Probabilités et statistiques (niveau avancé)

On a le droit à un support pour le partiel !!! 👍

Ne pas oublier le SAV **Tochon**

Rappels

- Ω : L'ensemble des expériences que l'on peut faire
- $\omega \in \Omega$: Une expérience
- $\omega \longrightarrow (X(\omega), Y(\omega))$: C'est le fait de réaliser l'expérience (et d'obtenir un résultat, ici une position x et y)

Formellement :

- Ω : L'ensemble des événements élémentaires
- $\omega \in \Omega$: Un événement élémentaire
- $A \subset \Omega$: Un événement, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$: *"A parti de Omega"*
- Quand A se produit, on dira *"A est vrai"*.
- Quand A^c ou $\bar{A}$ se produit, on dira *"A est faux"*.
- Quand $A \cap B$ se produit, on dira *"A et B"*.
- Quand $A \cup B$ se produit, on dira *"A ou B"*.

- $A \subseteq B$ se dira *"Si A alors B"*.
- $\emptyset$ est *impossible*.
- Ω est *certain*.

Une tribu $\mathcal{F}$

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F} \iff \bigcup_{i=1}^{\infty} \{A_i\} \subseteq \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F}$ et $A^c \in \mathcal{F}$

$$A \rightarrow \mathbb{P}(A) \in [0,1]$$
$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$$
$$\mathbb{P}(\Omega) = 1$$
$$A_1 \dots A_n \forall i, j\ i \neq j)$$
$$A_i \cap A_j = \emptyset$$
$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: Espace probabilisé

Une experience:

$$\begin{array}{cccc}
 & & oui & non \\
\omega_1 & ?\ \omega_1 \in A & 1 & 0.R_1 \\
\omega_2 & ?\ \omega_2 \in A & 1 & 0.R_2 \\
 & \vdots & & \\
\omega_n & ?\ \omega_n \in A & R_n = 1 & R_n = 0 \\
 & \vdots & &
\end{array}$$

$(R_1, \dots, R_{50000000})$

$\bar{a}n$ je connais $R_1 \dots R_n$
frequence $f_n = \frac{R_1 + \dots + R_n}{n}$

Propriétés :

- $\mathcal{P}(A^c) = 1 - \mathcal{P}(A)$
- $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cap B)$

Probabilité conditionnelles

- $\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)}$
- $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A|B)\mathcal{P}(B) + \mathcal{P}(A|B^c)\mathcal{P}(B^c)$
- $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A|B)\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(B|A)\mathcal{P}(A)$

Théorème de Bayes

$$\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(B|A)\mathcal{P}(A)}{\mathcal{P}(B)}$$

Variable aléatoire

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega) \end{aligned}$$

Fonction de répartition :

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\to [0;1] \\ x &\mapsto \mathcal{P}(X \leq x) \end{aligned}$$

$\mathcal{P}(X \in]a, b]) = F(b) - F(a)$

Si X continu:

- $\mathcal{P}(a) = 0$
- $\mathcal{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
- $\mathcal{P}(a < X) = 1 - F(a)$

$A_1 \ldots A_n$ événements indépendants de même probabilité p

- $\mathbb{I}(A)$: La fonction caractéristique de A
- $\mathbb{I}(A_n)$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}(A_k) \quad f_n = \frac{1}{n} S_n$$

$\forall \epsilon > 0$
$\lim_{n \to \infty} \mathcal{P}(p - \epsilon \leq f_n \leq p + \epsilon) = 1$

$f(x)$: densité de probabilité $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

1. A un domaine “Quelconque”

$$\underbrace{\mathbb{R}(X \in A)}_{\mathbb{R}(X(w)\in A)} = \int_A f(x)dx$$

2. $\underset{X}{F}(x) = \mathcal{P}(X \leq x) = \int_{-x}^{x} f(t)dt$

Espérance

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$$

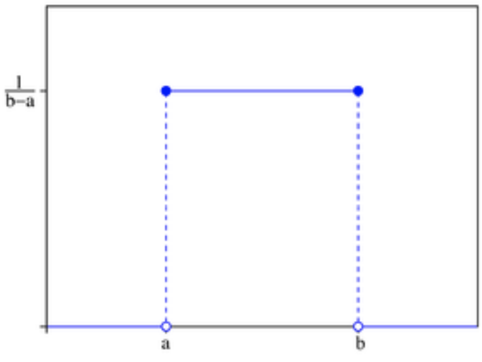
De maniere générale, si on prend nimporte quelle fonction:
$g: \text{ une fonction de } \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\,dx$

$X, Y(x, y) \text{ la densite de } f(x, y)$

$\mathbb{E}(g(X, Y)) = \iint g(x, y)f(x, y)\,dx\,dy$

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 1f(x)dx = 1$

Exemple:

> La loi uniforme sur $[0, 1]$: U
> Densité constante d
>
> 
>
>
> $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 d\,dx = d$
> $\mathbb{E}(U) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = \int_0^1 xdx = [\frac{x^2}{2}]_0^1 = \frac{1}{2}$

Variable Aléatoire X de densite $d(x)$

- “Moyenne”: **Esperance** : $f(x) = \int x f(x) dx$ = $ m(x)$ = m_x
- “Ecart quadratique moyen” **Variance** : $Var(x) = \mathbb{E}((X - m_x)^2)$
- **Ecart type** : $\sigma(x) = \sqrt{Var(x)}$

X, Y deux Variables aleatoires
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$
$\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha\mathbb{E}(X) + \beta\mathbb{E}(Y)$
$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

$X, Y = X!$
$X + Y = 2X!$
$\mathbb{E}(X + Y) = 2m_x$
$Var(X + Y) = \mathbb{E}((X + Y - 2m_x)^2) = \mathbb{E}((2cx - m_x))^2$
$\sigma(X + Y) = 2\sigma(X) = \sigma(X) + \sigma(Y)$

$X, Y = -X$
$X + Y = 0$

$(E)(X) = m_x$
$\mathbb{E}(Y) = m_y$

$$\begin{aligned} Var(X + Y) &= \mathbb{E}((X + Y - m_x - m_y)^2) \\ &= \mathbb{E}((\mathbb{X} + 1)^2) \text{ - } (\mathrm{m_x} + \mathrm{m_y})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}((X - m_x)^2) = \mathbb{E}(X^2 - 2m_x X + m_x^2) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2m_x\mathbb{E} + m_x^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - m_x^2 \end{aligned}$$

$Var(X + Y) = \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(Y^2) + 2\mathbb{E}(XY) - (m_x + m_y)^2$

> X et Y n’ont rien a voir …

$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

$$\begin{aligned} Var(X + Y) &= \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(Y^2) + 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - m_x^2 - m_y^2 - 2m_x m_y \\ &= Var(X) + Var(Y) \end{aligned}$$

variables aleatiores independantes

X et Y independantes, $\forall x \forall y, \{X \leq x\}$ et $\{Y \leq y\}$ independants

Variables aleatoires non correlees.

$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

> Si elles sont *correlees* ? On centre les variables aleatoires

$X^* = X - m_x \quad \mathbb{E}(X^*) = 0$
$Y^* = Y - m_y \quad \mathbb{E}(Y^*) = 0$

$\mathbb{E}(X^*Y^*) = \rho\sigma(X^2)\sigma(Y^2)$
$= \rho\sigma(X)\sigma(Y)$
$\mathbb{E}((X - m_x)(Y - m_y)) =$ **Covariance**

$Cov(X, Y) = \mathbb{E}((X - m_x)(Y - m_y))$
$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$ “coefficient de correlation” $\in [-1, 1]$

$$\begin{aligned} Var(X+Y) &= Var(X^* + Y^*) \\ &= \mathbb{E}((X^* + Y^*)^2) \\ &= \mathbb{E}((X^{*2} + 2x^*Y^*)^2) \\ &= \mathbb{E}(X^{*2}) + 2\mathbb{E}(X^*Y^*) + \mathbb{E}(Y^{*2}) \\ &= \sigma_x^2 + 2\rho_{xy}\sigma_{X^*}\sigma_{Y^*} + \sigma_{X^*}^2 \end{aligned}$$

$Var(X+Y) = \sigma_x^2 + 2\rho_{xy}\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2$
$Var(aX+bY) = \sigma_X^2 a^2 + 2\rho_{xy}\sigma_x\sigma_y ab + \sigma_y^2 b^2$

Cauchy-Schwarz :

$$\mathbb{E}(XY)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$$

Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}(|X - m_X \geq a) \leq \frac{\sigma_X^2}{a^2}$$

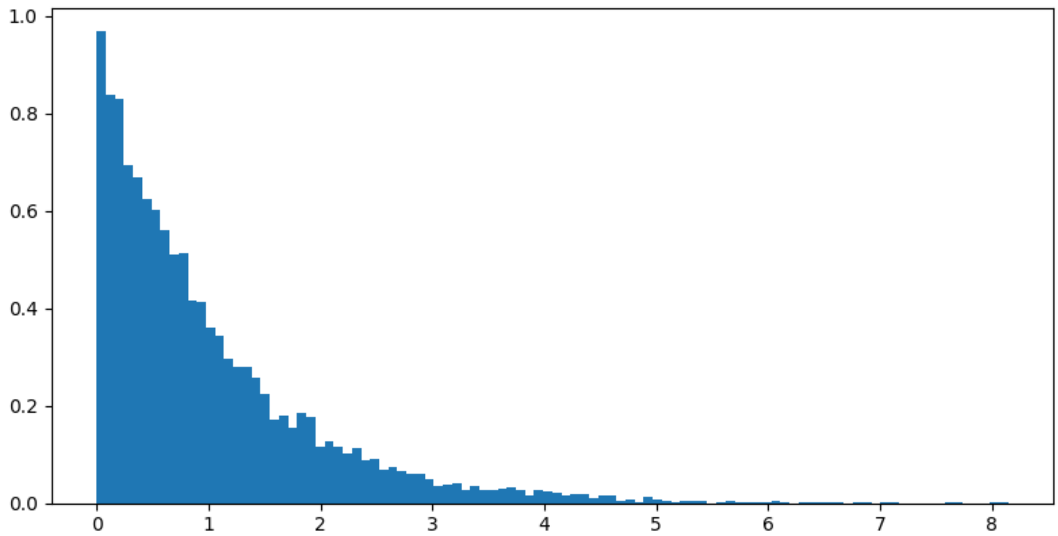
Exercices

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ
.Cf. le slide 32.
Avec un logiciel, effectuer une simulation et dessiner un histogramme des valeurs obtenues.
Reconnaissez vous la forme de la densité ?

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.random.exponential(sclae=1, size=100000)
plt.hist(x, normed=True, bins=100)
plt.show()
```



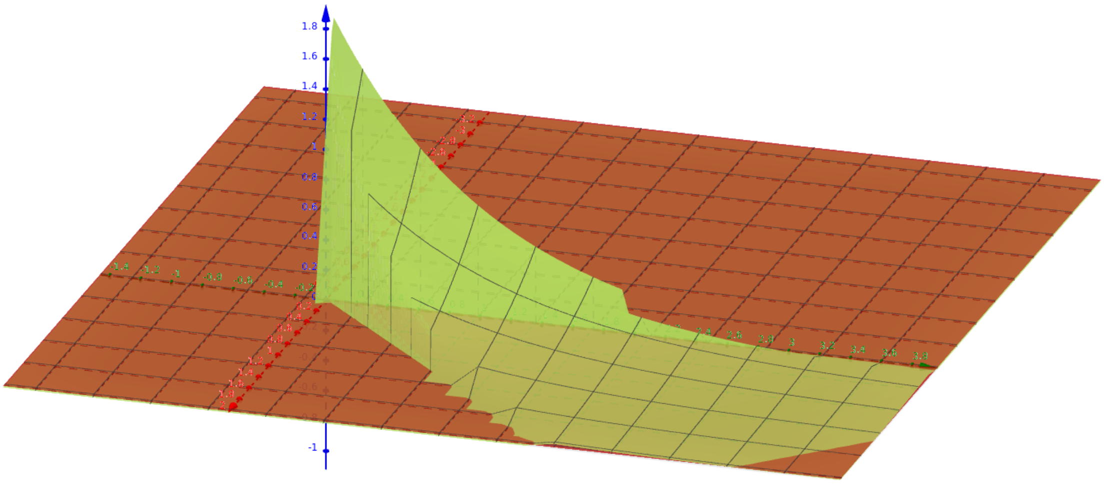
Exercice 2

Soient X et Y deux variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par la densité f suivante :

$$f(x,y)\begin{cases} 2e^{-x-y} & \text{si } 0 < x < y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Si vous disposez d'un outil de représentation 3D, essayez de donner une représentation graphique de la densité f.
2. Vérifiez que f est bien une fonction de densité.
3. Calculer les lois marginales de X et Y et reconnaître autant que possible la nature de X et Y.
4. Calculer les densités des lois conditionnelles $f_{X,Y=y}$ et $f_{Y,X=x}$. Quand c'est possible, reconnaître la nature de ces nouvelles variables aléatoires.
5. Calculer les espérances $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.
6. Calculer les espérances conditionnelles $\mathbb{E}(X|Y)$ et $\mathbb{E}(Y|X)$.
7. Calculer la covariance de X et Y
8. Calculer le coefficient de corrélation de X et Y. Interpréter le résultat.

1)



2)

$$
\begin{aligned}
&\int_{x\in\mathbb{R}}\int_{y\in\mathbb{R}} f(x,y)\;dxdy\\
&=\iint_{0<x<y} f(x,y)dxdy \equiv \int_{x=0}^{\infty}\int_{y=x}^{\infty} f(x,y)dxdy\\
&=\int_{x=0}^{\infty}\Big\{\int_{y=x}^{\infty} f(x,y)dy\Big\}dx\\
&=\int_{x=0}^{\infty} dx\Big(\int_{y=x}^{\infty} 2e^{-x-y}dy\Big)\\
&=\int_{x=0}^{\infty} 2e^{-x}dx\Big(\int_{y=x}^{\infty} 2e^{-y}dy\Big)\\
&=\int_{x=0}^{\infty} 2e^{-x}\Big[-e^{-y}\Big]_{x}^{\infty}dx\\
&=2\int_{x=0}^{\infty} e^{-x}e^{-x}dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-2x}dx\\
&=\frac{2}{2}[e^{-2x}]_{0}^{\infty} = 1
\end{aligned}
$$

3)

X	Y

$$\begin{cases} f(x,y) & = 2e^{-(x+y)} \qquad x < y \\ & = 2e^{-s} \qquad \text{où s = (x + y)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &= \int_x^{\infty} 2e^{-x-y} dy \\ &= 2e^{-x} \int_x^{\infty} e^{-y} dy \\ &= f(x) = 2e^{-2x} \end{aligned}$$

5)

Loi exponentienne $\lambda = 2$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{x=0}^{\infty} f(x,y) dx \\ &= \int_{x=0}^{y} 2e^{-x-y} dx \end{aligned}$$

$$X \text{Exponentiel}, \lambda = 2$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \frac{1}{2} \\ \mathbb{E}(X) &= \int_0^{\infty} f_x(x) dx \\ &= \iint_{0<x<y} x f(x,y) dx dy \\ \mathbb{E}(Y) &= \int_0^{\infty} y f_y(y) dx \\ &= \int_0^{\infty} y(2e^{-y}(1 - e^{-y})) dy \\ &= \int_0^{\infty} (2ye^{-y} - 2ye^{-2y}) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\int_0^{\infty} ye^{-y} dy - \int_0^{\infty} (2y) e^{-2y} dy \\ = 2\mathbb{E}(Exp(\lambda = 1)) - \mathbb{E}(Exp(\lambda = 2)) \\ = 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ \text{Loi marginale pour X:} \\ f_x(a) = \int_{y \in \mathbb{R}} f(x,y) dy \end{aligned}$$

Densite Marginale de X:
Projeté des autres dimensions sur x, tel que x devient l'abcisse de la projection

4) Loi conditionnelle:

$$f(x, \underset{=}{y})$$

$$d_{Y|X=x} = \frac{f(x,y)}{\int_y f(x,y)}$$

$$\frac{f(x,y)}{f_x}(x)$$

la Loi conditionnelle de Y connaissant X : $= 0$ si $y \leq x$

$$f_{Y|X=x} = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$
$$= \frac{2e^{-x-y}}{2e-2x}$$
$$= e^{x-y} = e^{-(y-x)}$$

Loi conditionnelle de X connaissant Y:

$f_{X|Y=y} = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = 0$ si $x \leq 0$ ou $x \geq y$

si $0 < x < y$

$$f_{X|Y=y} = \frac{2e^{-x-y}}{2e^{-y}(1-e^{-y})} = \frac{1}{1-e^{-y}}e^{-x}$$

6) Esperance conditionnelle

$$X = x$$
$$f_{Y|X=x}$$
$$(y) = \begin{cases} 0 \mathrm{si} y \leq x \\ e^{-(y-x)} \mathrm{si} y > x \end{cases}$$

$$Y - x \equiv Exp(1)$$

E(Y - x) = 1

$$E(Y|X = x) = x + 1$$

$$\boxed{E(Y|X) = X + 1}$$

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \int x f_{x|Y=y}(x)dx$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X|Y = y) = 1 - \frac{ye^{-y}}{1 - e^{-y}}}$$

7)

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \sigma^2(X) \\
&= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) \\
&= (X^2) - (\mathbb{E}(X))^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \iint_{0<x<y} x^2 f(x,y)dxdy \\
&= 2\iint_{0<x<y} x^2 e^{-x-y}dxdy
\end{aligned}
$$

Plus simplement, X suit la loix exponentielle avec $\lambda = 2$
Donc $\sigma(X) = \mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}$ donc $Var(X) = \frac{1}{4}$

$\mathbb{E}(Y^2) = \iint_{0<x<y} y^2 f(x,y)dxdy$
$= \int_{y=0}^{\infty} y^2 f_y(y)dy$
$= 2\int_0^{\infty} y^2 e^{-y}(1 - e^{-y})dy$
$Var(y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(y)^2 = \frac{7}{2} - \frac{9}{4}$
$\sigma(y) = \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sigma}{4}$

Theoremes

1. Theoreme de la limite centrale
   https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_central_limite (https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_central_limite)

2. loi dite “gentille”

Soit X une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, on a:

- $\mathbb{P}(|X - \mu| \leq 2\sigma) \approx 95,45\%$
- $\mathbb{P}(|X - \mu| \leq 3\sigma) \approx 99\%$
- $\mathbb{P}(|X - \mu| \leq 6\sigma) \approx (1 - 10^{-9})\%$

La fonction de densité φ de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est définie par :

$$
\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)}
$$

Z ~ N(0,1)
X ~ mu + sigma * Z

a,b :
Y = a + bZ
Y ~ N(a, b^2)

W = a + bX
W ~ N(a + b*mu, (|b|r)^2)
$\mathbb{E}(W) = \mathbb{E}(a + bX)$
$a + \mathbb{E}(B) = a + b * \mathbb{E}(X)$

N(0,1) la loi normale standard
$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} e^{\frac{-1}{2} x^2}$

fonction de répartition $\Phi(x) = \int_{\infty}^{x} \phi(t) dt$

En général:
X : f(x)
Y : g(x)
X, Y independants
X + Y = Z densité h

ceci est un produit de convolution:
$h(Z) = \int_{t=-\infty}^{t=\infty} (f(t) g(Z - t) dt)$

Admis

$$X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$$
$$X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$$
$$X_1 + X_2 : \text{independants}$$
$$X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2; \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Theoreme de la limite centrale

Soient $X_1, \ldots, X_n \ldots$ de Variables Aleat. independantes et identiquement distribuees.
esperance μ et ecart type σ
$S_n = X_1 + \ldots + X_n$

- convergenace de la fonction de repartition

$$\frac{S_n - n\nu}{\sigma\sqrt{n}} \underbrace{\rightarrow}_{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1)$$

Statistique Multidimensionnelle

- Vecteur aleatoire

- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$

- Densité
  - $f(x_1, \ldots, x_n)$
- $\mathbb{E}(X)$ (moyenne)
  - $\mathbb{E}(X) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X_1) \\ . \\ . \\ . \\ \mathbb{E}(X_n) \end{pmatrix}$
- Variance
  - $\sigma_1^2 = \mathbb{E}((X_1 - \mathbb{E}(X_1))^2)$
  - $\sigma_2^2 = \mathbb{E}((X_2 - \mathbb{E}(X_2))^2)$
- Covariance
  -

$$\begin{aligned} Cov(X_1, X_2) &= \mathbb{E}((X_1 - \mathbb{E}(X_1)).\,(x_2 - \mathbb{E}(X_2))) \\ &= \underbrace{\rho 12}_{\text{valeur de correlation } \in [-1,1]} .\,\sigma_1.\,\sigma_2 \end{aligned}$$

- Matrice de Covariance

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = (\, Cov(X_i, X_j)_{1 \le i \le n \text{ et } 1 \le j \le n} \,)$$

$$\Sigma = (\, \Sigma_{ij} \,)$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \ldots & \ldots & \Sigma_{n1} \\ \vdots & \ddots & . & \vdots \\ \vdots & . & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{1n} & \ldots & \ldots & \Sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

Loi normale multidimentionnelle multivariée

(Cas le plus courrant)

D'espérence μ, de matrice de var / cov Σ

de Densite f :

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} det(\Sigma)^{\frac{1}{2}}} * e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^t \Sigma^{-1}(x-\mu)}$$

Proprietes de matrice de Variance/Covariance

1. $X\mu\Sigma$ en dimension n
   $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$
   $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
   $Y = a_1X_1 + \ldots + a_nX_n; a_i \in \mathbb{R}$
   $= a^t.X$

$\mathbb{E}(Y) = \Sigma a_i\mu_i = a^t\mu$
$Var(Y) = Var(a^tX)$
$= cov(\sum a_iX_i, \sum a_jX_j)$
$= \sum_{i,j} a_ia_jcov(X_iX_j)$

$$\begin{aligned} cov(X,X) &= \mathbb{E}((x-\mathbb{E}(X))(x-\mathbb{E}(X))) \\ &= cov(aX+bY,Z) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}([aX+bY-\mathbb{E}(aX+bY)],[Z-\mathbb{E}(z)])) \\ &= acov(X,Z)+bcov(X,Z) \\ &= a^t\sum a \end{aligned}$$

2. Cette formule se generalise

X vecteur aleatoire, $\mu\sigma$
A une matrice
$Y = A.X$
$E(Y) = A.\mu$

(simple produit matriciel)
$\Sigma_y = A\Sigma A^t$

3. On admet

$B : B^{-1} = B^t$
$BB^t = Id$
$\exists B$
$\exists \Lambda$ diagonale
$\Sigma = B\Lambda B^t$

X un vecteur quelconque
μ
Σ
$\Sigma = B\Lambda B^t$
On pose $Y = B^t X$
$\Sigma_y = B^t \Sigma_x B$
$= B^t B \Lambda B^t B$
$\Sigma_y = \Lambda$

> Soit $\mu_i = E(X_i)$
> Soit X_i la loi suivant $\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$
> Soit $\Sigma_{\text{dim3}} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 \\ \rho_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 \\ \rho_{31}\sigma_3\sigma_1 & \rho_{23}\sigma_3\sigma_2 & \sigma_3^2 \end{pmatrix}$
> On admet un matrice B calculee grace a l'ordinateur.
> Soit $\Sigma_x = B\Sigma_y B^{-1}$
> Donc $\Sigma_y = B^{-1}\Sigma_x B$
> Soit $X = BY$
> Donc $Y = B^t X$
> En gros: on a un vecteur $X(X_1, X_2, X_3)$ de variables correles, on change de repere en digonalisant la matrice de covariance Σ_x de X, pour les decoreller, on obtient les valeurs de B, on en deduit B^{-1}.(C'est une rotation de repere.) On obtient $Y(Y_1, Y_2, Y_3)$, ces variables Y_i sont non correlees.
> Ca fait apparaitre des parametres plus interessants, car decorreles.

Soient $X_1 et X_2$ independants

$$\implies cor(X_1, X_2) = 0$$
$$\implies cov(X_1, X_2) = 0$$

On a besoin de la covariance pour la correlation.

Rappels des formules:
Définition de la covariance de X et Y :
$Cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
(correlation ρ)
$\rho(X, Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(x)\sigma(y)}$

Exercices types partiels

Exercice 1 3 4 (2015)
Exercice 1 3 (2016)
Exercice 1 3 (2017)

Exercice improvisé

$$V = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$
$$\mathbb{E}(V) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\Sigma_v = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\leftarrow$ matrice de covariance (https://fr.wikipedia.org/wiki/Covariance#D%C3%A9finition_de_la_matrice_de_covariance)

$$U = X + Y - Z$$

L'esperance de U est la somme de esperances.
$\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(z) = 1 - 2 - 3 = -4$

carre scalaire de V = produit scalaire de V avec V

(c'est debile on distribue)
$Var(U) = Cov(X + Y - Z, X + Y - Z)$
$= Cov(X, X) + Cov(X, Y) + Cov(X, -Z) + Cov(Y, Y) + Cov(Y, X)$
$+Cov(Y, -Z) + Cov(-Z, X) + Cov(-Z, Y) + Cov(-Z, -Z)$
$= Var(X) + 2Cov(X, Y) - 2Cov(X, Z) + Var(Y) - 2Cov(Y, Z) + Var(Z)$
$= 2 + 2 * 1 - 2 * 2 + 1 - 2 * 1 + 4 = 3$

$$Cov(U, Z) = Cov(X + Y - Z, Z)$$

$= Cov(X, Z) + Cov(Y, Z) - Cov(Z, Z)$
$= 2 + 1 - 4 = -1$

$\rho(U, Z) = \frac{Cov(U,Z)}{\sigma(U)\sigma(Z)} = \frac{-1}{\sqrt{3}*2} = \frac{-1}{2\sqrt{3}}$

A reviser:
les lois normales, matrice covarriance

Exercice nº1 (2016)

$X \sim \mathcal{N}(9, 1)$

Centrer la loi normale : $\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(x)} \to \mathcal{N}(0, 1)$

On cherche $\mathbb{P}(X \leq L) = 0.995$
$\to \mathbb{P}(\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)} \leq \frac{L-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}) = 0.995$

$\mathbb{P}(\mathcal{N}(0, 1) \leq z) = 0.995$

À connaître :
$\frac{1}{\sqrt{2x}} \int_{-\infty}^{z} e^{\frac{x^2}{2}} dx$

$\frac{1}{\sqrt{2x}} \int_{-\infty}^{2.57} e^{\frac{x^2}{2}} dx = 0.995$
$\frac{L-\mathbb{E}(X)}{\sigma(x)} = 2.57 = z$
$L = \mathbb{E}(X) + z\sigma(X)$
$= 9 + 2.57 = 11.57$

Exercice nº3 (2017)

La transposée d'une matrice d'isométrie M est aussi son inverse.

1) Quelle est la matrice Σ de variance-covariance de X ?

$X_1, X_2, X_3 \sim \mathcal{N}(0, 1)$

> Deux composantes X_i, X_j quelconques sont égales à $-\frac{1}{4}$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

3) Que peut on dire du vecteur aléatoire $Y = U^t . X$? Quelle est sa matrice de variance-covariance ?

Y de base suit une loi normale multivariée.
$\mathbb{E}(Y) = U^t \mathbb{E}(X) = 0$

$\Sigma_y = U^t \Sigma_X (U^t)^t = U^t U \Delta U^t U = \Delta$

5) Exprimer matriciellement X en fonction de Y.

$X = UY$.

6) Conclure en expliquant comment simuler X (on pourra supposer qu'on utilise un logiciel permettant le calcul matriciel)

On simule d'abord Y et après on applique la matrice U.