MATBOJ

LSGM Winterschule 2023

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Man ermittle alle reellen Lösungen x der Gleichung $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+1=0$.

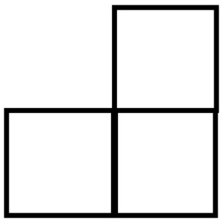
Aufgabe 2 (6 Punkte)

Ein Bauer legt 1770 Goldtaler an, um Pferde und Kühe zu kaufen. Ein Pferd kostet 31 Goldtaler und eine Kuh 21 Goldtaler. Wie viele Pferde und Kühe kann er kaufen?

Aufgabe 3 (1 + 5 Punkte)
Der französische Mathematiker De Bouvelle bewies im Jahre 1509 fälschlicherweise, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ eine der Zahlen $6n-1$ oder $6n+1$ eine Primzahl sei.
a) Gib ein Beispiel an, das zeigt, dass er sich geirrt hat.
b) Zeige, dass es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gibt, die diese Aussage widerlegen.

Aufgabe 4 (7 + 2 Punkte)
Gegeben sei ein beliebiges Dreieck mit den Höhen h_a, h_b, h_c sowie dem Inkreisradius r.
a) Zeige: $h_a + h_b + h_c \geq 9r$.
b) Existiert ein Dreieck, wo Gleichheit gilt?

Aufgabe 5 (7 Punkte)
Eine quadratische Fläche der Seitenlänge 2^n ist schachbrettartig in Einheitsquadrate unterteilt. Ein beliebiges dieser Einheitsquadrate wird entfernt.
Zeige, dass die verbliebene Fläche stets durch Platten der unten abgebildeten Form (bestehend aus drei Einheitsquadraten) lückenlos und überschneidungsfrei überdeckt werden kann.



Aufgabe 6 (7 Punkte)
Gegeben ist ein Würfel mit Kantenlänge 1, dem eine Kugel mit Radius $R = \frac{1}{2}$ einbeschrieben ist. In die Würfelecken sollen kleinere Kugeln mit Radius r eingefügt werden, die jeweils die drei Flächen, die in der Ecke zusammenstoßen, und die große Kugel berühren. Bestimme r.

Aufgabe 7 (6 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine durch 8 teilbare Zahl.
Zeige, dass n nicht als Summe von weniger als acht ungeraden Quadratzahlen darstellbar ist.

Aufgabe 8 (8 Punkte)
Sei $q(n)$ die Quersumme einer natürlichen Zahl n.
Finde die dreistellige natürliche Zahl m, für die der Quotient $\frac{m}{q(m)}$ minimal ist.

Aufgabe 9 (8 Punkte)
Finde alle reellen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die folgende Bedingung erfüllen:
$f(x^3) + f(y^3) = (x + y)(f(x^2) + f(y^2) - f(xy))$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 10 (6 Punkte)
Auf eine Tafel werden 11 (nicht notwendigerweise verschiedene) ganze Zahlen geschrieben. Kann es vorkommen, dass das Produkt beliebiger fünf Zahlen von der Tafel größer als das Produkt der restlichen Zahlen ist?

Aufgabe 11 (6 Punkte)
Beweise, dass für alle $a, c \in \mathbb{R}$ gilt: $4a^4 - 6a^3c + a^2c^2 + c^4 \geq 0$.

Aufgabe 12 (10 Punkte)
Jedes Quadrat eines 33×33 quadratischen Gitters ist mit einer der drei Farben gefärbt: rot, gelb oder blau - und zwar so, dass die Anzahl der Quadrate jeder Farbe gleich ist. Wenn zwei Quadrate mit einer gemeinsamen Kante unterschiedliche Farben haben, nennt man diese gemeinsame Kante eine Trennkante. Finde die minimale Anzahl von Trennkanten im Gitter.