Introduction traitement signal 2

$X(\nu) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-i2\pi\nu t}dt$

$x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(\nu)e^{i2\pi\nu t}d\nu$

x reel $\Rightarrow X(-\nu) = \overline{X(0)}$
en particulier : $|X(-\nu)| = |X(\nu)|$

$\mathcal{F}(\mathcal{F}(x(t))) = x(-t)$
Si x est pair:
$\mathcal{F}(\mathcal{F}(x(t))) = x(t)$
$\mathcal{F}(x(t)) = \mathcal{F}^{-1}(x(t))$

x est reel et pair ⇔ X est reelle et pair
x est reel et impair ⇔ X est reelle et impaire

> la TF de dirac est une constante et la TF d'une constante est dirac

$\mathcal{F}(\cos(2\pi\nu_0 t)) \rightarrow \frac{1}{2}(\delta(\nu + \nu_0) + \delta(\nu - \nu_0))$
$\mathcal{F}(\sin(2\pi\nu_0 t)) \rightarrow \frac{1}{2}(\delta(\nu + \nu_0) - \delta(\nu - \nu_0))$

En general: $X(\nu) = Re(X(\nu)) + i\mathcal{J}_n(X(\nu)) = |X(\nu)|e^{i\varphi(X(\nu))}$
$\mathcal{F}(x(t - t_0)) = e^{-i2\pi\nu t_0}X(\nu)$
$\rightarrow |\mathcal{F}(x(t - t_0))| = |\mathcal{F}(x(t))|$
$\varphi(\mathcal{F}(x(t - t_0))) \neq \varphi(\mathcal{F}(x(t)))$

> La phase est plus importante que le module (visuellement pour un humain) Cf dindon + smiley

$(x * y)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(\tau - t)dt$
$x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ alors $(x * y) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Si $X = \mathcal{F}(x)$, $Y = \mathcal{F}(y)$, $\mathcal{F}(x * y) = \underbrace{X(\nu)Y(\nu)}_{produit\ algebrique}$

$x \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, $y \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ alors $xy \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

$\mathcal{F}(xy) = (X * Y)(\nu)$

Pour effectuer une convolution entre une image et un kernel, on passe l'image et le kernel dans l'espace de Fourier, on les multiplie point a point (càd multiplication de matrice intuitive, appelé produit de Hadamard (https://en.wikipedia.org/wiki/Hadamard_product_(matrices))), et on revient dans l'espace de depart. Le kernel doit etre centré dans un tableau rempli de 0 en valeurs par default. On centre le masque et on padde autour avec des 0.
$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(I) * \mathcal{F}(h))$
$\mathcal{F}(x) \rightarrow O(nlog(n))$

$\frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{|C_n|^2}_{\text{(energie d'une harmonique)}}$

Egalite de parseval.

$E_x = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = ||x|| = \Gamma_{xx}(0)$

$E_X = \int_{\mathbb{R}} |X(\nu)|^2 d\nu =$ energie de X

Egalite de Parseval: $E_x = E_X$

$\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \overbrace{|X(\nu)|^2}^{\text{densite spectrale d'energie}} d\nu$

En vrai: $\int_{\mathbb{R}} x(t)\overline{y(t)}dt = \int_{\mathbb{R}} X(\nu)\overline{Y(\nu)}d\nu$

$\Gamma_{xy}(\tau) =< x(t), y(t-\tau) >= \int_{\mathbb{R}} x(t)\overline{y(t-\tau)}dt$
$\mathcal{F}(\Gamma_{xy})? \qquad \Gamma_{xy} = (x * \overline{y^-})$
$\mathcal{F}(\Gamma_{xy}) = \mathcal{F}(x * \overline{y^-}) = \underbrace{\mathcal{F}(x)}_{X(\nu)}\mathcal{F}(\overline{y^-})$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\overline{y^-}) &= \int_{\mathbb{R}} \overline{y^-}(t)e^{-i2\pi\nu t}dt \\
&= \overline{\int_{\mathbb{R}} y^-(t)e^{i2\pi\nu t}dt} \\
&= \overline{\int_{\mathbb{R}} y(-t)e^{i2\pi\nu t}dt} \\
&= \overline{\int_{\mathbb{R}} y(u)e^{-i2\pi\nu u}du} \\
&= \overline{Y(\nu)}
\end{aligned}$$

$u = -t \quad du = -dt$

$\mathcal{F}(\Gamma_{xy}) = X\nu\overline{Y(\nu)}$
$\mathcal{F}(\Gamma_{xx}) = X(\nu)\overline{X(\nu)} = \underbrace{|X(\nu)|^2}_{\Gamma_{xx}(\nu)}$

$E_x = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \Gamma_{xx}(0)$
$\gamma_{xx}(\nu) = |X(\nu)|^2 = \mathcal{F}(\Gamma_{xx})$
$\Gamma_{xx}(\tau) = \mathcal{F}(|X(\nu)|^2)(\tau) = \int_{\mathbb{R}} |X(\nu)|^2 e^{i2\pi\nu\tau} d\nu$
$E_x = \Gamma_{xx}(0) = \Gamma_{xx}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} |X(\nu)|^2 d\nu$

On dit qu'un signal x est a borne limitee de bande B si $\forall |\nu| \geq B, X(\nu) = 0$

Si x est a borne limitee, il est d'energie finie

$\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |X_\nu|^2 d\nu = \int_{-B}^{B} |X(\nu)|^2 d\nu < +\infty$

$x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(\nu)e^{i2\pi\nu t} d\nu = \int_{-\mathbb{B}}^{\mathbb{B}} X(\nu)e^{i2\pi\nu t} d\nu$

$\frac{d}{dt}x(t) = x'(t) = \frac{d}{dt}(\int_{-\mathbb{B}}^{\mathbb{B}} X(\nu)e^{i2\pi\nu t}d\nu) = \int_{-\mathbb{B}}^{\mathbb{B}} X(\nu)\frac{d}{dt}e^{i2\pi\nu t}d\nu$

$\frac{d}{dt}e^{i2\pi\nu t} = i2\pi\nu t e^{i2\pi\nu t}$
$x'(t) = \int_{-B}^{B} i2\pi\nu t X(\nu)e^{i2\pi\nu t}d\nu = i2\pi\int_{-B}^{B}\nu X(\nu)e^{i2\pi\nu t}d\nu$

$$\begin{aligned}|x'(t)| &= |i2\pi\int_{-B}^{B}\nu t X(\nu)e^{i2\pi\nu t}d\nu| \\ &\leq 2\pi\int_{-B}^{B}|\nu||X(\nu)|\underbrace{|e^{i2\pi\nu t}|}_{1}d\nu \\ &\leq 2\pi\int_{-B}^{B}\underbrace{|\nu|}_{\leq B}|X(\nu)|d\nu \\ &\leq 2\pi B\int_{-B}^{B}|X(\nu)|d\nu \qquad \forall t\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

$\max|x'(t)| \leq 2\pi B\int_{-B}^{B}|X(\nu)|d\nu$ (theoreme de Bernstein)

Si j'ai un signal qui a une large bande de frequence, alors il peut varier rapidement.

(haute frequence $\rightarrow$ varier rapidement)

Conversion analogique numérique

$$\underset{\substack{x_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ t\mapsto x_a(t)}}{\longrightarrow}\boxed{CAN}\underset{x_n\mathbb{Z}\to\mathbb{F}}{\longrightarrow}$$

$\mathbb{Z}$: discretisation de l'axe du temps
$\mathbb{F}$: ensemble des valeurs admissibles du dictionnaire

$$\underset{x_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}{\longrightarrow}\boxed{\rightarrow\boxed{\text{echantillonage}}\underset{x_e\mathbb{Z}\to\mathbb{R}}{\longrightarrow}\boxed{\text{quantification}}\rightarrow}\underset{x_n:\mathbb{Z}\to\mathbb{F}}{\longrightarrow}$$

quantification = arrondi (en gros)

Echantillonnage $\equiv$ discretisation de l'axe des temps.
En theorie, on peut echantillonner a intervalle non regulier
$\mathbb{R}\longrightarrow(t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$

En pratique, on va prendre des ecantillons regulierement espaces.
tn = nTe Te $\equiv$ periode/pas d'echantillonnage

en gros:
SIGNAL $\times$ PEIGNE DE DIRAC $=$ ECHANTILLONAGE EN UNE VALEUR

$$x(t)x\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0) = \begin{cases}+\infty & t=t_0\\ 0 & t\neq t_0\end{cases}$$

Si on veut echantilloner en t_0 et en t_1
$\rightarrow x(t)\delta(t-t_0)+x(t)\delta(t-t_1)$
$x(t)(\delta(t-t_0)+\delta(t-t_1))$

$$Ш_{T_e}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_e)$$

Ш (https://en.wikipedia.org/wiki/Sha_(Cyrillic)) se dit "sha"

Si on souhaite echantillonner regulierement, a la periode T_e, il faut:
T_e suffisamment petit pour ne pas perdre d'information et pas trop petit pour ne pas gaspiller de place.

Le T_e optimal va dependre de la vitesse de variation du signal.
$x_e(t) = x(t) \times Ш_{T_e}(t)$
$X_e(\nu) = \mathcal{F}(x_e(t)) = \mathcal{F}(x(t)Ш_{Te}(t)) = \underbrace{\mathcal{F}(x(t))}_{X(\nu)} * \mathcal{F}(Ш_{Te}(t))$

$\mathcal{F}(Ш_{T_e(t)}) = \frac{1}{T_e}Ш_{\frac{1}{T_e}}(\nu) = \hat{Ш}_{T_e}(\nu)$

$\mathcal{F}(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t - nT_e)) = \frac{1}{T_e}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\nu - \frac{n}{T_e})$

$$\begin{aligned} X_e(\nu) &= X(\nu) * (\frac{1}{T_e}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\nu - \frac{n}{T_e})) \\ &= \frac{1}{T_e}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X(\nu) * \delta(\nu - \frac{n}{T_e}) \\ &= \frac{1}{T_e}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X(\nu - \frac{n}{T_e}) \end{aligned}$$

$X_e(\nu) = \frac{1}{T_e}(\ldots + X(\nu + \frac{1}{T_e}) + X(\nu) + X(\nu - \frac{1}{T_e}) + \ldots)$

Echantillonner en temporel $\equiv$ periodiser en frequentiel

Pas de recouvrement: $B \leq \frac{1}{T_e} - \underbrace{B}_{\text{freq du signal}}$

$\frac{1}{T_e} = f_e \geq 2B$

> **Theoreme de Shannon**: pour echantillonner sans perte un signal de frequence max f_{max} il faut une frequence d'echantillonnage f_e tq $f_e \geq 2f_{max}\boxed{\text{condition de Nyquist}}$

$$\max|x'(t)| \leq 2\pi B\int_{-B}^{B}|X(\nu)|d\nu$$

En gros:
Une fois que le signal est echantilloné il y a la quantification. Plus il y a de niveaux de quantification plus la representation du signal va etre bonne.

$$\begin{aligned} x_e(t) &= x(t) \times Ш_{T_e}(t) \\ &= x(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t - nTe) \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty}x(t)\delta(t - nTe) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nTe)\delta(t - nTe) \end{aligned}$$

$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$
$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$
$\mathcal{F}(Ш_{T_e}(t)) = \hat{Ш}_{T_e}(u) = \frac{1}{T_e}Ш(\frac{1}{T_e}\nu)$
$= \frac{1}{T_e}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\nu+\frac{n}{T_e})$
(porte) $\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x(t)) = X_e(\nu) &= \mathcal{F}(x(t)Ш_{T_e}(t)) \\ &= X(\nu) * \hat{Ш}_{T_e}(u) = X(\nu) * \frac{1}{T_e}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\nu-\frac{n}{t_e}) \\ &= \frac{1}{T_e}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X(\nu)\delta(\nu-\frac{n}{t_e})\end{aligned}$$

$$X_e(\nu) = \frac{1}{T_e}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X(\nu-\frac{n}{t_e})$$

$$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nTe)\delta(t-nTe)$$

$$\begin{aligned}T_eX_e(\nu) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}X(\nu-\frac{n}{t_e}) \\ &= (\dots + X(\nu+\frac{1}{T_e}) + \boxed{X(\nu)} + X(\nu-\frac{1}{T_e}) + \dots)\end{aligned}$$

$X(\nu) = T_eX_e(\nu) \times \Pi_{\frac{1}{T_e}}(\nu) \rightarrow x(t)\mathcal{F}^{-1}(T_eX_e(\nu)\Pi_{\frac{1}{T_e}}(\nu))$
$= (\text{Plancherel})T_e\mathcal{F}^{-1}(X_e(\nu)) * \mathcal{F}^{-1}(\Pi_{\frac{1}{T_e}}(\nu))$
$= T_ex_e(t) * \frac{1}{T_e}sinc(\frac{\pi t}{T_e})$
$= \sum_{-\infty}^{+\infty}x(nT_e)\delta(t-nTe) * sinc(\frac{\pi t}{T_e})$
$= \sum_{-\infty}^{+\infty}x(nTe)sinc(\frac{\pi t}{T_e}) * \delta(t-nTe)$
$\boxed{x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty}x(nT_e)sinc(\frac{\pi}{T_e}(t-nT_e))}$

Ceci est la formule d'interpolation de Shannon Whittaker.

Celle-ci n'est pas causale, et donc difficile à mettre en œuvre en pratique (on a besoin des échantillons futurs pour reconstruire le présent).

I Filtrage (Julie)

1. Bruit

C'est un certain type de signal, qui interfere avec le signal qu'on veut etudier. Il a differentes sources de bruit.

- toutes les problemes d'acquisition lies au capteur (ex : les resistances)

- Conversion analogique numerique
- Sources exterieures (vent/ poussiere)

2. Types de Bruit

- Bruit deterministe
  - Pas de composante aléatoire au bruit
  - exemple: le courant alternatif
- Bruit aleatoire

signaux aleatoire : extraits d'un processus aleatoire
En repetant 2 fois la meme operation, on aura un signal different.
I.e. : jeter un dé n fois. $\rightarrow$ On peut caracteriser cela avec (esperance/variance)

Autre exemple: un signal **Gaussien** $\rightarrow$ sa densite de probabilite est la loi normale.

Ergodisme au premier ordre

Signal dont la moyenne temporelle calculee sur T tend vers la moyenne statistique lorsque la plage vers laquelle on definit le signal tend vers $+\infty$

Bruit Blanc
C'est un signal dont toutes les frequences ont la meme energie.
La densite d'energie moyenne est constante sur toutes les frequences.
$E[\Gamma_{bb}(\nu)] = \sigma_{bb}^2$

II Reduction du bruit par filtrage

Ex: $\forall t \in \mathbb{R},\ \underset{\text{observé}}{y(t)} = \underset{\text{interet}}{x(t)} + \underset{\text{bruit blanc additif gaussien}}{b(t)}$

$$y(t) \rightarrow \boxed{\underset{\text{fonction de filtre}}{h(t)}} \rightarrow s(t)$$

$$s(t) = (y + h)(t) = \underset{s_x(t)}{(x * h)(t)} + \underset{s_b(t)}{(b * h)(t)}$$

$s_x(t)$: partie signal
$s_b(t)$: partie bruit

Rapport signal sur bruit (RSB)

RSB $= \frac{\text{Energie(signal)}}{\text{Energie(bruit)}}$
RSB $= \frac{E_{s_x}}{E_{s_b}} = \frac{\int_{\mathbb{R}} |s_x(t)|^2 dt}{\sigma_b^2}$

III Effet de la fenetre d'apodisation

$$B < \frac{4}{T}$$
$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Pi_T(t - kT)$$
$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Pi_T(t) * \delta(t - kT)$$

$X(\nu) = \mathcal{F}(x(t))$
$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(\Pi_{\frac{T}{2}}(t) * \delta)$
$= \sum_k \mathcal{F}(\Pi_{\frac{T}{2}}(t)) \times \mathcal{F}(\delta())$
$= \mathcal{F}(\Pi_{\frac{T}{2}}(t)) \times \mathcal{F}(\sum_k \delta(t - kT))$
$= \frac{T}{2} sinc(\Pi\nu\frac{T}{2}) \times \frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(\nu - \frac{k}{T})$
$= \frac{1}{2} sinc(\Pi\nu\frac{T}{2}) \times \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(\nu - \frac{k}{T})$

Une periodisation dans le temps revient a un echantillonage en frequence.

Rappel: La transformee de Fourier de la fonction porte donne le sinus cardinal

Utilisation d'autre fenetre d'apodisation pour reduire les lobes secondaires du sinc $\rightarrow$

- fenetre de Hannung
- fenetre de Hamming
- fenetre de Blackman