Университет ИТМО

Естественно-научный факультет
Кафедра высшей математики

Герасимов Дмитрий Александрович

Исследование полноты резонансных состояний оператора Шредингера для модели квантовых графов

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук,
профессор кафедры ВМ И. Ю. Попов

Санкт-Петербург
2016

Содержание

Введение

Постановка задачи и обоснованность исследования

Исследования резонансов и резонансных состояний различных физических систем проводились давно, начиная с классической работы лорда Рэлея [1], и по наши дни. Однако, строгое математическое обоснование и формализм этим явлениям были даны во второй половине XX века. Теперь известно, что резонансы являются собственными числами, а резонансные состояние — собственными функциями некого диссипативного оператора [2, 3].

Одним из интересных как с математической, так и физической точек зрения вопросов является вопрос о полноте резонансных состояний. Рассмотрим некий конечный резонатор Γ с граничным условием Дирихле или Неймана. Как хорошо известно из теории операторов и рассеяния [4], оператор Шредингера в такой области будет обладать чисто дискретным спектром и полной системой собственных функций в $\mathcal{L}^2(\Gamma)$. Теперь применим к резонатору возмущение, соединив его через небольшое отверстие с волноводом. После этого, у системы будет непрерывный спектр, а собственные значения исходной системы превращаются в резонансы и «смещаются» в комплексную плоскость. Резонансные состояния формально удовлетворяют уравнению Шредингера и граничным условиям, однако не квадратично интегрируемы, так как их волновые функции не уходят в ноль на бесконечности, то есть не являются собственными функциями оператора Шредингера на новом домене. Однако, при сужении этих резонансных состояний на конечный домен Ω, они вновь становятся интегрируемыми и принадлежат пространству $\mathcal{L}_2(\Omega)$. Интересным является вопрос о полноте этих суженных состояний на домене Ω, и соответственно, вопрос о поиске такого поддомена квантовой системы, на котором его резонансные состояния будут полны. Существует гипотеза о том, что таким поддоменом является выпуклая оболочка рассеивателя.

Цели работы

Целью данной работы является исследование нескольких моделей квантовых графов и анализ их резонансных состояний на предмет их полноты на области резонатора.

Степень разработанности темы и научная новизна

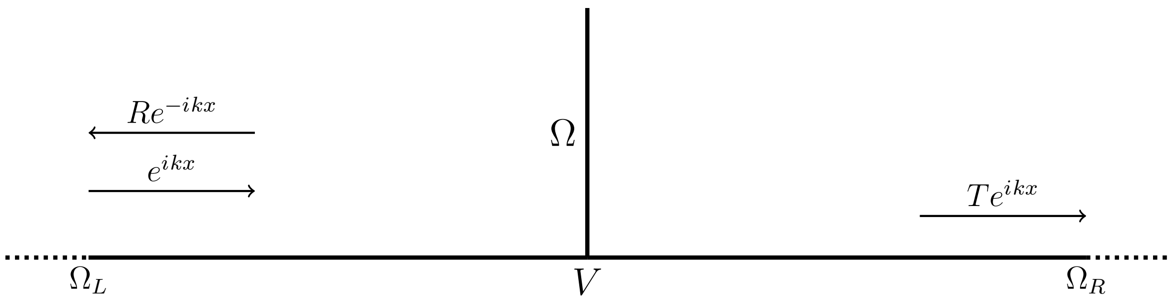

Рис. А: Одномерный резонатор-отрезок с условием Дирихле на краю резонатора.

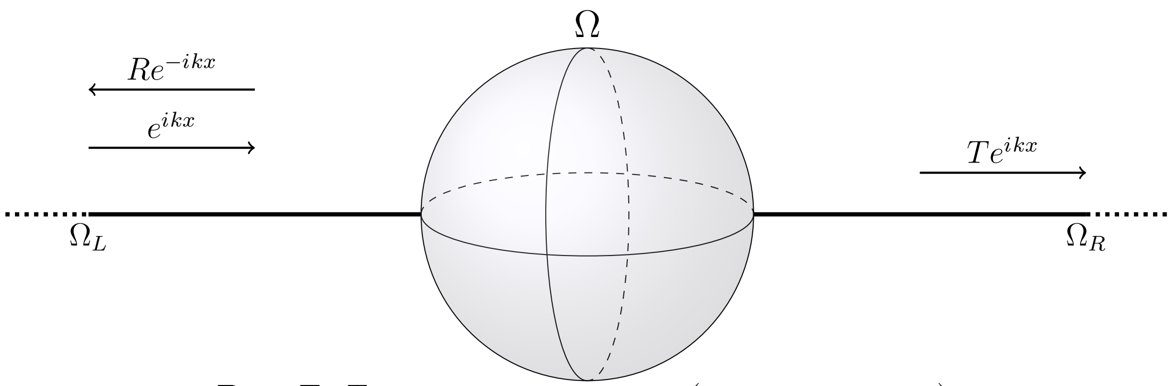

Рис. Б: Трехмерный резонатор (квантовая точка).

В работе [5] была показана полнота резонансных функций на графе с резонатором, состоящим из отрезка (рис. А), и резонатором в виде квантовой точки (рис. Б), других исследований в данном направлении автору не известно.

Положения, выносимые на защиту

В разд. 2.1 исследована сложная квантовая система с резонатором типа «пучок» и строго аналитически доказана полнота системы резонансных состояний для произвольного количества проводов.

В разд. 2.2 исследуется квантовая система с резонатором типа «кольцо». Анализируются различные граничные условия и показывается отсутствие полноты при $a = 0$ (разд. 2.2.3), и наличие полноты системы резонансных состояний при $a > 0$ (разд. 2.2.4).

Глава 1. Предварительные сведения

1.1. Различные обозначения

- $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
- $\mathbb{H}$ — верхняя комплексная полуплоскость (англ. upper half-plane), $\mathbb{H} = \{x + iy \mid y > 0, x, y \in \mathbb{R}\}$
- $\mathbb{D}$ — комплексный единичный круг (англ. unit disk), $\mathbb{D} = \{z \mid |z| < 1\}$
- $\mathbb{T}$ — комплексная единичная окружность (англ. unit circle), $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D} = \{z \mid |z| = 1\}$
- z используется в качестве переменной, обозначающей точку в верхней комплексной полуплоскости $\mathbb{H}$
- ζ используется в качестве переменной, обозначающей точку на комплексном единичном диске $\mathbb{D}$

1.2. Уравнение Шредингера

Уравнение Шредингера описывает временную эволюцию чистых состояний квантовых систем во времени, и выглядит как:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t) = H\Psi(t)$$

, $\hbar$ — приведенная постоянная Планка, H — гамильтониан, оператор полной энергии системы. Спектром гамильтониана является множество возможных значений энергии квантовой системы, которые можно получить при ее измерении.

Так как в этой работе нам интересна математическая задача рассеяния, и качественное поведение системы, а не конкретные значения энергий, далее мы будем игнорировать постоянную Планка и примем ее равной 1; а так система статична, и гамильтониан не зависит от времени, можно перейти к стационарному уравнению Шредингера:

$$H\Psi = E\Psi$$

При этом решения уравнения разделяются на два класса: связанные состояния (англ. bound states) — те, которые соответствуют дискретной части спектра и чью собственные функции являются квадратично интегрируемыми, и состояния рассеяния (англ. scattering states), которые являются лишь формальными решениями, и соответствуют непрерывной части спектра. Такие решения не лежат не являются квадратично интегрируемыми, и в них мы будем заинтересованы в данной работе.

1.3. S-матрица

Рассмотрим локализованный одномерный потенциальный барьер или резонатор. Пусть на барьер слева и справа направлены частицы с волновым вектором k (который будет скаляром в одномерном случае). Слева и справа от резонатора частицы ведут себя как свободные, соответственно, в общем виде их волновые функции имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi_L(x) &= Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \\ \psi_R(x) &= Ce^{ikx} + De^{-ikx} \end{aligned} \tag{1.1}$$

S-матрица, или матрица рассеяния (англ. scattering matrix) выражает зависимость исходящего состояния от входящего:

$$\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

, и полностью характеризует рассеивающие свойства потенциального барьера.

S-матрица обладает рядом интересных свойств [6, стр. 75], позволяющих анализировать рассеяние в квантовой системе: к примеру, S-матрица как функция комплексного аргумента, аналитична в верхней комплексной полуплоскости, а ее полюса соответствуют связным состояниям или резонансам.

1.4. Квантовые графы

Квантовый граф (англ. quantum graph) — широко используемая модель наносистемы [7—9]. Квантовый граф представляет из себя набор вершин и линейных, одномерных ребер, их соединяющих, или уходящих на бесконечность (можно обратиться к рис. A в качестве простейшего примера). При этом на ребрах графа действует дифференциальный оператор, к примеру, оператор Шредингера свободной частицы: $-\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}$, а в вершинах графа установлено граничное условие, связывающее волновые функции на смежных ребрах.

1.5. Преобразование Кэли

Прямое преобразование Кэли (англ. Cayley transform) конформно отображает $\mathbb{H}$ в $\mathbb{D}$:

$$W(z) = \frac{z-i}{z+i} \tag{1.3}$$

, обратное преобразование Кэли аналогично отображает $\mathbb{D}$ в $\mathbb{H}$:

$$w(\zeta) = i\frac{1+\zeta}{1-\zeta} \tag{1.4}$$

Важным свойством преобразование Кэли является инъективное отображение $\mathbb{R}$ в единичную окружность $\mathbb{T}$.

Так как преобразование Кэли является трансформацией Мебиуса, оно сохраняет окружности. В частности, окружность с радиусом r в нуле, под действием обратного преобразование Кэли перейдет в окружность с центром в $C(r)$ и радиусом $R(r)$, где:

$$\begin{aligned} C(r) &= \operatorname{Im}\frac{w(r)+w(-r)}{2} \\ R(r) &= \operatorname{Im}\frac{w(r)-w(-r)}{2} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Легко заметить, что при стремлении r к 1, $R(r)$ стремится к бесконечности, а $C(r)$ стремится к $R(r)$, что естественно так как в пределе комплексная единичная окружность отображается в вещественную ось.

1.6. Теория Лакса-Филипса

Мы рассматриваем рассеяние в подходе Лакса-Филипса, кратко опишем его (подробно с ним можно ознакомиться в работах [2, 10]).

Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения в области Γ:

$$\begin{aligned} u''_{tt} &= Hu \\ u(x,0) &= u_0(x) \\ u'_t(x,0) &= u_1(x). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Пусть $\mathcal{E}$ — гильбертово пространство двухкомпонентных функций с конечной энергией (u_0, u_1) на графе Γ:

$$\|(u_0,u_1)\|^2_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma}(|u_0'|^2 + |u_1|^2)dx$$

, где пара (u_0, u_1) называется данными Коши (англ. Cauchy data), а оператор $U(t)$, дающий решение этой задаче: $U(t)(u_0,u_1) = (u(x,t), u'_t(x,t))$, порождает унитарную группу $\{U(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Данная группа содержит два ортогональных подпространства: D_- — входящее подпространство, и D_+ — исходящее.

В теории рассеяния установлено, что существуют отображения $T_\pm : \mathcal{R} \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$, такие что $T_\pm U(t) = e^{iktT_\pm}$, которые называются исходящим (соответственно, входящим) спектральным представлением унитарной группы $U(t)$. Обозначим $K = \mathcal{E} \ominus (D_+ \oplus D_-)$, и рассмотрим полугруппу $Z(t) = \mathcal{P}_K U(t)|_K, t > 0$, где $\mathcal{P}_K$ — оператор проецирования на K. Пусть B — генератор $Z(t)$, то есть $Z(t) = e^{iBt}$, тогда собственные вектора этого оператора и будут резонансными состояниями, а $T_- T_+^{-1}$ называется оператором рассеяния. Оператор рассеяния действует как умножения на матрично-значную функцию $S(k)$, и являющейся матрицей рассеяния (см. разд. 1.3).

Теорема 1.1 ([11, стр. 95]). *Пусть S — внутренняя функция, тогда следующие утверждения эквивалентны:*

- *Оператор Z полный.*

- *S — произведение Бляшке-Потапова.*

Теорема 1.2 ([11, стр. 99]). *Пусть вспомогательное пространство конечномерно. Тогда, следующие утверждения эквивалентны:*

- *S — произведение Бляшке-Потапова.*
-
$$\lim_{r=1} \int\limits_{\mathbb{T}} \log |\det S(r\zeta)| dm(\zeta) = 0 \tag{1.7}$$

Непосредственно применяя эти теоремы, и пользуясь тем, что нашим вспомогательным пространством является $\mathbb{C}^2$, получаем, что мы можем воспользоваться данным упрощенным критерием для доказательства полноты резонансных состояний в квантовом графе.

1.7. Критерий сходимости

Так как $\det S$ является скалярной внутренней функцией [11], мы можем воспользоваться критерием 1.7 для исследования полноты системы резонансных состояний. В пространстве единичного диска он будем выглядеть как:

$$\lim_{r=1} \int\limits_{|\zeta|=r} \log |\det S(\zeta)| d\zeta = 0 \tag{1.8}$$

Так как S-матрица естественным образом определена на комплексной плоскости, иногда бывает удобнее работать с этим признаком в верхней полуплоскости $\mathbb{H}$, а не на единичном диске. Заменим в (1.8) переменную, применив к интегралу преобразование Кэли (1.3) к дифференциалу и области интегрирования, получив:

$$\lim_{r\to 1} \int\limits_{C_r} \ln |\det S(k)| \frac{2i}{(k+i)^2} dk = 0 \tag{1.9}$$

, где C_r — образ $|\zeta| = r$ относительно обратного преобразования Кэли. Для удобства вычислений параметризуем C_r как $C_r = \{R(r)e^{it} + iC(r) \mid t \in [0, 2\pi)\}$ (см. 1.5). Для краткости, обозначим:

$$s(k) = |\det S(k)|$$

, и, откинув константы, не влияющие на сходимость/расходимость интеграла, получаем финальную форму критерия, которой и будем пользоваться в дальнейшем:

$$\lim_{r\to 1}\int\limits_0^{2\pi} \ln s(R(r)e^{it} + iC(r))\frac{R}{(R(r)e^{it} + iC(r) + i)^2}dt = 0 \qquad (1.10)$$

Глава 2. Описание реализованного подхода

2.1. Модель резонатора типа «пучок»

2.1.1. Модель исследования

Рассмотрим систему на рис. 2.1. Оператор Шредингера действует как $-\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}$ на ребрах, а в вершинах V_a и V_b находятся δ-образные потенциальные ямы, порождающие граничные условия:

$$
\begin{gathered}
\forall i : \psi_i(0) = \psi_L(0) \\
\forall i : \psi_i(1) = \psi_R(0) \\
\psi_L'(0) - \sum_{i=1}^{W} \psi_i'(0) = a\psi_L(0) \\
-\psi_R'(0) + \sum_{i=1}^{W} \psi_i'(1) = b\psi_R(0)
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

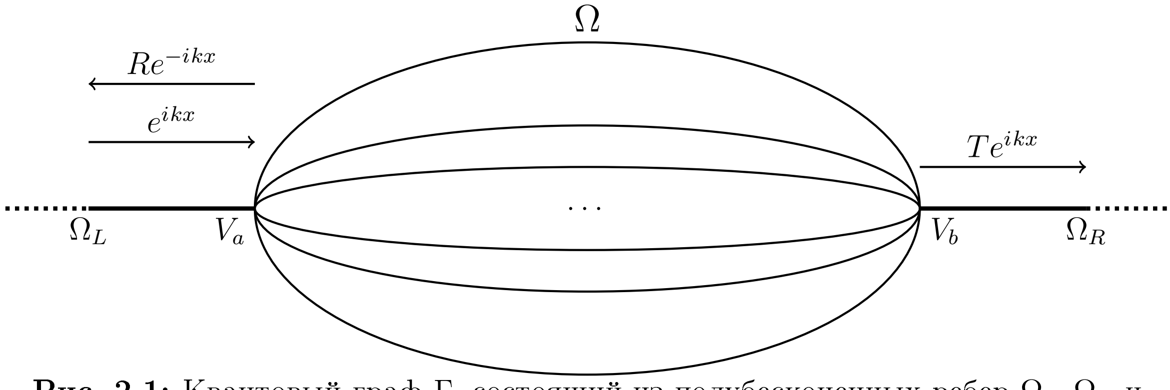

Рис. 2.1: Квантовый граф Γ, состоящий из полубесконечных ребер Ω_L, Ω_R и рассеивателя Ω, представляющего из себя W идентичных ребер длины 1. В вершинах V_a, V_b находятся δ-образные потенциальные ямы глубины a и b соответственно.

2.1.2. Вычисление S-матрицы

После решения системы уравнений 2.1 в сочетании с 1.1, мы получаем:

$$\det S(k) = \frac{W(a+b)k\cos(k)+2iWk^2\cos(k)+(ia+ib)k\sin(k)-\left(\left(W^2+1\right)k^2-ab\right)\sin(k)}{W(a+b)k\cos(k)-2iWk^2\cos(k)-(ia+ib)k\sin(k)-((W^2+1)k^2-ab)\sin(k)}$$

2.1.3. Доказательство полноты резонансных состояний при $a = b = 0$

Для простоты, рассмотрим случай $a = 0, b = 0$. После подстановки, получим

$$s(k) = |\det S(k)| = \left|\frac{2iW\cos(k) - \left(W^2+1\right)\sin(k)}{2iW\cos(k) + (W^2+1)\sin(k)}\right| \tag{2.2}$$

Зафиксируем r, и далее, для улучшения читаемости, определим $C = C(r)$, $R = R(r)$. Для каждого такого r, оценим интеграл и покажем, что последовательность оценок стремится к нулю.

Воспользуемся неравенством Коши-Буняковского:

$$\left|\langle u, v\rangle\right| \leq \|u\| \, \|v\|$$

, а если точнее, его специализацией на $\mathcal{L}^2[a, b]$:

$$\left|\int\limits_{t=a}^{b} f(t)g^*(t)dt\right|^2 \leq \int\limits_{t=a}^{b} |f(t)|^2 dt \int\limits_{t=a}^{b} |g(t)|^2 dt$$

Чтобы воспользоваться неравенством, разделим подынтегральное выражение в (1.10) на $f(t)g^*(t)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 2\pi \\ f(t) &= \ln s(Re^{it} + iC)\frac{\sqrt{R}}{Re^{it} + iC + i} \\ g^*(t) &= \frac{\sqrt{R}}{Re^{it} + iC + i} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Далее будет показано, что $\int |g(t)|^2$ ограничено сверху константой, не зависящей от r, а $\int |f(t)|^2$ стремится к нулю, из чего будет немедленно следовать сходимость интеграла (1.10).

2.1.3.1. Оценка $\int |g(t)|^2$

$$
\begin{aligned}
|g(t)|^2 = |g^*(t)|^2 &= \frac{\sqrt{R}^2}{|R\cos t + iR\sin t + iC + i|^2} \\
&= \frac{R}{R^2\cos^2 t + (R\sin t + C + 1)^2} \\
&= \frac{R}{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t + (C+1)^2 + 2R(C+1)\sin t} \\
&= \frac{1}{R + \frac{(C+1)^2}{R} + 2(C+1)\sin t}
\end{aligned}
$$

Заметим, что:

$$
\begin{aligned}
R + \frac{(C+1)^2}{R} - 2(C+1) &= \frac{R^2 + C^2 + 2C + 1 - 2RC - 2R}{R} \\
&= \frac{(R-C)^2 + 2(C-R) + 1}{R} \\
&> 0 && \text{,так как } C > R
\end{aligned}
$$

Интеграл такого типа хорошо известен, и его первообразная при $a > b$ (где $a = R + \frac{(C+1)^2}{R}$, $b = 2(C+1)$):

$$
\int \frac{dx}{a + b\sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{atan} \frac{a\tan\frac{x}{2} + b}{\sqrt{a^2 - b^2}}
$$

Далее, рассмотрим:

$$
\begin{aligned}
a^2 - b^2 &= (R + \frac{(C+1)^2}{R})^2 - (2(C+1))^2 \\
&= R^2 + \frac{(C+1)^4}{R^2} + 2(C+1)^2 - 4(C+1)^2 \\
&= (R - \frac{(C+1)^2}{R})^2 && \text{,так как } C > R \\
&\geq (R - \frac{(R+1)^2}{R})^2 \\
&\geq (2 + \frac{1}{R})^2 \\
&\geq 4
\end{aligned}
$$

Чтобы избежать разрыва первообразной в точке π (из-за неопределенности $\tan\pi$), изменим интервал интегрирования на $(-\pi,\pi)$, на котором первообразная непрерывна. Таким образом, можно применить формулу Ньютона-Лейбница, в частности, тот факт, что $\left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| \leq |F(x_2) - F(x_1)| \leq |F(x_1)| + |F(x_2)|$.

Итого, так как $\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \leq \frac{2}{2} = 1$, а $|\operatorname{atan} x|$ ограничен сверху как $\frac{\pi}{2}$, непосредственно применяя вышеупомянутый факт, получаем что весь интеграл ограничен сверху константой π.

2.1.3.2. Оценка $\int |f(t)|^2$

Функция $s(k)$ (2.2) слишком сложна для прямого аналитического доказательства сходимости. Однако, так как $s(k)$ — модуль определителя S-матрицы, в верхней комплексной полуплоскости $0 \leq s(k) \leq 1$. Это означает, что $s(k)$ может быть заменена на некую оценку снизу $l(k)$, такую что $0 \leq l(k) \leq s(k)$. После этого, если будет доказана сходимость к нулю для этой нижней оценки, то так как $s(k) \leq 1$, $\ln l(k) \leq \ln s(k) \leq 0$, мы будем иметь $\ln^2 s(k) \leq \ln^2 l(k)$, и, следовательно, так как подынтегральное выражение неотрицательно, сходимость искомого интеграла. Мы часто будем опираться на этот факт и проводить подобные замены под знаком логарифма, заменяя сложные функции на кусочно-линейные, и используя известные оценки для логарифма чтобы оценить исходный интеграл.

2.1.3.3. Упрощение функции $s(k)$

Сначала мы дадим простую оценку для $s(k)$ по всей верней комплексной полуплоскости и сделаем ее независимой от вещественной части аргумента.

Легко видеть, что $s(k)$ периодична относительно вещественной части аргумента при неизменной комплексной части.

У функции $s(k)$ есть счетное число нулей, и для всех $\operatorname{Im} k = \operatorname{atanh}\frac{2W}{W^2+1}$. Для краткости, дадим обозначения:

$$V = \frac{2W}{W^2+1}$$
$$Z = \operatorname{atanh} V$$

Далее, заметим что для любого x, $s(x+iy) \leq s(iy)$. После всех вышеупомянутых замечаний, для $s(x+iy)$ можно дать довольно простую нижнюю оценку:

$$\begin{aligned} l(x+iy) &= \left|\frac{(W^2+1)\sinh y - 2W\cosh y}{(W^2+1)\sinh y + 2W\cosh y}\right| \\ &= \left|\frac{\tanh y - V}{\tanh y + V}\right| && (\text{так как } \cosh y \geq 1) \end{aligned}$$

Легко понять, что у функции $l(k)$ будут нули вдоль линии $\operatorname{Im} k = Z$, что значит, что вдоль этой линии у функции $\ln l(k)$ будет несчетное множество особенностей. Интуитивно, это не должно испортить сходимость, так как контур интегрирования все равно мог пересечь сингулярность функции $\ln s(k)$. Действительно, далее мы покажем, что даже такое загрубление функции позволяет доказать сходимость. Далее, для краткости записи, будем опускать вещественную часть аргумента и обозначим $l(y) = l(x+iy)$, где x может быть любым, так как l от него все равно не зависит.

После построения нижней оценки можно упростить интеграл, который мы исследуем:

$$\begin{aligned} \int\limits_{t=0}^{2\pi} |f(t)|^2 dt &= \int\limits_{t=0}^{2\pi} \ln^2 l(Re^{it}+iC)\frac{R}{\|Re^{it}+iC+i\|^2}dt \\ &= \int\limits_{t=0}^{2\pi} \ln^2 l(R\sin t + C)\frac{R}{R^2\cos^2 t + (R\sin t + C + 1)^2}dt \end{aligned}$$

Во-первых, заметим, что:

$$\sin(-\pi/2+t) = \sin(-\pi/2-t) = -\cos t$$
$$\cos^2(-\pi/2+t) = \cos^2(-\pi/2=t) = \sin^2 t$$

, то есть подынтегральное выражение симметрично относительно оси y, и, следовательно, достаточно доказать сходимость интеграла на отрезке $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$.

Далее, заменим переменную интегрирования:

$$
\begin{aligned}
y &= R\sin t + C \\
t &= \operatorname{asin}\frac{y-C}{R} \\
dt &= \frac{1}{\sqrt{R^2-(C-y)^2}}dy \\
\cos t &= \frac{\sqrt{R^2-(C-y)^2}}{R} \\
y(-\pi/2) &= C-R \\
y(\pi/2) &= C+R
\end{aligned}
$$

, что после подстановки дает:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{y=C-R}^{C+R} \ln^2 f(y)\frac{R}{R^2\cos^2 t+(R\sin t+C+1)^2}dy \\
&= \int\limits_{y=C-R}^{C+R} \ln^2 f(y)\frac{R}{R^2-(C-y)^2+(y+1)^2}\frac{1}{\sqrt{R^2-(C-y)^2}}dy \\
&= \int\limits_{y=C-R}^{C+R} \ln^2 f(y)\frac{R}{R^2-C^2+2(C+1)y+1}\frac{1}{\sqrt{R+C-y}}\frac{1}{\sqrt{R-C+y}}dy
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

На пути интегрирования присутствуют особенности при $y = C - R$, $y = Z$, $y = C+R$, и подынтегральное выражение все еще достаточно сложно для непосредственной оценки. Разделим интеграл на несколько сегментов и оценим каждый.

2.1.3.4. Случай 1: $C - R \leq y \leq Z$

Очень важным свойством $s(k)$ является ее стремление к 1 при $\operatorname{Im} k$ стремящемся к нулю. Благодаря этому $\ln s(k)$ стремится к нулю, что в свою очередь необходимо чтобы компенсировать сингулярность функции $\frac{1}{R-C+y}$ при $y = C - R$. Интуитивно, контур интегрирования становится все ближе и ближе к $\mathbb{R}$ при увеличении радиуса и если бы $\ln s(k)$ не занулялась, сходимость бы пропала. Таким образом, разумная нижняя оценка на $s(k)$ также должна удовлетворять свойству сходимости к 1 при $\operatorname{Im} k$ стремящемся к 0.

Так как l выпукла при $0 \le y \le Z$, она может быть оценена снизу с помощью первой производной в 0. Однако, этого недостаточно, так как это нарушит неотрицательность выражения под знаком логарифма, следовательно, надо быть аккуратнее и оценить снизу функцию в точке Z в том числа, после чего склеить эти две оценки в некой точке Z_0:

$$f(y) = \begin{cases} l'(0)y + 1 & ,0 \le y < Z_0 \\ l'(Z)(y - Z) & ,Z_0 \le y < Z \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{-2}{V}y + 1 & ,0 \le y < Z_0 \\ \frac{1}{2V}(V^2 - 1)(y - Z) & ,Z_0 \le y < Z \end{cases}$$

Заметим, что в качестве Z_0 можно взять любое число в полуинтервале $[C - R, Z)$ (оценка снизу не обязана быть непрерывной функцией), главное чтобы $f(y)$ была неотрицательно определенной. Для простоты вычислений нам подойдет $Z_0 = \frac{V}{4}$.

Далее, отдельно рассматриваем интегралы на участках $[C - R, \frac{V}{4})$ и $[\frac{V}{4}, Z)$.

2.1.3.5. $C - R \le y < \frac{V}{4}$

Посчитаем верхнюю оценку на подынтегральное выражение (2.4). Заметим, что при $C - R \le y \le \frac{V}{4}$:

$$\ln^2 l(y) \frac{R}{R^2 - C^2 + 2(C+1)y + 1} \frac{1}{\sqrt{R + C - y}} \frac{1}{\sqrt{R - C + y}}$$
$$\le \ln^2(1 - \frac{2}{V}y) \frac{R}{R^2 - C^2 + 2(C+1)y + 1} \frac{1}{\sqrt{R + C - Z}} \frac{1}{\sqrt{R - C + y}}$$

,воспользуемся неравенством $\frac{x}{1+x} \le \ln(1 + x)$ для $x > -1$, где $x = -\frac{2}{V}y$. Так как выражение под логарифмом меньше единицы, получим что

$\ln^2(1+x) \leq \frac{x^2}{(1+x)^2}$:

$$\begin{aligned}
&\ldots \\
\leq &\frac{\frac{4}{V^2}y^2}{(1-\frac{2}{V}y)^2}\frac{R}{R^2-C^2+2(C+1)y+1}\frac{1}{\sqrt{R+C-Z}}\frac{1}{\sqrt{R-C+y}} \\
\leq &\frac{\frac{4}{V^2}y^2}{(1-\frac{2}{V}\frac{V}{4})^2}\frac{R}{R^2-C^2+2(C+1)y+1}\frac{1}{\sqrt{R+C-Z}}\frac{1}{\sqrt{R-C+y}}
\end{aligned}$$

Заметим, что подынтегральное выражение теперь имеет вид $\frac{y^2}{a+by}$, где $a = R^2 - C^2 + 1, b = 2(C+1)$, и при достаточно больших R и C, $a > 0$ и $b > 0$. Заметим, что при этом $\frac{y^2}{a+by}$ неотрицательно при $y > 0$, и строго возрастает:

$$\left(\frac{y^2}{a+by}\right)' = \frac{2y}{a+by} + y^2\frac{-b}{(a+by)^2} = \frac{2y(a+by)-by^2}{(a+by)^2} = \frac{y(2a+by)}{(a+by)^2} \geq 0$$

Следовательно, функцию можно оценить сверху ее значением на правом конце интервала в точке $\frac{V}{4}$, и легко видеть, что:

$$\frac{y^2}{a+by} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right)$$

Оставшаяся часть интеграла имеет вид:

$$\int\limits_{C-R}^{\frac{V}{4}} \frac{1}{\sqrt{R-C+y}} = 2\sqrt{\frac{V}{4} - C + R} = \mathcal{O}(1)$$

, и в итоге весь интеграл на участке $[C-R, \frac{V}{4})$ имеет порядок $\mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right)$.

2.1.3.6. $\frac{V}{4} \leq y < Z$

Оценим сверху подынтегральное выражение (2.4). Заметим, что для $\frac{V}{4} \leq y < Z$:

$$\begin{aligned}
&\ln^2 f(y)\frac{R}{R^2-C^2+2(C+1)y+1}\frac{1}{\sqrt{R+C-y}}\frac{1}{\sqrt{R-C+y}} \\
\leq &\ln^2 f(y)\frac{R}{R^2-C^2+2(C+1)\frac{V}{4}+1}\frac{1}{\sqrt{R+C-Z}}\frac{1}{\sqrt{R-C+\frac{V}{4}}} \\
\leq &\ln^2\left(\frac{1}{2V}(V^2-1)(y-Z)\right)\frac{R}{R^2-C^2+2(C+1)\frac{V}{4}+1}\frac{1}{\sqrt{R+C-Z}}\frac{1}{\sqrt{R-C+\frac{V}{4}}}
\end{aligned}$$

Функция $\ln^2(x)$ интегрируема в окрестности $x = 0$, и известно что:

$$\int\limits_{x=x_0}^{b} \ln^2(a(x-b))dx = (b-x_0)(\ln^2(a(x_0-b)) - 2\ln(a(x_0-b)) + 2)$$

В нашем случае: $x_0 = \frac{V}{4}$, $b = Z$, следовательно, $x_0 - b \neq 0$ и определенный интеграл ограничен постоянной, не зависящей от R и C. Таким образом, поведение интеграла зависит только от поведения множителя:

$$\frac{R}{R^2 - C^2 + 2(C+1)\frac{V}{4} + 1} \frac{1}{\sqrt{R - C + \frac{V}{4}}} \frac{1}{\sqrt{R + C - Z}}$$

Очевидно, что при $r \to \infty$, $R \to \infty$, $C \to \infty$, $R - C \to 0$, и можно легко видеть, что выражение выше принадлежит классу $\mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{R}})$, и, следовательно, в пределе будет зануляться.

2.1.3.7. Случай 2: $y > Z$

При $y > Z$,

$$l(x+iy) = \frac{\tanh y - V}{\tanh y + V} = 1 - 2\frac{V}{\tanh y + V}$$

Так как l вогнута, строго возрастает, и для фиксированного r, нас интересуют только $y \leq C + R$, мы можем оценить функцию линейной:

$$f(y) = \frac{l(C+R)}{C+R-Z}(y - Z)$$

Заметим, что в точке $C+R$, для начиная с достаточно большого r, функция $l(y)$ с зажата константами, не зависящими от C и R. Это легко понять так как $\tanh y$ на бесконечности уходит к 1, соответственно, $l(y)$ в пределе будет равно $1 - \frac{2V}{V+1}$. Это является довольно важным свойством данного квантового графа, если бы l на бесконечности устремлялась к нулю, эта часть доказательства не могла бы быть проведена (см. разд. 2.2).

В начале заметим, что на всем участке $Z \leq y \leq R + C$ у функции $\frac{1}{\sqrt{R-C+y}}$ нет сингулярности, и подынтегральное выражение (2.4) можно оценить как:

$$\begin{aligned}&\ln^2 f(y)\frac{R}{R^2-C^2+2(C+1)y+1}\frac{1}{\sqrt{R+C-y}}\frac{1}{\sqrt{R-C+y}}\\ \le &\ln^2 f(y)\frac{R}{R^2-C^2+2(C+1)y+1}\frac{1}{\sqrt{R+C-y}}\frac{1}{\sqrt{R-C+Z}}\end{aligned} \tag{2.5}$$

Чтобы оценить это выражение, разделим интеграл на интервалы $[Z, Z+\frac{1}{R})$, $[Z+\frac{1}{R}, C)$, $[C, C+R]$.

2.1.3.8. $Z \le y < Z + \frac{1}{R}$

Оценим сверху выражение (2.5):

$$\begin{aligned}&\ln^2 f(y)\frac{R}{R^2-C^2+2(C+1)y+1}\frac{1}{\sqrt{R+C-y}}\frac{1}{\sqrt{R-C+Z}}\\ \le &\ln^2 f(y)\frac{R}{R^2-C^2+2(C+1)Z+1}\frac{1}{\sqrt{R+C-(Z+\frac{1}{R})}}\frac{1}{\sqrt{R-C+Z}}\end{aligned}$$

$\int\limits_Z^{Z+\frac{1}{R}} \ln^2 f(y)dy$ легко вычислить явно, используя:

$$\int\limits_b^{b+c} \ln^2(a(x-b))dx = c(\ln^2(ac) - 2\ln(ac) + 2)$$

Таким образом, $\int\limits_Z^{Z+\frac{1}{R}} \ln^2 f(y)dy = \frac{1}{R}(\ln^2(\frac{l(C+R)}{C+R-Z}\frac{1}{R}) - 2\ln\left(\frac{l(C+R)}{C+R-Z}\frac{1}{R}\right) + 2)$. Так как $l(C+R)$ ограничена константами, не зависящими от r, раскрывая логарифмы, легко можно понять что выражение принадлежит классу $\mathcal{O}(\frac{\ln^2 R}{R})$. Учитывая что коэффициент перед интегралом:

$$\frac{R}{R^2-C^2+2(C+1)Z+1}\frac{1}{\sqrt{R+C-(Z+\frac{1}{R})}}\frac{1}{\sqrt{R-C+Z}}$$

, очевидно, имеет порядок $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)$, очевидно что интеграл на данном интервале стремится к нулю при $R, C \to \infty$.

2.1.3.9. $Z+\frac{1}{R}\le y<C$

Оценим сверху выражение (2.5):

$$\ln^2 f(y)\frac{R}{R^2-C^2+2(C+1)y+1}\frac{1}{\sqrt{R+C-y}}\frac{1}{\sqrt{R-C+Z}}$$
$$\le \ln^2 f(Z+\frac{1}{R})\frac{R}{R^2-C^2+2(C+1)y+1}\frac{1}{\sqrt{R+C-C}}\frac{1}{\sqrt{R-C+Z}}$$

Первообразная для функции подобного вида широко известна:

$$\int\frac{1}{ax+b}=\frac{\ln(ax+b)}{a}$$

, где в нашем случае $a=2(C+1)$, $b=R^2-C^2+1$. Применяя формулу Ньютона-Лейбница для интервала $(Z+\frac{1}{R},C)$, получим:

$$\frac{\ln\frac{2(C+1)C+R^2-C^2+1}{2(C+1)(Z+\frac{1}{R})+R^2-C^2+1}}{2(C+1)}=\mathcal{O}\left(\frac{\ln R}{R}\right)$$

При стремлении R к бесконечности, $\ln^2 f(Z+\frac{1}{R})$ будет также стремиться к бесконечности, поэтому необходимо оценить порядок особенности. Так как $\ln f(Z+\frac{1}{R})=\ln\left(\frac{l(C+R)}{C+R-Z}\frac{1}{R}\right)=\ln l(C+R)-\ln(C+R-Z)-\ln R$, легко видеть что $\ln^2 f(Z+\frac{1}{R})=\mathcal{O}(\ln^2 R)$.

В результате, комбинируя все оценки, получаем: $\mathcal{O}(\ln^2 R)\mathcal{O}\left(\frac{\ln R}{R}\right)\frac{R}{\sqrt{R}}\frac{1}{\sqrt{R-C+Z}}=\mathcal{O}\left(\frac{\ln^3 R}{\sqrt{R}}\right)$, что означает что интеграл на этом участке стремится к 0 с увеличением r.

2.1.3.10. $C\le y\le C+R$

Оценим сверху выражение (2.5):

$$\ln^2 f(y)\frac{R}{R^2-C^2+2(C+1)y+1}\frac{1}{\sqrt{R+C-y}}\frac{1}{\sqrt{R-C+Z}}$$
$$\le \ln^2 f(C)\frac{R}{R^2-C^2+2(C+1)C+1}\frac{1}{\sqrt{R+C-y}}\frac{1}{\sqrt{R-C+Z}}$$

Интеграл $\frac{1}{\sqrt{R+C-y}}$ от C до $C+R$ тривиален и равен $2\sqrt{R}$. Функция f в точке C ограничена константами не зависящими от R и C, следовательно, и квадрат ее логарифма. Очевидно, что в результате получим выражение $\mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right)\sqrt{R}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)$.

2.1.3.11. Оценка $\int |f(t)|^2$: итог

Итого, мы разбили интегрирование на пять различных участков, и в итоге имеем порядок интеграла:

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{\ln^3 R}{\sqrt{R}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{\ln^3 R}{\sqrt{R}}\right)$$

, что означает, что весь интеграл уходит в 0 при стремлении r к 1 (соответственно, R к бесконечности), что и требовалось доказать.

2.2. Модель резонатора типа «кольцо»

2.2.1. Модель исследования

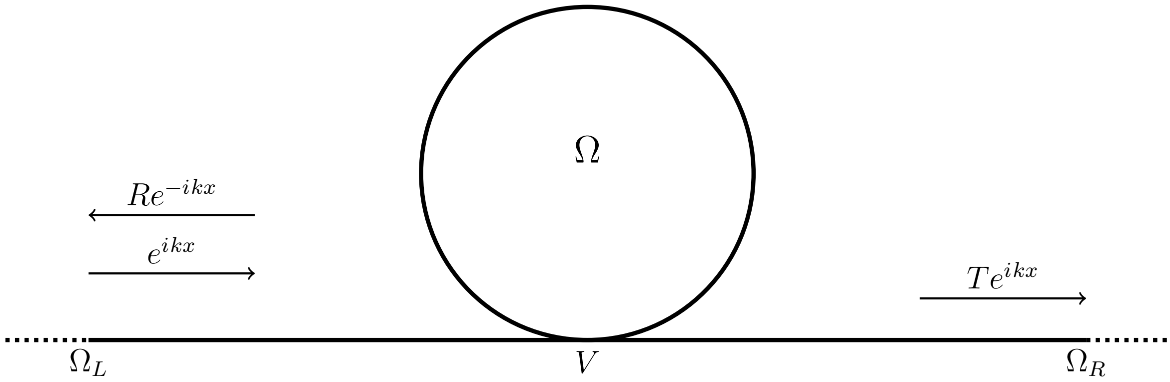

Рис. 2.2: Квантовый граф Γ, состоящий из полубесконечных ребер Ω_L, Ω_R и рассеивателя Ω, представляющего из себя окружность длиной 1. В вершине V установлена δ-образная потенциальная яма глубиной a.

Мы рассматриваем случай рассеяния волны с волновым вектором k, приходящей слева направо. Таким образом, волновые функции на различных частях графа принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi_L(x) &= e^{ikx} + Re^{-ikx} \\ \psi_R(x) &= Te^{ikx} \\ \psi_\Omega(x) &= P\sin(kx) + Q\cos(kx) \end{aligned} \tag{2.6}$$

, где R и T — коэффициенты отражения и прохождения волны. Так как граф симметричен, его матрица рассеяния принимает вид $S(k) = \begin{pmatrix} R(k) & T(k) \\ T(k) & R(k) \end{pmatrix}$.

В вершине V мы ставим δ-образную потенциальную яму высотой a, которая порождает следущие граничные условия:

$$\begin{aligned} \psi_L(0) = \psi_R(0) = \psi_\Omega(0) = \psi_\Omega(1) \\ -\psi'_L(0) + \psi'_\Omega(0) - \psi'_\Omega(1) + \psi'_R(0) = a\psi_L(0) \end{aligned} \tag{2.7}$$

2.2.2. Вычисление S-матрицы

Определим коэффициенты прохождения и отражения, подставив функции (2.6) в (2.7) и решив систему линейных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&1 + R && = T \\
&1 + R && = Q \\
&Q \cos k + P \sin k && = T \\
&-Pk \cos k + Qk \sin k + Pk + iRk + iTk - ik && = Ta
\end{aligned}
$$

Решив систему, получаем:

$$
R(k) = -\frac{2\,k \cos(k) + a \sin(k) - 2\,k}{2\,k \cos(k) + (a - 2i\,k) \sin(k) - 2\,k}
$$
$$
T(k) = -\frac{2i\,k \sin(k)}{2\,k \cos(k) + (a - 2i\,k) \sin(k) - 2\,k}
$$

, подставляя полученные значения коэффициента прохождения и отражения в S-матрицу, получаем определитель S-матрицы в замкнутой форме:

$$
\det S = \frac{\cos(k) + \left(\frac{a}{2k} + i\right) \sin(k) - 1}{\cos(k) + \left(\frac{a}{2k} - i\right) \sin(k) - 1} \tag{2.8}
$$

2.2.3. Доказательство неполноты резонансных состояний при $a = 0$

Рассмотрим случай $a = 0$:

$$
\det S = \frac{\cos(k) + i \sin(k) - 1}{\cos(k) - i \sin(k) - 1} = \frac{e^{ik} - 1}{e^{-ik} - 1} = -e^{ik}
$$

Из выражения выше легко заметить, что подынтегральное выражение в критерии полноты (1.8) сводится к $\ln|\det S| = \ln e^{-\operatorname{Im} k} = -\operatorname{Im} k$. Вычислим интеграл в пространстве единичного диска, для этого применим обратное преобразование Кэли (1.4), к подынтегральной функции: $\operatorname{Im} k \to \operatorname{Im}\left(i\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)$.

$$\lim_{r=1} \int\limits_{|\zeta|=r} \ln|\det S(\zeta)| d\zeta = \lim_{r=1} \int\limits_{|\zeta|=r} \operatorname{Im}\left(i\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right) d\zeta = \dots$$

, параметризуем контур интегрирования полярными координатами: $\zeta \to re^{i\varphi}, d\zeta \to rie^{i\varphi}$:

$$\dots = \lim_{r=1} \int\limits_{|\zeta|=r} \operatorname{Im}\left(i\frac{1+re^{i\varphi}}{1-re^{i\varphi}}\right) rie^{i\varphi} d\varphi$$

Комплексный интеграл складывается из сумм интегралов действительной и мнимой части подынтегрального выражения. Рассчитаем мнимую часть:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\left(\operatorname{Im}\left(i\frac{1+re^{i\varphi}}{1-re^{i\varphi}}\right) rie^{i\varphi}\right) & \\
&= r\operatorname{Re}\left(\operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{i\varphi}}{1-re^{i\varphi}}\right) e^{i\varphi}\right) \\
&= r\operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{i\varphi}}{1-re^{i\varphi}}\right) \operatorname{Re}\left(e^{i\varphi}\right) \\
&= r\operatorname{Re}\left(\frac{(1+re^{i\varphi})(1-re^{-i\varphi})}{(1-re^{i\varphi})(1-re^{-i\varphi})}\right) \cos\varphi \\
&= r\operatorname{Re}\left(\frac{1-r^2+2ir\sin\varphi}{1+r^2-2r\cos\varphi}\right) \cos\varphi \\
&= r\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\varphi} \cos\varphi
\end{aligned}$$

Интегрируя, получаем $2\pi r^2$, что значит, что предел мнимой части при $r \to 1$ равен 2π, следовательно, по критерию полноты, система резонансных состояний графа Γ не является полной на кольце Ω.

2.2.4. Исследование полноты при $a \neq 0$

При $a \neq 0$, определитель S-матрицы (2.8), и его нули имеют гораздо более сложную структуру, и не выразимы аналитически, что затрудняет исследование полноты. Однако, этот случай интересен тем, что при сколь угодно малом a, система резонансных состояний будет полна, что является качественным отличием от случая $a = 0$, в частности, это означает что исследуя кольцо как подграф некого квантового графа, мы не можем перейти к пределу $a = 0$, постепенно уменьшая a, ведь мы можем потерять свойство полноты.

Полнота в этом случае была исследована разбиением интеграла на две части пользуясь неравенством Коши-Буняковского, аналогично 2.3, а далее проанализирована сходимость с помощью численного интегрирования. Его результаты приведены на рис. 2.3 и рис. 2.4, а программа, проводящая интегрирование прикреплена в гл. A.

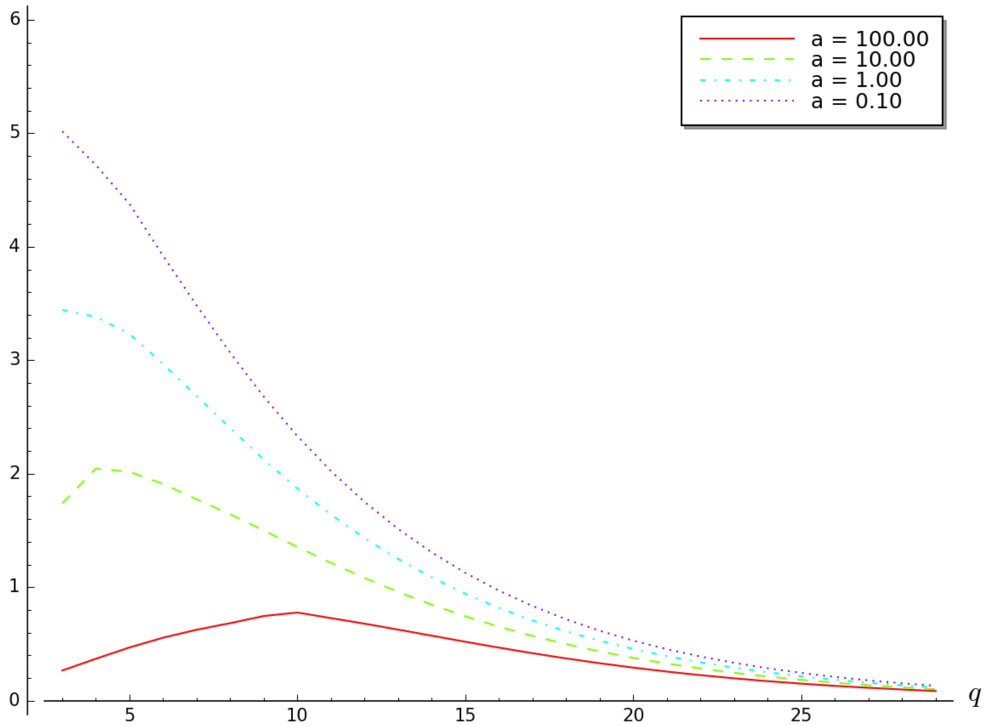

Рис. 2.3: Зависимость результата численного интегрирования выражения 2.3 при различных ненулевых a, где $r = 1 - 2^{-q}$. Можно наблюдать тенденцию к сходимости интегралов.

Можно интуитивно обосновать, почему интеграл сходится. Рассмотрим $\det S(iy)$ при большом y, в этому случае получаем:

$$\det S(iy) = \frac{e^{iiy} + \frac{a}{2iy}\frac{e^{iiy}+e^{-iiy}}{2i} - 1}{e^{-iiy} + \frac{a}{2iy}\frac{e^{iiy}+e^{-iiy}}{2i} - 1} = \frac{e^{-y} - \frac{a}{4y}(e^{-y} + e^{y}) - 1}{e^{y} - \frac{a}{4y}(e^{-y} + e^{y}) - 1}$$

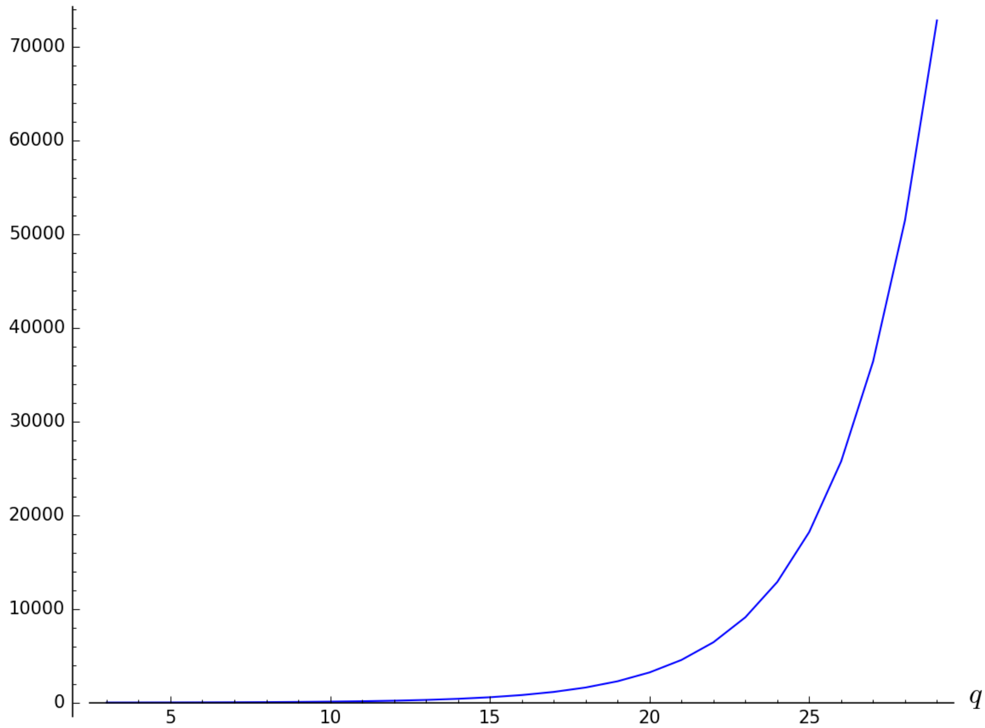

Рис. 2.4: Зависимость результата численного интегрирования выражения 2.3 при $a = 0$, где $r = 1 - 2^{-q}$. Можно наблюдать тенденцию к расходимости интеграла.

, так как $e^{-y} \to 0$, $ye^{-y} \to 0$, легко видеть, что выражение выше будет иметь порядок $\frac{a}{y}$, и, соответственно, его логарифм — порядок $\ln y$, что является принципиальным отличием от случая $a = 0$, когда порядок логарифма был y (см. разд. 2.2.3). Однако, строгое обоснование данного факта требует более тщательного анализа.

Заключение

В работе исследовано поведение системы резонансных состояний различных квантовых графов, в частности, аналитически исследован вопрос полноты. Резонансные состояния таких систем сложно получить в явном виде, и соответственно, доказать полноту системы напрямую. Данная работа отличается новизной, так как ранее подобное исследование было проведено только для двух простейших моделей резонаторов [5].

В разд. 2.1 была доказана полнота резонансных состояний для квантового графа сложной формы. Выработанный подход к доказательству может быть обобщен и использован для доказательства полноты для других граничных условий и квантовых графов.

В разд. 2.2 было показано качественно различное поведение, казалось бы, похожих моделей и показано что полнота системы может быть потеряна в ходе непрерывной трансформации квантового графа и его граничных условий. Это является весьма важным свойством, которое означает что исследование полноты системы резонансных состояний сложного квантового графа не всегда может быть легко сведено к исследованию полноты для более простого квантового графа, полученного, например, стягиванием ребер исходного, и возможно, для исследования полноты произвольного квантового графа необходим некий сложный шаг индукции, если не другой подход. Также заметим, что в произвольном квантовом графе ребра могут соединять либо две разные вершины, либо быть петлей, что и является резонатором типа «кольцо», исследованным в данной работе.

Некоторые из результатов работы были опубликованы в [12] и приняты для презентации презентацию на конференции [13].

Проведенное исследование является важной подзадачей в более общей задаче нахождения пространства, в котором резонансные состояния квантового графа будут образовывать полную систему.

Естественным продолжением данной работы может являться исследование полноты системы резонансных состояний при других граничных условиях в точке соединения резонатора и волновода.

Список литературы

1. *Rayleigh L.* The theory of the Helmholtz resonator // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. 1916. No.638. Pp. 265–275.
2. *Lax P. D.*, *Phillips R. S.* Scattering theory. Vol. 26. Academic press, 1990.
3. *Adamjan V.*, *Arov D.* On a class of scattering operators and characteristic operator-functions of contractions / Dokl. Akad. Nauk SSSR. Vol. 160. No.1. 1965. Pp. 9–12.
4. *Reed M.*, *Simon B.* Methods of Modern Mathematical Physics: Functional analysis. Methods of Modern Mathematical Physics no.v. 1. Academic Press, 1980. ISBN: 9780125850506.
5. *Popov A. I.* Quantum graph model of Helmholtz resonator / Spectral Theory and Applications: conference in memory of Boris Pavlov, Book of Abstracts. 2016. P. 15.
6. *Perelomov A. M.*, *Zel'dovich Y. B.* Quantum mechanics: selected topics. World Scientific, 1998.
7. *Kuchment P.* Graph models for waves in thin structures // Waves in Random Media. 2002. No.4. R1–R24.
8. *Lobanov I.*, *Trifanov A.*, *Trifanova E.* Genetic algorithm for constructing graphene nanoribbon with given electronic transport properties // Nanosystems: Phys. Chem. Math. 2013.
9. *Brown B.*, *Exner P.*, *Kuchment P.*, *Sunada T.* Analysis on Graphs and its Applications // Month. 2010.
10. *Lax P. D.*, *Phillips R. S.* A scattering theory for automorphic functions // Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique). 1976. Pp. 1–7.
11. *Nikol'skii N. K.* Treatise on the shift operator: spectral function theory. Vol. 273. Springer Science & Business Media, 2012.
12. *Герасимов Д. А.* Неполнота системы резонансных функций для резонатора-кольца / Труды студенческого центра прикладных математических исследований. под ред. Бойцева А. А. Попова И. Ю. Правдиной К. В. Университет ИТМО, 2016. с. 22—25.
13. *Gerasimov D. A.*, *Popov I. Y.*, *Popov A. I.* Resonant states for quantum ring with two infinite leads. Days on Diffraction. 2016. http://www.pdmi.ras.ru/˜dd/index.php.

Приложения

Приложение А

Исходный код программы для численного интегрирования

Листинг А.1: Исходный код программы для численного интегрирования (см. разд. 2.2). Программа реализована в математическом пакете Sage версии 7.0.

```
from numpy import arange

def cvar(name):
    return var(name, domain=CC)

def rvar(name):
    return var(name, domain=RR)

def icayley(z):
    return i * (1 + z) / (1 - z)

def cayley(z):
    return (z - i) / (z + i)

def my_numerical_integral(expr, x, ff, tt):
    f = fast_callable(expr, vars=[x], domain=CC)
    res, err = numerical_integral(f, ff, tt)
    if err > 0.1:
        raise RuntimeError("Error␣is␣too␣large")
    return res


k = cvar('k')
R, t = rvar('R'), rvar('t')
x, y = rvar('x'), rvar('y')


CCC(r) = ((icayley(r) + icayley(-r)) / 2).imag()
RRR(r) = ((icayley(r) - icayley(-r)) / 2).imag()


def plot_all(lines):
    p = sum(lines)
    p.set_legend_options(handlelength=5)
    p.axes_labels(['$q$', ''])
    return p

def test_convergence(s, color='blue', style='-', label=''):
    rs      = []
    ints    = []
    for q in range(3, 30, 1):
        r = 1 - 2 ^ (-q)

        rr = RRR(r=r).n()
        cc = CCC(r=r).n()

        f = ln(s(k=rr * exp(i * t) + cc * i)) * sqrt(rr) / (rr * exp(i * t) + cc * i + i)
        g = sqrt(rr) / (rr * exp(i * t) + cc * i + i)

        int_f = my_numerical_integral(norm(f), t, 0, 2 * pi)
```

```
        int_g = my_numerical_integral(norm(g), t, 0, 2 * pi)

        rs.append(q)
        ints.append(sqrt(int_f * int_g))
        print("F␣=␣" + str(int_f))

    return line(zip(rs, ints), rgbcolor=color, linestyle=style, legend_label=label)

a_values = [100, 10, 1, 0.1]
a_zero   = 0.0

a = rvar('a')
s = abs((cos(k) + (a / (2 * k) + i) * sin(k) - 1) / (cos(k) + (a / (2 * k) - i) * sin(k) -
    1))

plots = []
for aa, color, style in zip(a_values, rainbow(len(a_values)), ['-', '--', '-.', ':']):
    label = "a␣=␣{:.2f}".format(float(aa))
    plots.append(test_convergence(s(a=aa), color=color, style=style, label=label))


plot_all(plots).save('plots_converging.png', ymin=0, ymax=6, dpi=150)
plot_all([test_convergence(s(a=a_zero))]).save('plots_diverging.png', ymin=0, dpi=150)
```