

# Неполнота системы резонансных функций для резонатора-кольца

<sup>1</sup>Д. А. Герасимов

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский Национальный Исследовательский Университет  
Информационных Технологий,  
Механики и Оптики,  
Кронверкский пр., 49, Санкт-Петербург, 197101, Россия  
karlicoss@gmail.com

TODO: УДК ???, ???.

Рассматривается задача рассеивания на квантовом графе  $\Gamma$ , представляющем из себя кольцо  $\Omega$ , связанное с волноводом  $\delta$ -образным барьером. Изучается необычное поведение системы при высоте барьера 0, и показывается неполнота резонансных состояний оператора Шредингера графа  $\Gamma$  в пространстве  $\mathcal{L}_2(\Omega)$ .

**Ключевые слова:** задача рассеяния, квантовый граф, резонансы, уравнение Шредингера.

## 1. Введение

Квантовый граф — широко используемая модель наносистемы [1–4]. Если граф  $\Gamma$  состоит только из конечного числа ребер конечной длины, его гамильтониан имеет чисто дискретный спектр, и его собственные функции образуют полную систему в  $\mathcal{L}_2(\Gamma)$ . Если же граф  $\Gamma$  представляет из себя резонатор  $\Omega$  с полубесконечными ребрами, в спектре будет присутствовать непрерывная часть и резонансы, индуцированные собственными числами гамильтониана резонатора  $\mathcal{H}_\Omega$ . Резонансные состояния оператора Шредингера не принадлежат пространству  $\mathcal{L}_2(\Gamma)$ , однако, при сужении их на конечный домен  $\Omega$ , становятся квадратично интегрируемыми и лежат в пространстве  $\mathcal{L}_2(\Omega)$ . Для многих приложений интересно знать, формируют ли полную систему резонансные состояния графа  $\Gamma$  в пространстве  $\mathcal{L}_2(\Omega)$  резонатора.

## 2. Цель работы и постановка задачи

В статье [5] была показана полнота резонансных функций на графе с резонатором, состоящим из отрезка, связанным с волноводом  $\delta$ -образным барьером. Естественным предположением является что произвольный резонатор состоящий из конечного числа ребер конечной длины должен обладать похожими свойствами, однако, это не так. В этой работе исследуется резонатор, состоящий из кольца и показывается неполнота резонансных состояний на этом кольце.

## 3. Терминология и вспомогательные сведения

В общем виде волновые функции, являющиеся решениями уравнения Шредингера слева и справа от резонатора имеют вид:

$$\psi_L(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

$$\psi_R(x) = Ce^{ikx} + De^{-ikx}$$

S-матрица (матрица рассеяния) выражает зависимость исходящей волны от входящей:

$$\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}$$

Для скалярных внутренних функций  $\varphi$  определенных на комплексном единичном диске  $\mathbb{D}$ , существует критерий отсутствия сингулярного множителя [6, стр. 99]:

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{\mathbb{T}} \log |\varphi(r\zeta)| dm(\zeta) = 0$$

, где  $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$  — единичная окружность.

Так как  $\det S$  является скалярной внутренней функцией, мы можем воспользоваться данным критерием для исследования полноты системы резонантных состояний.

#### 4. Модель исследования

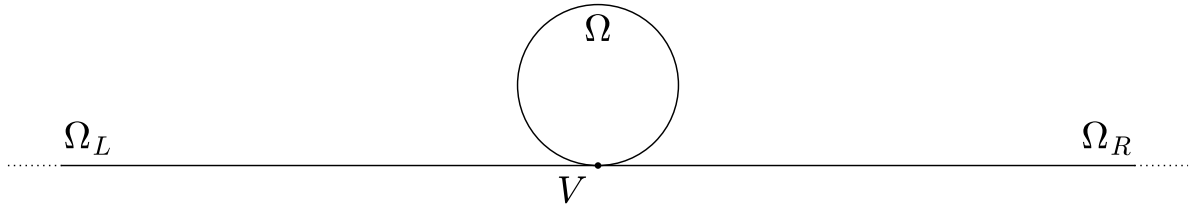


Рис. 1. квантовый граф  $\Gamma$ , состоящий из полубесконечных ребер  $\Omega_L, \Omega_R$  и рассеивателя  $\Omega$ , представляющего из себя окружность длиной 1.

Мы рассматриваем случай рассеяния волны с волновым вектором  $k$ , приходящей слева направо. Таким образом, волновые функции на различных частях графа принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi_L(x) &= e^{ikx} + Re^{-ikx} \\ \psi_R(x) &= Te^{ikx} \\ \psi_\Omega(x) &= P \sin(kx) + Q \cos(kx) \end{aligned}$$

, где  $R$  и  $T$  — коэффициенты отражения и прохождения волны. Так как система симметрична, ее матрица рассеяния принимает вид  $S(k) = \begin{pmatrix} R(k) & T(k) \\ T(k) & R(k) \end{pmatrix}$ .

В вершине  $V$  мы ставим граничное условие Дирихле на волновую функцию, и условие  $\delta$ -барьера высотой  $a$  на ее производную:

$$\begin{aligned} \psi_L(0) &= \psi_R(0) = \psi_\Omega(0) = \psi_\Omega(1) \\ -\psi'_L(0) + \psi'_\Omega(0) - \psi'_\Omega(1) + \psi'_R(0) &= a\psi_L(0) \end{aligned}$$

## 5. Вычисление S-матрицы

Определим коэффициенты прохождения и отражения, решив систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} 1 + R &= T \\ 1 + R &= Q \\ Q \cos k + P \sin k &= T \\ -Pk \cos k + Qk \sin k + Pk + iRk + iTk - ik &= Ta \end{aligned}$$

Решив систему, получаем:

$$\begin{aligned} R(k) &= -\frac{2k \cos(k) + a \sin(k) - 2k}{2k \cos(k) + (a - 2ik) \sin(k) - 2k} \\ T(k) &= -\frac{2ik \sin(k)}{2k \cos(k) + (a - 2ik) \sin(k) - 2k} \end{aligned}$$

, подставляя полученные значения коэффициента прохождения и отражения в S-матрицу, получаем:

$$\det S = \frac{\cos(k) + \left(\frac{a}{2k} + i\right) \sin(k) - 1}{\cos(k) + \left(\frac{a}{2k} - i\right) \sin(k) - 1}$$

## 6. Исследование полноты при $a = 0$

Рассмотрим случай  $a = 0$ :

$$\det S = \frac{\cos(k) + i \sin(k) - 1}{\cos(k) - i \sin(k) - 1} = \frac{e^{ik} - 1}{e^{-ik} - 1} = -e^{ik}$$

$$\ln|\det S| = \ln e^{-\operatorname{Im} k} = -\operatorname{Im} k$$

Вычислим интеграл в пространстве единичного диска, для этого применим обратное преобразование Кэли  $k \rightarrow i \frac{1+\zeta}{1-\zeta}$ , отображающее  $\{z | \operatorname{Im} z \geq 0\}$  в  $\mathbb{D}$ , к подынтегральной функции:  $\operatorname{Im} k \rightarrow \operatorname{Im} \left( i \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \right)$ .

$$\lim_{R=1} \int_{|\zeta|=R} \ln|\det S(\zeta)| d\zeta = \lim_{R=1} \int_{|\zeta|=R} \operatorname{Im} \left( i \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \right) d\zeta = \dots$$

Перейдем в полярные координаты:  $\zeta \rightarrow Re^{i\varphi}$ ,  $d\zeta \rightarrow Rie^{i\varphi}$ :

$$\dots = \lim_{R=1} \int_{|\zeta|=R} \operatorname{Im} \left( i \frac{1+Re^{i\varphi}}{1-Re^{i\varphi}} \right) Rie^{i\varphi} d\varphi$$

Комплексный интеграл складывается из сумм интегралов действительной и мнимой части подынтегрального выражения. Рассчитаем мнимую часть:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} \left( \operatorname{Im} \left( i \frac{1 + Re^{i\varphi}}{1 - Re^{i\varphi}} \right) Re^{i\varphi} \right) &= R \operatorname{Re} \left( \operatorname{Re} \left( \frac{1 + Re^{i\varphi}}{1 - Re^{i\varphi}} \right) e^{i\varphi} \right) \\
&= R \operatorname{Re} \left( \frac{1 + Re^{i\varphi}}{1 - Re^{i\varphi}} \right) \operatorname{Re} (e^{i\varphi}) \\
&= R \operatorname{Re} \left( \frac{(1 + Re^{i\varphi})(1 - Re^{-i\varphi})}{(1 - Re^{i\varphi})(1 - Re^{-i\varphi})} \right) \cos \varphi \\
&= R \operatorname{Re} \left( \frac{1 - R^2 + 2iR \sin \varphi}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi} \right) \cos \varphi \\
&= R \frac{1 - R^2}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi} \cos \varphi \\
&= 2\pi R^2
\end{aligned}$$

Можно видеть, что предел мнимой части при  $R \rightarrow 1$  равен  $2\pi$ , следовательно, по критерию полноты, система резонантных состояний графа  $\Gamma$  не является полной на кольце  $\Omega$ .

## 7. Заключение

В работе была строго аналитически показана неполнота резонансных состояний на резонаторе типа кольца. Данное исследование является важной подзадачей в более общей задаче нахождения пространства, в котором резонансные состояния квантового графа будут образовывать полную систему, так как в произвольном квантовом графе ребра могут соединять либо две разные вершины, либо быть петлей (что и является резонатором типа кольца).

Естественным продолжением данной работы может являться исследование полноты системы резонансных состояний при других граничных условиях в точке соединения резонатора и волновода.

## Список литературы

- [1] P.Kuchment, *Waves in Random Media*, **12**(4), R1-R24 (2002)
- [2] I.S. Lobanov, A.I. Trifanov, E.S. Trifanova, *Nanosystems: Phys. Chem. Math.*, **3**(4), 512-523 (2013).
- [3] P.Exter, J.P. Keating, P. Kuchment, T. Sunada, A. Teplyaev (eds.), *Analysis on Graphs and Its Applications*. Proc. Symp. Pure Math., 77 (Providence, RI: Amer. Math. Soc.) (2008)
- [4] I.Yu. Popov, A.N. Skorydina, I.V. Blinova, *J. Math. Phys.*, **55**, 033504 (2014)
- [5] I.Yu. Popov, A.I. Popov. *1D model of the Helmholtz resonator*. Manuscript (2016)
- [6] N.K. Nikol'skii. *Treatise on the Shift Operator: Spectral Function Theory*. Springer Berlin Heidelberg, 491 p. (2012)