Traitement avancé du signal

Nicolas Boutry[1]

↪ nicolas.boutry@lrde.epita.fr

[1] Laboratoire de Recherche et Développement de l'EPITA (LRDE), France

Octobre 2019

Outline

Outline

Plan du cours I

- Théorie
  - Réponse impulsionnelle (p.19 [Mallat, 1999])
  - Fonctions de Transfert (p.20 [Mallat, 1999])
  - Transformées de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$ (p.22/24 [Mallat, 1999])
  - Régularité et décroissance (p.28 [Mallat, 1999])
  - Principe d'incertitude d'Heisenberg (p.29 [Mallat, 1999])
  - Oscillations de Gibbs et Variation Totale (?) (p.31 [Mallat, 1999])
  - Transformée de Fourier en dimension 2 (p.37 [Mallat, 1999])
  - Atomes temps-fréquence (p.67 [Mallat, 1999])
  - Transformée de Fourier à fenêtre (p.69 [Mallat, 1999])
  - Transformées en Ondelettes (TFO) (p.78 [Mallat, 1999])
  - Fréquences instantanées (?) (p.90 [Mallat, 1999])
  - Distributions temps-fréquence de Wigner-Ville (?) (p.106 [Mallat, 1999])
  - La théorie des frames pour la réduction de bruit (?) (p.123 [Mallat, 1999])

Plan du cours II

- Transformée en ondelettes dyadiques (!) (p.146 [Mallat, 1999])
- Ondelettes de Gabor et discrimination de textures (!) (p.155 [Mallat, 1999])
- Moments nuls des ondelettes et mesure de régularité (?) (p.164/167 [Mallat, 1999])
- Maxima de la TFO et détection de singularités (p.173/174 [Mallat, 1999])
- Calculs rapides de contours multi-échelles et algorithme à trous (?) (p.195/196 [Mallat, 1999])
- Bases d'ondelettes orthogonales (p.217 [Mallat, 1999])
- Bases d'ondelettes biorthogonales (?) (p.261 [Mallat, 1999])
- Lifting d'ondelettes (?) (p.268 [Mallat, 1999])
- Bases d'ondelettes séparables et en dimension 2 (p.299/302 [Mallat, 1999])
- Paquets d'ondelettes et arbres associés en 1D (?) (p.317 [Mallat, 1999])
- Paquets d'ondelettes d'images et arbre quaternaire associé (?) (p.335 [Mallat, 1999])
- Transformées par blocs et Transformée rapide en cosinus discrets (?) (p.339/346 [Mallat, 1999])
- Approximation de Karhunen-Loeve (?) (p.381 [Mallat, 1999])
- Optimalité Minimax (?) (p.466 [Mallat, 1999])

Plan du cours III

- Wavelet Scattering Transform (WST) (?)
  https://deeplearning-math.github.io/slides/Lecture02_LiuHX.pdf

- Applications
  - Réduction de bruit à l'aide des frames (?) (p.133 [Mallat, 1999])
  - Approximations par poursuite de base (?) (p.415 [Mallat, 1999])
  - Cosinus par blocs et compression d'images (JPEG) (?) (p.560 [Mallat, 1999])
  - Descripteurs de contours à base d'ondelettes et reconnaissance de formes (?)
    https://www.hindawi.com/journals/je/2013/435628/

Outline

Le paradis de Fourier

Le paradis de Fourier I

- Rappels sur la transformée de Fourier, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle d'énergie finie, on :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)) \exp^{-i\omega t} dt,$$

où les coefficients $\hat{f}(\omega)$ correspondent à l'amplitude de la sinusoïde $\exp^{-i\omega t}$ dans le signal f,

- on a alors inversement:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \exp^{i\omega t} d\omega,$$

qui permet de reconstruire f à partir de sa transformée de Fourier,

Le paradis de Fourier II

- Soit L un opérateur linéaire stationnaire, il est entièrement caractérisé par ses valeurs propres $\hat{h}(\omega)$:

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, L \exp^{i\omega t} = \hat{h}(\omega) \exp^{i\omega t},$$

- Interprétation : à un ω donné,
  - on synthétise une sinusoïde complexe $\exp^{i\omega t}$ fonction du temps,
  - Elle correspond à un vecteur de l'espace d'entrée de L,
  - L vérifie alors l'égalité $Av = \lambda v$ montrant que $\exp^{i\omega t}$ est un vecteur propre de L,
  - Ce vecteur propre $\exp^{i\omega t}$ est alors associé à la valeur propre $\hat{h}(\omega)$,

Le paradis de Fourier III

- appliquons-le à la fonction temporelle f:

$$\begin{aligned} Lf &= L\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)\exp^{i\omega t}\, d\omega\right), \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} L\hat{f}(\omega)\exp^{i\omega t}\, d\omega, \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) L\exp^{i\omega t}\, d\omega, \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)\hat{h}(\omega)\exp^{i\omega t}\, d\omega, \end{aligned}$$

  alors on observe que L atténue ou augmente chaque composante fréquentielle de f, c'est donc un filtre fréquentiel.

- ainsi, on comprend que la TF est un outil idéal pour la transmission ou le traitement des signaux stationnaires, c'est-à-dire dont les propriétés statistiques (moyenne, variance, etc.) sont constantes dans le temps,

Le paradis de Fourier IV

- Pour calculer une TF, on corrèle une fonction avec un signal infini dans le temps, ainsi on ne capture PAS comme il nous arrangerait l'information transitoire:
  - Exemple 1 : la prononciation d'un mot dans un silence.
  - Exemple 2 : voir ci-dessous

Le paradis de Fourier V

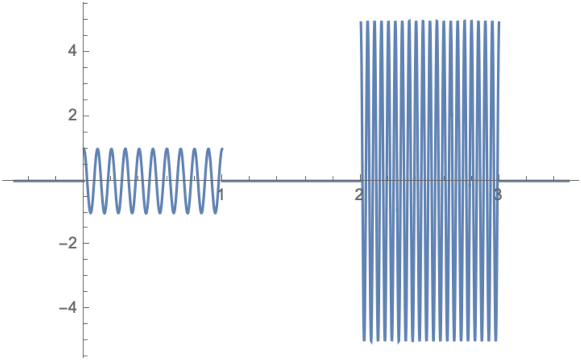


Figure: Deux notes de musiques se suivant dans le temps (Signal 1)

- On insère dans un silence deux notes de musiques ”do” puis ”ré” consécutivement (Signal 1),

Le paradis de Fourier VI

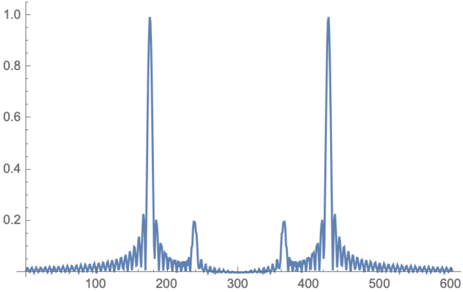


Figure: Spectre du signal 1

- On calcule le spectre (module de la TF) du Signal 1,

Le paradis de Fourier VII

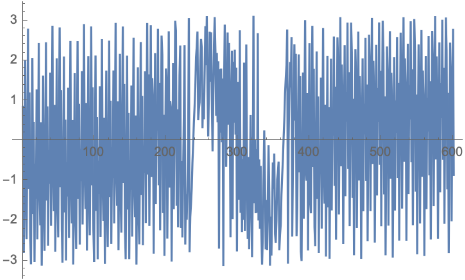


Figure: Phase du signal 1

- On calcule la phase du Signal 1,

Le paradis de Fourier VIII

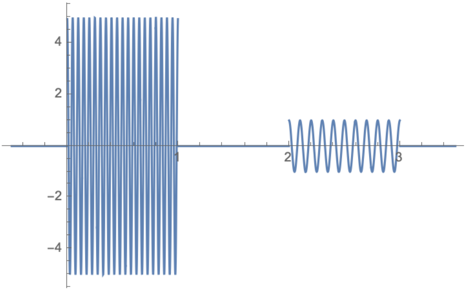


Figure: Deux notes de musiques se suivant dans le temps dans le sens inverse par rapport au signal 1 (Signal 2)

- On synthétise un nouveau signal mais avec un ”ré” puis un ”do” (Signal 2),

Le paradis de Fourier IX

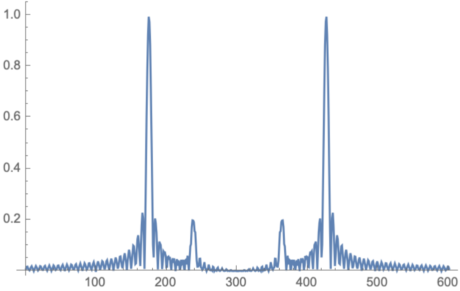


Figure: Spectre du signal 2, identique à celui du signal 1 ! Le spectre ne suffit donc pas à détecter l'inversion des fréquences ...

- On calcule le spectre du Signal 2,
- On obtiendra les mêmes spectres (et donc les mêmes pics aux deux fréquences concernées !),

Le paradis de Fourier X

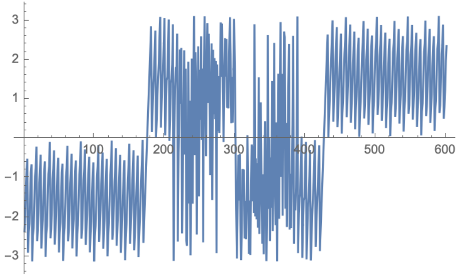


Figure: Phase du signal 2 : on peut la différencier de la phase du signal 1 mais comment décrypter que l'une est la suite de fréquences f_1 et f_2 et l'autre la suite de fréquences f_2 et f_1 ?

- On calcule la phase du signal 2,

Le paradis de Fourier XI

- Noter que l'information due à la TF n'est pas vraiment perdue (inversibilité de la TF combinaison du spectre et de la phase),
- En fait l'information permettant de savoir si on a "do" et "ré" ou "ré" et "do" sera "cachée" dans la phase,
- Problème : elle sera alors difficile à exploiter ...

Le mariage temps-fréquence

Le mariage temps-fréquence I

- Principe d'incertitude d'Heisenberg : *l'énergie d'une fonction et de sa transformée de Fourier ne peuvent être concentrées en même temps sur des intervalles arbitrairement petits*,
- Exemple 1 : un Dirac temporel $\delta(t - t_0)$ est concentré temporellement en t_0 mais son spectre est à support infini (et ne décroît même pas dans le temps !),
- Exemple 2 : un Dirac fréquentiel $\delta(\omega - \omega_0)$, c'est à dire une sinusoïde temporelle $\exp^{-j(\omega-\omega_0)t}$, a son énergie centrée en ω_0 mais son module vaut 1 partout dans le temps !
- Autrement dit : une grande précision (définie ci-après) ou localisation en temps $\Rightarrow$ faible précision en fréquence, et inversement,
- On entend par précision temporelle/fréquentielle la capacité d'un système à différencier deux signaux proches temporellement/fréquentiellement,
- 1946: Gabor propose d'étudier les signaux sonores avec des atomes élémentaires précis en temps et en fréquence autant que possible (détaillé plus tard).

Le mariage temps-fréquence II

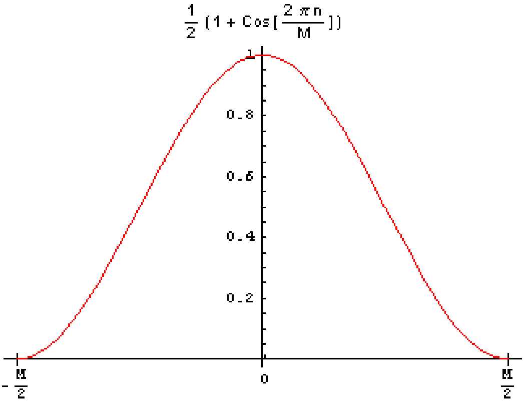
- Cela mena à la naissance de l'analyse temps-fréquence (liée à la perception humaine des signaux),
- 1948 : Ville ⇒ étude temps-fréquence d'un signal f à partir d'une densité d'énergie [HORS COURS]:

$$P_V f(t,\omega) := \int_{\mathbb{R}} f(t+\frac{\tau}{2}) f^*(t-\frac{\tau}{2}) \exp^{-i\tau\omega} d\tau,$$

- Cette distribution fut en réalité introduite par Wigner en 1932 en mécanique quantique, d'où le nom de distribution de Wigner-Ville.

La transformée de Fourier à fenêtre

La transformée de Fourier à fenêtre I



- Une fenêtre en traitement du signal est une fonction à support compact, symétrique autour du milieu de ce support, généralement maximale ou près de son maximum au centre, et évanescente (cf. Hanning, Hamming, Gaussienne tronquée, etc.).

La transformée de Fourier à fenêtre II

- construction des atomes de Gabor à partir d'une fenêtre g translatée en temps et en fréquence:

$$g_{u,\xi}(t) = g(t-u)\exp^{i\xi t},$$

- l'énergie de g est donc concentrée au voisinage de u sur un intervalle de largeur :

$$\sigma_t = StandardDeviation(|g(t)|^2),$$

- on obtient comme TF de g:

$$\hat{g}_{u,\xi}(\omega) = \hat{g}(\omega-\xi)\exp^{-iu(\omega-\xi)},$$

- De la même façon, l'énergie de g est donc concentrée au voisinage de ξ (mais fréquentiellement) sur un intervalle de largeur :

$$\sigma_\omega = StandardDeviation(|\hat{g}(\omega)|^2),$$

- l'énergie de $\hat{g}_{u,\xi}$ est donc localisée autour de la fréquence ξ sur un intervalle de largeur σ_ω qui mesure le domaine où $|\hat{g}(w)|$ est non négligeable,

- Attention, les intervalles de support ne sont pas égaux (en général) aux intervalles où est concentrée l'énergie !

La transformée de Fourier à fenêtre III

- l'étalement de l'énergie de l'atome dans le plan temps-fréquence est symboliquement représenté par un rectangle d'Heisenberg de centre (u, ξ), de largeur temporelle σ_t et de largeur fréquentielle σ_ω :

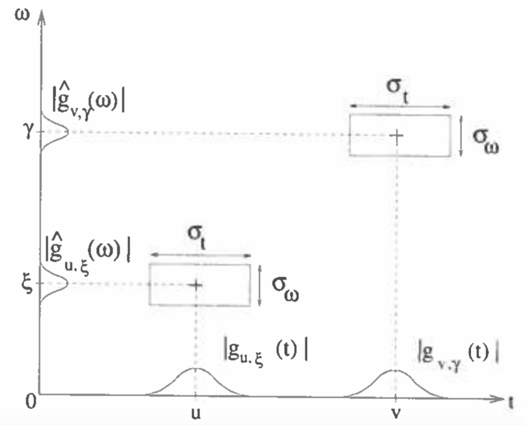


Figure: Diagramme d'Heisenberg d'une TFF

La transformée de Fourier à fenêtre IV

- on observe bien le théorème d'incertitude d'Heisenberg :

$$\sigma_t \; \sigma_\omega \geq \frac{1}{2},$$

- Autrement dit, si on a une très bonne précision en temps, c'est-à-dire $\sigma_t \to 0$, alors σ_ω tend vers $+\infty$ (mauvaise précision fréquentielle),
- cette surface $\sigma_t \; \sigma_\omega$ est minimale lorsque la fenêtre g est une Gaussienne, on parle alors de fonctions de Gabor (cas optimal donc !),
- Attention à ne pas confondre les atomes de Gabor et les fonctions de Gabor !

La transformée de Fourier à fenêtre V

- Supposons que l'on ait donc un atome temps-fréquence $g^*_{u,\xi}(t)$ centré en (u,ξ), alors la Transformée de Fourier à fenêtre (TFF) est définie en terme de corrélation par :

$$S\,f(u,\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(t) g^*_{u,\xi}(t) dt \tag{1}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(t) g(t-u) \exp^{-i\xi t} dt \tag{2}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \hat{g}^*_{u,\xi}(\omega) d\omega \tag{3}$$

- Rappel : la dernière égalité est obtenue par la formule de Parseval.
- Bien noter que l'on est passé d'une fonction temporelle 1D à une nouvelle fonction qui elle est 2D (temps $\rightarrow$ temps + fréquence),
- Ces deux représentations (initiale et temps-fréquentielle) codent le <u>même signal</u> mais de <u>façon différente</u>,
- Ces intégrales montrent que :
  - Temporellement on ne considérera que les valeurs de f autour de u,

La transformée de Fourier à fenêtre VI

- Fréquentiellement, on ne considérera que les valeurs de $\hat{f}$ autour de ξ.

Références

Gasquet, C. and Witomski, P. (2013).
Fourier analysis and applications: filtering, numerical computation, wavelets, volume 30.
Springer Science & Business Media.

Mallat, S. (1999).
A wavelet tour of signal processing.
Elsevier.

Mallat, S. (2009).
A wavelet tour of signal processing, The Sparse Way.
Elsevier.