Traitement du signal numérique

(Cf Cours (https://hackmd.io/gKFPXGhNQuytFofA9rzZqQ?view))

Projet

Quantification: ordonnée (nombre de valeurs pouvant etre prises par un point)
Echantillonnage: abcisse (points au cours du temps)

Revoir Th de Shannon

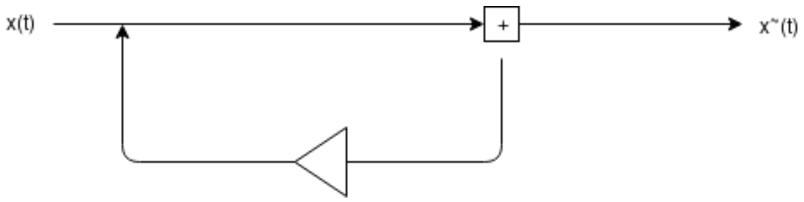
Whittaker-Shannon

$$x(t) = \sum x[n] \frac{sin(\Pi(t - nTe))}{\Pi(t - nTe)}$$

Quantification scalaire uniforme

On va prendre un signal $x(t)$ arrondi à l'entier le + proche.
$\forall x \in]y_{k-1}, y_k] \qquad \underbrace{\rightarrow}_{\text{boite de quantification}} \qquad q_k(x)$

Quand on va enregistrer un signal continu, il va y avoir du bruit.



Produit scalaire :

- en continu :

$$\langle x, y \rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t) y^*(t)$$

- en discontinu :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{\mathbb{R}} x(t) \overline{y}(t)$$

Pour obtenir la norme :
$||x||_2 = \langle x, x \rangle = \int_{\mathbb{R}} |x(t)^2| dt$

$\mathcal{L}_1(\mathcal{D}), \mathcal{L}_2(\mathcal{D}), l_1(\mathbb{R}), l_2(\mathbb{R})$

$\mathcal{D}_p = \{x(t) / ||x||_p = \int_{\mathcal{D}} |x(t)|^p dt < +\infty\}$

Décomposition/Reconstruction d'une fonction

Décomposition -> Analyse
Reconstruction -> Synthèse

Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de fonction formant une base orthogonnale $\forall n \ne p \langle f_n,f_p\rangle $
$\exists$ une suite λ_n tq $\underset{N\rightarrow+\infty}{lim} ||x - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n f_n|| = 0$

$$x = \sum_{n+1}^{N} \lambda_n f_n$$

$$\lambda_n = \frac{\langle x, f_n\rangle}{||f_n||_2^2}$$

Relation de Parseval pour les bases orthonormées

$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, f_n\rangle (\langle y, f_n\rangle)^*$

Formule de Plancherel

$$\langle x, x\rangle = ||x||^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x, f_n\rangle|^2$$

Decomposition en serie de Fourier

$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n cos(2\pi \frac{n}{T} t) + b_n sin(2\pi \frac{n}{T} t)$

$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)dt$
$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T cos(2\pi \frac{n}{T} t)$
$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T sin(2\pi \frac{n}{T} t)$

$$\Leftrightarrow x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{2i\pi \frac{n}{T} t}$$

$Cn = \frac{1}{T} \int x(t) e^{2i\pi \frac{n}{T} t}$

Cours 2

Serie de Fourier

$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i2\pi \frac{n}{T} t}$
$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-i2\pi \frac{n}{T} t}$

TFtc

$\hat{x}(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2\pi f t} dt$
$x(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{x}(f) e^{2i\pi f t} df$

Multiplication en temps

$$\begin{aligned} x_d(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nTe)\delta(t - nTe) \\ &= x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nTe) \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$ convonlution en frequentiel

$$\begin{aligned} \hat{x_d}(f) &= \hat{x}(f) * (\hat{Ш}_{T_e}(f_e)) \\ &= \hat{(}x)(f) * (\frac{1}{T_e} \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{n}{Te})) \\ &= \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{x}(f - \frac{n}{Te}) \end{aligned}$$

Orthogonalité

Dans un espace discret

$$x_d(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\delta(t - nTe)$$

Ce qui donne dans l'espace de Fourier:

$$\hat{x}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{2i\pi f n T_e}; T_e = 1$$

En injectant x[n], on verifie l'egalité

$$x[n] = T_e \int_0^{\frac{1}{T_e}} \hat{x}(f) e^{2i\pi f n T_e} df$$

Passage de TF de continu vers discret

- Divise axe frequence par F_e
- periodise le spectre $F_e = \frac{1}{F_e}$
- divise l'axe des amplitudes par T_e

Passage de TF de discret vers continu

- multiplie axe freq F_e
- multiplie amplitude par T_e
- on limite le spectre a la periode

Theoreme de la famille

la famille $\{w_k[n] = e^{2i\pi\frac{kn}{N}}\}; k \in \{0, \ldots, N-1\}$
est une base orthogonale de l'espace des signaux de periode N.

$x = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\langle x, W_k \rangle}{||w_k||^2} W_k; \forall x$ N-periodique

Sorte d'identité à N près

$$\hat{x}[k] = \langle x, W_k \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2i\pi\frac{kn}{N}}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum^{N-1} k = 0 \hat{x}[k] e^{2i\pi\frac{kn}{N}}$$

$$\begin{aligned} ||W_k||^2 &= \langle W_k, W_k \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} (e^{2i\pi\frac{kn}{N}})(e^{2i\pi\frac{kn}{N}})^* \\ &= Ne^0 \\ &= N \end{aligned}$$

$$\tilde{x}, \tilde{y} \text{ des signaux a N echantillons}$$

$$\tilde{x} * \tilde{y}[n] = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \tilde{x}[p] \tilde{y}[n-p]$$

$$x[n] = \tilde{x}[n \text{ modulo } N]$$

$$x \circledast y = \sum_{p=0}^{N-1} x[p] y(n-p)$$

Cours 3

Rappels:

En TF discrete la convolution n'est pas classique, pour la base de Fourier de sinusoide dicrete, on cache les n elements du signal en imaginant qu'on a un signal de periode n.

$e^{i2\pi}$

$\{\omega_k = e^{i2\pi\frac{k}{N}n}\}_{k\in\{0,\ldots,N-1\}}$
$\hat{x}[k] = \langle x, \omega_k \rangle$

Appercu TP (https://colab.research.google.com/drive/17P1k68aBa09BwgqaXNZEGkoX3cw7S71m)

Resolution en frequence

C'est la capacité à distinguer 2 frequences voisines dans le spectre.
$\longrightarrow$ liée au nombre d'échantillons du signal(N)

La précision

C'est la capacité à mesurer une valeur en fréquence.
$\longrightarrow$ liée au nombre de points de calcul du spectre §.

Il existe des filtres qui permettent de “régulariser des signaux”. (En gros si le début et la fin du signal ne matchent pas la TF va faire apparaitre des fréquences dégueux…).

Voici plusieurs de ces filtres :

- Hanning
- Blackman
- …

Exemple :

```
n = np.arange(0,256,1)
x = np.sin(2 * np.pi *n* 10/256)
x = x[:-20] # Ici on décale le début de la fin (pour générer le problème)
hanning = 0.5 * (1  -np.cos(np.pi * 2 * n[:-20] / 255))
x_fixed = hanning * x # Ici le signal est "réparé" on peut ensuite faire une TF
```

F.F.T

> Les notes de ce cours ont été prises de maniere approximative.

FFT (Fédération Francaise de tennis): $\mathcal{O}(Nlog_2(N))$
TFD (Taiwan Foundation for Democracy): $\mathcal{O}(N^2)$

Pour l'exemple on va se mettre dans un cas simple. Notre vecteur est de taille 2^k. On peut donc utiliser dans ce cas l'algorithme de Cooley-Turkey (https://en.wikipedia.org/wiki/Cooley%E2%80%93Tukey_FFT_algorithm).

Étapes

1. On sépare x en pair et impair
2. Calcul $TFD_{N/2}$
3. Pondère la seconde sortie par W^2
4. Somme et diffèrences

Maths

$$x[n]$$
$$x[2n], x[2n+1]$$
$$\hat{x}[k], \hat{x}[k+\frac{N}{2}]$$

$$\begin{aligned}
\hat{x}[k] &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} W^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{k}-1} x[2n+1]W^{(2n+1)k} \\
&= \sum x[2n]W^{2nk} + W^k \sum_{n=0}^{Nk-1} x[2n+1]W^{2nk} \\
&= \sum x[2n]W_{\frac{N}{2}}^{nk} + W^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n+1]W_{\frac{N}{2}}^{nk} \\
&= \hat{x}_p[k] + W^k \hat{x}_i[k]
\end{aligned}$$

Pseudo code de l'algo

```
X0,...,N−1 ← ditfft2(x, N, s):             DFT of (x0, xs, x2s, ..., x(N-1)s):
    if N = 1 then
        X0 ← x0                                      trivial size-1 DFT base case
    else
        X0,...,N/2−1 ← ditfft2(x, N/2, 2s)             DFT of (x0, x2s, x4s, ...)
        XN/2,...,N−1 ← ditfft2(x+s, N/2, 2s)           DFT of (xs, xs+2s, xs+4s, ..
        for k = 0 to N/2−1                           combine DFTs of two halves int
            t ← Xk
            Xk ← t + exp(−2πi k/N) Xk+N/2
            Xk+N/2 ← t − exp(−2πi k/N) Xk+N/2
        endfor
    endif
```

$$\begin{aligned} \hat{x}[k] &= \hat{x}_p[k] + W^k \hat{x}_i[k] \\ \hat{x}[k+\frac{N}{2}] &= \sum_{n=0}^{Nk-1} x[2n] W_{\frac{N}{2}}^{n(k+\frac{N}{2})} + W_N^{k+\frac{N}{2}} \sum x[2n+1] W_{\frac{N}{2}}^{n(k+\frac{N}{2})} \\ &= \sum_{n=0}^{Nk-1} x[2n] W_{N/2}^{nk} - W^k \sum x[2n+1] W_{N/2}^{nk} \\ &= \hat{x}_p[k] - W^k \hat{x}[k] \end{aligned}$$

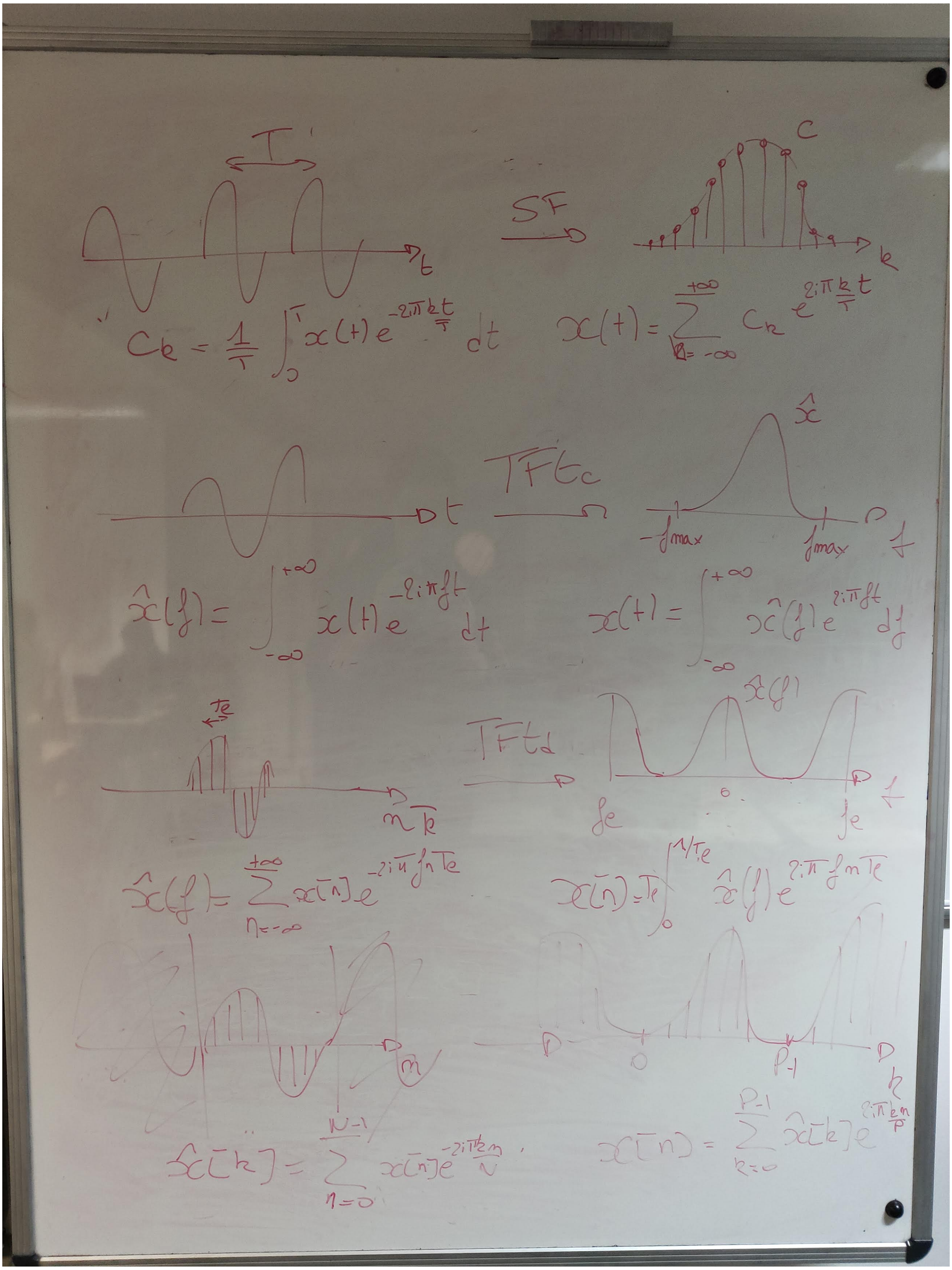
Tableau récapitulatif

Type de transformation	Type du signal	Définition
Série de fourier (https://fr.wikipedia.org/wiki/S%C3%A9rie_de_Fourier)	Signal périodique	…
Tranformé de fourier (https://fr.wikipedia.org/wiki/Transformation_de_Fourier)	Signal continu non périodique	…
Tranformé de fourier discrète (https://fr.wikipedia.org/wiki/Transformation_de_Fourier_discr%C3%A8te)	Signal échantilloné	…

$C_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-2\pi k \frac{t}{T}} dt$

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{2\pi \frac{k}{T} t}$

$\hat{x}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi f t} dt$



Filtres linéaires (invariants dans le temps/ stationnaires)

$y[n] = \mathcal{H}x[n]$

1. Linearite
   $\mathcal{H}\{\alpha x[n] + \beta x[n]\} = \alpha\mathcal{H}\{x_n[n]\} + \beta\mathcal{H}\{x_2[n]\}$

2. Invariance temporelle

$\mathcal{H}\{x[n-n_0\} = y[n-n_0]$

Les systèmes linéaires stationnaires $\rightarrow$ Dirac

h est le filtre

$$
\begin{aligned}
x[n] &= \sum_{-\infty}^{+\infty} x[p]\delta(n-p) \qquad \texttt{linearite} \\
\mathcal{H}\{x[n]\} &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}\{\delta(n-p)\} \qquad \texttt{stationnarite} \\
&= \sum x[p]h[n-p] = (x*h)[n]
\end{aligned}
$$

Un filtre est causal si l'opération de filtrage ne dépend que des valeurs de $x(u)$ pour $u > t$

causal : on prend que le passe
anti-causal : on prend que le futur
non-causal : ni l'un ni l'autre

$\mathcal{H}\{x[n]\} = \sum_{-\infty}^{+\infty} h[p]x[n-p] \rightarrow h[p] = 0; \forall p < 0$

4. Un filtre est stable $\forall x[n]$ borne $\mathcal{H}\{x[n]\}$ est borne

$|\mathcal{H}\{x[n]\}| \leq \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |h[p]||x[n-p| \leq \underset{n\in\mathbb{Z}}{Sup}|x[n]|$

BIBO (Bounded Input Bounded Output) stability $h \in l_1(\mathbb{Z})$

l_1 = Sommable Integrable

Cours 4

Les filtres vont être classés en 4 catégories:

1. Filtres à réponse impulsionnelle finie
2. Filtres à réponse impulsionnelle infinie
3. Filtre Causal
4. Filtre Non Causal

$$\mathcal{H}(x) \to h[n]$$

$$\mathcal{H}(e^{i\omega t}) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-p)} h[p] = \underbrace{e^{-i\omega t}}_{\text{Valeurs propres}} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \omega^{-i\omega p} h[p]$$

$|\hat{h}(\omega)| > 1$

$$\begin{aligned} \hat{h}(\omega) &= e^{-i\omega a} \\ &= \hat{y}(\omega)\hat{h}(\omega)\hat{x}(\omega) \\ &\downarrow IFD \\ &= e^{i\omega a}\hat{x}(\omega) \\ &= x[n-a] \end{aligned}$$

$h_M[n] = \begin{cases} \frac{1}{M}; & M\text{echantillons} \\ 0 \end{cases}$

$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{M} \frac{\sin(\frac{\omega}{2}M)}{sin(\frac{\omega}{2})} e^{-i\frac{\omega}{2}(M-1)}$

Filtre idéal passe-bas

- Bande passante constante
- Atténuation infinie en bas by S
- Phase nulle

$\hat{t}\,(\omega) = \begin{cases} n\forall|\omega| \leq u_Z \\ 0 \end{cases}$
$= \Pi(\frac{\omega}{2\omega_c})$

$h[n] = \frac{\omega_c}{\Pi} sinc(\frac{\omega_c}{\Pi} n)$

Passe-haut

$\hat{h}_{\text{passe-haut}}(\omega) = 1 - \hat{h}_{\text{passe-bas}}$

$\tilde{h}[n] = \begin{cases} h[n] = \frac{\omega_c}{n} sin(\frac{\omega_c}{\pi} n); |n| \leq N \\ 0 \end{cases}$

$\tilde{h}[n] = h[n]\Pi_M; M = 2N + 1$

$\hat{\tilde{h}}[n] = \hat{h}(\omega)\pi\frac{\frac{\sin(\omega)}{M/2}}{\frac{\sin(\omega)}{M/2}}$

Filtre idéal

$\sum_{k=0}^{N-1} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x[n-k]$

$\hat{y}(\omega) \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-\omega k} = \hat{x}(\omega) \sum_{k=0}^{M-1} b_k e^{-i\omega k}$

$$\hat{h}(\omega) = \frac{\hat{y}(\omega)}{\hat{x}(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} b_k e^{-i\omega k}}{\sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-i\omega k}}$$

La transformée en Z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

$z \in \mathbb{C}/\{0\}$
$\mathcal{D} = \{z, R_1 \leq |z| \leq R_2\}$

Propriété

$\rightarrow$ linéarité
$\rightarrow$ translation $\mathcal{Z}\{x[n-d]\} = z^{-d} X(z)$

$Y(z) \sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k} = X(z \sum_{k=0}^{M-1}) b_k z^{-k}$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k}} = c \frac{\Pi_{n=1}^{M-1}(1 - zn z^{-1})}{\Pi_{n=1}^{N-1}(1 - P_n z^{-1})}$$

$x[n] = \frac{1}{N} \underbrace{1_{\{0;\ldots;N-1\}}}_{\text{tableau de 1}}$

$X(z) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n}$
$= \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} \rightarrow X(e^{i\omega}) = \frac{1-e^{-iwN}}{1-e^{i\omega}}$

- $X(z) = 0 \rightarrow$ "les zéros" $\rightarrow$ "racines du numerateur"
- $X(z) = \infty \rightarrow$ "les pôles" $\rightarrow$ "racines du dénominateur"

Le système est stable si son domaine de convergence inclut le cercle unité.