Introduction au traitement du signal

Retour sur le cours de math du signal de l'année d'ing1. (RIP: Siarry)
Comme vous allez voir, il y a deux facettes à ce cours. il y a un volet assez thérorique, scolaire (on va essayer de démystifier la transformée de fourrier), ainsi qu'une séries d'exemples un peu simplistes, concrets, avec lesquels on va jouer.

Support de cours (http://www.lrde.epita.fr/~gtochon/MASI/)

Introduction

Qu'est ce qu'un signal ?

> Ce sont des **phénoménes physiques** mesurable par un capteur, transportant de l'information dans l'*espace* et le *temps.*

Exemple :

- C'est une fonction
- Une onde (électromagnétique / lumière)
- Courant / tension
- Pression / température

Nous faisons la distinction entre continu et discret.

Signal analogique :

> Dépend continuellement de ses variables.

Signal numérique :

> Un signal discret est capturé par un capteur, il devient numérique.

Le traitement du signal est né durant la seconde guerre mondiale. Un de ses pères fondateur est Claude Shannon. Il a fondé d'un point de vue mathematique la theorie du signal.
ex: un téléphone utilise continuellement des algo de traitement de signal.

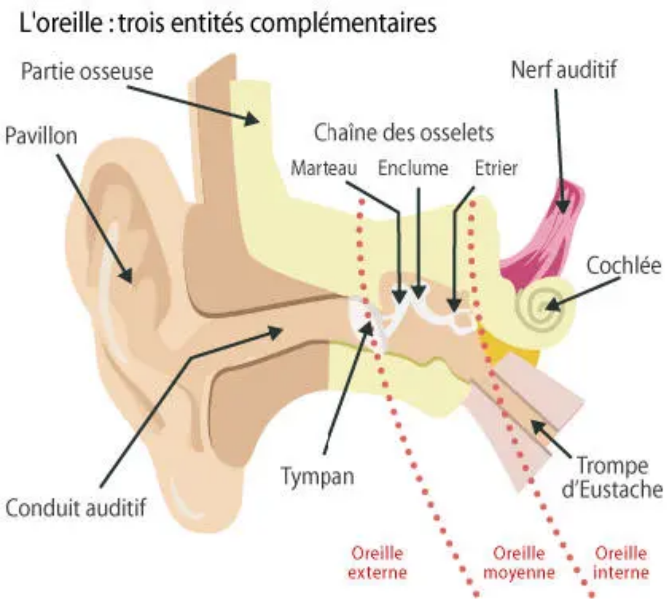
Si l'on s'arrête aux images, (classe restreinte) on peut voir des application medicales, militaires, etc…

Question : Pourquoi le son est échantilloné 44.1kHz ?

> Théorème de shannon: il faut que le signal soit echantillonné à une fréquence deux fois plus importante que la fréquence maximale cible (l'oreille humaine entend jusqu'a 20kHz, donc on échantillonne le son à 44kHz).

Comment fonctionne une oreille ?

[Explication ouïe e-penser <3](https://www.youtube.com/watch?v=i2bKuw011nk) (https://www.youtube.com/watch?v=i2bKuw011nk)



Les vibration mécanique du son sont transformer en impulsion electrique par la cochlée. En fonction de la fréquence de l'onde des cellules cillié différentes vont être activé.

> Donc l'oreille fait une transformée de fourier…

Signal

La manière génerale de définir un signal, c'est 3 variables de position et 1 variable de temps, mais pour les besoins de ce cours, on ne travaillera qu'avec 1 seule dimension spaciale.

Signal :

> Fonction dépendant d'une seule variable de temps t (avec $t \in \mathbb{R}$)

On mesure une certaine quantite unidimensionnelle a valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

> Rappel sur les complexes:
> $|z|^2 = z * \bar{z}$

Le signal est un module borné.

> $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$

On va autoriser potentiellement des discontinuites.
x est continu ou possède un nombre fini / indénombrable de discontinuités.

Si x_1 signal et x_2 signal et $\lambda \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$ alors $x_1 + \lambda x_2$ est un signal.

C'est un espace vectoriel.

En pratique dans cet espace vectoriel on va pouvoir definir:

- une base
- un produit scalaire
- une norme

Fonctionnement du radar

> Une onde se propage puis va buter contre un obstacle et refléchi un signal vers l'émeteur.

L'operation qui mesure la ressemblance entre 2 element est le produit scalaire.

Produit scalaire

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$
$$\langle x, y \rangle = x_1 \times y_1 + x_2 \times y_2 = ||x||.\,||y||.\,cos(\theta)$$

Si $x, y \in \mathbb{R}^n$ c'est pareil.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$
$$\langle x, y \rangle = x_1 \times y_1 + \ldots + x_n \times y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^T y = (x - x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Si $x, y \in \mathbb{C}^n$.

Produit hermitien (équivalent complexe du produit scalaire):

> $\langle x, y \rangle$ = $\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i = x^T \bar{y}$

Définition: Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

> $$\begin{aligned} \langle : \rangle : & E \times E \to \mathbb{R} \\ & (x, y) \to \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

1. Symetrie

$$\forall x, y \in E, \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$$

2. Bilinearite $\forall x_1, x_2, y \in \mathbb{E}, \langle x_1 + \lambda x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \lambda\langle x_2, y\rangle$
3. Positivité: $\forall x \in E, \langle x, x\rangle \geq 0$
4. Définition: $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0_E$

Si produit hermitien

- Symétrie hermitienne: $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
- Semilinéarité:

$$\langle x_1 + \lambda x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \lambda\langle x_2, y\rangle$$
$$\langle x, y_1 + \lambda y_2\rangle = \langle x, y_1\rangle + \overline{\lambda}\langle x, y_2\rangle$$

Norme sur E :

$$\begin{aligned} ||\cdot|| :\ & E \to \mathbb{R}^+ \\ & x \to ||x|| \end{aligned}$$

1. Séparation : $||x|| = 0 \leftrightarrow x = 0_E$
2. Homogeneite $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$
3. Inégalité triangulaire: $\forall x, y \in E, ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

On peut définir une norme à partir d'un produit scalaire: $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

Inégalité de Cauchy Schwarz: $|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$

On peut définir une distance à partir d'une norme :

$$d(x, y) = ||y - x|| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle}$$

On veut définir un produit scalaire entre signaux / fonctions

$$\langle x, y\rangle = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Avec des éléments continus, $\sum$ va devenir $\int$

Une fonction $x : I \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est dite:

- intégrable sur I ssi $\int_I |x(t)| dt \langle +\infty$
- p-intégrable sur I ssi $\int_I |x(t)|^p dt \langle +\infty$

On définit donc:

- $\mathcal{L}^1(I) =$ espace des fonctions intégrables sur I
- $\mathcal{L}^P(I) =$ espace des fonctions p-intégrables sur I

$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) =$ espace des fonctions de carré intégrable ($I = \mathbb{R}$ et $p = 2$)

Ensemble des signaux d'énergie finie :
$x \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \iff \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt \langle +\infty$ (energie du signal)

Dans $\mathcal{L}^2$, $\langle x, y\rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t)y\bar(t)$

Si x, y à valeurs réelles

$$\langle x, y\rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t)y(t)dt$$
$$E_x = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} x(t)\overline{x(t)}dt = \langle x, x\rangle$$

Donc

$$E_x = ||x||^2$$

Définition de la fonction d'inter corrélation entre x_{ref} et y

$$\Gamma_{x_{ref}y}(\tau) \ = \ \langle x_{ref}(t), y(t-\tau)\rangle \ = \ \int_{\mathbb{R}} x_{ref}(t)\overline{y(t-\tau)}dt$$

$y(t-\tau) = y(t)$ retardé d'un facteur τ
$y_\tau(t) = y(t-\tau)$
$y_\tau(0) = y(-\tau) \iff y(0) = y_\tau(\tau)$

Autocorrélation de x :

$$x \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}), \Gamma_{xx}(\tau) \ = \ \langle x(t), x(t-\tau)\rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t)\overline{x(t-\tau)}dt$$

- 1^er propriété
  - Γ_{xx} est maximale pour $\tau = 0$
  - $\Gamma_{xx}(0) = \langle x(t), x(t)\rangle = \int_{\mathbb{R}}(x(t)^2)dt = ||x||^2 = \bar{\tau}_x$ car $\sqrt{\langle x(t), x(t)\rangle} = ||x||$
- 2^éme propriété
  - $\Gamma_{xx}(\tau) = \overline{\Gamma_{xx}(\tau)}$ symetrie hermitienne
  - Si x est à valeurs réelles : $\Gamma_{xx}(-\tau) = \Gamma_{xx}(\tau)$: l'autocorrélation est paire
- 3^éme propriété
  - $\forall \tau \in \mathbb{R}, |\Gamma_{xx}(\tau)| \leq \Gamma_{xx}(0)$

- Si x est T-périodique : $x(t-T) = x(t)$
  $\Gamma_{xx}(T) = \langle x(t), x(t-T)\rangle \ = \ \langle x(t), x(t)\rangle \ = \ \Gamma_{xx}(0)$
  Γ_{xx} est périodique

Intercorrélation

> On va peu faire d'autocorrélation, on va travailler avec de l'**intercorrélation**.
> Au lieu de comparer la ressemblance entre x et x retardé, on va comparer x et y.

Intercorrelation de 2 signaux $x, y \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, $y(t) = x(t-t_0)$:

$$\begin{aligned}\Gamma_{xy}(\tau) = \langle x(t), y(t-\tau)\rangle &= \int_{\mathbb{R}} x(t)\overline{y(t-\tau)}dt \\ &= \langle x(t), y(t-\tau)\rangle \\ &= \langle x(t), x((t-t_0)-\tau)\rangle \\ &= \underbrace{\langle x(t), x(t-(t_0+\tau))\rangle}_{\Gamma_{xx}(t_0-\tau)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}O_x\Gamma_{xx} \text{ est maximale en } 0 &= t_0+\tau \\ \tau &= -t_0\end{aligned}$$

> Donc Γ_{xy} est maximale en $-t_0$

$$y(t) = x(t) + \eta(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{xy}(\tau) &= \langle x(t), y(t-\tau)\rangle \\ &= \langle x(t), x(t-\tau) + \eta_\sigma(t-\tau)\rangle \\ &= \langle x(t), x(t-\tau)\rangle + \langle x(t), \eta_\sigma(t-\tau)\rangle \\ &= \Gamma_{xx}(\tau) \\ &= E[X\eta_\sigma] = E[X]E[\eta_\sigma] = 0\end{aligned}$$

Si x et y sont 2 variables independandantes alors $E[xy] = E[x]E[y]$

Convolution

> C'est l'opération mathématique derriere tous les filtrages.
> — Tochon

Soit $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

On appelle produit de la convolution de f et de g l'opération :

$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(t-x)dx$$

> La convolution c'est "juste" une moyenne pondérée glissante généralisée
> — Tochon

Propriétés :

1. Existence du produit de convolution :
   Pour que $x * y$ existe, il suffit que $x, y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$
   Auquel cas, $(x * y) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$
   Rappel: $x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |x(t)|dt < +\infty$

2. Le produit de convolution est commutatif : $(x * y) = (y * x)$

3. Le produit de convolution est bilinéaire : $x * (y + \lambda z) = (x * y) + \lambda(x * z)$

4. Le produit de convolution est associatif : $(x * y) * z = x * (y * z)$

5. Le produit de convolution admet un élement neutre. Le delta de Dirac :

$$\delta : t \rightarrow \begin{cases} +\infty \text{ si } t = 0 \\ 0 \text{ si } t \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(t)dt = 1$$

$\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ munit du produit de convolution forme donc un monoïde commutatif.

Symetrie :

Si x et y sont des signaux soit pairs soit impairs. $(x * y)$ est paire ssi x et y sont de même parite.

$(x * y)$ est impaire ssi x et y sont de parité opposés.

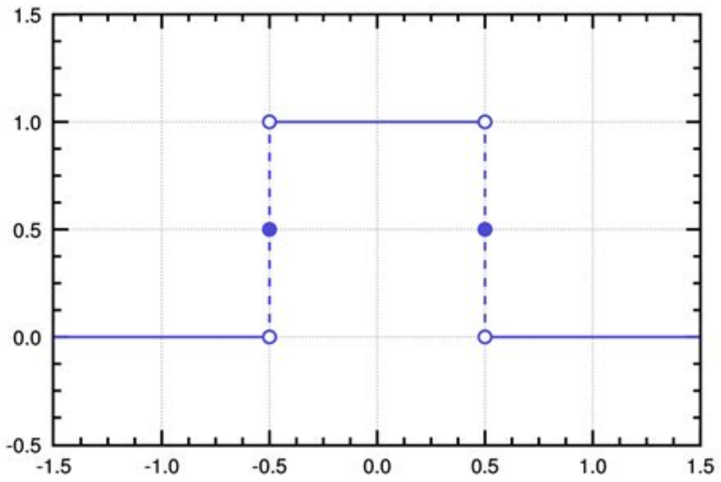
Dérivée:

Si $x, y \in \mathcal{L}1(\mathbb{R})$ et sont derivables avec $x', y' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

$(x * y)' = x' * y = x * y'$

Fonction porte

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 \ \forall t \in [-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$



[Elle est fausse, la notre vaut 1 aux bornes. TODO]

$$(\Pi_T * \Pi_T)(t) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\Pi_T(x)}_{0 \text{ si } x \notin [-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]} \Pi_T(t-x)dx$$

$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Pi_T(t-x)dx$$

- Pas de chevauchement $\Leftrightarrow |t| > T$
- Chevauchement max $t = 0$

$$(\Pi_T * \Pi_T)(0) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1dx = T$$

- Si $0 < t < T$

$$(\Pi_T * \Pi_T)(t) = \int_{t-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dx = \frac{T}{2} - (t - \frac{T}{2}) = T - t$$

- Si $-T < t < 0$
  $(\Pi_T * \Pi_T)(t) = \int_{\frac{-T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} dx = t + \frac{T}{2} + \frac{T}{2}$

> Ca a été donné au partiel de MASI des Ing1. Donc ca sera potentiellement à notre partiel.

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \langle x(t), y(t-\tau) \rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t)\overline{y(t-\tau)}dt$$

$$(x * y)(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)y(t-\tau)dt$$

$$y^{-}(t) = y(-t)$$

$$
\begin{aligned}
(x * y^{-})(\tau) &= \int_{\mathbb{R}} x(t) y^{-}(\tau - t) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} x(t) y(t - \tau) dt
\end{aligned}
$$

$$
(x * \bar{y})(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(x(t)\overline{y^{-}(\tau - t)}dt) = \int_{\mathbb{R}} x(t)\overline{y(t-\tau)}dt = \Gamma_{xy}(\tau)
$$

$$
\Gamma_{xy} = (x * \overline{y^{-}})
$$

Convolution filtrage : opération mathématique produit de convolution
Corrélation : motif dans un signal

> On ne peut pas faire pire qu'un cours de Siarry
> — Tochon

Série de Fourier

Né au milieu du 18ème siecle, doit son nom à Fourier pour résoudre une équation de la chaleur (comment la chaleur se propage dans une barre)
Travaux début 1800, les premiers résultats mathématiques sont en 1830.

Un phénomene vibratoire peut se séparer en superposition de phénomène vibratoire.

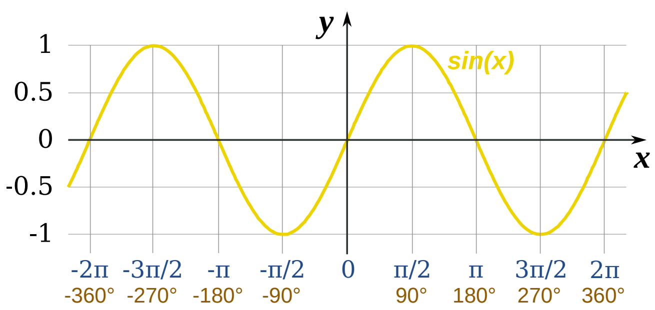
> Exemple: la lumière blanche qui se décompose en beaucoup de longueurs d'ondes différentes.

Principe de superposition:

> Décomposition d'un phenomene vibratoire complexe en une superpostion de phénomènes vibratoires simples.

- Sytème vibratoire complexe: Signal périodique de periode T.
- Systeme vibratoire simple: Onde sinusoidale $A \sin(2\pi f t + \phi)$

$\sin(x) \rightarrow \text{periode } 2\pi$



Calcul de période:

- $\sin(\frac{2\pi}{T}x) \Rightarrow T$
- $\sin(2\pi\frac{n}{T}x) \Rightarrow \frac{T}{n}$
- $\sin(2\pi x) \Rightarrow 1$
- $\sin(x) \Rightarrow 2\pi$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{n=1}^{N} A_n \sin(2\pi\frac{n}{T}t + \phi_n) \\
&= A_1 \sin(\underbrace{\frac{2\pi}{T}}_{\text{fréquence fondamentale } f=\frac{1}{T}} t + \phi_1) + \cdots + A_N \sin(2\pi\frac{N}{T}t + \phi_N)
\end{aligned}
$$

Notations :

- $w = \frac{2\pi}{T}$ = pulsation
- f = fréquence
- $T = \frac{1}{f}$ = période

Rappels :

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{N} A_n[\sin(2\pi\frac{n}{T}t)\cos(\phi_n) + \cos(2\pi\frac{n}{T}t)\sin(\phi_n)] \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{N} A_n \sin(\phi_n)\cos(2\pi\frac{n}{T}t) + A_n\cos(\phi_n)\sin(2\pi\frac{n}{T}t) \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(2\pi\frac{n}{T}t) + b_n \sin(2\pi\frac{n}{T}t)
\end{aligned}
$$

Decomposition des termes

$$
S_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi\frac{n}{T}t) + b\sin(2\pi\frac{n}{T}t)
$$

$S_1 = a_1 \cos(2\pi\frac{1}{T}t)$
$S_2 = a_1 \cos(2\pi\frac{1}{T}t) + a_2\cos(2\pi\frac{2}{T}t)$

$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi\frac{n}{T}t) + b_n \sin(2\pi\frac{n}{T}t)$

Comment déterminer ces coefficients : $a_0, \{a_n, b_n\}_{n\geq 1}$?

Lemme #1

Soit x une fonction T-périodique

$$\begin{aligned} \int_0^T x(t)dt &= \int_a^{a+T} x(t)dt \ \forall a \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)dt \end{aligned}$$

Lemme #2

$$\int_0^T \cos(2\pi\frac{n}{T}t)\cos(2\pi\frac{k}{T}t)dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(2\pi\frac{n}{T}t)\cos(2\pi\frac{k}{T}t)dt = \begin{cases} 0 \ n \neq k \\ \frac{T}{2} \ n = k \end{cases}$$

Lemme #3

$$\int_0^T \sin(2\pi\frac{n}{T}t)\sin(2\pi\frac{k}{T}t)dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(2\pi\frac{n}{T}t)\sin(2\pi\frac{k}{T}t)dt = \begin{cases} 0 \ n \neq k \\ \frac{T}{2} \ n = k \end{cases}$$

Rappel :
$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$

Preuve du lemme #2

- Si $n \neq k$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(kt)dt &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\cos(n+k)t) + \cos((n-k)t)dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((n+k)t)dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((n-k)t)dt \\ &= \frac{1}{2}[\frac{1}{n+k}\sin((n+k)t)]_0^{2\pi} + \frac{1}{2}[\frac{1}{n-k}\sin((n-k)t)]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{n+k}(\underbrace{\sin((n+k)2\pi)}_{=0} - \underbrace{\sin((n+k)0)}_{=0} + \cdots = 0 \end{aligned}$$

- Si $n = k$:

$$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(nt)dtA$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1+cos(2nt)}{2}dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}dt + \int_0^{2\pi} \frac{cos(2nt)}{2}dt$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} cos(2nt)dt = \frac{1}{2}[\frac{1}{2n}\sin(2nt)]_0^{2\pi} = 0$$

Lemme #4

$$\int_0^T (\cos(2\pi\frac{n}{T}t)sin(2\pi\frac{k}{T}t)dt)) = 0$$

On suppose toujours que $x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi\frac{n}{T}t) + b_n \sin(2\pi\frac{n}{T}t)$

a_0: On integre entre 0 et T

$$\begin{aligned}\int_0^T x(t)dt &= \int_0^T [a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi\frac{n}{T}t) + b_n \sin(2\pi\frac{n}{T})]dt \\ &= \int_0^T a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^T a_n cos(2\pi\frac{n}{T}) + b_n \sin(2\pi\frac{n}{T})dt \\ &= Ta_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \underbrace{\int_0^T \cos(2\pi\frac{n}{T}t)dt}_{=0} + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \underbrace{\int_0^T \sin(2\pi\frac{n}{T}t)dt}_{=0}\end{aligned}$$

$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \equiv$ valeur moyenne de x sur une periode

$\{a_n : n \geq 1\}$: On cherche a_k, $\forall k \in \mathbb{N}^*$

On multiplie par $\cos(2\pi\frac{k}{T}t)$ l'egalite puis on integre entre 0 et T.

$$x(t)cos(2\pi\frac{k}{T}t) = a_0 \cos(2\pi\frac{k}{T}t) + \sum_{n+1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi\frac{n}{T}t)\cos(2\pi\frac{k}{T}t) + b_n \sin(2\pi\frac{n}{T}t)\cos(2\pi\frac{k}{T}$$

$$\int_0^T x(t)cos(2\pi t\frac{k}{T})dt = a_0 \underbrace{\int_0^T cos(2\pi\frac{k}{T}t)dt}_{0}$$

$$+ \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_0^T \cos(2n\frac{n}{T}t)\cos(2n\frac{k}{T}t)dt}_{\text{tous les termes sont nuls sauf le } kh^{\text{ième}}\text{, qui vaut } a_k\frac{T}{2}}$$

$$+ \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \int_0^T \sin(2n\frac{n}{T}t)\cos(2n\frac{k}{T}t)dt}_{\text{tous les termes sont nuls par le lemme 4}}$$

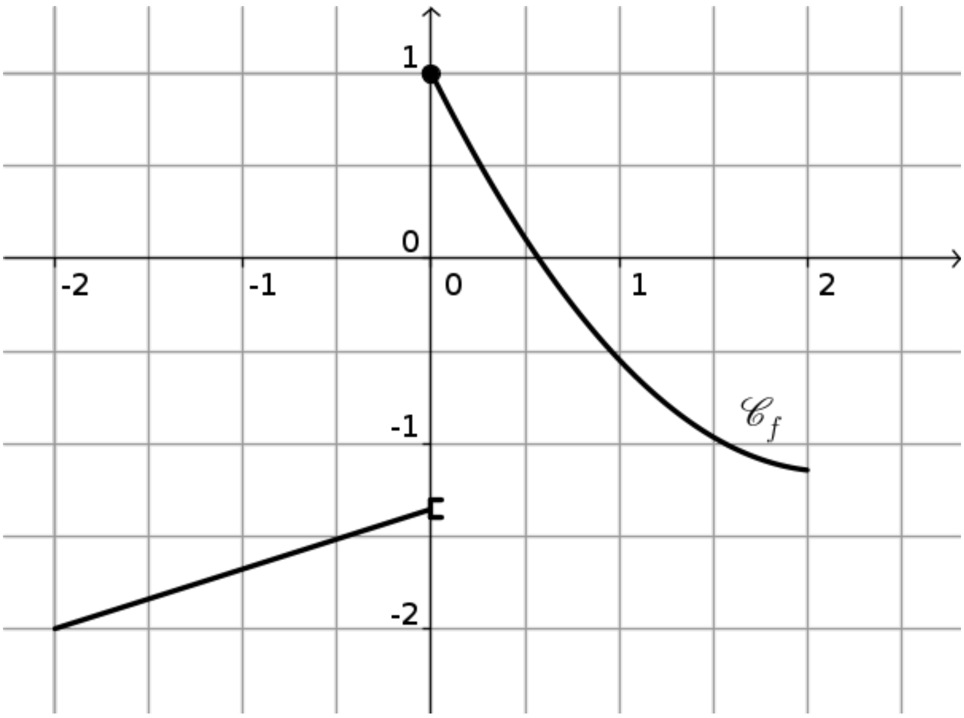
$$= a_k \times \frac{T}{2}$$

$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(2\pi\frac{n}{T}t)dt \; \forall n \geq 1$
Et $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(2\pi\frac{n}{T}t)dt \; \forall n \geq 1$

Fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a, b]$

$x \in \mathcal{C}^o_{pm}([a, b])$ si x est continue sur $[a, b]$, sauf a un certain nombre de points de discontinuité a_i, tq $x(a_i) = \lim_{\substack{t\to a_i \\ t<a_i}} x(t)$

et $x(a_i^+) = \lim_{\substack{t\to a_i \\ t>a_i}} x(t)$ mais potentiellement $x(a_i) \neq x(a_i^-) \neq x(a_i^+)$



Fonction dérivable par morceaux $(\mathcal{C}^1_{pm})$ sur $[a, b]$

- x dérivable sur $[a, b]$ sauf éventuellement en un certain nombre de points pour lesquels il est possible de définir des limites à gauche et à droite de la derivée.

Théoreme de Dirichlet

Soit un signal T-périodique et $\mathcal{C}^1_{pm}$. Alors en tout point de continuité de x, on a :

$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi \frac{n}{T} t) + b_n \sin(2\pi \frac{n}{T} t)$

Si x discontinue en t_0:

$$a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(2\pi \frac{n}{T} t_0) + b_n \sin(2\pi \frac{n}{T} t_0) = \frac{1}{2}(x(t_0^-) + x(t_0^+))$$

avec

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(2\pi \frac{n}{T} t)dt \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(2\pi \frac{n}{T} t)dt \end{aligned}$$

Transformee de Fourier

$$\underbrace{x(t)}_{\text{periode } T} \underbrace{=}_{\text{*cf dessous}} a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi \frac{n}{T} t) + b_n \sin(2\pi \frac{n}{T} t)$$

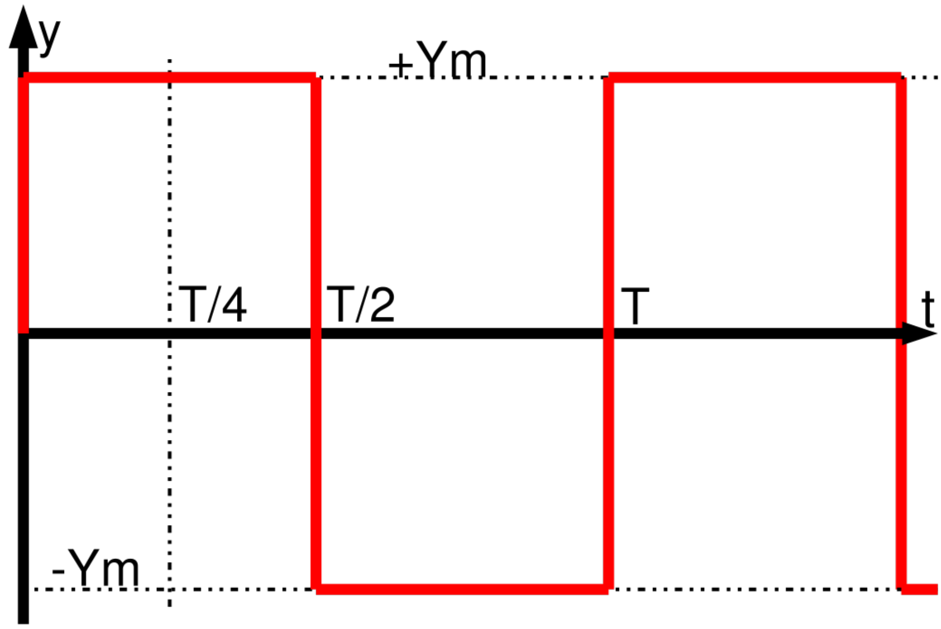
* theoreme de Dirichlet: x doit etre $\mathcal{C}^1$ par morceau a tout point de continuité de x. Si discontinu en t_0, alors la Serie de Fourier converge vers $\frac{1}{2}(x(t_0^-) + x(t_0^+))$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(2\pi \frac{n}{T} t)dt, n \geq 1 \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T x(t) sin(2\pi \frac{n}{T} t)dt, n \geq 1 \end{aligned}$$

Exercice:

Calculer les coeficient de la série de fourier du signal en crénaux.



signal centre en $\frac{1}{2}$ et avec Ym = 1 et -Ym = 0

- $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} dt = \frac{1}{2}$
- $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(2\pi\frac{n}{T}t) = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\cos(2\pi\frac{n}{T}t)dt$

$= \frac{2}{T}\frac{T}{2\pi n}[\sin(2\pi\frac{n}{T}t)]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{t/n}(\sin(tn) - sin(0)) = 0 \qquad \forall n \geq 1$

- $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(2\pi\frac{n}{T}t)dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\sin(2\pi\frac{n}{T}t)dt$

$= -\frac{2}{T}\frac{T}{2\pi n}[\cos(2\pi\frac{n}{T}t)]_0^{\frac{T}{2}} = -\frac{1}{\pi n}(\cos(n\pi) - \cos(0)) = \frac{1}{\pi n}(1 - \cos(n\pi))$

$b_n = \frac{1}{\pi n}(1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0 \text{ si n pair} \\ \frac{2}{\pi n} \text{ si n impair} \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(2\pi\frac{n}{T}t) + b_n\sin(2\pi\frac{n}{T}t) \\
&= \frac{1}{2} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}}_{n \text{ impair } \to n=2k+1} b_n\sin(2\pi\frac{n}{T}t) \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} b_{2k+1}\sin(2\pi\frac{(2k+1)}{T}t) \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2}{\pi(2k+1)}\sin(2\pi\frac{2k+1}{T}t) \text{ en tout point de continuite de x.}
\end{aligned}
$$

> Et en $\frac{T}{2}$?
>
> - $x(\frac{T}{2}) = 1$
> - $x(\frac{T^t}{2}) = 0$
> - $\sin(2\pi(\frac{2k+1}{T})\frac{T}{2}) = \sin((2k+1)\pi) = \sin(2k\pi+\pi) = \sin(2k\pi+pi) = \sin(\pi) = 0$

$S_N(A) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(2\pi\frac{n}{T}t) + b_n \sin(2\pi\frac{n}{T}t)$
x discontinu en t_0
$|\Delta x(t_0)|$ hauteur de la discontonuite:
hauteur du sursaut $\rightarrow \approx 0.09|\Delta x(t_0)|$

On a les coefficients on va doucement se rapprocher de la série de fourrier.

On va admettre que l'ecriture $x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos(2\pi\frac{n}{T}t) + b_n \sin(2\pi\frac{n}{T}t))$
est équivalente à $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{i2\pi\frac{n}{T}t}$
avec $C_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-i2\pi\frac{n}{T}t}dt$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \rightarrow \boxed{e^{i\pi}+1=0}$ est stylé car il y a toute les maths
$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$
$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Si x est pair $\rightarrow b_n = 0 \forall n \geq 1$
Si x est impair $\rightarrow a_n = 0 \forall n \geq 1$

$\{|a_n|, n \in \mathbb{Z}\}$: spectre du signal
Si le signal est à valeurs réelles $(x(t) \in \mathbb{R})$
$C_{-n} = \overline{C_n} \rightarrow |C_{-n}| = |C_n|$
On peut etudier uniquement les C_n pour n $\geq$ 0

$$\forall n \geq 1 \begin{cases} a_n = C_n + C_{-n} \\ b_n = i(C_n - C_{-n}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ C_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \end{cases}$$

Soit $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$ et <;> un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$
u est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ ssi

$$\begin{cases} \langle u_i, u_j \rangle = 0 \quad i \neq j \\ ||u_i|| = 1 \end{cases}$$

cas en 2 dimensions

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x} &= x_1\overrightarrow{u_1} + x_2\overrightarrow{u_2}\\ &= \langle\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{u_1}\rangle\overrightarrow{u_1} + \langle\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{u_2}\rangle\overrightarrow{u_2}\end{aligned}$$

$$\langle\overrightarrow{x},\overrightarrow{u_1}\rangle = \langle\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\rangle = x_1x_1 = \langle\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{u_1}\rangle = \text{projection de}\overrightarrow{x}\text{ sur l'axe des engendre par}$$

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}x_1\\\cdots\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}\text{ dans }u$$

$$\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{u_i} \quad, x_i = \langle\overrightarrow{x_i},\overrightarrow{u_i}\rangle$$

$\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n}\langle\overrightarrow{x},\overrightarrow{u_i}\rangle\overrightarrow{u_i}$

$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{i2\pi\frac{n}{T}t}$
$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-i2\pi\frac{n}{T}t}dt$

$\langle x(t),y(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\overline{y(t)}dt$
$\langle x(t),y(t)\rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t)\overline{y(t)}dt$
On va admettre que $\{U_n : t \to e^{i2\pi\frac{n}{T}t, n\in\mathbb{Z}}\}$ forme une base de $\mathcal{L}^2([0,T])$ et on va verifier qu'elle est orthonormee pour $\langle:\rangle$

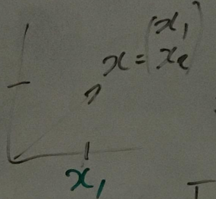
$$\begin{aligned}< u_n(t), u_m(t) > &= \frac{1}{T}\int_0^T u_n(t)\overline{u_m(t)}dt\\ &= \frac{1}{T}\int_0^T e^{i2\pi\frac{n}{T}t}\overline{e^{i2\pi\frac{m}{T}t}}dt\\ &= \frac{1}{T}\int_0^T e^{i2\pi\frac{n-m}{T}t}dt\\ &= \frac{1}{T}\int_0^T e^{i2\pi\frac{k}{T}t}dt\\ &= \frac{1}{T}\frac{T}{2k\pi}[e^{i2\pi\frac{k}{T}t}]_0^T\\ &= \frac{T}{2ik\pi}(e^{i2k\pi}e^0) = 0\end{aligned}$$

$\langle x,x\rangle = ||x||^2$
$\langle u_n(t),u_n(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T u_n(t)\overline{u_n(t)}dt$
$= \frac{1}{T}\int_0^T e^{i2\pi\frac{n}{T}t}e^{-i2\pi\frac{n}{T}t}dt$
$=$

VOIR PHOTO DESSOUS

$\langle x, x \rangle = \|x\|^2$

$$\langle u_n(t), u_n(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T u_n(t)\,\overline{u_n(t)}\,dt$$



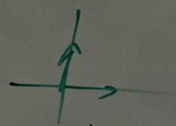
$x = x_1 u_1 + x_2 u_2$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \underbrace{e^{i2\pi\frac{n}{T}t}\, e^{-i2\pi\frac{n}{T}t}}_{1}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T dt = 1 = \|u_n(t)\|^2$$

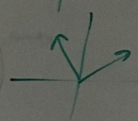
$$e^{i\theta} e^{i\alpha} = e^{i(\theta+\alpha)}$$

$$\alpha = -\theta \quad = e^{i0} = 1$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle u_i$$



Donc pour $x \in \mathcal{L}^2([0,T])$



$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle x(t), u_n(t) \rangle u_n(t)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\langle x(t), u_n(t) \rangle}_{\frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-i2\pi\frac{n}{T}t}\,dt \,=\, \boxed{c_n}} e^{i2\pi\frac{n}{T}t}$$

L'énergie d'un signal

$$E_x = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt < +\infty$$
$$= \langle x(t), x(t) \rangle$$

Avec $x \in \mathcal{L}^2([0,T])$

L'énergie de x devient $\underbrace{E_x}_{\text{Energie temporelle}} = \langle x(t), x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt$

$|C_n|^2$ $\equiv$energie de l'harmonique de rang n

$\rightarrow$ energie du spectre $=$ somme des energies des harmoniques $\rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2$

theorème de Parseval

$$\frac{1}{T} \int_0^T \underbrace{|x(t)|^2}_{\text{energie temporelle}} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{|C_n|^2}_{\text{energie frequentielle}}$$
$$= a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{a_n^2 + b_n^2}{2})$$

exemple

$a_0 = \frac{1}{2}$
$a_n = 0 \forall n \geq 1$
$b_n = \begin{cases} 0 \text{ si n pair} \\ \frac{2}{|pin} \text{ si n impair} \end{cases}$

$C_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n) = \begin{cases} 0 \text{ si n pair} \\ \frac{-i}{\pi n} \text{si n impair} \end{cases} \qquad n \geq 1$

$|C_n| \underbrace{\sim}_{n \to \infty} \frac{1}{n}$ pour tous les signaux avec une discontinuité

- Si $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(k-1)}$ sont des signaux continus, et $x^{(k)}$ a des discontinuites, alors $|C_n| \underbrace{\sim}_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{k+1}}$

$x(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n e^{i2\pi \frac{n}{T} t}$
T periodique
C_n coef du n^e harmonique $\rightarrow$ frequence $\frac{n}{T}$
C_{n+1} coef du $(n+1)^e$ harmonique $\rightarrow$ frequence $\frac{n+1}{T}$

"gap" en frequence $\frac{n+1}{T} - \frac{n}{T} = \frac{1}{T}$

Signal non periodique

signal periodique de periode infinie (T = ∞ $\rightarrow$ gap nul entre deux frequences successives)
$\rightarrow$ etude par la transformee de Fourier $\equiv$ generalisation des series de fourier aux signaux non periodiques

Serie de Fourier

Definition : Sous reserve d'existence, la transformee d'un signal x est la fonction :

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ \nu &\rightarrow \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-i2\pi\nu t}dt \\ C_n = \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}\rightarrow+\infty}^{\frac{T}{2}\rightarrow+\infty} & x(t)e^{-i2\pi\underbrace{\frac{n}{T}}_{\nu}t} dt \end{aligned}$$

$\mathcal{F}(x(t)) = x(f) = X(\nu)$
$X(\nu)$ existe $\Leftrightarrow$ $|X(\nu)| < \infty$

$$\begin{aligned} \forall\nu \in \mathbb{R}, |X(0)| &= |\int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-i2\pi\nu t}dt| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |x(t)||\underbrace{e^{-i2\pi\nu t}}_{=1}|dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \underbrace{|x(t)|}_{<+\infty}dt \end{aligned}$$

Condition d'existance de la TF:
Si $x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors X existe.

Th de Dirichlet : $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)e^{i2\pi\nu t}d\nu$

Transformée de Fourier inverse : Sous réserve d'existence, on peut inverser la transformée de Fourier : $\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)^{+i2\pi\nu t}e\; d\nu}$

Transformée de fourier d'une porte

$\mathcal{F}(\Pi_T(t)) = \widehat{\Pi}_T(\nu) = \int_{\mathbb{R}_{+\infty}} \Pi_T(t)e^{-i2\pi\nu t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_T(t)e^{-i2\pi\nu t}\, dt$

$$
\begin{aligned}
\widehat{\Pi}_T(\nu) &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-i2\pi\nu t}dt \\
&= -\frac{1}{i2\pi\nu}[e^{-i2\pi\nu t}]_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
&= -\frac{1}{i2\pi\nu}(e^{-i2\pi\nu\frac{T}{2}} - e^{i2\pi\nu\frac{T}{2}}) \\
&= \frac{e^{i\pi\nu T} - e^{-i\pi\nu T}}{i2\pi\nu} \\
&= \frac{1}{\pi\nu} * \frac{e^{i\pi\nu T} - e^{-i\pi\nu T}}{2i} \\
&= \frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu}
\end{aligned}
$$

Sinus cardinal :

$$
sinc : x \mapsto \begin{cases} \frac{sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}
$$

$$
\mathcal{F}(\Pi_T(t) = T \underbrace{\quad \underbrace{sinc}_{\text{sinus cardinal}} \quad (\pi\nu T))}_{*schema*}
$$

dirac
$\delta(\nu)$ =

$$
\begin{cases} \inf & \nu = 0 \\ 0 & \nu \neq 0 \end{cases}
$$

$\int_{\mathbb{R}} \delta(\nu)d\nu = 1$

$$
\delta(t) = \begin{cases} \inf & \text{t} = 0 \\ 0 & \text{t} \neq 0 \end{cases} \quad et \int_{\mathbb{R}} \delta(t)dt = 1
$$

$$
\equiv \delta(t - t_0) = \begin{cases} \inf & \text{t} = t_0 \\ 0 & \text{t} \neq t_0 \end{cases}
$$

$$
\alpha\delta_{t_0}(t) = \begin{cases} \inf & \text{t} = t_0 \\ 0 & \text{t} \neq t_0 \end{cases} \int_{\mathbb{R}} \alpha\delta_{t_0}(t)dt = \alpha \int_{\mathbb{R}} \delta_{t_0}(t)dt = \alpha
$$

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0) = \begin{cases} \inf & \text{t} = t_0 \\ 0 & \text{t} \neq t_0 \end{cases}$$

$$et \int_{\mathbb{R}} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$

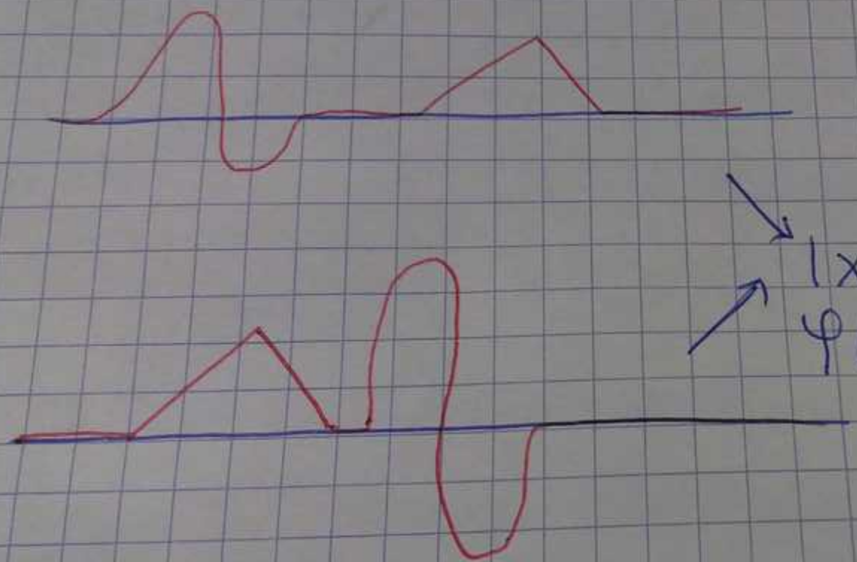
On “preleve/echantillonne” le signal de x en t_0

$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$
$t_0 = 0 \to (x \circ \delta)(t) = x(t)$

$\mathcal{F}(1) = \delta(\nu) \qquad \mathcal{F}(\alpha) = \alpha\delta(\nu)$

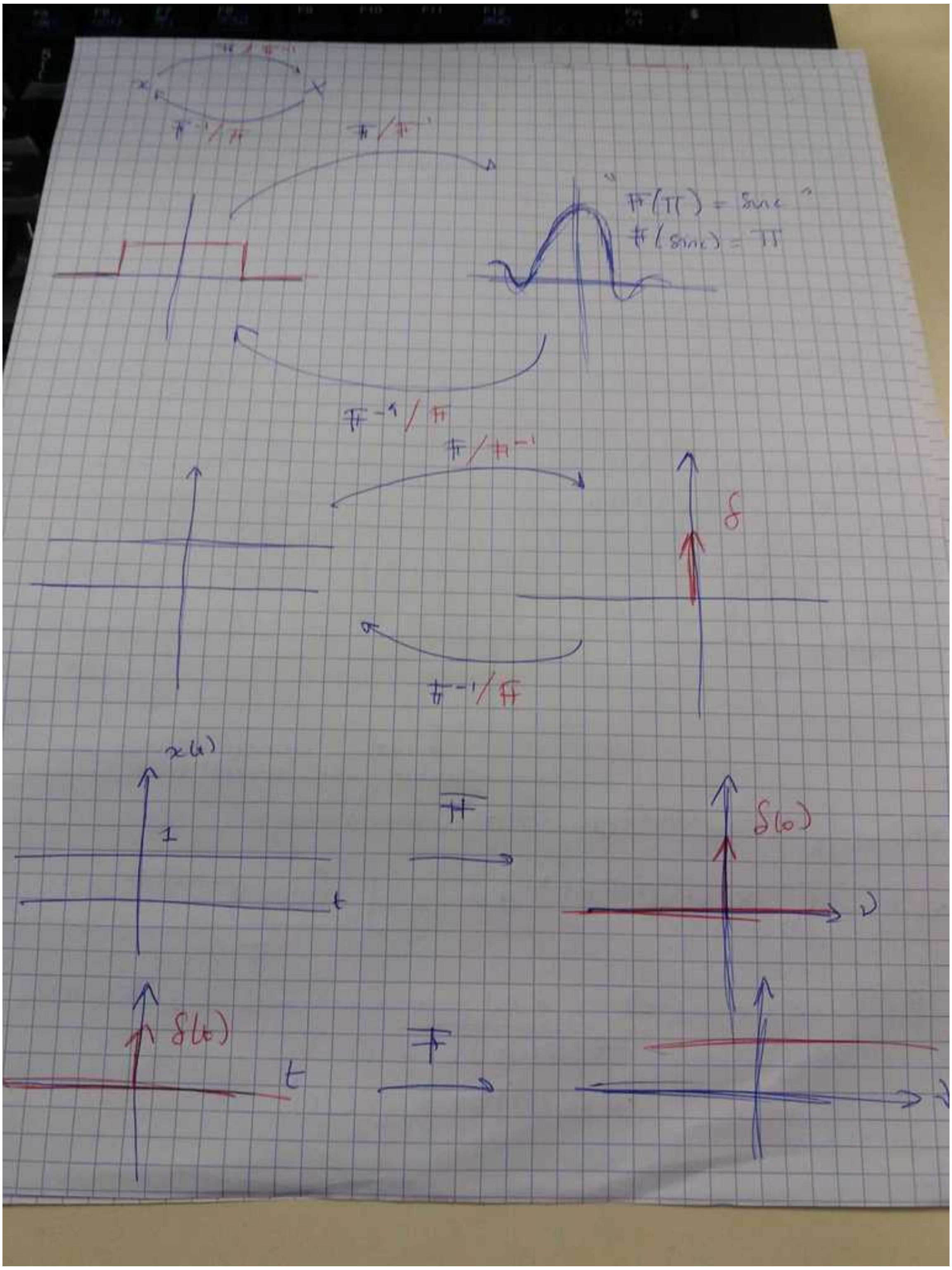
$x(t) = \int_{\mathbb{R}} x(\nu)e^{i2\pi\nu t}d\nu$ (TF inverse)
$x(-t) = \int_{\mathbb{R}} x(\nu)e^{i2\pi\nu(-t)}d\nu = \int_{\mathbb{R}} x(\nu)e^{-i2\pi\nu t}d\nu = \mathcal{F}(X(\nu)) = \mathcal{F}(x(t))$

$\mathcal{F}(\mathcal{F}(x(t))) = x(-t)$
si x est pair $x(-t) = x(t)$
$\mathcal{F}(\mathcal{F}(x(t))) = x(t)$
$\mathcal{F}(x(t)) = \mathcal{F}^{-1}(x(t))$
$\mathcal{F}(\Pi) = sinc$
$\mathcal{F}(sinc) = \Pi$



$$|X_1(\nu)| = |X_2(\nu)|$$

$$\varphi(X_1(\nu)) \neq \varphi(X_2(\nu))$$



Si x est à valeurs réelles, $X(\nu) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{i2\pi\nu t}dt$

$$
\begin{aligned}
\overline{X(\nu)} &= \overline{\int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-i2\pi\nu t} dt} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\overline{x(t)}}_{x(t)} \underbrace{\overline{e^{-i2\pi\nu t}}}_{e^{-i2\pi\nu t}} \\
&= \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{i2\pi(-\nu)t} dt \\
&= X(-\nu) = \overline{X(\nu)} \\
&(\overline{C_n} = C_{-n})
\end{aligned}
$$

Le spectre d'un signal reel est pair.

Si x est reel et pair

formule d'euler : $e^{-i\theta} = cos(\theta) - i * sin(\theta)$

$$
\begin{aligned}
{}_{\in\mathbb{C}}X(\nu) &= \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{i2\pi\nu t} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} x(t)(cos(2\pi\nu t) - i * sin(2\pi\nu t))dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} x(t) cos(2\pi\nu t)dt - i \int_{\mathbb{R}} x(t) sin(2\pi\nu t)dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X(-\nu) &= \int_{\mathbb{R}} x(t) \cos(2\pi(-\nu)t)\, dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} x(t) \underbrace{\cos(-2\pi\nu t)}_{\cos(2\pi\nu t)} dt = X(\nu)
\end{aligned}
$$

La TF d'un signal reel et pair est reelle et paire.

Si x est reel et impair $\rightarrow$ Sa TF est imaginaire pure et impaire

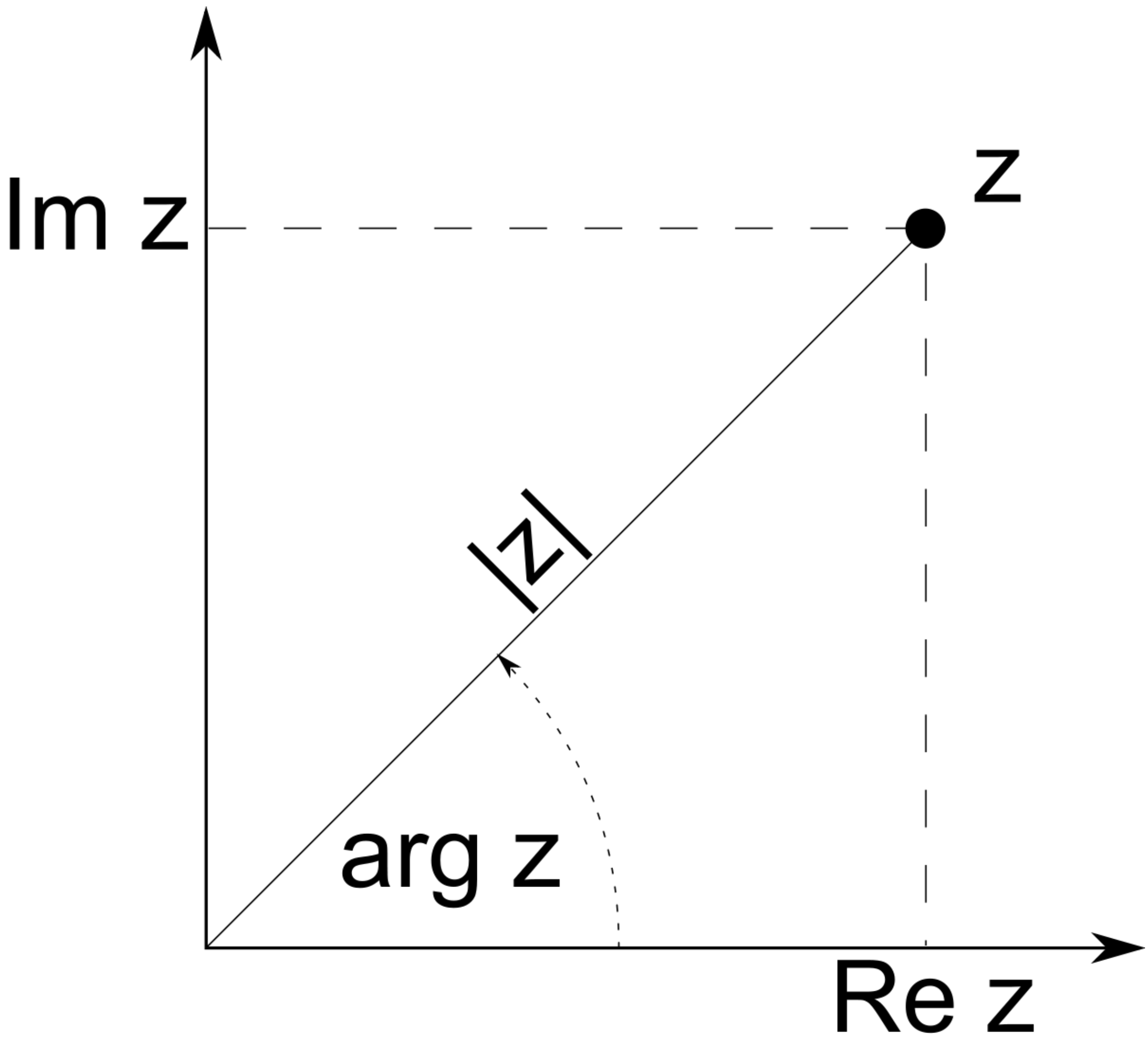
$$
\begin{aligned}
X(\nu) &= -i \int_{\mathbb{R}} x(t) \sin(2\pi\nu t) dt \\
X(-\nu) &= -i \int_{\mathbb{R}} x(t) \sin(2\pi(-\nu)t) dt \\
&= -i \int_{\mathbb{R}} x(t) \underbrace{\sin(-2\pi\nu t)}_{-sin(2\pi\nu t)} dt \\
&= i \int_{\mathbb{R}} x(t) \sin(2\pi\nu t) dt = -X(\nu)
\end{aligned}
$$

Dans le cas général:

$$X(\nu) \in \mathbb{C},\ X(\nu) = Re(X(\nu)) + iIm(X(\nu))$$
$$= |X(\nu)|e^{i\phi(X(\nu))}$$

$|X(\nu)| \Rightarrow spectre \rightarrow$ amplitudes des frequences du sigal

$$x = |Z|cos(\phi)$$
$$y = |Z|sin(\phi)$$
$$Z = x + iy = |Z|e^{i\phi(Z)}$$
$$Z = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\phi(Z) = arctan(\frac{y}{x})$$



$$x \overbrace{\rightarrow}^{\mathbb{F}} X$$

$$\begin{aligned} x(t-t_0) \overbrace{\rightarrow}^{\mathbb{F}} \int_{\mathbb{R}} x \underbrace{(t-t_0)}_{u=t-t_0 | t=t_0+u | dt=du} e^{-i2\pi\nu t} dt \\ = \int_{\mathbb{R}} x(u) e^{-i2\pi\nu(t_o+u)} du \\ = \int_{\mathbb{R}} x(u) e^{-i2\pi\nu u} e^{-i2\pi\nu t_0} du \end{aligned}$$

$\mathbb{F}(x(t-t_0)) = e^{i2\pi\nu t} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} x(u) e^{-i2\pi\nu t} du}_{X\nu}$

$\mathbb{F}(x(t-t_0)) = X(\nu) e^{-i2\pi\nu t_0}$
$|\mathbb{F}(x(t-t_0))| = |X(\nu) e^{-i2\pi\nu t_0}| = |X(\nu)|$
Le module n'as pas change

$$\begin{aligned} \phi(\mathbb{F}(x(t-t_0))) &= \phi(X(\nu) e^{-i2\pi\nu t_0}) \\ &= \phi(X(\nu)) + \phi(e^{-i2\pi\nu t_0}) \\ &= \phi(X(\nu)) - 2\pi\nu t_0 \end{aligned}$$

La phase a change
$\Rightarrow$ position/localistaion des frequences dans le signal

> module $\rightarrow$ amplitude des frequences
> phase $\rightarrow$ position des frequences

$cos(2\pi \underbrace{f_0}_{frequence} t) \rightarrow^{\mathcal{F}} \frac{1}{2}(\delta(\nu + f_0) + \delta(\nu - f_0))$

$\sin(2\pi f_0 t) \rightarrow^{\mathcal{F}} \frac{1}{2}(\delta(\nu + f_0) - \delta(\nu - f_0))$

la transformee de Fourrier d'une gaussienne est une gaussienne

$$\begin{aligned} x_N &= x_\infty * \Pi_N \\ \mathbb{F}(x_N) &= \mathbb{F}(x_\infty * \Pi_N) \\ &= \mathbb{F}(x_\infty) \times (\Pi_N) \end{aligned}$$

[HACKMD part 2](https://hackmd.io/kMSgN3tNTeyI3GJmyzt6IA#) (https://hackmd.io/kMSgN3tNTeyI3GJmyzt6IA#)