

# Traitement avancé du signal

Nicolas Boutry<sup>1</sup>

✉ nicolas.boutry@lrde.epita.fr

<sup>1</sup> Laboratoire de Recherche et Développement de l'EPITA (LRDE), France

Octobre 2019



# Outline

1

## Introduction à un monde transitoire

- Le mariage temps-fréquence
- La transformée de Fourier à fenêtre
- La transformée en ondelettes
- Pavages temps-fréquence
- Applications : cas général
- Application 1 : approximations

# Outline

1

## Introduction à un monde transitoire

- Le mariage temps-fréquence
- La transformée de Fourier à fenêtre
- La transformée en ondelettes
- Pavages temps-fréquence
- Applications : cas général
- Application 1 : approximations

# Le mariage temps-fréquence

## 1 Introduction à un monde transitoire

- Le mariage temps-fréquence
- La transformée de Fourier à fenêtre
- La transformée en ondelettes
- Pavages temps-fréquence
- Applications : cas général
- Application 1 : approximations

# Le mariage temps-fréquence I

- **Principe d'incertitude d'Heisenberg** : *l'énergie d'une fonction et de sa transformée de Fourier ne peuvent être concentrées en même temps sur des intervalles arbitrairement petits,*
- Exemple 1 : un Dirac temporel  $\delta(t - t_0)$  est concentré temporellement en  $t_0$  mais son spectre est à support infini (et ne décroît même pas dans le temps !),
- Exemple 2 : un Dirac fréquentiel  $\delta(\omega - \omega_0)$ , c'est à dire une sinusoïde temporelle  $\exp^{-j(\omega-\omega_0)t}$ , a son énergie centrée en  $\omega_0$  mais son module vaut 1 partout dans le temps !
- Autrement dit : une grande précision (définie ci-après) ou localisation en temps  $\Rightarrow$  faible précision en fréquence, et inversement,
- On entend par **précision temporelle/fréquentielle** la capacité d'un système à différencier deux signaux proches temporellement/fréquentiellement,
- 1946: Gabor propose d'étudier les signaux sonores avec des **atomes élémentaires** précis en temps et en fréquence autant que possible (détailé plus tard).

## Le mariage temps-fréquence II

- Cela mena à la naissance de l'**analyse temps-fréquence** (liée à la perception humaine des signaux),
- 1948 : Ville  $\Rightarrow$  étude temps-fréquence d'un signal  $f$  à partir d'une **densité d'énergie** [HORS COURS]:

$$P_V f(t, \omega) := \int_{\mathbb{R}} f(t + \frac{\tau}{2}) f^*(t - \frac{\tau}{2}) \exp^{-i\tau\omega} d\tau,$$

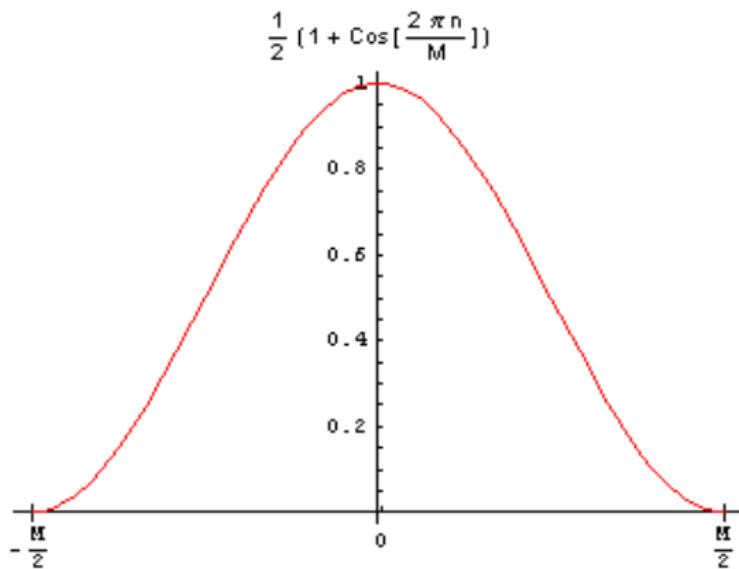
- Cette distribution fut en réalité introduite par Wigner en 1932 en mécanique quantique, d'où le nom de **distribution de Wigner-Ville**.

# La transformée de Fourier à fenêtre

## 1 Introduction à un monde transitoire

- Le mariage temps-fréquence
- **La transformée de Fourier à fenêtre**
- La transformée en ondelettes
- Pavages temps-fréquence
- Applications : cas général
- Application 1 : approximations

# La transformée de Fourier à fenêtre I



- Une **fenêtre** en traitement du signal est une fonction à support compact, symétrique autour du milieu de ce support, généralement maximale ou près de son maximum au centre, et évanescante (cf. Hanning, Hamming, Gaussienne tronquée, etc.).

# La transformée de Fourier à fenêtre II

- construction des **atomes de Gabor** à partir d'une fenêtre  $g$  translatée en temps et en fréquence:

$$g_{u,\xi}(t) = g(t - u) \exp^{i\xi t},$$

- l'énergie de  $g$  est donc concentrée au voisinage de  $u$  sur un intervalle de largeur :

$$\sigma_t = \text{StandardDeviation}(|g(t)|^2),$$

- on obtient comme TF de  $g$ :

$$\hat{g}_{u,\xi}(\omega) = \hat{g}(\omega - \xi) \exp^{-iu(\omega - \xi)},$$

- De la même façon, l'énergie de  $g$  est donc concentrée au voisinage de  $\xi$  (mais fréquentiellement) sur un intervalle de largeur :

$$\sigma_\omega = \text{StandardDeviation}(|\hat{g}(\omega)|^2),$$

- l'énergie de  $\hat{g}_{u,\xi}$  est donc localisée autour de la fréquence  $\xi$  sur un intervalle de largeur  $\sigma_\omega$  qui mesure le domaine où  $|\hat{g}(\omega)|$  est non négligeable,
- Attention, les intervalles de support ne sont pas égaux (en général) aux intervalles où est concentrée l'énergie !

# La transformée de Fourier à fenêtre III

- l'étalement de l'énergie de l'atome dans le plan temps-fréquence est symboliquement représenté par un **rectangle d'Heisenberg** de centre  $(u, \xi)$ , de largeur temporelle  $\sigma_t$  et de largeur fréquentielle  $\sigma_\omega$  :

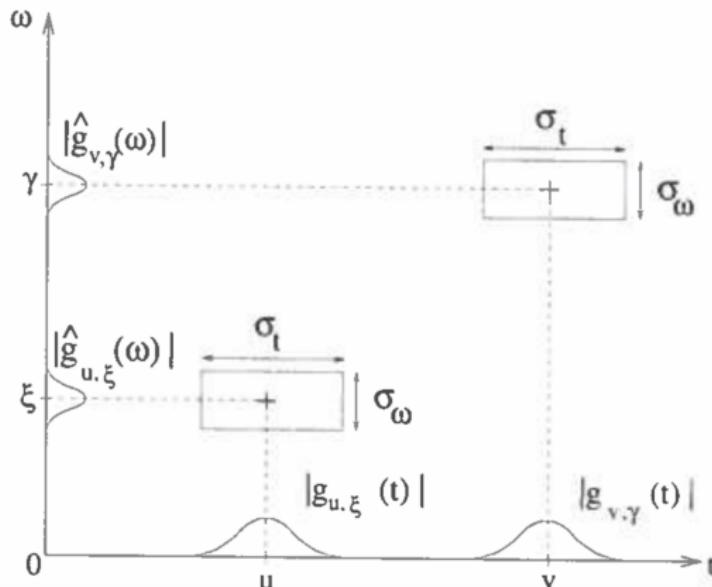


Figure: Diagramme d'Heisenberg d'une TFF

# La transformée de Fourier à fenêtre IV

- on observe bien le théorème d'incertitude d'Heisenberg :

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2},$$

- Autrement dit, si on a une très bonne précision en temps, c'est-à-dire  $\sigma_t \rightarrow 0$ , alors  $\sigma_\omega$  tend vers  $+\infty$  (mauvaise précision fréquentielle),
- cette surface  $\sigma_t \sigma_\omega$  est minimale lorsque la fenêtre  $g$  est une Gaussienne, on parle alors de **fonctions de Gabor** (cas optimal donc !),
- Attention à ne pas confondre les atomes de Gabor et les fonctions de Gabor !

# La transformée de Fourier à fenêtre V

- Supposons que l'on ait donc un atome temps-fréquence  $g_{u,\xi}^*(t)$  centré en  $(u, \xi)$ , alors la **Transformée de Fourier à fenêtre (TFF)** est définie en terme de corrélation par :

$$S f(u, \xi) := \int_{\mathbb{R}} f(t) g_{u,\xi}^*(t) dt \quad (1)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(t) g(t-u) \exp^{-i\xi t} dt \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \hat{g}_{u,\xi}^*(\omega) d\omega \quad (3)$$

- Rappel : la dernière égalité est obtenue par la **formule de Parseval**.
- Bien noter que l'on est passé d'une fonction temporelle 1D à une nouvelle fonction qui elle est 2D (temps  $\rightarrow$  temps + fréquence),
- Ces deux représentations (initiale et temps-fréquentielle) codent le même signal mais de façon différente,
- Ces intégrales montrent que :
  - Temporellement on ne considérera que les valeurs de  $f$  autour de  $u$ ,

# La transformée de Fourier à fenêtre VI

- Fréquemment, on ne considérera que les valeurs de  $\hat{f}$  autour de  $\xi$ .

# La transformée en ondelettes

## 1 Introduction à un monde transitoire

- Le mariage temps-fréquence
- La transformée de Fourier à fenêtre
- **La transformée en ondelettes**
- Pavages temps-fréquence
- Applications : cas général
- Application 1 : approximations

# La transformée en ondelettes I

- En 1984 : Morlet (sismologie par réflexion) et Grossman (physique théorique) s'unissent à Gabor, Ville et Wigner pour donner naissance à un mélange physique théorique et traitement du signal : (la formalisation de) la transformée en ondelettes (TFO),
- Note : notion non nouvelles en analyse harmonique ou en computer vision ! (cf. l'analyse multi-échelle d'images),
- une ondelette  $\psi : t \in \mathbb{R} \rightarrow \psi(t) \in \mathbb{R}$  est une fonction de moyenne nulle:

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0,$$

qui est dilatée par un paramètre d'échelle  $s > 0$  et translatée de  $u \in \mathbb{R}$ :

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right).$$

## La transformée en ondelettes II

- on appelle alors TFO de  $f$  à l'échelle  $s$  et à la position  $u$  la corrélation entre  $f$  et l'ondelette correspondante :

$$W f(u, s) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi_{u,s}^*(t) dt \quad (4)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^*\left(\frac{t-u}{s}\right) dt, \quad (5)$$

- comme une TFF, la TFO permet de mesurer les variations temporelles des composantes spectrales de  $f$ ,
- Dans le cas de la TFO, la résolution temps-fréquence dépend de son centrage  $(u, s)$  dans l'espace temps-fréquence,

## La transformée en ondelettes III

- dans le domaine fréquentiel, on obtient par la formule de Parseval :

$$W f(u, s) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi_{u,s}^*(t) dt \quad (6)$$

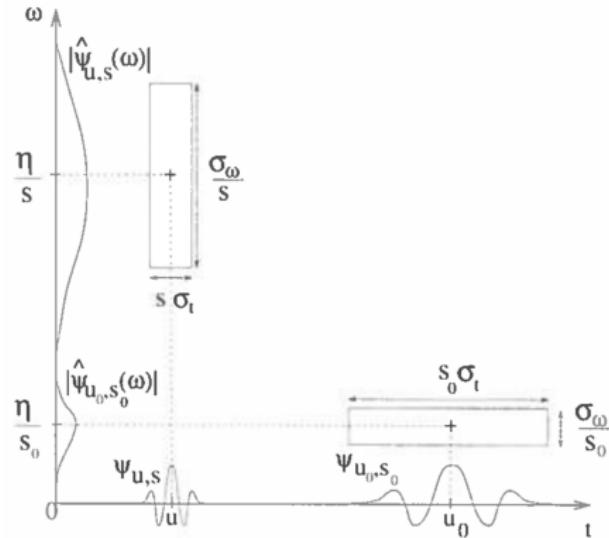
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \hat{\psi}_{u,s}^*(\omega) d\omega, \quad (7)$$

- Regardons la TF de  $\psi_{u,s}$  :

$$\hat{\psi}_{u,s}(\omega) = \exp^{-iu\omega} \sqrt{s} \hat{\psi}(s\omega),$$

- Le facteur d'échelle de  $s$  en temporel devient un facteur d'échelle en  $1/s$  en fréquentiel !
- Autrement dit, plus on s'étale en temps, le moins on s'étale en fréquence, et inversement.
- Ainsi on peut comprendre intuitivement la préservation de l'aire de la boîte d'Heisenberg (on perd d'un côté la précision que l'on aura gagnée de l'autre ...),

# La transformée en ondelettes IV



**Figure:** Boîtes d'Heisenberg dans le cas d'une TFO : l'ondelette en bas à droite est étalée dans le temps et donc concentrée en fréquence (donc bonne précision fréquentielle) ; la même ondelette mais compressée en temps (à gauche) donnera une meilleure précision temporelle mais une moins bonne précision en fréquence.

## La transformée en ondelettes V

- Pour une TFO, nous ne sommes PAS centrés en  $(u, s)$  !
- Imaginons sur la figure ci-dessus que l'on ait  $s_0 = 1$  et  $s = 1/10$ , alors on voit que :
  - $\psi_{u,s}$  est 10 fois moins étalée en temps que  $\psi_{u_0,s_0}$ ,
  - $\psi_{u,s}$  est 10 fois plus étalée en fréquence que  $\psi_{u_0,s_0}$ ,
  - $\psi_{u,s}$  est centrée temporellement indépendamment de  $\psi_{u_0,s_0}$ ,
  - $\psi_{u,s}$  est centrée 10 fois plus haut en fréquence que  $\psi_{u_0,s_0}$  (corrélation des centrages en fréquences).
- C'est donc le facteur d'échelle qui décide de la fréquence centrale de l'ondelette !
- la position dans l'espace temps-fréquence est donc liée à l'étalement temporel/fréquentiel,
- la taille des boîtes d'Heisenberg dépend donc de leur position dans le cas d'une TFO (vs. la TFF !)

## La transformée en ondelettes VI

- Aussi,  $W f(u, s)$  ne dépend que des valeurs  $f(t)$  et  $\hat{f}(\omega)$  dans les voisinages temporels et fréquentiels où sont concentrées les énergies de  $\psi_{u,s}$  et de  $\hat{\psi}_{u,s}$ .
- Exemple, si l'on prend une **ondelette analytique complexe**, telle que son spectre est nul pour les fréquences négatives:

$$\hat{\psi}(\omega) = 0 \text{ pour } \omega < 0,$$

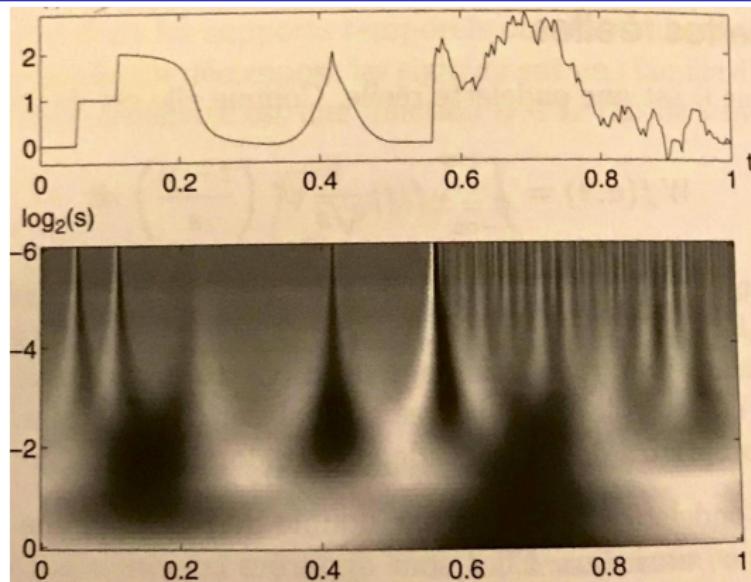
Alors:

- On peut alors analyser l'information de phase des signaux,
- L'énergie de  $\hat{\psi}$  est alors localisée autour d'une fréquence centrale  $\eta > 0$ ,
- Elle est donc concentrée autour de  $\eta/s$  pour  $\psi_{u,s}$  (cf. l'étalement de  $1/s$ ),
- On obtient donc un centrage en  $(u, \eta/s)$ .

## La transformée en ondelettes VII

- Cas de l'ondelette  $\psi$  réelle :
  - cette ondelette peut détecter et caractériser les transitoires par un zoom le long des échelles.
  - Comme  $\psi$  est réelle, le coefficient  $W f(u, s)$  mesure les **variations** dans un voisinage de  $u$ , de largeur proportionnelle à  $s$ .
- Intuition : les **variations brutales** d'un signal impliquent de gros coefficients d'ondelettes (comme pour une dérivée !!),
- Inversement, plus  $f$  est **régulière**, c'est-à-dire le moins  $f$  contient de discontinuités, plus les coefficients correspondant aux hautes fréquences décroissent,

# La transformée en ondelettes VIII



**Figure:** TFO d'un signal contenant des irrégularités : observer les amplitudes de la TFO versus la force des irrégularités dans le signal temporel, ainsi que la capacité à les localiser selon l'échelle observée.

## La transformée en ondelettes IX

- Détection des **singularités** de  $f$ : on suit les maxima locaux de la TFO dans l'espace temps-fréquence (on dira **le long des échelles**),
- Différentes échelles  $\Rightarrow$  contours d'objets de tailles différentes dans l'image  $\Rightarrow$  Computer vision & Reconnaissance de Formes,
- Remarque : d'un signal **1D** (c'est-à-dire  $f$ ), on est passé à une représentation **2D**, que ce soit pour la TF fenêtrée  $Sf(u, \xi)$  ou pour la TFO  $Wf(u, s)$   $\Rightarrow$  redondance d'information.

# La transformée en ondelettes X

- Rappel  $L^2(\mathbb{R})$  représente l'ensemble des fonctions  $f$  réelles d'énergie finie:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < +\infty$$

- Représentation dans  $L^2(\mathbb{R})$ : on peut écrire les TFF et TFO sous forme de **produits scalaires**:

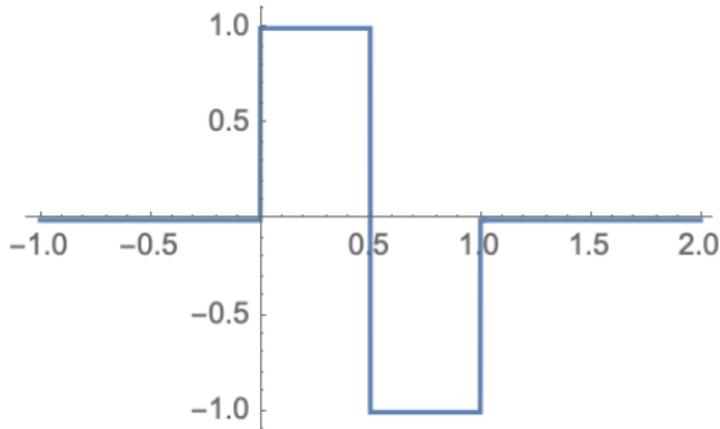
$$\begin{aligned} S f(u, \xi) &= \langle f, g_{u,\xi} \rangle, \\ W f(u, s) &= \langle f, \psi_{u,s} \rangle, \end{aligned}$$

- Ces produits scalaires seront souvent appelés **coefficients**.

## La transformée en ondelettes XI

- On dit qu'une représentation du signal à base (d'un nombre discret) d'atomes est **complète** si tout signal peut se reconstruire par combinaison linéaire de cette famille d'atomes,
- la **théorie des frames** établit les conditions pour que des bases d'ondelettes soient stables (définition plus tard) et complètes,
- Intuition : on cherche à éliminer la redondance via ces décompositions; on parle de **base de l'espace des signaux**.
- Exemples de bases:
  - bases d'ondelettes (orthogonales ou non),
  - bases de **paquets d'ondelettes**,
  - bases de **cosinus locaux**,
  - ...

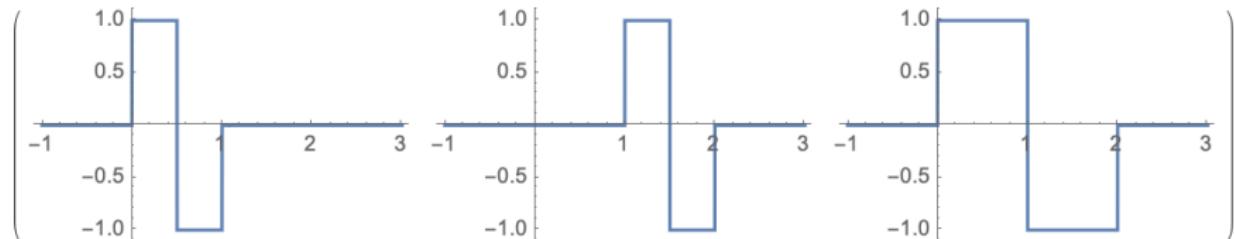
## La transformée en ondelettes XII



- ondelettes de Haar (1910) :

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq t < 1/2, \\ -1 & \text{pour } 1/2 \leq t < 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

# La transformée en ondelettes XIII



dont les translations et dilatations engendrent une base orthonormale dans  $L^2(\mathbb{R})$  :

$$\left\{ \psi_{j,n}(t) := \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t - 2^j n}{2^j}\right) \right\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2},$$

on peut alors décomposer tout signal  $f \in L^2(\mathbb{R})$  de la façon suivante :

$$f = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n}.$$

## La transformée en ondelettes XIV

- soit la **somme partielle**:

$$d_j(t) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n}(t),$$

alors  $d_j$  encode les variations de détails de  $f$  à l'échelle  $2^j$ ,

- Si  $f$  est régulière,

$$f_J(t) := \sum_{j=J}^{+\infty} d_j(t),$$

est une approximation "précise" de  $f$  à l'échelle  $2^J$ ,

- Plus  $J$  tend vers  $-\infty$ , plus on aura une **Résolution fine**,
- Intuition :  $+\infty$  correspond à la composante "constante" de  $f$ , et  $-\infty$  aux "discontinuités",

## La transformée en ondelettes XV

- Note : l'approximation de fonctions régulières par des ondelettes de Haar n'est pas du tout optimale,
- Par exemple, essayez de décomposer un disque en un nombre fini de carrés ...
- En effet, car pour la base de Haar,  $f$  est constante par morceaux !
- Il faut une ondelette qui représente au mieux les variations de  $f$  (son comportement en quelque sorte ...),

## La transformée en ondelettes XVI

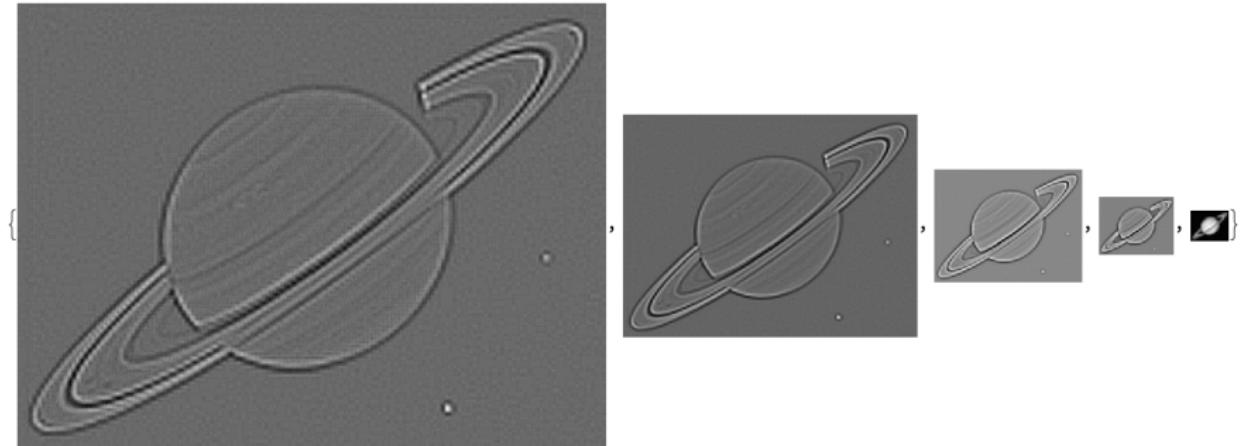
- Une meilleure modélisation/approximation de  $f$  régulière serait une fonction **affine par morceaux** (plus petites erreurs d'approximations),
- Un peu d'histoire !
  - Strömberg (1980) trouve une fonction **affine par morceaux** qui engendre une base orthonormale d'ondelettes améliorant l'approximation de fonctions régulières,
  - Ignorant ce résultat, Meyer essayait de prouver qu'il n'existe pas de fonctions régulières engendrant une base orthonormale  $\Rightarrow$  échec positif : trouve de nombreuses bases d'ondelettes orthonormales,
  - Mallat et Meyer introduisent en 1989 les **approximations multirésolutions** permettant de construire toutes les bases d'ondelettes orthonormales,

# La transformée en ondelettes XVII



**Figure:** Image initiale dont on voudrait une décomposition multirésolution

## La transformée en ondelettes XVIII



**Figure:** Exemple de pyramide Laplacienne : noter que les BF's se codent à basse résolution quand les HF's se codent à la résolution la plus fine.

- ces derniers furent inspirés par la [pyramide Laplacienne](#) (multirésolution) de Burt et Adelson de 1983 développée pour l'analyse d'images par ordinateur,

## La transformée en ondelettes XIX

- Croisier, Esteban et Galand travaillant sur la compression de la parole ont présenté en 1976 un **banc de filtres inversible**:
  - on décompose un signal discret  $f[n]$  en deux signaux de taille moitié, avec un double filtrage suivi d'un sous-échantillonnage,
  - ils ont montré que  $f[n]$  peut être reconstitué à partir de ces deux signaux en annulant les termes d'**aliasing** (effets d'escaliers dans les contours)
  - Ceci peut se faire à l'aide d'une classe de filtres spéciaux que l'on appelle **filtres miroirs conjugués** (propriétés mathématiques définies plus tard),
  - Cela a mené 10 ans après à la **théorie des complètes des bancs de filtres à reconstruction parfaite** (Smith, Barnwell, Vaidyanathan et Vetterli),
  - Les cascades de filtres miroirs conjugués ont alors permis de développer les **transformées en ondelettes rapides** ou FWT pour **fast wavelets transforms** (évidemment discrètes !),

# La transformée en ondelettes XX

- Continu vs. discret :
  - le continu permet une étude théorique des ondelettes :
    - translations et dilatations faciles,
    - possibilité d'étudier le lien entre l'amplitude des coefficients d'ondelettes et la régularité locale des fonctions
  - le discret quant à lui est :
    - plus compliqué (effets de bords, échantillonnage, etc.)
    - permet l'élaboration d'algorithmes rapides et efficaces,
- Important : l'étude des **convergences asymptotiques** des théories continues donnent une idée du comportement des algorithmes discrets !

# Pavages temps-fréquence

1

## Introduction à un monde transitoire

- Le mariage temps-fréquence
- La transformée de Fourier à fenêtre
- La transformée en ondelettes
- **Pavages temps-fréquence**
- Applications : cas général
- Application 1 : approximations

# Pavages temps-fréquence I

- **Complétude** d'une base: on peut représenter tout signal par une combinaison linéaire de vecteurs de cette base,
- Ceci s'observe par le pavage des boîtes d'Heisenberg de l'espace temps-fréquence,
- **Orthogonalité** d'une base : le produit scalaire de deux vecteurs différents est nul,
- Ceci s'observe par le fait que les boîtes d'Heisenberg ne se recouvrent pas dans l'espace temps-fréquence.
- Ainsi, on représente la **complétude** et l'**orthogonalité** des bases d'ondelettes par un pavage du plan temps-fréquence avec les boîtes d'Heisenberg correspondantes,

# Pavages temps-fréquence II

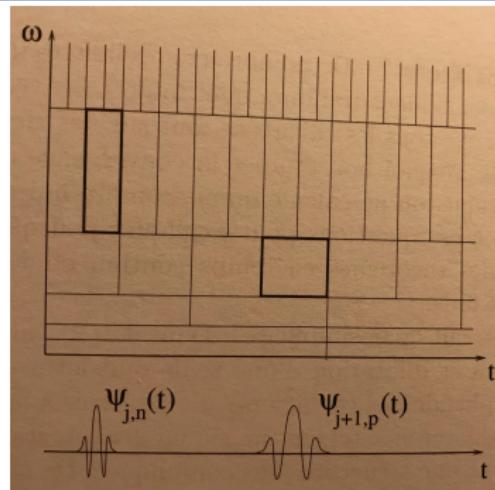
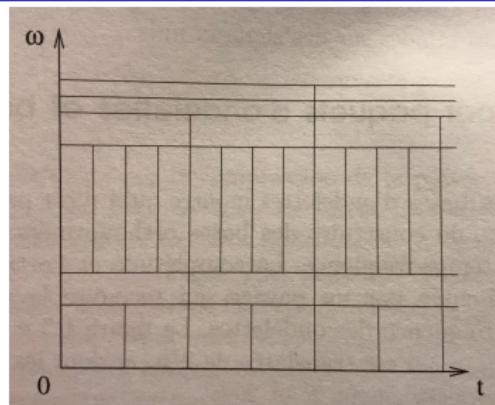


Figure: Pavage temps-fréquence d'une base d'ondelettes dyadiques (échelles en puissances de 2)

- **bases d'ondelettes orthonormées**  $\Rightarrow$  pavage dyadique (voir figure) : comme les  $\psi_{j,p}(t)$  sont de largeur temporelle  $2^j$  (à une constante multiplicative près), leur largeur fréquentielle est de la forme  $2^{-j}$  (toujours à une constante près),

# Pavages temps-fréquence III



**Figure:** Pavage temps-fréquence d'une base de paquets d'ondelettes (adaptativité des boîtes d'Heisenberg selon les besoins !)

- base de paquets d'ondelettes orthonormées :

- pavage de rectangles de tailles quelconques (Coifman, Meyer et Wickerhauser en 1992)
- Méthode : découpage de l'axe fréquentiel arbitraire puis translation des ondelettes dans le temps en conséquence pour paver le plan.

# Pavages temps-fréquence IV

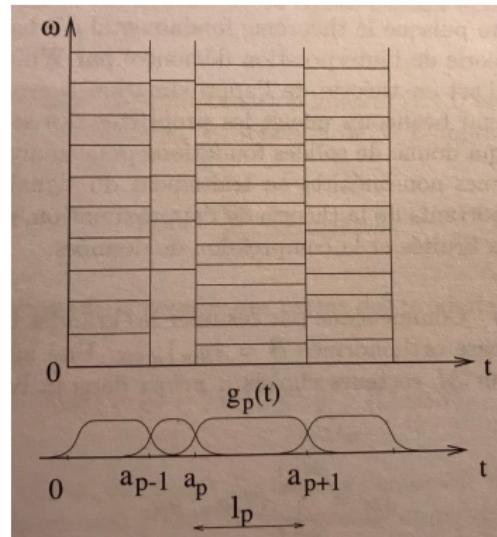


Figure: Pavage temps-fréquence d'une base de cosinus locaux (algorithme développé ci-dessous)

## Pavages temps-fréquence V

- **base de cosinus locaux** (Malvar 1988) : on peut aussi décomposer l'axe temporel de façon arbitraire puis faire des translations fréquentielles en conséquence :

- des **fenêtres régulières**  $g_p(t)$  recouvrent des intervalles successifs  $[a_p, a_{p+1}]$ ,
- puis on multiplie celles-ci par des cosinus  $\cos(\xi t + \phi)$  de fréquences différentes,
- idée issue de Wilson (1987) qui analysait les propriétés des états quantiques cohérents.

# Applications : cas général

1

## Introduction à un monde transitoire

- Le mariage temps-fréquence
- La transformée de Fourier à fenêtre
- La transformée en ondelettes
- Pavages temps-fréquence
- **Applications : cas général**
- Application 1 : approximations

# Applications I

- Objectif d'une base : elle doit être adaptée à l'application demandée, et donc à la nature et à la localisation des singularités des signaux analysés,
- Selon la théorie de l'approximation, il faut choisir une base qui permette une approximation précise d'un signal à partir d'une combinaison linéaire d'un nombre restreint de vecteurs de base (structures intrinsèques du signal),
- Applications directes possibles :
  - approximations,
  - estimations de signaux bruités,
  - compression de données.
- 2 approches possibles : linéaire et non-linéaire,

# Application 1 : approximations

1

## Introduction à un monde transitoire

- Le mariage temps-fréquence
- La transformée de Fourier à fenêtre
- La transformée en ondelettes
- Pavages temps-fréquence
- Applications : cas général
- Application 1 : approximations

# Application 1 : approximations I

- Approximations linéaires : on part d'une base orthonormée  $\mathcal{B} = \{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ . On appelle **approximation linéaire** la fonction:

$$f_M = \sum_{m=0}^{M-1} \langle f, g_m \rangle g_m,$$

où les  $M$  vecteurs  $g_m$  sont choisis a priori, c'est-à-dire indépendamment du signal  $f$

# Application 1 : approximations II

- L'erreur d'approximation est alors :

$$\varepsilon[M] = \|f - f_M\|^2 \quad (8)$$

$$= \left\| \sum_{m=M}^{+\infty} \langle f, g_m \rangle g_m \right\|^2, \quad (9)$$

$$= \left\langle \sum_{m_1=M}^{+\infty} \langle f, g_{m_1} \rangle g_{m_1}, \sum_{m_2=M}^{+\infty} \langle f, g_{m_2} \rangle g_{m_2} \right\rangle, \quad (10)$$

$$= \sum_{m_1, m_2 \geq M} \langle \langle f, g_{m_1} \rangle g_{m_1}, \langle f, g_{m_2} \rangle g_{m_2} \rangle, \quad (11)$$

$$= \sum_{m_1, m_2 \geq M} \langle f, g_{m_1} \rangle \langle f, g_{m_2} \rangle \delta_{m_1, m_2}, \quad (12)$$

$$= \sum_{m=M}^{+\infty} |\langle f, g_m \rangle|^2, \quad (13)$$

autrement dit la qualité d'approximation dépend des propriétés de  $f$  par rapport à la base  $\mathcal{B}$ .

# Application 1 : approximations III

- Exemple 1 :
  - la base de Fourier fournit une approximation linéaire efficace des signaux uniformément réguliers, par projection sur les  $M$  premières sinusoïdes de plus basse fréquence.
  - La décroissance de l'erreur  $\varepsilon[M]$  lorsque  $M$  augmente est liée à la régularité globale de  $f$  (décroissance asymptotique).
  - En effet, plus le signal est régulier, moins on a de HF's, plus le signal est codé par des coefficients de BF's et MF's ...
- Exemple 2 : une base d'ondelettes orthonormées où l'on fixerait les  $M$  échelles les plus grandes (approximation à une résolution alors uniforme).

# Application 1 : approximations IV

- Note :

- On peut modéliser les signaux discrets de taille  $N$  comme les réalisations d'un vecteur aléatoire  $F[n]$ ,
- l'erreur moyenne est obtenue en approximant ces signaux avec les  $M$  premiers vecteurs d'une base orthonormée  $\mathcal{B} = \{g_m\}_{0 \leq m < N}$ ,
- l'**erreur moyenne** peut alors être minimisée en utilisant la base de **Karhunen-Loève** (aussi connue sous le nom de PCA !)
- On a donc optimalité de la base de KL !
- Problème de KL : si on change la nature du signal (distribution statistique différente), alors la base élaborée n'est plus adaptée !
- Exemple : en JPEG, on se sert de cosinus car indépendants du signal (versus KL !).

# Application 1 : approximations V

- Approximations non-linéaires (cas général):

- On choisit les vecteurs avec lesquels on va représenter le signal,
- on peut améliorer les approximations linéaires précédentes en choisissant *a posteriori* les  $M$  vecteurs  $g_m$  en fonction de  $f$ ,
- Soient alors  $M$  vecteurs indexés dans la sous-famille  $I_M$  calculée en conséquence, on obtient :

$$f_M = \sum_{m \in I_M} \langle f, g_m \rangle g_m,$$

- l'erreur d'approximation est alors :

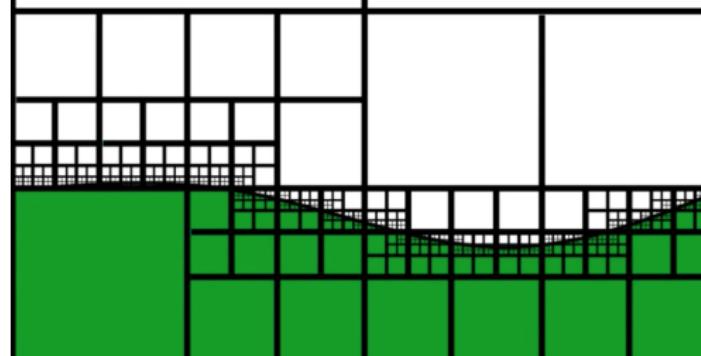
$$\varepsilon[M] = \|f - f_M\|^2 = \sum_{m \notin I_M} |\langle f, g_m \rangle|^2,$$

# Application 1 : approximations VI

- Pour minimiser cette erreur, on choisit  $I_M$  comme l'ensemble des  $M$  vecteurs de base dont les produits scalaires avec  $f$  sont de plus grande amplitude  $|\langle f, g_m \rangle|$ .
- Ce schéma d'approximation est non linéaire car le choix des vecteurs de base dépend de  $f$ .
- Note : l'amplitude des produits scalaires sur une base d'ondelettes dépend de la régularité locale du signal.
- Autrement dit, il faut garder d'autant plus de coefficients là où  $f$  présente des irrégularités

## Application 1 : approximations VII

# Quadtrees



## Application 1 : approximations VIII

- Dans les images 2D, les irrégularités sont les contours/textures, le **quad-tree** est alors un moyen efficace de s'adapter aux irrégularités de l'image.
- On parlera de **grille d'approximation adaptative** où la résolution augmente dans les zones où le signal est irrégulier.
- Ceci est particulièrement utile quand les irrégularités sont locales/isolées.
- Rappel : la base de KL ne fonctionne PAS lorsque la matrice de covariance est variable !

# Application 1 : approximations IX

- Approximations non-linéaires (plusieurs familles de vecteurs) :

- On peut se laisser un nouveau degré de liberté en ne choisissant PAS une seule base  $\mathcal{B}$  *a priori* mais plutôt en choisissant une “meilleure” base en fonction du signal  $f$ .
- Cette base sera choisie dans une famille de bases orthogonales et on prendra celle qui minimisera l’erreur d’approximation.
- en particulier, si l’on choisit dans une base de paquets d’ondelettes ou de cosinus locaux, on pourra accélérer les calculs via de la programmation dynamique (Coifman et Wickerhauser, 1992).

# Application 1 : approximations X

- Approximations non-linéaires (dictionnaire adaptatif) :

- on pourra même imaginer se laisser choisir les vecteurs  $\{g_{\gamma m}\}_{0 \leq m < M}$  dans une base NON orthogonale  $\mathcal{D} = \{g_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  appelée **dictionnaire**,
- On reconstruira ainsi le signal par :

$$f_M = \sum_{m=0}^{M-1} a_m g_{\gamma m},$$

- Attention on ne peut plus calculer les  $a_m$  par simple projection (on n'a plus orthogonalité !),
- De plus, la recherche de ces  $M$  meilleurs vecteurs peut vite devenir explosive en terme de complexité !
- On utilisera donc des **algorithmes de poursuites** (comme le **basis pursuit** ou le **matching pursuit**) sous-optimaux mais efficaces en terme d'approximation.
- L'idée est de trouver les signaux ressemblant le plus au signal à décomposer/compresser, mais aussi qui sont le plus décorrélés entre eux.

# Références

-  Gasquet, C. and Witomski, P. (2013).  
*Fourier analysis and applications: filtering, numerical computation, wavelets*, volume 30.  
Springer Science & Business Media.
-  Mallat, S. (1999).  
*A wavelet tour of signal processing*.  
Elsevier.
-  Mallat, S. (2009).  
*A wavelet tour of signal processing, The Sparse Way*.  
Elsevier.