Espaces vectoriels

Table des matières

Contextualisation

L'ingénierie mathématique passe en premier lieu par la modélisation des problématiques auxquelles on fait face. La situation à l'étude sera transposée dans une description mathématique qui permet d'apporter une réponse (éventuellement approchée ou partielle) au problème de départ. On va modéliser par exemple l'évolution d'une population animale par une suite récurrente reliant le nombre d'individus de la génération actuelle à celui de couples dans la population des générations précédentes. On pourra encore modéliser la chute d'un objet par l'équation différentielle qui régit cette situation physique.

Il est important de noter qu'une situation n'est pas nécessairement modélisée par un et un seul modèle mais peut être vue par plusieurs angles ou à l'aide de modèles qui varient en complexité. On pourrait par exemple modéliser l'évolution de notre population animale à l'aide d'une équation différentielle ou encore aux dérivées partielles. La chute d'un objet, si elle devait prendre en compte la vitesse du vent ou le mouvement terrestre, nécessiterait un modèle plus complexe que celui que vous avez pu aborder en mécanique newtonienne.

Le plus simple des modèles qu'on sait manipuler est le modèle ***linéaire***. Il recouvre les modéles dans lesquels les données en jeux sont liées linéairement, au sens où vous avez pu l'entendre dans votre scolarité secondaire. Malgré sa simplicité il permet de résoudre un nombre important de problèmes standards liés à l'informatique. On peut par exemple citer les problèmes

— d'encodage et de transmission fiables de données, par le biais des codes linéaires et codes correcteurs ;
— d'approximation de solutions d'équations aux dérivées partielles assistée par ordinateur ;
— de régressions polynômiales en IA, où il s'agit de chercher la fonction polynômiale dont le graphe approche au mieux un nuage de points ;
— d'entraînement des réseaux de neurones profonds, toujours en IA ;
— de reconnaissance faciale par une analyse par composantes principales.

Ces différents problèmes et leurs modélisations font partie de l'outillage qu'on souhaite voir un ingénieur informaticien porter.

Dans votre pratique jusqu'à présent vous avez eu affaire à deux situations linéaires ; dans le cadre des suites récurrentes et celle des équations différentielles.

Une suite récurrente du premier ordre $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par une écriture de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ pour f une fonction réelle, ainsi qu'une condition initiale. Vous avez pu constater par le passé qu'expliciter l'expression de u_n comme fonction de n pour une fonction f quelconque n'est pas facile, parfois même particulièrement difficile. Un cas cependant est simple à traiter : quand f est une fonction linéaire, c'est-à-dire donné par une expression de la forme $f(x) = \alpha x$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Dans ce cas u_{n+1} s'exprime linéairement en fonction de u_n et on se retrouve face à une suite géométrique, dont on connaît une expression explicite. Cette simplicité se retrouve également si l'on s'intéresse aux suites récurrentes d'ordre supérieur, comme la suite de Fibonacci, où l'expression de u_{n+2} est linéaire en u_{n+1} et u_n. On peut encore citer le cas des équations différentielles linéaires homogènes, où une fonction f et ses dérivées sont liées linéairement. En général résoudre une équation différentielle quelconque de manière exacte n'est pas à portée de main.

Dans le but de pouvoir utiliser le modèle linéaire dans des contextes professionalisant il va nous falloir en étudier le langage ; les objets qui sous-tendent ce modèle et les interactions entre ceux-ci. Les concepts qu'on pourra exprimer à l'aide de ce langage seront au coeur de l'ensemble des utilisations faites de ce modèle. La démarche est ici plus abstraite que ce dont vous avez eu l'habitude, cette abstraction vient de la grande variabilité des contextes dans lesquels ce modèle est présent. Dans une terminologie orientée objet, beaucoup de situations héritent de la classe abstraite définie par la notion d'espace vectoriel.

Attendus

Cette section présente une liste des éléments que vous devez maîtriser et sur lesquelles vous serez évalués.

Ainsi vous devez être en mesure de :
- vous habituer à la démarche axiomatique qui vise à *factoriser* différents types de structures mathématiques par ce qui leur est commun ;
- déterminer si un sous-ensemble d'un ensemble donné est un sous-espace vectoriel ou non ;
- comprendre et assimiler des exemples standards de sous-espaces vectorieles de toute dimensions ;
- décrire par une famille génératrice un sous-espace vectoriel et déterminer un sous-ensemble de celle-ci qui forme une base.

1 Vecteurs et espaces vectoriels

1.1 Résumé

Cette partie a pour but de vous faire manipuler les objets mathématiques que sont les vecteurs. Les vecteurs tels que vous les avez toujours connus, définis dans l'espace par une direction, un sens et une longueur. Mais également et surtout les vecteurs au sens élargi, tels que vous les découvrez actuellement. Autrement dit, comme éléments d'un ensemble muni de deux lois et aux propriétés particulières qu'on appelle ***espace vectoriel***.

Ainsi, on va notamment explorer les espaces vectoriels suivants dans lesquels vous serez amenés à travailler très régulièrement :
- $\mathbb{R}^n$ ou ensemble des n-uplets de réels, en commençant parle plan avec $n = 2$;
- ensemble des suites numémriques ;
- ensemble des fonctions numériques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;

Cette liste n'est évidemment pas exhaustive

1.2 MiMos à travailler

XXX

1.3 Exercices

Exercice 1.1

On se place en un premier temps dans le cas de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. On cherche dans cet exercice à *dessiner*.

1. Comment représente-t-on un vecteur de $\mathbb{R}^2$ géométriquement ?
2. Quelle opération géométrique correspond à la multiplication d'un vecteur par un scalaire ?
3. Comment représente-t-on géométrique la somme de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$?

Chercher à représenter les phénomènes précédents dans $\mathbb{R}^3$. N'hésitez pas à vous aider du logiciel *GeoGebra* que vous pourrez trouver facilement en version web.

Exercice 1.2

On s'intéresse à l'ensemble E des tableaux de réels répartis en 2 lignes et 2 colonnes sous la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{où } a, b, c \text{ et } d \text{ sont réels}$$

On définit sur E deux opérations notées + et $\cdot$ et respectivement définies par
- pour tout A, B sous la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$,

$$A + B = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix}$$

— et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$$

.

1. Quel serait l'élément neutre pour chacune des lois $+$ et $\cdot$ ainsi définies sur E ?
2. Vérifiez que les propriétés qui font de E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ sont bien satisfaites.
3. Connaisseriez un espace vectoriel plus simple en lien avec E ?

Exercice 1.3

Soient f et g deux fonctions numériques définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. Qu'est-ce que la fonction $f + g$?
2. On note E l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Que signifie $\boldsymbol{0}_E$?
3. On dit que l'addition des fonctions est une opération interne sur l'ensemble E. Que signifie ***interne*** dans cette appellation ? Définissez cette opération comme une application en précisant bien les ensembles de départ et d'arrivée.
4. Soit α un réel quelconque, qu'est-ce que la fonction αf ? On dit que la multiplication des fonctions par un réel est une opération externe. Selon vous pourquoi ? Définissez cette opération comme une application en précisant bien les ensembles de départ et d'arrivée.

Exercice 1.4

On s'intéresse à l'ensemble de suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On définit sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'opération externe donnée pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\alpha \cdot (u_n) = (\alpha^n u_n) = (u_0, \alpha u_1, \alpha^2 u_2, \alpha^3 u_3, \ldots).$$

1. Quel serait l'élément neutre d'une telle opération ?
2. Si l'on munit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de l'opération interne d'addition, obtient-on un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

2 Sous-espaces vectoriels

2.1 Résumé

Vous avez étudié les huit propriétés qui font d'un ensemble E muni de deux opérations respectivement interne (addition) et externe (multiplication par un réel) un espace vectoriel. En pratique, nous travaillerons en général dans des espaces vectoriels identifiés. Par exemple dans $\mathbb{R}^n$, dans l'espace vectoriel des fonctions numériques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{R}[X]$ ou encore dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Cette liste n'est évidemment pas exhaustive. Nous aurons donc bien plus souvent recours aux critères qui font d'un sous-ensemble d'un espace vectoriel un sous-espace vectoriel. Objet qui, lui-même, un espace vectoriel.

Nous verrons par ailleurs comment ***construire*** des nouveaux sous-espaces vectoriels (éventuellement sans redondance).

2.2 MiMos à travailler

XXX

2.3 Exercices

Exercice 2.5

Cet exercice est également est une petite piqûre de rappel sur la notion de degré d'un polynôme.

1. Que représente l'ensemble $E = \{aX^2 + bX + c, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$?
2. En utilisant une écriture similaire ***en compréhension*** décrire l'ensemble des polynômes de degré deux.
3. Quel est le lien entre E et F ?
4. Qu'est-ce que le polynôme nul ? Appartient-il à E ? à F ?
5. Soient P_1 et Q_1 deux éléments de E. Qu'est-ce que $P_1 + Q_1$? Est-ce toujours un élément de E ? Quelle propriété de E mettons nous en évidence ainsi ?
6. Soient P_2 et Q_2 deux éléments de F. Est-ce que P_2+Q_2 est toujours un éléments de F ? Conclure.

Exercice 2.6

On s'intéresse aux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

1. On se focalise pour commencer sur le cas de $\mathbb{R}^2$, vous êtes à nouveau invités à ***dessiner***.
   (a) Dans les représentations de sous-ensemble des $\mathbb{R}^2$ ci-dessous, indiquer celles qui représentent un sous-espace vectoriel. Dans le cas où d'une représentation où cela n'est pas en indiquer la raison.
   (b) Est-il possible d'avoir deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel qui soient disjoints ?
2. Décrire les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2.7

Les ensembles F suivants sont tous définis comme sous-ensemble d'un ensemble E qui, muni des lois de composition interne et externe respectivement de l'addition et de la multiplication par un scalaire, a les propriétés d'un espace vectoriel. Regardez pour chacun des ensembles F, s'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E ou non ? Justifiez vos réponses.

1. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\}$
2. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 1\}$
3. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ xy = 0\}$
4. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 = z^2\}$
5. $F =$ Ensemble des polynômes de degré deux
6. $F =$ Ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à deux
7. $F = \{P \in \mathbb{R}[X], P(1) = 0 \text{ et } P(X + 1) = P(X)\}$
8. $F = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P' = 0\}$
9. $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (u_n) \text{ convergente}\}$
10. $F =$ Ensemble des suites (u_n) vérifiant l'équation $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 1$
11. $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (u_n) \text{ divergente}\}$
12. $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n\}$
13. $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n^2\}$
14. $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f \text{ croissante}\}$
15. $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f(0) = 0\}$
16. $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f \text{ paire}\}$
17. $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ \lim_{+\infty} f = +\infty\}$
18. $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f \text{ continue}\}$
19. $F = \{f \in C^0([a, b], \mathbb{R}),\ \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$

20. $F =$ Ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + 2e^x y = 0$ où l'inconnu est la fonction y, dérivable sur $\mathbb{R}$

Exercice 2.8

Soient F et G deux sev d'un $\mathbb{R}$-ev E. Étudier l'assertion

$$F \cup G \text{ sev de } E \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F$$

Exercice 2.9

Le plan est muni d'un repère orthonormé et chaque point du plan est ainsi défini par un couple de réels : ses coordonnées cartésiennes. A noter que les coordonnées d'un point point quelconque M du plan sont également celles du vecteur $\vec{OM}$, où le point O est l'origine du répère. Posons également $\vec{u} = (a, b)$ un vecteur quelconque du plan.

1. Comment décririez vous l'ensemble F défini par : $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists\alpha \in \mathbb{R}, (x, y) = \alpha(a, b)\}$ Représenter quelques éléments de cet ensemble.
2. Que représente F par rapport au plan ? Justifiez
3. Considérons un autre vecteur du plan $\vec{v} = (a', b')$ et définissons un autre sous-ensemble du plan. Appelons-le G : $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists\alpha \in \mathbb{R}, (x, y) = \alpha(a', b')\}$. Comparer les ensembles F et G avec deux hypothèses possibles. Quel est l'élément déterminant ?
4. Considérons l'hypothèse de la question précédente sous laquelle F et G sont deux ensembles différents. Quel serait alors alors l'ensemble $E = F + G$? Et sous l'autre hypothèse quel serait l'ensemble E ?
5. Considérons l'hypothèse de la question précédente sous laquelle F et G sont deux ensembles différents. Que dire de $F \cap G$? Comment appelle-t-on F et G ?

Exercice 2.10

On se place dans le cas de l'espace vectoriel des fonctions réelles $\mathbb{R}^\mathbb{R}$.

1. Rappeler ce qu'est la notion de parité d'une fonction.
2. On note respectivement $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ les espaces des fonctions dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ paires et impaires. Ce sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$. Que pouvez-vous dire de leur somme ?
3. On note A une partie de $\mathbb{R}$ et $E_A \subset \mathbb{R}^\mathbb{R}$ le sous-ensemble des fonctions qui s'annulent sur A. Trouver un supplémentaire de E_A dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$.
4. Comment adapter les notions précédentes aux cas de $\mathbb{R}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]_3$?

3 Familles génératrices, familles libres et bases

3.1 Résumé

De nombreux problèmes en algèbre linéaire s'expriment par le fait de se donner un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel ambient. C'est par exemple le cas des solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, sans conditions initiales. La question de savoir comment est-ce qu'on se donne un sous-espace vectoriel est donc cruciale. C'est d'autant plus le cas pour un informaticien (dans le cas fini) où il pourra remplacer l'étude d'un sous-espace vectoriel quelconque par celle d'une famille ***finie***, donc qu'on peut potentiellement stocker en machine.

On apprend dans la suite à identifier des familles minimales sans redondances qui engendrent le sous-espace vectoriel avec lequel on travaille ; les bases. On trie sur ce chemin les familles pour lesquels on a pas de redondance sans pour autant générer tout l'espace (les famille libres) ainsi que celles qui génèrent tous l'espace (les familles génératrices).

3.2 MiMos à travailler

XXX

3.3 Exercices

Exercice 3.11

On s'intéresse dans cet exercice à des aspects technique de la détermination de degré de liberté d'une famille de vecteurs.

1. Que pouvez-vous dire des familles de vecteurs suivantes ?
   (a) La famille $F = \big((1,0),(0,2),(-3,4)\big)$ dans $\mathbb{R}^2$.
   (b) La famille $F = (v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = (1,-1,1)$, $v_2 = (0,1,2)$ et $v_3 = (1,0,3)$ dans $\mathbb{R}^3$.
   (c) La famille $F = (w_1, w_2)$ avec $w_1 = (2,-1,3)$ et $w_2 = (-8,4,12)$ dans $\mathbb{R}^3$.
   (d) La famille $F = (u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1 = (5,2,-11), u_2 = (1,1,2), u_3 = (-1,0,3)$ dans $\mathbb{R}^3$.
   (e) La famille $F = (u, v, w)$ avec les suites u, v et w définies en tout entier n par : $u_n = 2^n, v_n = 3^n$ et $w_n = 4^n$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   (f) La famille $F = (P, Q, R)$ dans $\mathbb{R}[X]$ avec les polynomes P, Q et R définis sur $\mathbb{R}$ par : $P(X) = 1 - X + X^2, Q(X) = 3 + X - 2X^2, R(X) = -1 - 3X + 4X^2$
   (g) La famille $F = (f, g, h)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ avec les fonctions f, g, h et i définies pour tout réel x par : $f(x) = e^x, g(x) = xe^x, h(x) = e^{-x}$ et $i(x) = xe^{-x}$
2. De quelles dimensions sont les espaces vectoriels engendrés par ces familles dans leurs espaces vectoriels respectifs ?

Exercice 3.12

L'intérêt premier de la notion de familles de vecteurs est de pouvoir représenter les sous-espaces vectoriels à l'aide d'un nombre fini de vecteurs qui les génèrent.

1. Déterminer des familles de vecteurs génératrices des sous-espaces vectoriels suivants :
   (a) $E = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x - 2y = 0\big\}$
   (b) $E = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x - 2y = 0 \text{ et } x - y = 0\big\}$
   (c) $E = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x - y = 0 \text{ et } z = 0\big\}$
   (d) $F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x - y = 0\big\}$
   (e) $G = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x - y = 0 \text{ et } x - z = 0\big\}$
   (f) $H = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x + y = 0 \text{ et } x + z = 0\big\}$
   (g) $I = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x - y + z = 0\big\}$
   (h) $J = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } x - z = 0 \text{ et } 3x + 2y + 3z = 0\big\}$
   (i) $K = \big\{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 \text{ tel que } x + y + t = 0,\ x - u + t = 0,\ y + z + u = 0 \text{ et } 2y + z + t = 0\big\}$
2. De quelles dimensions sont les espaces vectoriels décrits précédemment ?