CHƯƠNG 3: VECTOR VÀ KHÔNG GIAN VECTOR TRỪU TƯỢNG

Kieu Anh Le

March 2019

1 Vector:

- Vector trong hình học: hình 1 mũi tên (có gốc và ngọn, hướng, độ lớn)
- Vector trong không gian vector: hình 1 điểm

2 Không gian vector:

Vector space = 4-tuple <V, R, +, x>

- V: vector
- R: tập số thực
- +: phép cộng các vector
- x: phép nhân các vector

Định nghĩa:
Nếu tập V cùng 2 phép toán thỏa mãn 2 điều kiện

1. Cộng 2 phần tử: u+v $\in V$, u,v $\in V$ (phép tịnh tiến)
2. Nhân vector với 1 số: a.v $\in V$, a $\in R$, v $\in V$

Thì V là không gian vector, và v $\in V$ là một vector.
Tổng quát: Nếu ta tịnh tiến hoặc co giãn các vector trong V thì chúng vẫn thuộc v

VÍ DỤ:
Mô tả 1 người (chiều cao, cân nặng, tuổi...)
=> Dùng 1 không gian tọa độ **coordinate space**:
V = R^n = R x R x...x R => **Cartesian (direct) product**
v = $(v_1...v_n)$:= $[v_i]$; $v_i \in R$; $\forall i \in$ {1...n}
Giải thích:

- Mỗi con số trong $v_1 ... v_n$ là các số thực đại diện cho các thông tin (VD: v_1: chiều cao; v_2: cân nặng,...)
- Phép toán kết nối các con số từ v_1 đến v_n để tạo nên một vector gọi là **Cartesian direct product** (Tích trực tiếp)

v_i là tập hợp các vector từ v_1 đến v_n

Quan Trọng: Không gian tọa độ R^n được dùng để tính toán cho **tất cả** các không gian vector trừu tượng khác.

3 Phép cộng và Phép nhân vô hướng

- Phép cộng 2 vectors:
  - $v_i = u_i + w_i$
  - v = v + w $\in V$
- Phép nhân vô hướng vector với 1 số:
  - $v_i = \alpha$ x u_i
  - v = α x u $\in$ V

4 Một số không gian vector <V,R,+,x> tiêu biểu

- Không gian các tensors (mảng đa chiều):
  - Tensor bậc 0 (scalars): R.
  - Tensor bậc 1 (vectors): $R^m \ni$ v = $[v_i]$.
  - Tensor bậc 2 (ma trận): $R^{mxn} \ni$ v =$[v_{ij}]$.
  - Tensor bậc 3 V = $R^{mxnxp} \ni$v = $[v_{ijk}]$ ...
    với $[v_{ijk}] \in$ R, i $\in$ {1...m}, j $\in$ {1...n}, k $\in$ {1...p}
- Ví dụ: Biểu diễn một số không gian hàm số (function spaces)

  P_n(R): không gian các hàm đa thức của $x \in R$ có bậc nhỏ hơn hoặc bằng n

  f(z) = $a_0 + a_1$z + $a_2 z^2 + ... + a_n z^n = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i \in P_n$(R)
  g(z) = $b_0 + b_1$z + $b_2 z^2 + ... + b_n z^n = \sum_{i=0}^{n} b_i z^i \in P_n$(R)

Định nghĩa:
+ Cộng 2 vectors: h = f + g; h(z) = $\sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)z_i$
+ Nhân scalar: v = αf; v(z) = $\sum_{i=0}^{n}\alpha\ a_i z^i \in P_n$(R)
=> Chứng minh được P_n là 1 không gian vector
Lưu ý: $\{1, z, z^2, \ldots, z^n\}$ cũng là các vector trong P_n(R)
$\{e_i\} = \{z_i\}_{i=0}^{n}$ được gọi là **hệ cơ sở(basis)** của P_n(R)
$\forall$ v $\in$ V = P_n(R): v = $a_0 e_0 + \ldots + a_n e^n = \sum_{i=0}^{n} a_i e_i$
v = **linear combination (kết hợp tuyến tính)** của các cơ sở

5 Vector cơ sở và hệ cơ sở là trọng tâm của Machine Learning

- Ý nghĩa của hệ cơ sở (basis) trong không gian vector:
  - hướng, trục (directions)
  - cột mốc (landmarks)
  - đặc trưng (features)
  - từ vựng (words)
  - chuẩn, mẫu (prototypes, patterns, templates...)
  - regularities, abstractions
- Chọn và sắp xếp một hệ cơ sở (ordered basis): $\varepsilon = (e_1 \ldots e_n)$
  $\overset{\forall v \in V}{\rightarrow}$ decomposition [v] = coordinates $(a_1, \ldots a_n) \in R$
- **Lưu ý:** $a_i \approx$ mức độ giống/khác (e.g frequency) giữa v và e_i