CHƯƠNG 4: TÍCH VÔ HƯỚNG, ĐỘ LỚN VÀ ĐỘ GIỐNG NHAU/ KHOẢNG CÁCH GIỮA CÁC VECTOR

Karlie Le

March 2019

1 Hệ cơ sở => Không gian tọa độ:

- Ví dụ 1: $R^3 \ni$ v = (x,y,z): Basisu = (u_x, u_y, u_z) = (i,j,k)
  u_x = (1,0,0)
  u_y = (0,1,0)
  u_z = (0,0,1)
  => $[v]_u$ = (x,y,z)
  Tổng quát: $R^n \ni$ v = $(x_1,..., x_n)$:
  u_1 = (1,0,...,0)
  ...
  u_n = (0,...,0,1)
  => $[v]_u$ = $(x_1,..., x_n)$
- Ví dụ 2: $R^{2x2} \ni$ v = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
  $u_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $u_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
  $u_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $u_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
  => $[v]_u$ = (a,b,c,d) $\in R^4$
- Ví dụ 3: (Không gian đa thức)
  P_n(R) $\ni$ v(z) = $\sum_{i=0}^{n} a_i z^i$, $a_i \in$ R $\forall i$ = 0,...,n:

$\varepsilon = \{e_i = z^i\}_{i=0}^{n}$ => $[v]_\varepsilon = (a_0,...a_n) \in R^{n+1}$

LƯU Ý:

- Mọi vector space đều có thể quy về R^n
- Dimension n là số basis vector nhỏ nhất để miêu tả ∀ v ∈ V

2 Hàm tuyến tính => Ma trận:

- Hàm f: V -> W (biến đổi từ không gian vector V qua W)

  Chọn Basis B cho V $\xrightarrow[space]{coordinate}$ $[v]_B \in R^n$, ∀v ∈ V

  Chọn Basis D cho W $\xrightarrow[space]{coordinate}$ $[w]_D \in R^m$, ∀w ∈ W

- f : V -> W là hàm tuyến tính (linear) nếu f(au + bv) = af(u) + bf (v)

  "Cộng và scale đầu vào -> đầu ra cộng và scale tương ứng"

- f(au + bv) ≠ af(u) + bf(v): hàm phi tuyến (non-linear)

  Ví dụ: Hàm sigmoid σ(z)= $\frac{1}{1+e^{-z}}$ = $\frac{e^z}{e^z+1}$ với z ∈ R^n

3 Một số phép toán ma trận:

- Ma trận A = [a_{ij}] ∈ R^{mxn} gồm m hàng và n cột

  A^T = [a_{ij}] ∈ R^{mxn}. $(A + B)^T = A^T + B^T$

- Vector b theo quy ước mặc định là vector **cột**

- A = $[c_1]...[c_n]$ gồm n cột, cột thứ j là c_j

  A = $[r_1^T]...[r_n^T]$ gồm n cột, cột thứ j là r_j^T

- Các cột còn lại là độc lập tuyến tính (linear independent) khi không có cột nào là linear combination của các cột còn lại:

  $\sum_{j=1}^{n} a_j c_j = 0_n \iff a_j$=0 ∀j=1,...,n

- Matrix product: AB = Q: [m,n][n,p] = [m.p]; $q_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$

  Các vector cột: $q_k = A_{b_k}$. $(AB)^T = A^T\ B^T$

- Tích vô hướng: u.v := u^Tv = $\sum_i = 1^m\ u_i v_i$ ∈ R **(inner/dot/scalar product)**

  uxv:= $uv^T \in R^{mxm}$ **(Outer product)**

- Nghịch đảo M^{-1} của ma trận vuông: MM^{-1} = l_m = diag(1,...,1). $(AB)^{-1}$ = $B^{-1}A^{-1}$

- Ma trận vuông đối xứng (symmetric): H^T = H
- Ma trận vuông đối xứng M $\in R^{mxn}$ là xác định dương **(positive definite)** nếu x^TA>0, $\forall$ x$\neq 0_m$.
- M có trace tr(M):= $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$. Frobenius norm A_F:=$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_y^2}$:= $\sqrt{tr(A^TA)}$
- Quadratic function:

  f(x) = a + b^Tx + $\frac{1}{2}x_T$Cx = $\frac{1}{2}\sum_{ij=1}^{n}$ $c_i j x_i x_j$ + $\sum_{k=1}^{n}$ $b_k x_k$ + a

  với a $\in$ R, x,b $\in$ R^n. C $\in$ R^{nxn} symmetric và ít nhất một hệ số $c_y \neq 0$
- Quadratic form:

  q(x)= $x^T Cx = \sum_{ik=1}^{n} c_i j x_i x_j$ hàm của các đa thức cùng bậc 2 $x_i x_j$

4 Tích vô hướng và khoảng cách của 2 vector trong R^n

- a_i là mức độ giống/khác giữa v và basis vector e_i trong V.
- a.b= $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \in R$ là **mức độ liên quan** giữa a,b $\in R^n$

  => Là cơ sở để tính độ lớn, khoảng cách, góc,..., giữa các vectors.
- Orthogonal (perpendicular) vectors $a \perp b$ => cosθ = 0 $\leftrightarrow$ a.b = 0
- Normalized (unit/direction) vector: ||b|| = 1
- Orthonormal vectors: a.b=0 và ||a|| = ||b|| 1

5 Khái quát hóa lên abstract vector spaces

- Inner product tổng quát là 1 hàm <.,.>: V xV -> R thỏa 3 tính chất trong dot product
- Trong $R^n \ni$ a,b và symmetric, positive-definite $\sum \in R^{nxn}$:

  $< a, b >_{\sum} = a^T \sum b$