Исследование полноты резонансных состояний оператора Шредингера для модели квантовых графов

Дмитрий Герасимов

научный руководитель:

д.ф.-м.н., профессор кафедры ВМ, И.Ю.Попов

Университет ИТМО

24 мая 2016 года

Полнота резонансных состояний

- Задача полноты важна как в теории, так и на практике.
- Рассматриваем резонатор и оператор Шредингера с граничным условием Дирихле (чисто дискретный спектр).
- Применяем возмущение, соединяя резонатор с волноводом (дискретный спектр смещается в резонансы)
- Интересным вопросом является нахождение домена, на котором резонансные состояния полны. **Гипотеза: на выпуклой оболочке рассеивателя**.

Существующие результаты

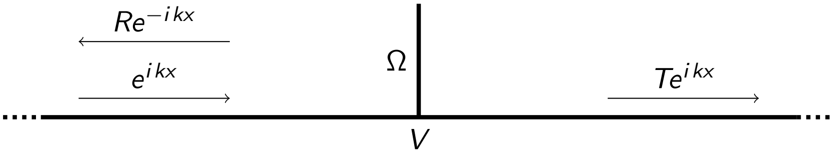


Рис. 1: Одномерный резонатор-отрезок с δ-условием в V

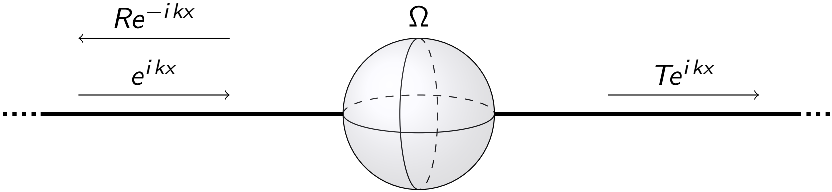


Рис. 2: Трехмерный резонатор (квантовая точка)

Постановка задачи

Квантовый граф Γ, состоящий из резонатора Ω и полубесконечных ребер-волноводов.
Оператор Шредингера H действует как $-\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}$ на ребрах.
В вершинах графа — δ-образная потенциальная яма, порождает граничные условия:

$$\forall i, j \in e(V) : \psi_i(V) = \psi_j(V)$$

$$\sum_{i \in e(V)} \frac{\mathrm{d}\psi_i}{\mathrm{d}x}(V) = a_V \psi(V)$$

Вопрос: полны ли резонансные состояния на Ω?

Критерий полноты

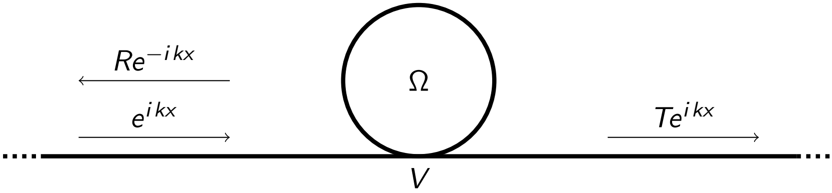
Используется матрица рассеивания:

$$S(k) = \begin{pmatrix} R(k) & T(k) \\ T(k) & R(k) \end{pmatrix}$$

Критерий полноты диссипативного оператора:

$$\lim_{r=1} \int\limits_{|\zeta|=r} \ln|\det S(\zeta)|d\zeta = 0$$

Резонатор типа «кольцо»



$$\det S = \frac{\cos(k) + \left(\frac{a}{2k} + i\right)\sin(k) - 1}{\cos(k) + \left(\frac{a}{2k} - i\right)\sin(k) - 1}$$

Резонатор типа «кольцо»

- $a \neq 0$: полнота присутствует
- $a = 0$: полноты нет, $\det S$ слишком быстро уходит в 0 на бесконечности!

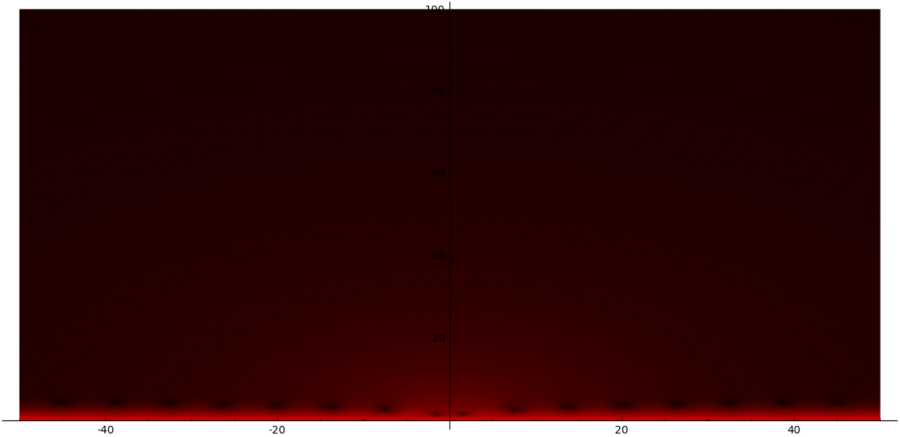
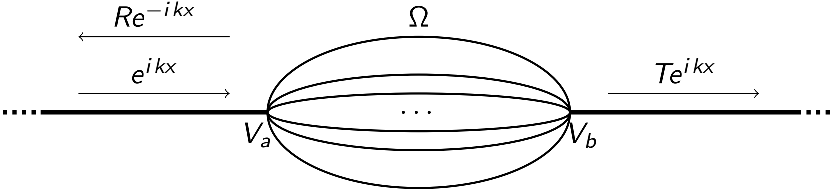


Рис. 3: $|\det S(k)|,\ a = 1$

Резонатор из W одинаковых ребер



$$\det S(k) = \frac{W(a+b)k\cos(k) + 2i\,Wk^2\cos(k) + (i\,a + i\,b)k\sin(k) - ((W^2+1)k^2 - ab)\sin(k)}{W(a+b)k\cos(k) - 2i\,Wk^2\cos(k) - (i\,a + i\,b)k\sin(k) - ((W^2+1)k^2 - ab)\sin(k)}$$

Схема доказательства полноты

$$\lim_{r\to 1} \int\limits_{C_r} \ln|\det S(k)| \frac{2i}{(k+i)^2} dk = 0$$

$k \to iC(r) + R(r)e^{it}$

$$\lim_{r\to 1} \int\limits_{0}^{2\pi} \ln|\det S(k)| \frac{2i}{(R(r)e^{it} + iC(r) + i)^2} Ri\,dt = 0$$

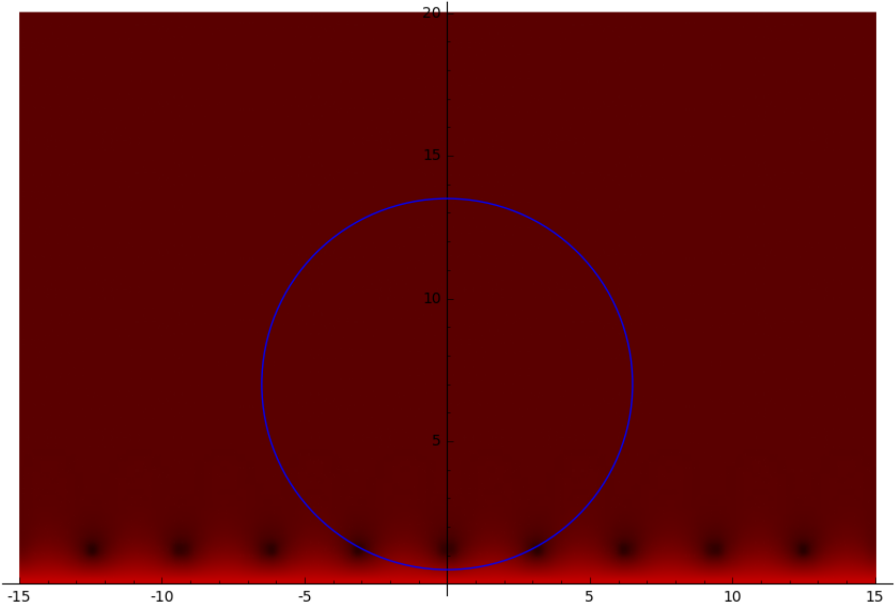


Рис. 4: $|\det S(k)|$, $W = 2$, $a = b = 0$

Схема доказательства полноты (продолжение)

Используем неравенство Коши-Шварца: $\left|\langle f, g\rangle\right| \leq \|f\| \, \|g\|$

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \ln|\det S(k)| \frac{\sqrt{R}}{Re^{it} + iC + i} \\
g^*(t) &= 2ii \frac{\sqrt{R}}{Re^{it} + iC + i}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|g\| &\leq 2\pi \\
\|f\| &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)
\end{aligned}
$$

Доказательство для произвольного графа

Хотелось бы использовать индукцию по количеству ребер.
Но при «стягивании» ребер можно потерять полноту.