

基于广义息票剥离法的国债收益率曲线的估计

杨宝臣, 李 彪

(天津大学管理学院, 天津 300072)

摘 要:在一般息票剥离法(bootstrap method)的基础上进行了扩展:采用三次样条插值方法,可以对任意的国债报价数据进行即期收益率曲线估计。同时对插值方程和收益率曲线节点的非线性联立方程进行求解。为分析央行下调利率对我国国债收益率曲线的影响,选取2002年1月21日和2002年3月21日上海证券交易所国债当日收盘价,根据扩展的息票剥离法分别估计出此两日国债收益率曲线,并进行相应的比较分析。

关键词:广义息票剥离法;收益率曲线;样条插值

中图分类号:F830 **文献标识码:**A

1 引言

利率期限结构研究是固定收益以及金融工程领域的一个十分重要的基础性研究工作。而利率期限结构的几何表现形式即为收益率曲线。国外对收益率曲线的研究已相当深入,主要分为两大类模型:均衡模型和经验模型。前者是由 Vasicek^[9], Dothan^[4], Brennan 和 Schwartz^[1], Cox et. al.^[3]等先对某些变量进行假设,如假设短期无风险利率服从一个随机过程,然后再利用套利定价理论得到整个利率期限结构。因此,这种方法得到的利率期限结构只能是有效市场无套利条件下的理论探讨,很难用来拟合实际观察到的债券价格和收益率数据。McCulloch^[5], Carleton 和 Cooper^[2], Schaefer^[7], Vasicek 和 Fong^[9], Nelson 和 Siegel^[6]提出的经验模型,则对观测到的国债息票价格采用曲线拟合方法来估计即期收益率曲线。经验模型可以刻画出许多现实中的利率曲线形状,用于利率或由要求权的定价,而且其目的就是得到一个能够较好拟合观测数据的、平滑连续的利率期限结构函数。国内在这个领域的研究则相对落后,还处在从政策面的定性分析向定量分析的过渡阶段。文献[10]和[11]分别利用几个时点上国债收益率数据与到期期限直接连线得到了收益率曲线,估计方法相对粗糙。文献[12]

分别利用息票剥离法和样条估计方法对我国的利率期限结构进行了静态估计分析,但却没有将这两种方法进行有效结合。

在存在零息票债券的市场上,可以通过直接求出零息票债券的到期收益率来估计,但由于我国债券市场建立时间较短,国债品种较少,期限结构不合理,上海证券交易所的现有国债几乎都是息票债券,因此,不能直接求到期收益率来估计收益率曲线。如果拥有足够多的无违约风险的国债交易数据,就可以利用息票剥离法来推导出收益率曲线,但标准的息票剥离法只能解决债券之间期限间隔是完美匹配的,如6个月期限、12个月期限、18个月期限债券等等。为了解决这个问题,本文对标准的息票剥离法进行了扩展,扩展的息票剥离法可以对债券的到期期限之间的间隔没有特殊的限制条件,并利用扩展的息票剥离法以上海证券交易所的国债交易价格为样本进行了实证分析。

2 息票剥离法及其扩展

所谓息票剥离法,就是将息票从债券中进行剥离并在此基础上估计无息票债券利率水平的一种方法,例如,一个三年期半年付息一次的息票债券可以认为是六个纯贴现债券。这就意味着一个债券的价值可以看作是以到期收益率折现的未来现金流的现值,也可以认为是各个纯贴现债券的折现价值之和。应用息票剥离法通常会遇到两个问题:债券非流通性和缺失数据点。前者很容易导致所估计出的收益率曲线是不合理的波浪形状,解决办法是可采用平均收益率数据来代替原始收益率数据,如可以利用

收稿日期:2004-05-11;修订日期:2004-09-10

作者简介:杨宝臣(1966-),男(汉族),河北唐山人,天津大学管理学院教授,管理学博士,金融学博士后,研究方向:金融计量学、金融工程与金融风险管理、固定收益管理。

三年期债券临近区间内的所有债券的平均收益率作为三年期债券的理论收益率。至于缺失数据点问题,可对插值点施加某些限制条件加以解决。传统的息票剥离法通常是求解非线性联立方程得到不同期限的收益率数据,比如假定有四种债券,其有关数据如表 1。

表 1

债券种类	到期期限(年)	年利息支付(元)	债券价格(元)
1	0.5	0	92
2	1	4	94
3	1.5	8	96.8
4	2	12	101

以 r_1 表示到期期限为 t 的债券的收益率,则通过求解下面的非线性联立方程

$$\begin{cases} 92 = 100e^{-r_{0.5} \times 0.5} \\ 94 = 2e^{-r_{0.5} \times 0.5} + 102e^{-r_{0.5} \times 1.0} \\ 96.8 = 4e^{-r_{0.5} \times 0.5} + 4e^{-r_{0.5} \times 1.0} + 104e^{-r_{0.5} \times 1.5} \\ 101 = 6e^{-r_{0.5} \times 0.5} + 6e^{-r_{0.5} \times 1.0} + 6e^{-r_{0.5} \times 1.5} + 106e^{-r_{0.5} \times 2.0} \end{cases} \quad (1)$$

即可得到各个期限的债券收益率。这种方法即是传统意义上的息票剥离法,有四个方程,存在四个未知收益率,可以求解。但若是加入一个 2.75 年期限债券,且每季度支付一次利息,则传统的息票剥离法就不再适用了。为此,本文对其进扩展,则可以很容易的解决这个问题。

假如有 K 个债券的报价数据,第 i 个债券 B_i 可以以向量形式表示为: $B_i = [n_i, C_i, t_i, P_i]$, $i = 1, \dots, K$, 其中, n_i 是该债券的息票支付次数, C_i 是该债券的每次息票支付额, $t_i = [t_{i,1}, \dots, t_{i,n_i}]$ 为该债券的息票支付时间向量,且假定 $t_{1,n_1} < t_{2,n_2} < \dots < t_{K,n_K}$, P_i 是该债券的报价(净价)。按照债券定价原理,得到:

$$P_i + A_i = \sum_{j=1}^{n_i} C_i \exp(-r_j \cdot t_{i,j}) + F_i \exp(-r_{n_i} \cdot t_{i,n_i}), i = 1, \dots, K \quad (2)$$

其中, A_i 为该债券自上次付息日至当前日的应计利息, F_i 为该债券的面值, r_j 表示期限 t_j 的债券的即期收益率。

如果未知量 r_j 个数等于 K ,则由传统的息票剥离法即可求解。但是,若未知量 r_j 个数大于 K ,则必须引入附加方程来求解该非线性方程组。对每一个债券 i ,定义一个集合 $T_i = [t_{i,1}, \dots, t_{i,n_i}]$,因此并集 $\Gamma = \bigcup_{i=1}^K T_i = \{t_1, t_2, \dots, t_N\}$ 表示所有债券的息票和本金支付时间点的集合, Γ 的基数 $|\Gamma| = N$

表示不同时间点的的所有债券息票和本金支付的次数,以 $t_1 = \min\{t_{1,1}, t_{2,1}, \dots, t_{K,1}\}$ 表示 Γ 中最小的元素, $t_N = t_{k,n_k}$ 表示 Γ 中最大的元素,则债券 i 的支付时间向量中的任何元素 $t_{i,j}$ 都包含在集合 $\Gamma = \{t_1, t_2, \dots, t_N\}$ 中。同时以集合 $B = \{t_1, n_1, t_2, n_2, \dots, t_K, n_K\}$ 表示 K 个债券的到期期限的集合,且其基数 $|B| = K$,以集合 $R_b = \{r_1, r_2, \dots, r_K\}$ 表示 K 个债券的到期收益率,以集合 $R_B = \{r_1, r_2, \dots, r_N\}$ 表示 K 个债券的所有期限时间点的收益率。对每一个到期期限时间点,都有一个如(1)中的非线性方程。对于余下的 $L = N - K$ 个期限时间点可以通过采用三次样条插值引入 $L = N - K$ 个附加方程,从而可求解含 N 个未知量的 N 个非线性方程和插值方程的方程组以得到相应的收益率值。

样条曲线是光滑且有连续曲率的分段三次函数,也称为三次样条函数。由于三次样条插值具有一致收敛、充分光滑和插值条件简单的特点,故本文采用三次样条函数来拟合收益率曲线,如下:

$$CS(t) = \begin{cases} RA_1 T, t \leq t_{2,n_2} \\ RA_2 T, t_{2,n_2} \leq t \leq t_{3,n_3} \\ \vdots \\ RA_{K-1} T, t_{K-1,n_{K-1}} \leq t \leq t_{K,n_K} \end{cases} \quad (3)$$

$CS(t)$ 函数可给出任意时间 t 的三次样条函数插值。

其中 $R = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_K]$ 表示 K 个债券到期期限的收益率值;

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{i1,1} & a_{i1,2} & a_{i1,3} & a_{i1,4} \\ a_{i2,1} & a_{i2,2} & a_{i2,3} & a_{i2,4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{ik,1} & a_{ik,2} & a_{ik,3} & a_{ik,4} \end{bmatrix},$$

$$i = 1, 2, \dots, K-1; \quad T = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}$$

注意到利用三次样条函数插值可以将收益率曲线上的任一点表示成 K 个债券到期期限收益率值的线性组合。故将(2)和(3)式联合求解,则即可解决传统的息票剥离法的缺陷,又同时拟合出了债券的收益率曲线。

3 实证分析

2002 年 2 月 21 日中国人民银行第八次宣布下

调存贷款和再贴现利率,为分析央行下调利率对我国国债收益率曲线的影响,本文分别选取调息前后各一个月即2002年1月21日和2002年3月21日上海证券交易所国债当日收盘价作为样本,根据扩

展的息票剥离法估计我国的国债收益率曲线,并进行相应的比较分析。2002年1月21日和2002年3月21日上海证券交易所的国债报价分别如表1和表2所示。

表1 2002年1月21日上海证券交易所的国债报价

国债代码	到期日	到期时间	债券本金	年息票率	债券市价	每年计息次数
000896	2003-11-01	1.78	100	8.56%	110.48	1
000696	2006-06-14	4.40	100	11.83%	136.79	1
009704	2007-09-05	5.62	100	9.78%	135.32	1
009905	2007-08-20	5.58	100	3.28%	102.36	1
009908	2009-09-23	7.67	100	3.3%	102.56	1
010004	2010-05-23	8.34	100	2.6%	99.51	1
010010	2007-11-14	5.81	100	2.36	99.08	1
010103	2008-04-24	6.26	100	3.27%	102.35	1
010107	2021-07-31	19.53	100	4.26%	108.51	2
010110	2011-09-25	9.68	100	2.95%	100.3	1
010112	2011-10-30	9.78	100	3.05%	101.2	1
010115	2008-12-18	6.91	100	3%	100.64	1

表2 2002年3月21日上海证券交易所的国债报价

国债代码	到期日	到期时间	债券本金	年息票率	债券市价	每年计息次数
000896	2003-11-01	1.61	100	8.56%	109.94	1
000696	2006-06-14	4.23	100	11.83%	13.81	1
009704	2007-09-05	5.45	100	9.78%	136	1
009905	2007-08-20	5.41	100	3.28%	103.53	1
009908	2009-09-23	7.50	100	3.3%	103.07	1
010004	2010-05-23	8.17	100	2.6%	103.08	1
010010	2007-11-14	5.64	100	2.36%	101.32	1
010103	2008-04-24	6.09	100	3.27%	102.99	1
010107	2021-07-31	19.36	100	4.26%	108.32	2
010110	2011-09-25	9.51	100	2.95%	100.82	1
010112	2011-10-30	9.61	100	3.05%	101.39	1
010115	2008-12-18	6.74	100	3%	101.41	1

资料来源:上海证券交易所 <http://www.sse.com.cn>

根据扩展的息票剥离法,2002年1月21日12个债券的到期期限的集合 $B = \{1.78, 4.40, 5.58, 5.62, 5.81, 6.26, 6.91, 7.67, 8.34, 9.68, 9.78, 19.53\}$, 其基数 $|B| = 12$, 12个债券息票和本金支付不同时间点的集合 $T = \{0.03, 0.26, 0.34, 0.4, 0.53, 0.58, 0.62, 0.67, 0.68, 0.78, 0.81, 0.91, 1.03, 1.26, 1.34, 1.4, 1.53, 1.58, 1.62, 1.67, 1.68, 1.78, 1.81, 1.91, 2.03, 2.34, 2.4, 2.53, 2.58, 2.62, 2.67, 2.68, 2.78, 2.81, 2.91, 3.03, 3.26, 3.4, 3.53, 3.58, 3.62, 3.67, 3.68, 3.78, 3.81, 3.91, 4.03, 4.26, 4.34, 4.40, 4.53, 4.58, 4.62, 4.67, 4.68, 4.78, 4.81, 4.91, 5.03, 5.26, 5.34, 5.53, 5.58, 5.62, 5.67, 5.68, 5.78, 5.81, 5.91, 6.03, 6.26, 6.34, 6.53, 6.67, 6.68, 6.78, 6.91, 7.03, 7.34, 7.53, 7.67, 7.68, 7.78, 8.03, 8.34, 8.53, 8.68, 8.78, 9.03, 9.53, 9.68, 9.78, 10.03, 10.53, 11.03,$

$11.53, 12.03, 12.53, 13.03, 13.53, 14.03, 14.53, 15.03, 15.53, 16.03, 16.53, 17.03, 17.53, 18.03, 18.53, 19.03, 19.53\}$, 其基数 $|T| = 113$ 。为解决上文提到的债券的非流通性问题和减少运算量,采用如下数据处理:在息票和本金支付不同时间点 T 的集合中,时间间隔在0.1年之内的用一个时间点来代替,但保留债券到期期限时间点,而且从小到大进行处理;在求解方程组时,被替换掉的息票支付期限时间点用与其距离最近的时间点逆替换代入非线性方程组进行计算。因此,处理后的集合 $T' = \{0.03, 0.26, 0.4, 0.53, 0.67, 0.78, 0.91, 1.03, 1.26, 1.4, 1.53, 1.67, 1.78, 1.91, 2.03, 2.34, 2.53, 2.67, 2.78, 2.91, 3.03, 3.26, 3.4, 3.53, 3.67, 3.78, 3.91, 4.03, 4.26, 4.40, 4.53, 4.67, 4.78, 4.91, 5.03, 5.26, 5.53, 5.58, 5.62, 5.78, 5.81, 5.91, 6.03, 6.26, 6.53, 6.67, 6.78, 6.91, 7.03, 7.34, 7.53,$

7.67, 7.78, 8.03, 8.34, 8.53, 8.68, 8.78, 9.03, 9.53, 9.68, 9.78, 10.03, 10.53, 11.03, 11.53, 12.03, 12.53, 13.03, 13.53, 14.03, 14.53, 15.03, 15.53, 16.03, 16.53, 17.03, 17.53, 18.03, 18.53, 19.03, 19.53, 其基数 $T' = 82$ 。令 $r_b = \{r_1, r_2, \dots, r_{12}\}$ 表示 12 个债券的到期期限时间点的收益率值; $R_B = \{R_1, R_2, \dots, R_{82}\}$ 表示 12 个债券的所有期限时间点的收益率值。因此, 根据 (1) 式就会得到 12 个非线性方程, 对于余下的 $82 - 12 = 70$ 个期限时间点可以通过采用三次样条插值引入 70 个附加方程, 从而可求解含 82 个未知量的 82 个非线性方程和插值方程的方程组得收益率值 $R_B = \{r_1, r_2, \dots, r_{82}\}$ 的解向量。

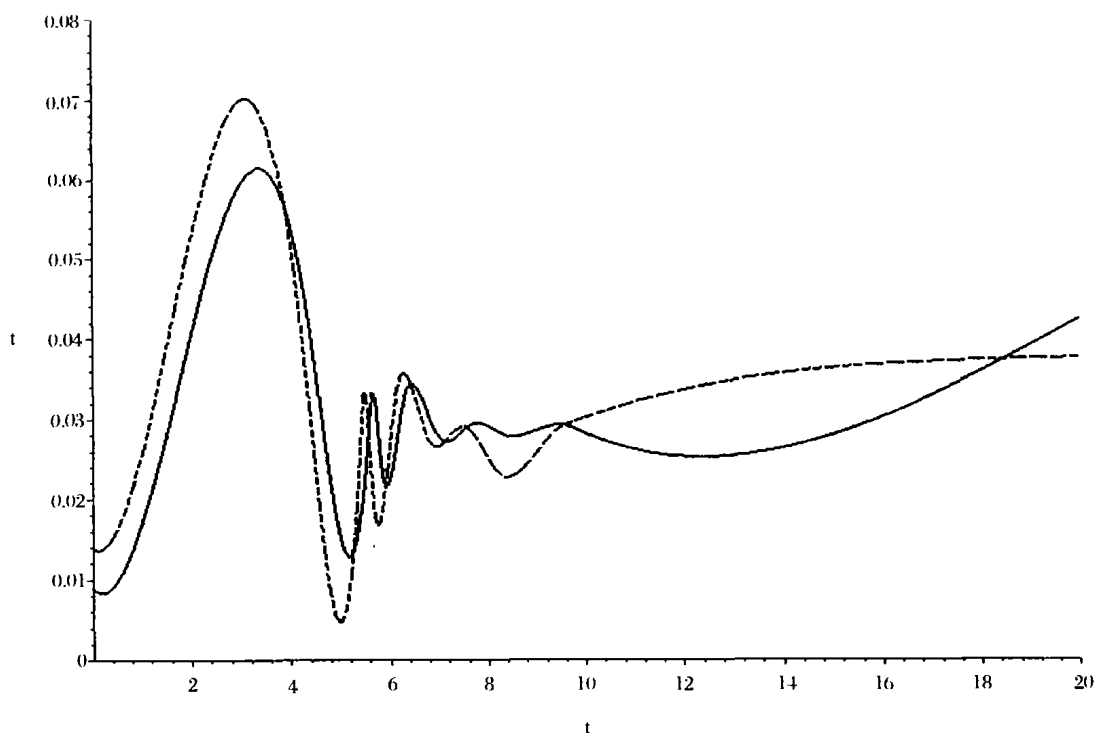
本文采用数学软件 Maple 生成 70 个插值方程以及求解 82 个非线性方程和插值方程的方程组。运算结果如下:

2002 年 1 月 21 日 12 个债券的到期期限时间点的收益率值 $r_b = \{0.0349, 0.0408, 0.0294, 0.0326, 0.0250, 0.0319, 0.0285, 0.0295, 0.0282, 0.0292, 0.0289, 0.0413\}$ 。

同样, 可以根据上述分析方法和计算过程得到 2002 年 3 月 21 日 12 个债券的到期期限时间点的收益率值 $r_b = \{0.0419, 0.0406, 0.0277, 0.0322, 0.0213, 0.0317, 0.0281, 0.0294, 0.0236, 0.0292, 0.0295, 0.0379\}$ 。

根据以上得到的 12 个债券的到期期限时间点的收益率值再进行三次样条插值即可得到收益率值 $R_B = \{r_1, r_2, \dots, r_{82}\}$ 的解向量, 同时利用 Maple 软件可分别估计出 2002 年 1 月 21 日和 2002 年 3 月 21 日上海证券交易所国债收益率曲线, 如图 1。

从图 1 中可以发现, 我国的国债收益率曲线并不表现为明显的向上或向下走势, 而是对于 5 年以内的中短期国债呈现先上升后下降的陡峭抛物线变动, 而对于 5-10 年的中期国债则表现出锯齿状的剧烈波动, 其原因在于我国目前所发行的国债多为中期国债, 债券到期期限也多集中在 4-10 年间, 使得这一期间国债的交投十分活跃, 收益率的变动很频繁。相比较而言, 我国的长期国债则基本随期限延长收益率表现为向上走势。



——2002 年 1 月 21 日国债收益率曲线2002 年 3 月 21 日国债收益率曲线

图 1 2002 年 1 月 21 日和 2002 年 3 月 21 日上海证券交易所国债收益率曲线

对比调息前后的两条国债收益率曲线, 可以发现: 尽管其形状和走势基本趋同, 但是由于受到央行调息的影响, 仍然具有一定的差异。由于市场预期

到央行将要下调利息, 因此投资者纷纷抛售短期国债, 增大对中长期国债的购买, 使得短期国债收益率大幅度上升, 而中长期国债收益率下跌, 表现为图 1

中国债收益率曲线的基本走势。央行下调利息后,国债收益率总体上呈下降态势,表现在图 1 中的调息后的 3-10 年的国债收益率比调息前下降。至于 3 年以下中短期国债和 10 年以上的长期国债由于发行品种不多,发行期限相互之间不匹配,使得用扩展的息票剥离法估计出的国债收益率曲线在这些期间出现了异常变动形状。

4 结论

本文将传统的息票剥离法和样条估计方法有效结合,提出了扩展的息票剥离法,并将其用于对国债收益率曲线的估计,实证分析结果表明该方法计算简便,同时又可以较好的体现复杂的利率期限结构。

由于我国发行的国债多为 3 年以上的中期国债,短期和长期债券的发行品种较少,一年以内的短期国债和零息国债更是从来没有发行过,使得国债收益率曲线在两端出现了异常变动形状。因此我国的国债市场还有待从发行品种、发行期限等各个方面进行完善。

本文利用扩展的息票剥离法估计出的国债收益率曲线还仅仅是对利率期限结构静态的估计和考察,其动态模型的研究及与其相关的利率衍生产品定价则是今后的研究方向。

参考文献:

[1] Brennan, M. J. and Schwartz, E. S. . A continuous time ap-

proach to the pricing of bonds[J]. Journal of Banking and Finance, 1979, 3: 133-155.

[2] Carleton, W. T. and Cooper, I. A. . Estimation and use of the term structure of interest rates[J]. Journal of Finance, 1976, 31: 1067-1083.

[3] Cox, J. C. , Ingersoll, J. E. and Ross, S. A. . A theory of the term structure of interest rates[J]. Econometrica, 1985, 53: 385-407.

[4] Dothan, L. U. . On the term structure of interest rates[J]. Journal of Financial Economics, 1978, 6: 59-69.

[5] McCulloch, J. Huston, J. Measuring the term structure of interest rates, Journal of Business, 1971, 44(1): 19-31.

[6] Nelson and Siegel. Parsimonious modeling of yield curves [J]. Journal of Business, 1987, 6: 473-89.

[7] Schaefer, S. M. . Measuring a tax-specific term structure of interest rates in the market for British Government Securities[J]. Economic Journal, 1982, 91: 415-438.

[8] Vasicek, O. A. . An equilibrium characterization of the term structure[J]. Journal of Financial Economics, 1977, 5: 177-88.

[9] Vasicek, Old Rick A. , and Gifford Fong, H. . Term structure modeling using exponential splines[J]. Journal of Finance, 1982, 38(2): 339-49.

[10] 杨大楷, 杨勇. 关于我国国债收益率曲线研究[J]. 财经研究, 1997, (7): 14-19.

[11] 姚长辉, 梁越军. 我国国债收益率曲线的实证研究[J]. 金融研究, 1998, (8): 12-18.

[12] 郑振龙, 林海. 中国市场利率期限结构的静态估计[J]. 武汉金融, 2003, (3): 33-36.

Estimation on Treasury Bond Yield Curve with Generalized Bootstrap Method

YANG Bao-chen, LI Biao

(School of Management, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: In this paper, a generalized bootstrap method was proposed to estimate the yield curve for any available data sets of bond price with cubic spline interpolation method. In the meanwhile, the paper solved the interpolation equations and the nonlinear equation system in order to obtain the points on the yield curve. In order to investigate the effect on yield curve, while the People's Bank of China decreases the benchmark interest rates, the paper estimated the treasury bond yield curves on January 21 and March 21, 2002 with the price data sets of Shanghai Stock Exchange respectively, and conducted comparison of the two yield curves.

Key words: generalized bootstrap method; yield curve; spline interpolation