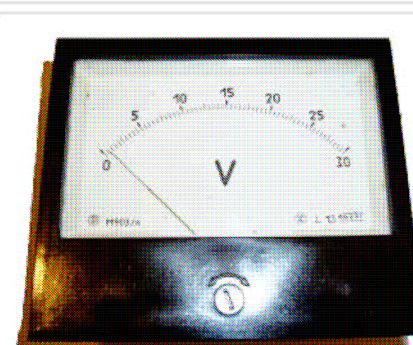
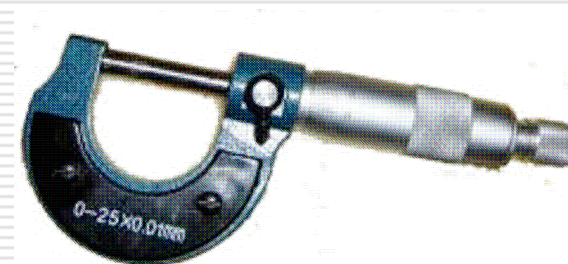
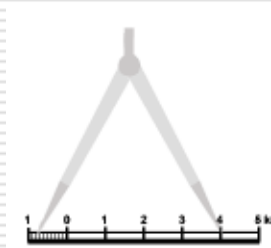


Opracowanie danych pomiarowych

dla studentów realizujących program
Pracowni Fizycznej

Pomiar

- ❑ Działanie mające na celu wyznaczenie **wielkości mierzonej**. Do pomiarów stosuje się **przyrządy pomiarowe** – proste lub złożone. Przyrządy nie są idealne – mają określoną **dokładność**
- ❑ W celu **weryfikacji pomiarów** stosuje się **powtórzenia** – czyli **serie pomiarowe**



Nazewnictwo

□ Dokładność

dotyczy urządzenia pomiarowego, mówi o jego precyzji, oznaczana jako Δx

□ Błąd pomiarowy

to różnica między wartością rzeczywistą a wartością zmierzoną, oznaczany jako Δx

□ Niepewność

to statystyczne oszacowanie błędu, oznaczane jako $u(x) = \sqrt{u_A^2(x) + u_B^2(x)}$, gdzie

- $u_A(x)$ - **niepewność statystyczna (typu A)**
wynikająca ze statystycznej analizy serii pomiarów (obliczanie średnich, regresji itd.)
 - $u_B(x)$ - **niepewność pomiarowa (typu B)**
wynikająca z informacji o pojedynczym pomiarze (dokładności przyrządów pomiarowych i ograniczeń wynikających z procedury pomiaru)
-

Błędy pomiarowe

Pomiar pojedynczy:

W wyniku pojedynczego bezpośredniego pomiaru **jednej wielkości fizycznej**, otrzymuje się wynik zmierzony x

Błąd pomiaru = |wartość rzeczywista – wartość zmierzona|

$$\Delta x = |x_0 - x|$$

Błędy pomiarowe

- ☐ Błędy przypadkowe
- ☐ Błędy systematyczne
- ☐ Błędy grube

Seria pomiarowa:

- ☐ w wyniku **wielokrotnego** pomiaru **jednej wielkości fizycznej**, przy pomocy **tego samego narzędzia** otrzymuje się n – pomiarów.
 - ☐ każdy z pomiarów jest obarczony własnym błędem $\Delta x_i = |x_0 - x_i|$,
gdzie x_i oznacza pomiar o numerze $i = 1..n$.
 - ☐ każdy z pomiarów wykonywany jest z **dokładnością wynikającą z użytego narzędzia pomiarowego**
- W serii pomiarów** występują oprócz błędów pojedynczego pomiaru:
- ☐ błędy przypadkowe
 - ☐ błędy systematyczne
 - ☐ błędy grube
-

Błędy pomiarowe

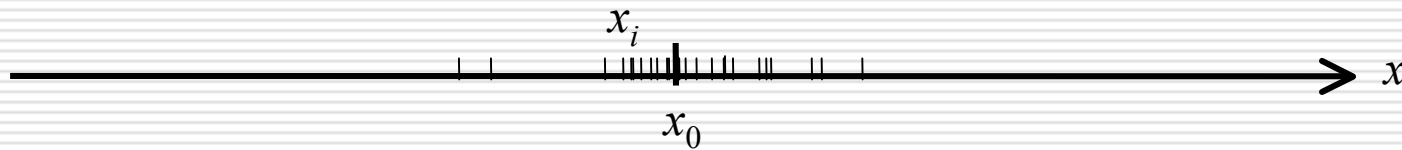
☐ Błędy przypadkowe

☐ Błędy systematyczne

☐ Błędy grube

Seria pomiarowa:

- ☐ Błędy przypadkowe – rozrzut wyników pomiaru wokół wartości rzeczywistej x_0

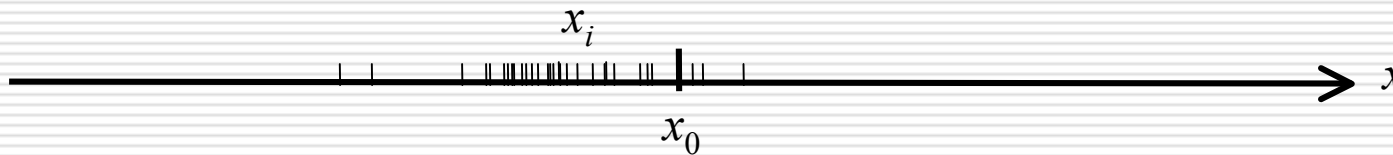


Błędy pomiarowe

- ☐ Błędy przypadkowe
- ☐ Błędy systematyczne
- ☐ Błędy grube

Seria pomiarowa:

- ☐ Błędy systematyczne – rozrzut wyników pomiaru przesunięty względem wartości rzeczywistej x_0



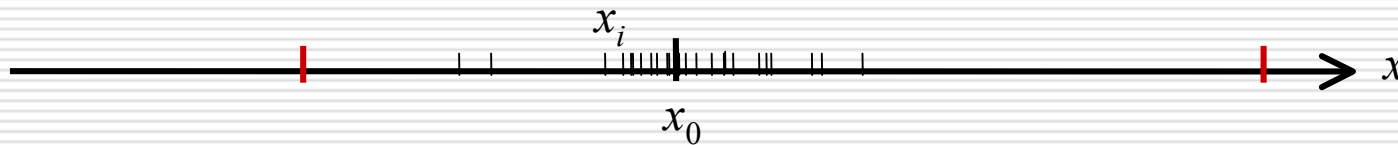
Zwykle wynikają z jakości używanego przyrządu (np. błąd zera skali), czasem z błędu wykonania pomiaru.

Błędy pomiarowe

- ☐ Błędy przypadkowe
- ☐ Błędy systematyczne
- ☐ Błędy grube

Seria pomiarowa:

- ☐ Błędy grube – o takim błędzie mówi się, gdy różnica między wynikiem pomiaru i wartością rzeczywistą x_0 jest drastycznie duża – takie pomiary się odrzuca i nie analizuje dalej

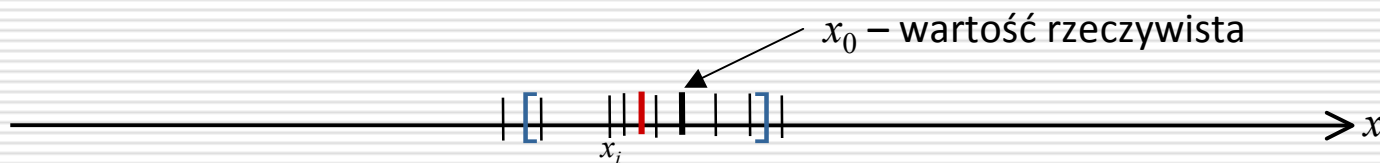


Zwykle wynikają z nieumiejętności wykonania pomiaru, pomyłek, trudności obiektywnych

Niepewność statystyczna serii pomiarowej $u_A(x)$

Seria pomiarowa:

- ❑ w wyniku **wielokrotnego** pomiaru **jednej wielkości fizycznej**, przy pomocy **tego samego narzędzia** otrzymuje się $n > 6$ pomiarów.
- ❑ każdy z pomiarów jest obarczony własnym błędem $\Delta x_i = |x_0 - x_i|$,
gdzie x_i oznacza pomiar o numerze $i = 1..n$
- ❑ każdy z pomiarów wykonywany jest z niepewnością wynikającą z użytego narzędzia pomiarowego $u_B(x)$
- ❑ wynikiem pomiaru jest **średnia arytmetyczna** $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
- ❑ niepewnością typu A jest
- **odchylenie standardowe wartości średniej** $u_A(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$



Niepewność statystyczna serii pomiarowej $u_A(x)$

10 - krotny pomiar ($n=10$)
współczynnika lepkości powietrza
dał następujące wyniki:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

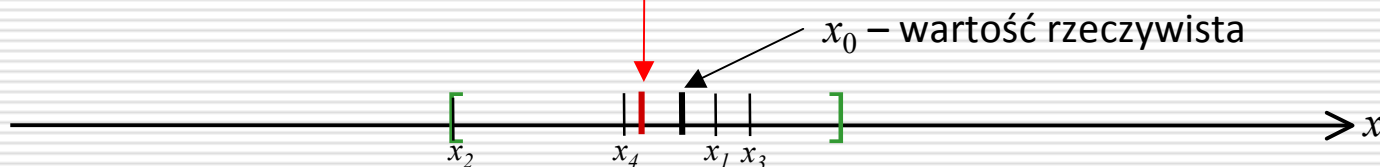
$$u_A(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

i	$x_i, \text{kg/m}\cdot\text{s}$
1	2.055E-05
2	2.000E-05
3	1.988E-05
4	2.055E-05
5	2.000E-05
6	1.952E-05
7	2.032E-05
8	1.953E-05
9	1.982E-05
10	2.020E-05
$n=10$	2.004E-05
wartość średnia	2.004E-05
od. std. średniej	1.16861E-07

Niepewność statystyczna serii pomiarowej $u_A(x)$

Krótką seria pomiarowa:

- ❑ wykonywana w celu sprawdzenia powtarzalności pomiarów
- ❑ każdy z pomiarów jest obarczony własnym błędem $\Delta x_i = |x_0 - x_i|$,
gdzie x_i oznacza pomiar o numerze $i = 1..n$
- ❑ każdy z pomiarów wykonywany jest z niepewnością wynikającą
z użytego narzędzia pomiarowego $u_B(x)$
- ❑ wynikiem pomiaru jest **średnia arytmetyczna** $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
- ❑ niepewnością typu A jest największy z wszystkich w serii błąd pomiarowy
– **błąd maksymalny serii** $u_A(x) = \max |x_i - \bar{x}|$



Niepewność statystyczna serii pomiarowej $u_A(x)$

Seria pomiarowa:

- ❑ w wyniku **wielokrotnego** pomiaru **jednej wielkości fizycznej**, z **różną dokładnością**, otrzymuje się n pomiarów
- ❑ każdy z pomiarów został wykonany z niepewnością pomiarową $u_B(x_i)$, gdzie x_i oznacza pomiar o numerze $i = 1..n$

- ❑ rezultatem pomiaru jest **średnia ważona**

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^n x_i w_i}{\sum_{i=1}^n w_i},$$

- ❑ wielkość $w_i = \frac{a}{\Delta x_i^2}$ jest **wagą** pomiaru, określa jego „ważność” w serii

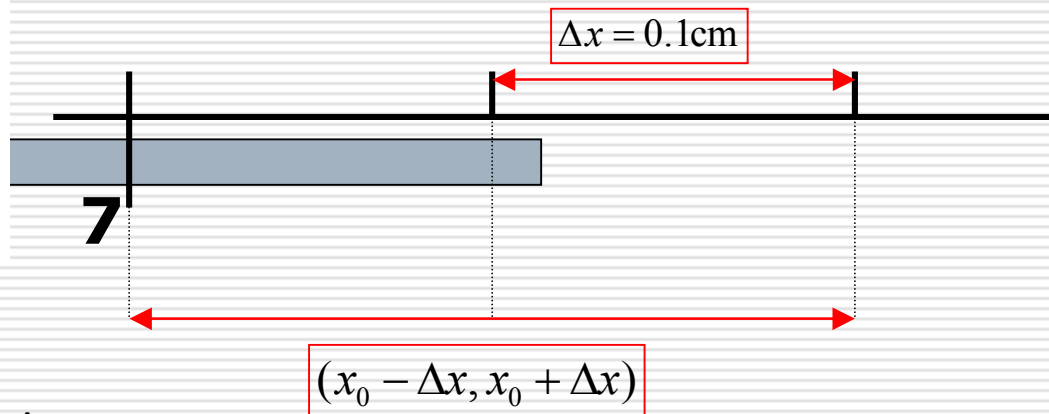
- ❑ niepewnością typu A jest
- **odchylenie standardowe średniej ważonej**

$$u_A(x) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2}}$$

Dokładność przyrządów pomiarowych i niepewność pomiarowa $u_B(x)$

□ Przyrządy z podziałką

DOKŁADNOŚĆ PRZYRZĄDU czyli **maksymalną niepewność pomiaru** przyrządem z podziałką określa **najmniejsza działka**



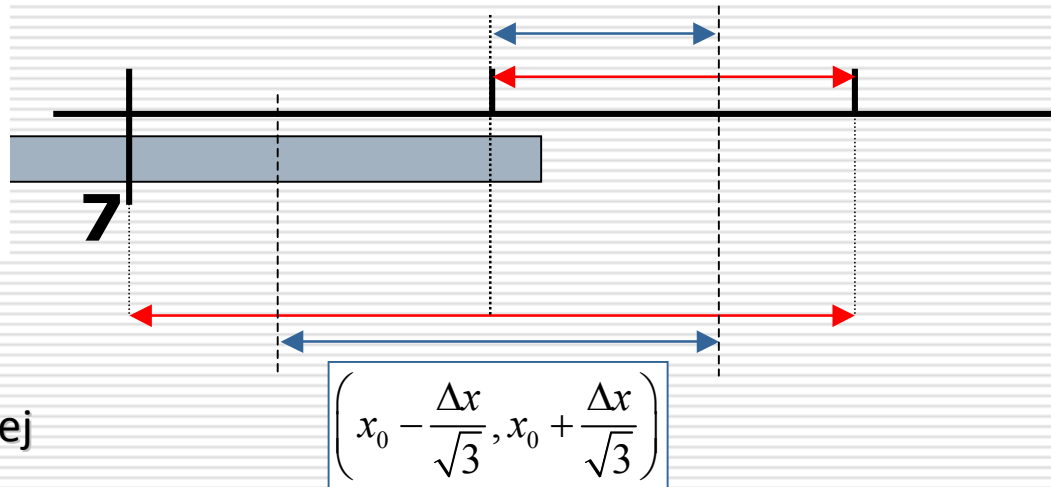
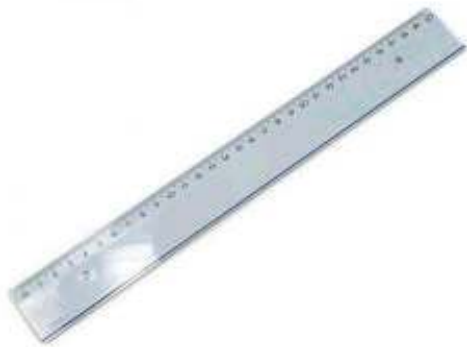
Przedział maksymalnej
niepewności pomiarowej

Dokładność przyrządów pomiarowych i niepewność pomiarowa $u_B(x)$

□ Przyrządy z podziałką

NIEPEWNOŚĆ STANDARDOWĄ czyli **przeciętną niepewność pomiaru**

przyrządem z podziałką określa $u_B(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}}$



Przedział standardowej
niepewności pomiarowej

Dokładność przyrządów pomiarowych i niepewność pomiarowa $u_B(x)$

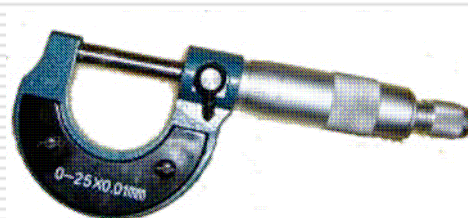
□ Przyrządy z podziałką – przykłady

Linijka



Dokładność przyrządu	$\Delta x = 0.1 \text{ cm}$
Niepewność standardowa	$u_B(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}} = \frac{0.1}{\sqrt{3}} = 0.058 \text{ cm}$

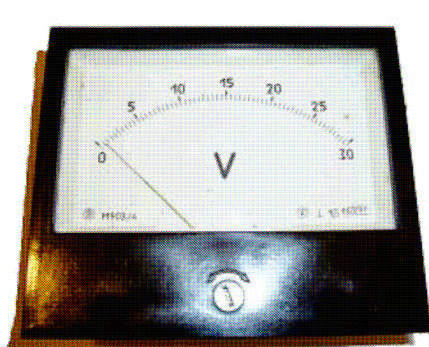
Śruba mikrometryczna



Dokładność przyrządu	$\Delta x = 10 \mu\text{m}$
Niepewność standardowa	$u_B(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.58 \mu\text{m}$

Dokładność przyrządów pomiarowych i niepewność pomiarowa $u_B(x)$

□ Analogowe mierniki elektryczne



Dokładność przyrządu	$\Delta x = \frac{(\textit{klasa miernika}) \cdot (\textit{zakres pomiarowy})}{100}$
Niepewność standardowa	$u_B(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}}$

Dokładność przyrządów pomiarowych i niepewność standardowa pomiaru

□ Analogowe mierniki elektryczne



Dokładność przyrządu	$\Delta x = \frac{0.5 \cdot 30}{100} = 0.15 \text{ V}$
Niepewność standardowa	$u_B(x) = \frac{15}{\sqrt{3}} = 0.087 \text{ V}$

Dokładność przyrządów pomiarowych i niepewność standardowa pomiaru

□ Cyfrowe mierniki elektryczne



Wskazanie: 599.9 mV

Dane podawane przez producenta:

C_1 – oznacza procent wskazania

C_2 – liczba naturalna

} z instrukcji

waga cyfry znaczącej – oznacza, na którym miejscu dziesiętnym jest ostatnia cyfra

Dokładność przyrządu	$\Delta x = C_1 \frac{\text{wskazanie}}{100} + C_2 \cdot \text{waga cyfry zn.}$
Niepewność standardowa	$u_B(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}}$

Dokładność przyrządów pomiarowych i niepewność standardowa pomiaru

□ Cyfrowe mierniki elektryczne



Wskazanie: 599 mV

Dane podane przez producenta:

$C_1=0.5$

$C_2=3$

} z instrukcji

waga cyfry znaczącej = 0.1mV

Dokładność przyrządu	$\Delta x = 0.5 \cdot \frac{599.9}{100} + 3 \cdot 0.1 = 3.3 \text{ mV}$
Niepewność standardowa	$u_B(x) = \frac{3.3}{\sqrt{3}} = 1.9 \text{ mV}$

Dokładność przyrządów pomiarowych i niepewność standardowa pomiaru

□ Urządzenia zliczające



Wskazanie: 8946132 zliczeń

Niepewność standardowa	$u_B(x) = \sqrt{N} = \sqrt{8946132} = 2991 \cong 3000$
---------------------------	--

Prawo propagacji (przenoszenia) niepewności

- ❑ wiele wielkości fizycznych **nie da się zmierzyć** pojedynczym przyrządem **bezpośrednio**, bo są skomplikowane

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N),$$

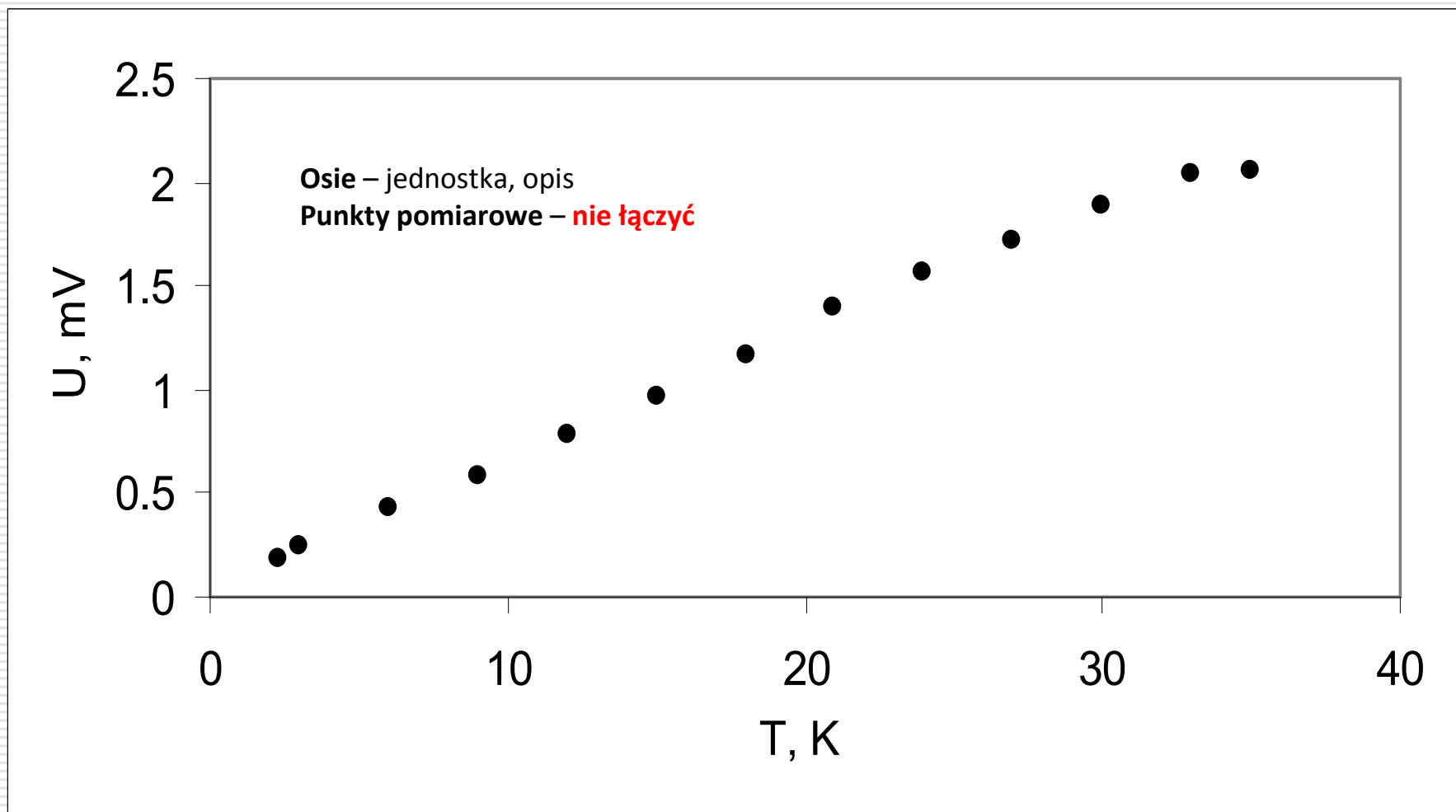
- ❑ stosuje się wówczas pomiary pośrednie,
(na przykład pole powierzchni $P=a \cdot b$ – trzeba zmierzyć a i b)
- ❑ mierzy się wielkości wchodzące w skład wyrażenia na wyznaczaną wielkość: x_1, x_2, \dots, x_N
- ❑ niepewności pomiarów pośrednich przenosi się na wynik,
stosując **prawo przenoszenia niepewności**

$$u(y) = \sqrt{\left[\frac{\partial y}{\partial x_1} u(x_1)\right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial x_2} u(x_2)\right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial x_3} u(x_3)\right]^2 + \dots + \left[\frac{\partial y}{\partial x_N} u(x_N)\right]^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^N \left[\frac{\partial y}{\partial x_k} u(x_k)\right]^2}$$

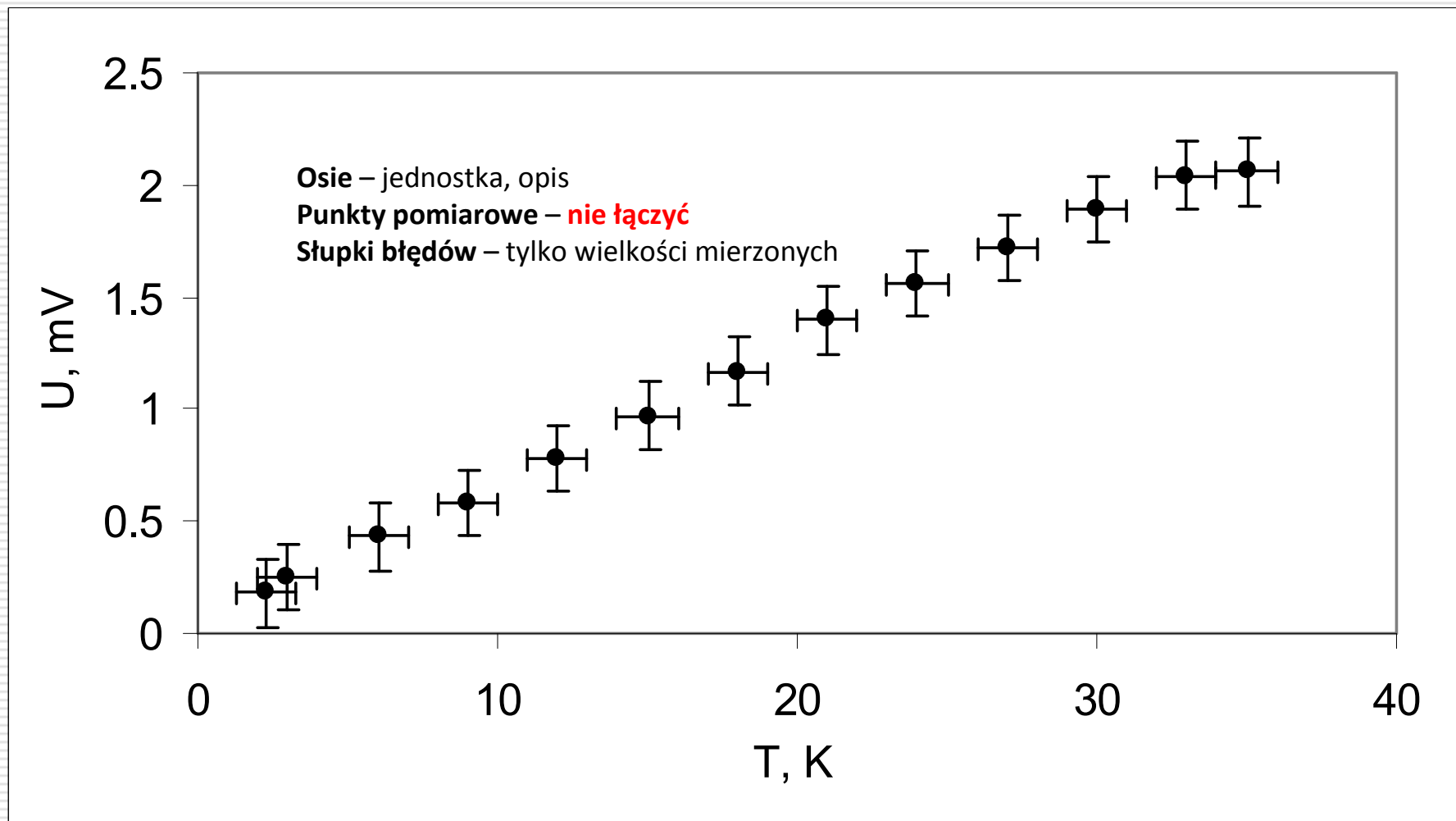
- ❑ na przykład w przypadku pola $P=a \cdot b$

$$u(y) = \sqrt{\sum_{k=1}^2 \left[\frac{\partial P}{\partial x_k} u(x_k)\right]^2} = \sqrt{\left[\frac{\partial P}{\partial a} u(a)\right]^2 + \left[\frac{\partial P}{\partial b} u(b)\right]^2} = \sqrt{[b \cdot u(a)]^2 + [a \cdot u(b)]^2}$$

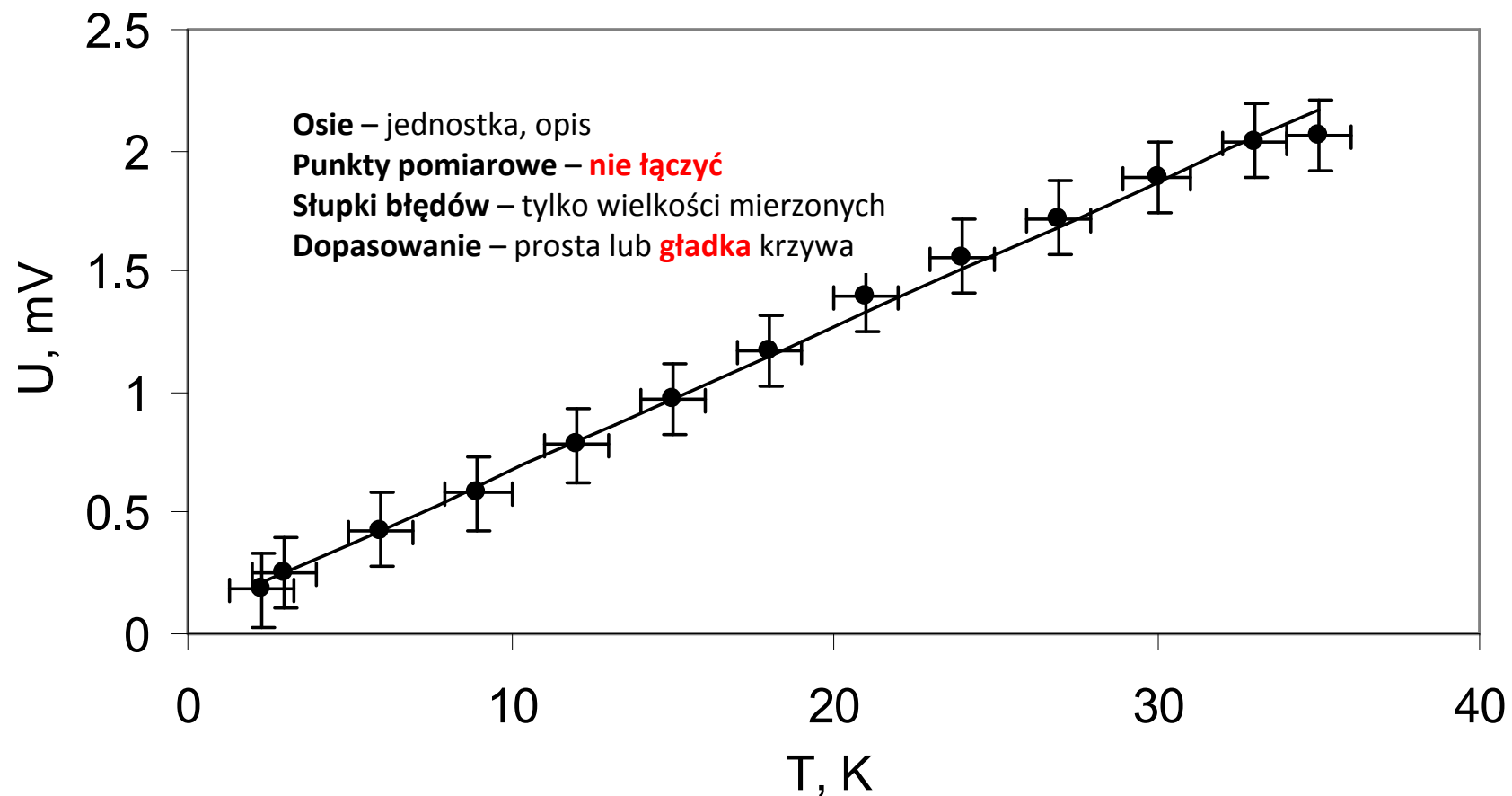
Tworzenie wykresów



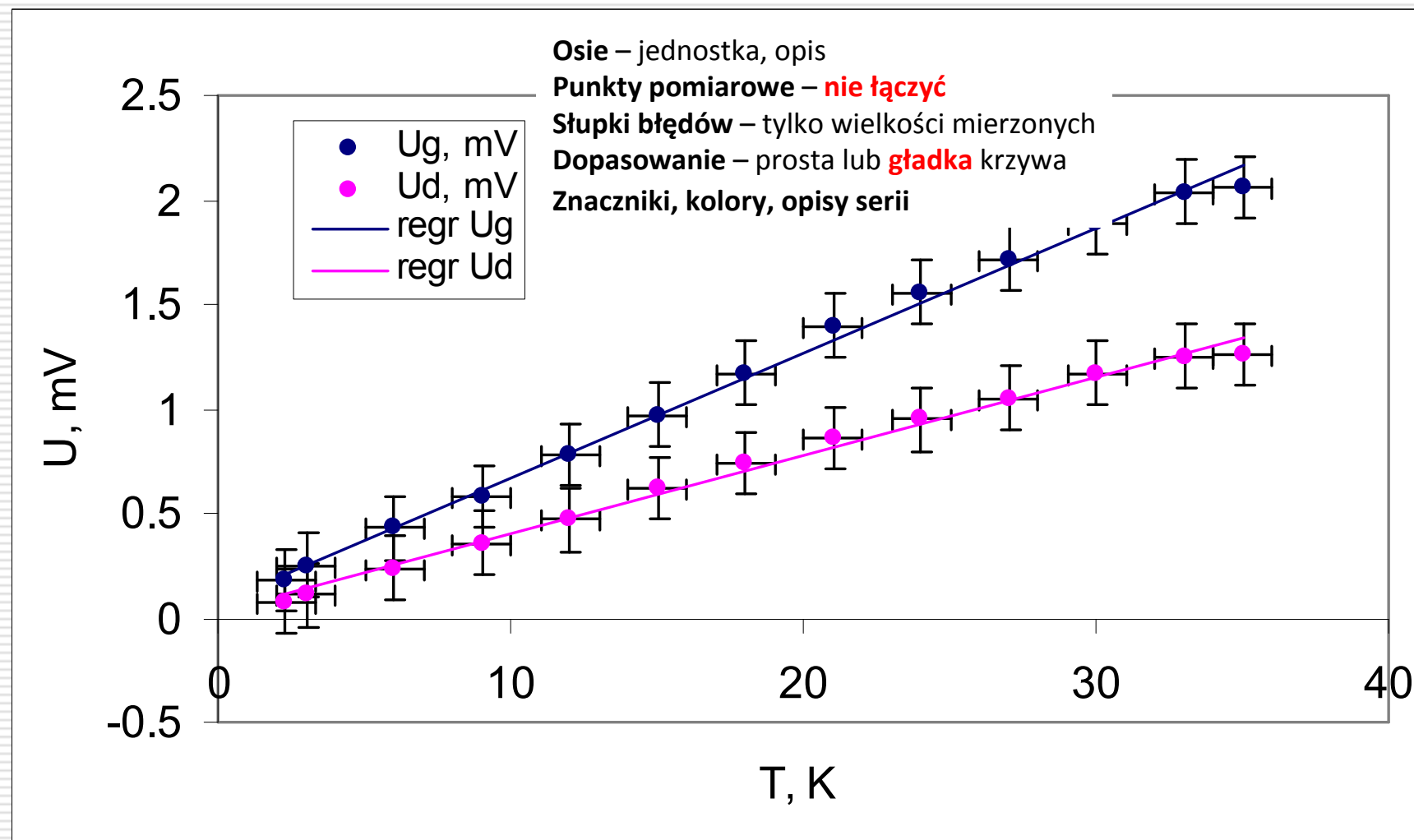
Tworzenie wykresów



Tworzenie wykresów



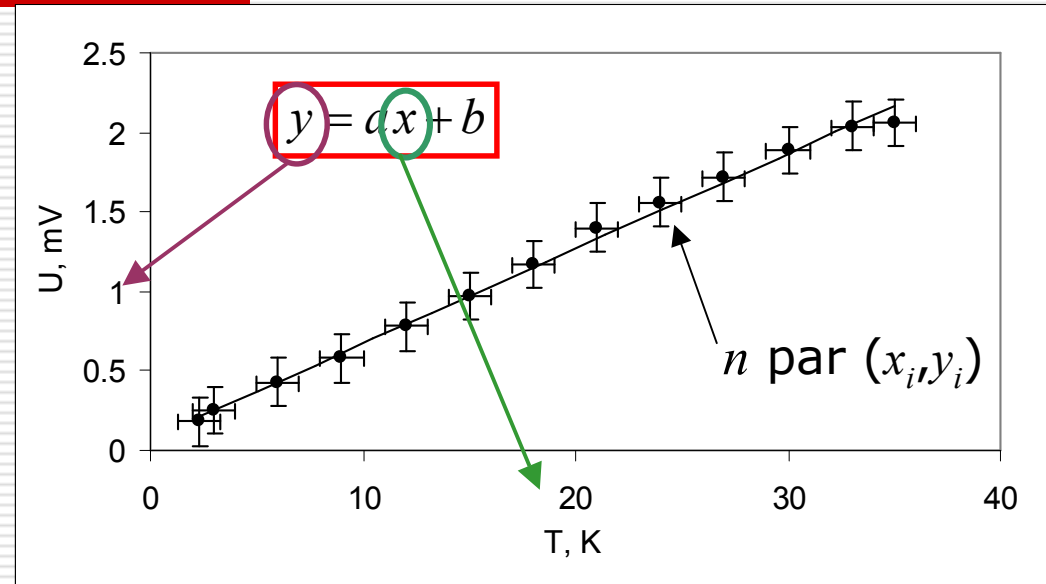
Tworzenie wykresów



Dopasowanie prostej do serii punktów – regresja liniowa

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

$$b = \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$



$$u(a) = \sqrt{\frac{n}{n-1} \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}}$$

$$u(b) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}}$$

Zapis końcowy

Z pomiarów pola otrzymano wartość:

$$x=123.04519\text{m}^2$$

z niepewnością standardową

$$u(x)= 0. 04231\text{m}^2$$

Aby prawidłowo zapisać wynik końcowy pomiaru należy:

1. Zaokrąglić niepewność pomiaru do **dwóch cyfr znaczących**:

$$u(x)=\underline{0.04231}$$

2. Zaokrąglić wartość x do **tylu miejsc po przecinku co niepewność**:

$$x=\underline{123.04519} \text{ (3 miejsca)}$$

ZAPIS KOŃCOWY:

- (i)** Pole x jest równe 123.045 m^2 z niepewnością 0.042 m^2
 - (ii)** $x=123.045 \text{ m}^2$; $u(x)=0.042 \text{ m}^2$
 - (iii)** $x=123.045(42) \text{ m}^2$
-

Porównanie wyników z inną wartością (w szczególności z wartością tablicową)

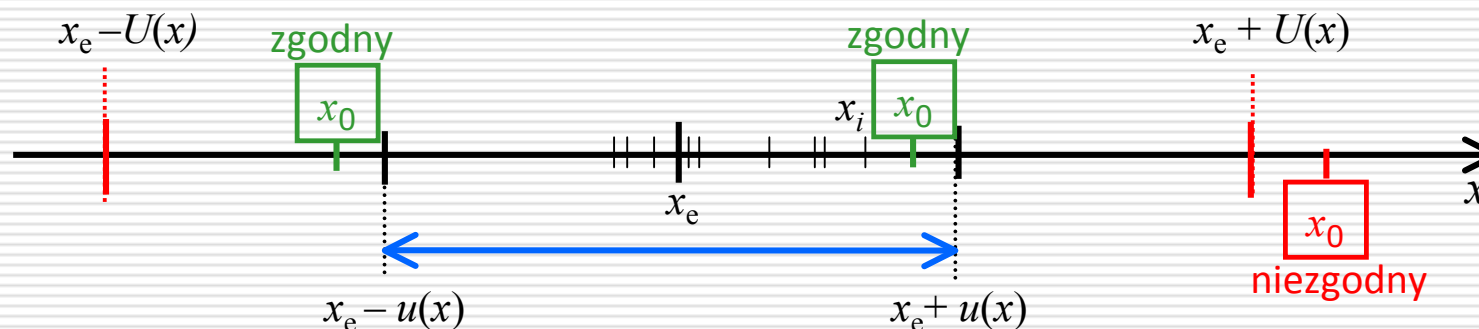
Aby porównać wynik eksperymentu x_e z wartością tablicową x_0 należy:

- obliczyć niepewność rozszerzoną dla danego eksperymentu

$$U(x) = k \cdot u(x), \quad k=2 \text{ (norma)}$$

- obliczyć wartość $|x_0 - x_e|$
- wartość otrzymana x_e jest zgodna z wartością tablicową x_0 jeśli spełniona jest zależność

$$x_e \in [x_0 - U(x), x_0 + U(x)] \Leftrightarrow |x_0 - x_e| < U(x)$$



Literatura fachowa

- R. Respondowski „Laboratorium z fizyki”, wyd. Pol. Śl.
 - H. Szydłowski „Niepewności w pomiarach”, UAM, Poznań 2001
 - M. Nowak „Przewodnik do ćwiczeń laboratoryjnych z fizyki”, wyd. Pol. Śl.
-

Przydatne strony internetowe

- ❑ <http://fizyka.polsl.gliwice.pl/dydaktyka/lab>
 - ❑ <http://www.ftj.agh.edu.pl/zdf/danepom.pdf>
 - ❑ <http://www.ftj.agh.edu.pl/zdf/przyrzady.pdf>
 - ❑ <http://www.if.pw.edu.pl/PUK/owp/OWP.html>
 - ❑ www.if.pwr.wroc.pl/dydaktyka/LPF/index.html
 - ❑ <http://labor.ps.pl/e/er1.html>
-