimension finie*** muni d'un tel produit scalaire. Ce dernier permet alors de structurer l'espace E, d'une part à travers la notion d'orthogonalité entre vecteurs, d'autre part en définissant une «norme» sur E, et donc une «distance» entre les vecteurs de E.

Plus précisément, les propriétés de base qu'un produit scalaire φ doit vérifier sont les suivantes :

1. pour tout $x_0 \in E$, l'application $y \longmapsto \varphi(x_0, y)$ est linéaire et de même, pour tout $y_0 \in E$, l'application $x \longmapsto \varphi(x, y_0)$ est linéaire ;
2. pour tout $(x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$;
3. pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) \geqslant 0$ et $\varphi(x, x) = 0 \Longrightarrow x = 0_E$.

Les propriétés 1 et 2 définissent une «forme bilinéaire symétrique», la dernière propriété une forme bilinéaire symétrique «définie positive». La norme d'un vecteur est alors $||x|| = \sqrt{\varphi(x, x)}$ et la distance entre deux vecteurs x et y est la norme $||x - y||$.

Définissons par exemple φ sur $\mathbb{R}^n$ de la façon suivante : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, en notant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ leurs coordonnées dans la base canonique,

$$\varphi(x, y) \ = \ {}^t XY \ = \ x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

Il est alors facile de voir que φ est un produit scalaire. C'est le «produit scalaire canonique» sur $\mathbb{R}^n$. Dans le cas où n vaut 2 ou 3, il définit la distance dans l'espace physique.

De façon générale, tout produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ se met sous la forme

$$\varphi(x, y) \ = \ {}^t XAY$$

où A est une matrice ***symétrique*** de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, ce qui nous amène à étudier spécifiquement les matrices ***symétriques***.

Un résultat fort concernant ces matrices est le ***théorème spectral*** : toute matrice symétrique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable et, de plus, admet une base propre orthonormée vis-à-vis du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. Une conséquence de ce théorème est que tout espace euclidien admet une base orthonormée.

5.2 Exercices

★ Exercice 5.18

Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique sur E.

1. Soit $(u, v, x, y) \in E^4$. Développer $\varphi(u + v, x + y)$.
2. Soit $(x, y) \in E^2$. Développer $\varphi(x + y, x + y)$, $\varphi(x - y, x - y)$ et $\varphi(x - y, x + y)$.
3. Supposons de plus, dans cette question, que φ est définie positive. Déduire de la question précédente une relation entre $||x + y||$, $||x||$ et $||y||$ quand x et y sont orthogonaux.
4. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par ses coefficients $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$.

   Pour tout $(x, y) \in E^2$, considérons les coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ de x et y dans la base $\mathscr{B}$.

   En développant $\varphi(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n, y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n)$, montrer que

   $$\varphi(x, y) \ = \ {}^t XAY$$

5. Vérifier que, réciproquement, toute matrice A symétrique permet de définir une forme bilinéaire symétrique par la relation $\varphi(x, y) \ = \ {}^t XAY$.
6. À l'aide d'un contre-exemple, montrer qu'une telle relation ne définit pas toujours un produit scalaire.

Exercice 5.19

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique : pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, en notant X et Y les matrices colonnes de leurs coordonnées dans la base canonique,

$$< x, y >= {}^tXY = x_1y_1 + x_2y_2$$

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Étude des endomorphismes f, g et h définis par ces trois matrices dans la base canonique.
   a. Diagonaliser A, B et C et vérifier qu'elles ont une même base propre. Montrer qu'on peut choisir une base propre orthonormée $\mathscr{B}'$.
   b. Soit P la matrice de passage de la base canonique vers cette nouvelle base $\mathscr{B}'$. Vérifier que ${}^tP = P^{-1}$.
   c. En raisonnant dans cette base propre, déterminer les images du cercle de rayon 1 par f, g et h.
2. Soient φ_A, φ_B et φ_C les formes bilinéaires définies pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ par

$$\varphi_A(x,y) = {}^tXAY\,, \qquad \varphi_B(x,y) = {}^tXBY \qquad \text{et} \qquad \varphi_C(x,y) = {}^tXCY$$

   a. Montrer que ce sont des formes bilinéaires symétriques.
   b. Exprimer $\varphi_A(x,y)$, $\varphi_B(x,y)$ et $\varphi_C(x,y)$ en fonction des coordonnées des vecteurs dans la base $\mathscr{B}'$.
   c. Parmi ces trois formes, lesquelles sont définies positives ?

★ Exercice 5.20

Soient $n \in \mathbb{N}$ et l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, <,>)$ muni de son produit scalaire canonique : pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, en notant X et Y les matrices colonnes de leurs coordonnées dans la base canonique,

$$< x, y >= {}^tXY = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et φ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\varphi(x,y) = {}^tX\,A\,Y$$

1. Soient λ et μ deux valeurs propres de A, $x \in E_\lambda$ et $y \in E_\mu$. Montrer que

$$\varphi(x,y) = < x, y > = 0$$

2. La matrice A étant symétrique, elle est diagonalisable. Donc il existe une base $\mathscr{B}'$ de vecteurs propres.
   Montrer qu'on peut choisir cette base de façon à ce qu'elle soit orthonormée.
3. Notons P la matrice de passage de la base canonique à $\mathscr{B}'$. Montrer que $P^{-1} = {}^tP$.
   On dit alors que P est une matrice orthogonale.
4. Pour un couple quelconque $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, exprimer $\varphi(x,y)$ en fonction des coordonnées des deux vecteurs dans $\mathscr{B}'$.
5. À quelle condition φ est-elle définie positive ?