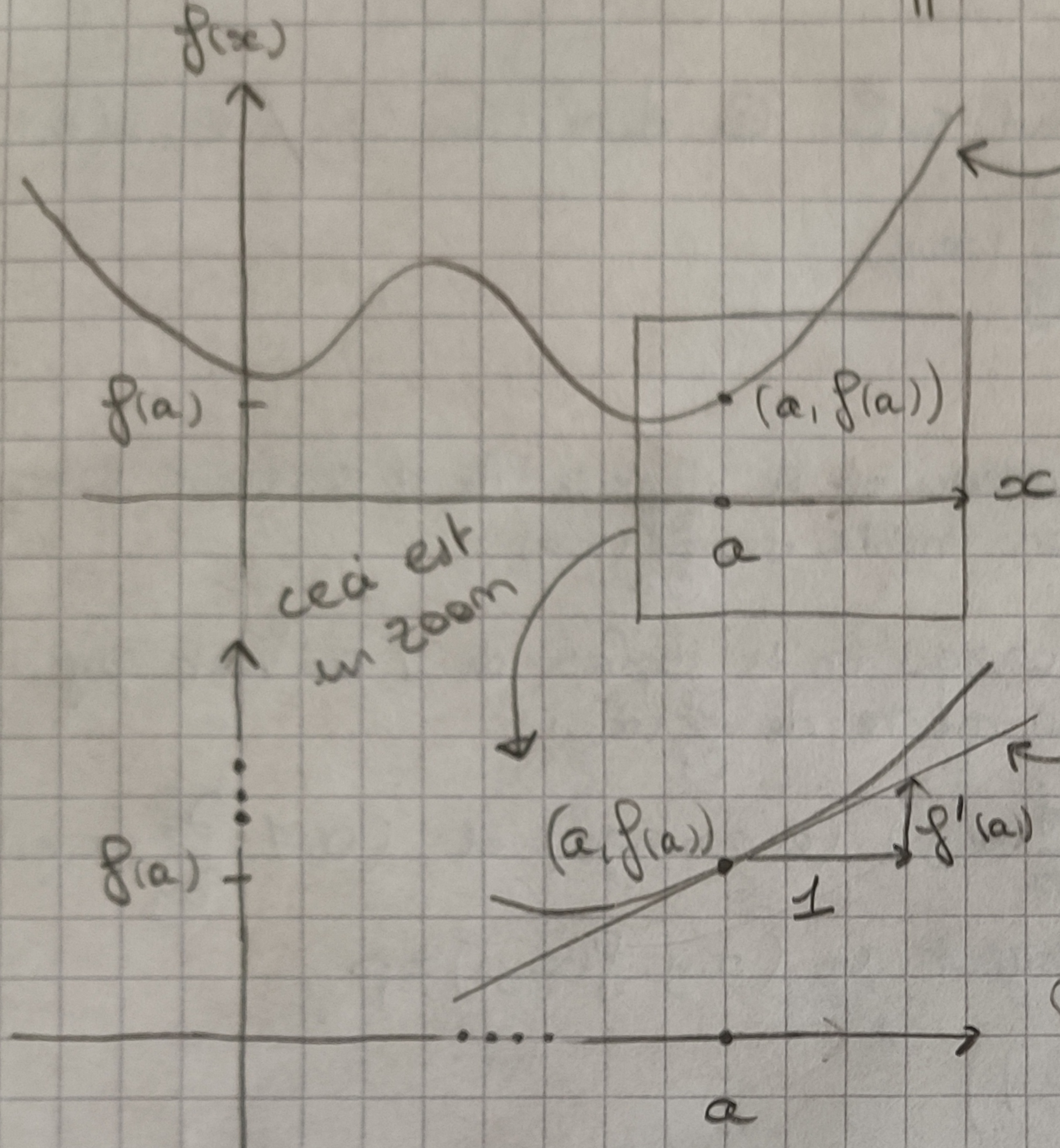
Kit de survie sur les espaces tangents pour étudiant en galère

La notion d'espace tangent généralise la notion de tangente à une courbe

← en math, on appelle ça le graphe d'une fonction



graphe de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$

↳ en abrégé $Gr(f)$

$Gr(f) = \{(x, f(x)),\ x \in \mathbb{R}\}$

$Gr(f) \subset \mathbb{R}^2 \to$ partie de $\mathbb{R}^2$

Tangente à $Gr(f)$ au point $(a, f(a)) \in \mathbb{R}^2$

Vous savez que la pente de cette tangente vaut $f'(a)$, le nombre dérivé de f en a.

Pente ≡ augmentation en ordonnée quand on augmente de 1 en abscisse

→ un vecteur directeur de la tangente est donc $(1, f'(a))$

Espace tangent ≡ toute la tangente

↳ $T_{Gr(f),(a,f(a))} = \{\lambda(1, f(a)),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ → Écriture paramétrique d'une droite

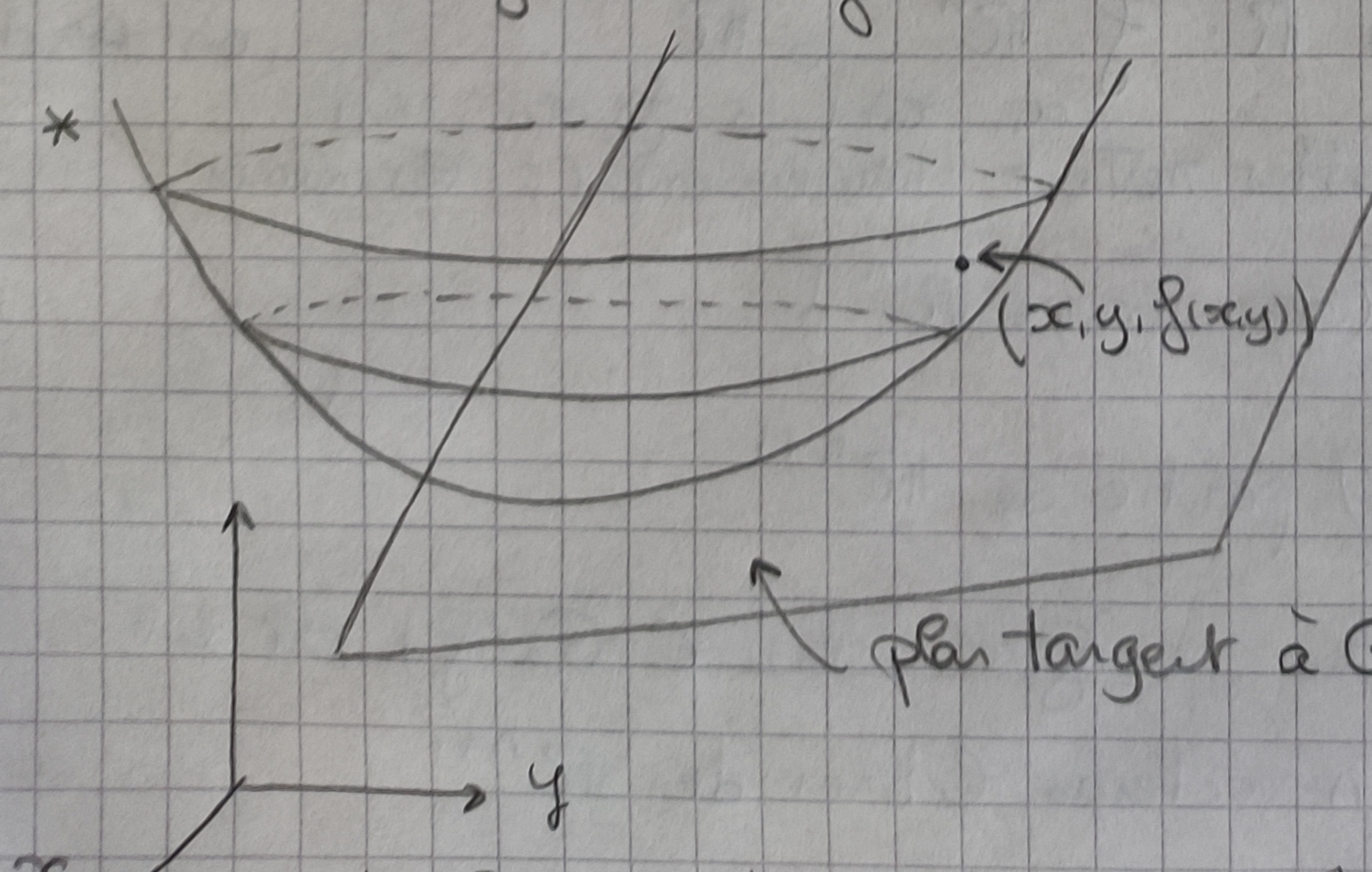
Sous espace de dimension 1 de $Gr(f)$ (qui est de dimension 2)

• Pour une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$

$Gr(f) = \{(x, y, f(x,y)),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

↳ surface dans $\mathbb{R}^3$ → partie de $\mathbb{R}^3$



plan tangent à $Gr(f)$ en $(x, y, f(x,y))$

* La fonction n'a pas obligation d'être convexe

Avec la même idée que pour le calcul de la pente pour le graphe de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

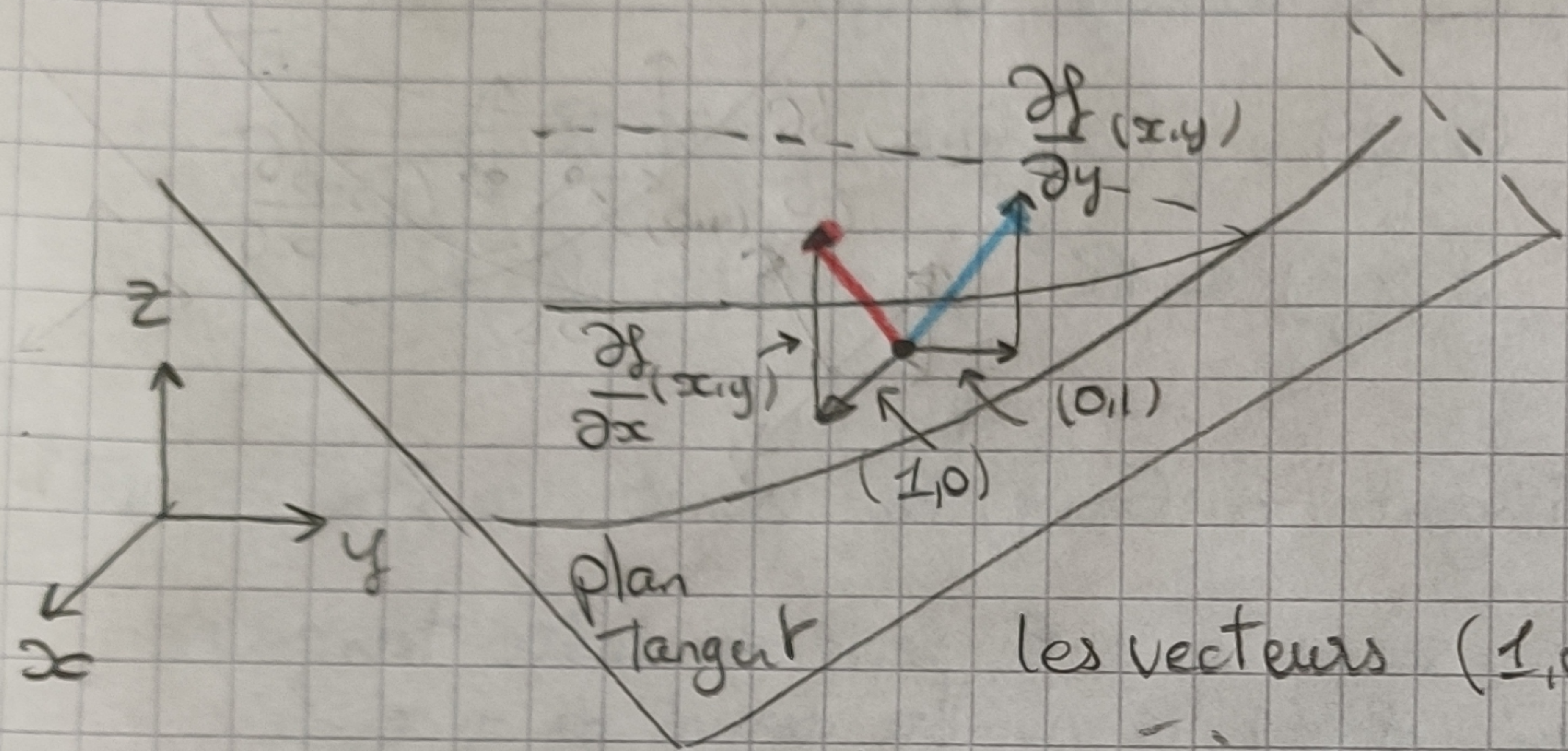
Sauf qu'en dimension 3, on peut considérer qu'il y a deux "pentes" :

→ celle lorsqu'on se déplace uniquement selon l'axe des x
→ selon la direction Ox
→ selon la direction $e_1 = (1,0)$

↳ Son incrément est $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

→ celle lorsqu'on se déplace uniquement selon la direction Oy / $e_2 = (0,1)$

↳ Son incrément est (logiquement) $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$



Lorsqu'on se déplace de 1 suivant Ox, on monte de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

Lorsqu'on se déplace de 1 suivant Oy, on monte de $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

les vecteurs $(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y))$ (en rouge) et $(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y))$ (en bleu) génèrent le plan tangent en $(x, y, f(x,y)) = p$

$$T_{G,p} = \text{vect}\left(\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right), \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \right)$$

Tout élément de $T_{G,p}$ est combinaison linéaire de ces deux vecteurs :

$$T_{G,p} = \left\{ \alpha\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) + \beta\left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

On vérifie d'ailleurs que l'expression paramétrique de $T_{G,p}$ fait appel à deux vecteurs de trois coordonnées : $T_{G,p}$ est bien un hyperplan (de dim 2) de $\mathbb{R}^3$ (de dim 3)

- Pour une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$: $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n) \end{array}$, on perd l'aspect graphique, mais les maths restent (heureusement) les mêmes

$$Gr(f) = \{ \underbrace{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))}_{\in \mathbb{R}^{n+1}}, (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \}$$

$\to Gr(f)$ partie de $\mathbb{R}^{n+1}$

Plan tangent à un point $p = (x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \in Gr(f)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^{n+1}$ → généré par n vecteurs libres de $\mathbb{R}^{n+1}$

↳ donc de dimension n

Il y a n directions de déplacement, chacune est portée par $e_i = (0, \ldots 0, 1, 0)$

La pente associée à chaque direction est $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)$

Les n vecteurs $(\underbrace{0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0}_{e_i \in \mathbb{R}^n}, \frac{\partial f}{\partial x_i}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ génèrent $T_{G,P}$

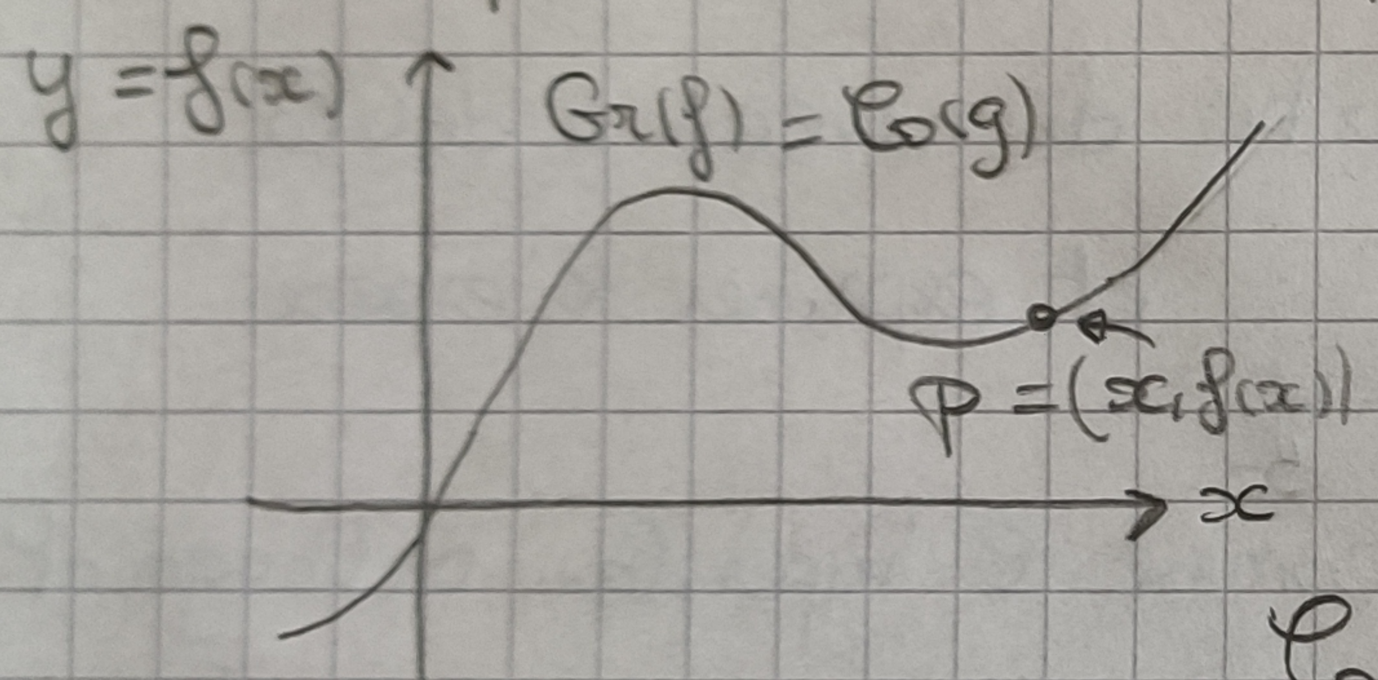
$$T_{G,P} = \text{vect}\left((e_1, \frac{\partial f}{\partial x_1}), \ldots, (e_n, \frac{\partial f}{\partial x_n}) \right)$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(e_i, \frac{\partial f}{\partial x_i} \right), (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \right\}$$

→ c'est bien encore une représentation paramétrique

Conversion d'un graphe à une ligne de niveau, pour passer d'une représentation paramétrique à une relation implicite du plan tangent.

On repart de notre exemple de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = f(x)$



Si on définit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x) - y$

Alors la courbe de niveau 0 de g :

$$\mathcal{C}_0(g) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \underbrace{g(x,y) = 0}_{\substack{f(x) - y = 0 \\ y = f(x)}} \}$$ est très exactement le graphe de f $Gr(f)$

En $\overbrace{(x, f(x))}^{P}$, on a vu que l'espace tangent est généré par le vecteur $(1, f'(x))$ $T_{G,P} = \text{vect}((1, f'(x))) = \{ \lambda (1, f'(x)), \lambda \in \mathbb{R} \}$

Que vaut ∇g en ce point là ? $\nabla g(x, f(x)) = \nabla g(x,y)^T = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \right)$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(f(x) - y) = \frac{df}{dx}(x) = f'(x)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(f(x) - y) = -1$$

Donc $\nabla g(x, f(x))^T = (f'(x), -1)^T$

Donc $\nabla g(x, f(x))$ est orthogonal à $T_{G,P}$: $\nabla g(x, f(x))^T \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix} = 0$

→ ∇g est orthogonal en tout point aux lignes de niveaux de g

(en fait, il est orthogonal à l'espace tangent de ses lignes de niveau en tout point)

Cela reste vrai pour $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Si on cherche l'espace tangent à un certain point $\overbrace{(x_1 \ldots x_n)}^{p}$ d'une courbe de niveau $\mathcal{C}_r(g)$ de g, cet espace tangent est donné comme l'hyperplan orthogonal à $\nabla g(x_1 \ldots x_n)$: $T_{\mathcal{C}_r(g), p} = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \nabla g(p)^T y = 0 \}$

c'est une écriture implicite

Puisque $\mathcal{C}_r(g)$ est une partie de $\mathbb{R}^n$ (c'est une courbe de niveau), un hyperplan est bien de dimension $(n-1)$

Dans le cas général de l'étude de l'espace tangent au graphe $Gr(f)$ d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on peut :

* Soit passer par l'écriture paramétrique, en calculant l'espace engendré par les pentes $\left(e_i, \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ dans chaque direction e_i

* Soit ramener $Gr(f)$ comme une courbe de niveau 0 de la fonction $g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R} \\ (x_1 \ldots x_n, y) \mapsto f(x_1 \ldots x_n) - y \end{array}$ et exprimer l'espace tangent en $p = (x_1 \ldots x_n, y = f(x_1 \ldots x_n))$ comme l'hyperplan orthogonal au vecteur gradient de g en ce point :

$$\nabla g(x_1, \ldots x_n, y)^T = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial g}{\partial x_n}, \frac{\partial g}{\partial y} \right)^T = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}, -1 \right)$$

$$= \left(\nabla f(x_1 \ldots x_n)^T, -1 \right)$$

$$T_{Gr(f) = \mathcal{C}_0(g), p} = \{ z \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \nabla g(p)^T z = 0 \}$$

Maintenant, à vous de vous entraîner pour ne pas mélanger tout ça :)